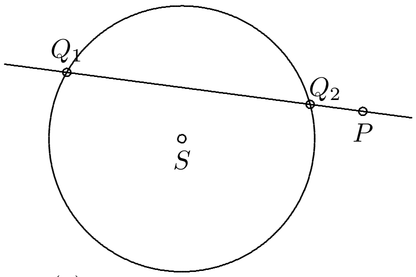
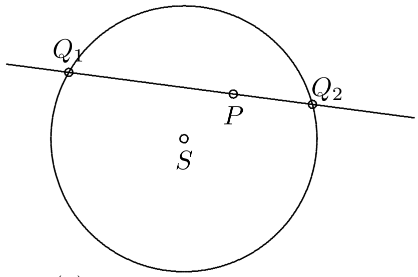
Potenca točke glede na krožnico

Naj bo podana v ravnini krožnica K s središčem S in polmerom r ter točka P. Skozi točko P potegnemo premico, ki seka krožnico K v točkah Q_1 in Q_2.



(1) P je zunaj kroga



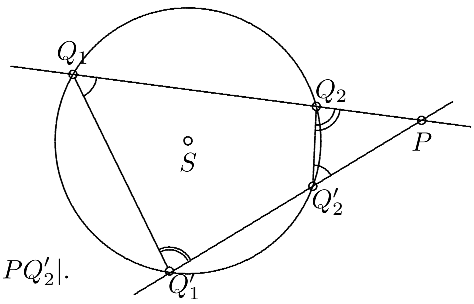
(2) P je znotraj kroga

Trditev 1 *Produkt $|PQ_1| \cdot |PQ_2|$ je neodvisen od izbire premice p; odvisen je le od točke P in krožnice K.*

Dokaz:
Iz točke P potegnimo poleg obstoječe sekante p še poljubno premico p', ki seka krožnico v točkah Q_1' in Q_2'. Potrebno je dokazati, da je

$$|PQ_1| \cdot |PQ_2| = |PQ_1'| \cdot |PQ_2'|.$$

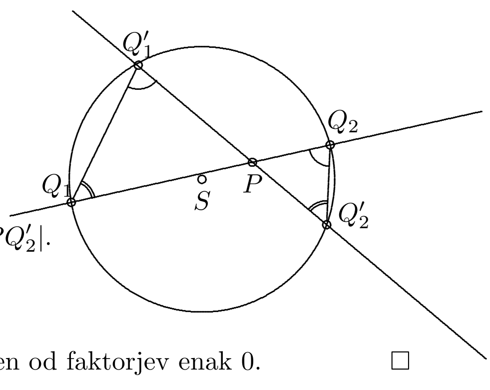
(1) Točka P je zunaj kroga.



Štirikotnik $Q_1'Q_1Q_2Q_2'$ je tetivni. Ker velja $\angle PQ_1'Q_1 = \angle Q_2'Q_2P$ in $\angle PQ_1Q_1' = \angle Q_2Q_2'P$, ta si trikotnika $\triangle_{PQ_1'Q_1}$ in $\triangle_{PQ_2'Q_2}$ podobna.
Odtod sledi:

$$\frac{|PQ_1|}{|PQ_2'|} = \frac{|PQ_1'|}{|PQ_2|} \Rightarrow |PQ_1| \cdot |PQ_2| = |PQ_1'| \cdot |PQ_2'|.$$

(2) Točka P je znotraj kroga.

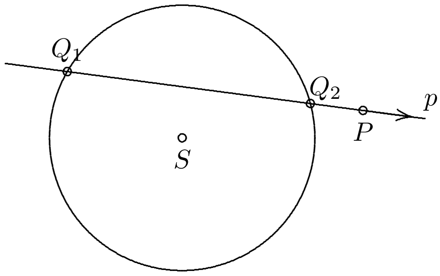


Kota $\angle PQ_1Q_1'$ in $\angle PQ_2'Q_2$ sta skladna, saj sta obodna kota nad istim lokom. Zaradi $\angle Q_1'PQ_1 = \angle Q_2'PQ_2$ sta si trikotnika $\triangle_{PQ_1'Q_1}$ in $\triangle_{PQ_2'Q_2}$ podobna. Zopet velja

$$\frac{|PQ_1|