Marko Uršič

Logični paradoksi

(skrajšana verzija devetega poglavja iz knjige *Osnove logike*)

Logični paradoks je posebna vrsta logičnega protislovja. Protislovje je sicer nujni, ne pa že tudi zadostni pogoj za nastanek logičnega paradoksa, saj večina »navadnih« protislovij (na primer $p \wedge \neg p$, A = ne-A ipd.) ni paradoksnih. Pri paradoksih ima pomembno vlogo naše *prepričanje* o resničnosti premis in veljavnosti sklepanja, s katerim iz premis pridemo do protislovnega sklepa. Prepričanje pa je vendarle neko *mnenje*, ni še gotova vednost. V splošnem lahko logični paradoks opredelimo:

> *Logični paradoks* je protisloven (ali navidez nesprejemljiv oziroma neresničen) sklep iz premis, za katere menimo, da so resnične, do katerega pridemo z logično izpeljavo, za katero menimo, da je pravilna (veljavna).

Toda po kriteriju logične veljavnosti sklepanja ni možno, da bi bile (vse) premise resnične in sklep neresničen, kaj šele protisloven, tj. *logično* neresničen, zato je v paradoksih očitno nekaj narobe z našimi prepričanji oziroma mnenji glede resničnosti premis in/ali glede veljavnosti sklepanja (bolj splošno, miselnega postopka), s katerim smo prišli do paradoksnega sklepa.

Angleški logik Mark Richard Sainsbury na začetku svoje knjige *Paradoksi* (*Paradoxes*, 1988) opredeli logični paradoks kot “navidezno nesprejemljiv sklep, izpeljan z navidezno sprejemljivim sklepanjem iz navidezno sprejemljivih premis”.

BERTRAND RUSSELL (1872–1970): paradoksi in sámonanašanje

»**Paradoks brivca**«:

Premisa: Brivec brije vse tiste in samo tiste meščane Tombstonea, ki ne brijejo sami(h) sebe.

Vprašanje: Ali brivec brije sam(ega) sebe ali ne?

Sklep: 1. Če ne, potem (ker vse, ki ne...) tudi sebe, torej da.

2. Če da, potem (ker samo tiste, ki ne...) niti sebe, torej ne.

Sklep je *protisloven*, saj je sestavljen iz dveh implikacij (*p* pomeni: 'Brivec brije sam(ega) sebe'):

$$\neg p \supset p \qquad \text{in} \qquad p \supset \neg p \,,$$

ki dasta skupaj: $p \equiv \neg p$.

Russllov paradoks (1901):

(def.) N je množica vseh *normalnih množic*, namreč tistih, ki ne vsebujejo sebe (kot svoj lastni element), drugače rečeno, ki niso »avtopredikabilne«.

To definicijo lahko zapišemo kot ekvivalenco v formalnem jeziku predikatne logike:

(N) $(\forall X)(N(X) \equiv \neg X(X))$

pri čemer, kot smo že rekli, predikat N označuje lastnost neke množice X, namreč: 'X je normalna množica'.

Russllovo vprašanje Fregeju se je glasilo:

> Ali je N, množica vseh normalnih množic, sama normalna ali ni normalna?

Drugače rečeno, ali je N sámonanašajoča se množica, ali je »avtopredikabilna«: $N(N)$ – ali ni?

Vprašanje nas vodi v paradoks, kajti oba teoretično možna odgovora (v dvovrednostni logiki) sta protislovna, kar je očitno, če v (N) substituiramo X/N in po pravilu ($\forall$iz) dobimo *Russllov paradoks*:

(RP) $N(N) \equiv \neg N(N)$

N je normalna množica, če in samo če *N* ni normalna množica.

Russllov paradoks lahko razvežemo (kakor smo prej »paradoks brivca«) v dve implikaciji:

(1) $N(N) \supset \neg N(N)$

(2) $\neg N(N) \supset N(N)$

ki dasta skupaj protislovje:

$$N(N) \equiv \neg N(N) .$$

ALFRED TARSKI (1902-1983) – semantični paradoksi

1935: »Pojem resnice v formaliziranih jezikih«

Če izhajamo iz klasične definicije resničnosti (stavka) kot *adaequatio rei et intellectus* (»izenačenja« oz. ujemanja stvari in razuma, dejanskosti in misli, izraženi v stavku), zapišemo:

(1) Stavek *s* je resničen, čče se ujema z dejanskim stanjem stvari.
(Npr.: Stavek sneži je resničen, če in samo če sneži.)

Toda Tarski pokaže, da (1) vodi v semantični paradoks tipa »lažnivec«. Naj bo *s* naslednji stavek:

(2) *s* : *s* ni resničen stavek.
(Tj., *s* o samem sebi trdi, da ni resničen stavek.)

Sledeč definicijski shemi (1) lahko zapišemo resničnostni pogoj stavka *s* :

(3) Stavek *s* ni resničen stavek je resničen, čče (res velja, da) *s* ni resničen stavek.

Upoštevajoč (2) pa sta *s* in podčrtani del stavka (3) identična, zato lahko v (3) substituiramo *s* ni resničen stavek s *s* in dobimo očitno protislovje:

(4) Stavek *s* je resničen stavek, čče *s* ni resničen stavek.

KURT GÖDEL (1906-1978)

»O formalno neodločljivih stavkih v [Russell-Whiteheadovem delu] *Principia mathematica* in v sorodnih sistemih« (1931)

(D_1) Stavek/formula je znotraj svojega referenčnega sistema odločljiv, če in samo če lahko z nekim končnim postopkom (algoritmom) odločimo, ali ga sistem *verificira ali falsificira* (potrdi ali ovrže).
(“Sistem” je tu mišljen v najširšem pomenu.)

(D_2) Stavek/formula je znotraj svojega referenčnega sistema dokazljiv, če in samo če ga lahko *izpeljemo* iz aksiomov in/ali pravil tega sistema.

Odločljivost je strožja zahteva kot dokazljivost:

- Odločljivost stavka/formule pomeni njegovo /ne/dokazljivost.
- Nedokazljivost stavka/formule implicira njegovo neodločljivost.

G. vprašanje: ali obstajajo stavki/formule, ki so sicer **resnični**, vendar **nedokazljivi** znotraj jezika/sistema, v katerem so formulirani?

Recimo, da najprej mislimo s “sistemom” *naravni jezik*, s stavkom (G) pa stavek, v katerem nastopa tudi njegovo lastno “ime” G :

(G) G ni dokazljiv.
(Tj., G pravi o samem sebi, da ni dokazljiv.)

Toda G je *evidentno* resničen, kajti:

(1) Če G ni dokazljiv, potem je resničen.
(Zaradi resnice kot *adeaequatio*).

(2) Če G je dokazljiv, potem je (tudi) resničen.
(Namreč ob predpostavki »zdravja« sistema, v katerem se dokazuje: v zdravem sistemu ne moremo dokazati neresničnih stavkov.)

Torej obstajajo takšni ***stavki*** (vsaj v naravnem jeziku), ***ki so resnični, niso pa dokazljivi*** (in potemtakem tudi ne odločljivi) – imenujmo jih »Gödlovski stavki«.

Seveda pa v »naravnem jeziku« pojem dokazljivosti ni jasno določen, kajti zanj potrebujemo neki algoritem dokazovanja, ki pa ga je možno natančno opredeliti zgolj v formalnih jezikih (oz. sistemih).

Pravo G. vprašanje: Ali obstaja kak *formalni* jezik, v katerem *načelno* niso vsi stavki/formule (tj. vse PFF) dokazljivi – četudi bi bili med nedokazljivimi stavki takšni, ki so evidentno resnični? Torej:
Ali v formalnih jezikih lahko obstajajo »Gödlovski stavki« $\{G\}$?

Na to vprašanje je Gödel odgovoril pritrdilno: ***v vsakem formalnem jeziku/sistemu, ki je izrazno bogatejši od jezika formalne aritmetike*** (tj. v vsakem jeziku/sistemu, v katerem se dajo izraziti vsaj števila in aritmetične operacije med njimi), obstajajo ***načelno nedokazljivi*** (in *eo ipso* neodločljivi) ***stavki tipa*** $\{G\}$.

Prvi korak k formalnemu dokazu te trditve pa je uvedba t. i. »Gödlove kode«, ki v kombinaciji z »diagonalno metodo« omogoča, da formule »govorijo same o sebi« … (gl. liste 1–3 v dodatnem študijskem gradivu na spletni strani).

… in tako smo spet pri sámo-nanašanju, refleksivnosti, za katero smo ugotovili, da generira paradokse, tudi »Gödlov paradoks« stavkov tipa $\{G\}$, čeprav gre tu za drugačno vrsto paradoksa kot pri Russllu in Tarskem: ne gre za paradoks (ne)resničnosti, ampak za »paradoks« nedokazljivosti resničnosti.

Več o paradoksih gl. tudi: Marko Uršič, *Matrice logosa* (1987), I. in VIII. poglavje.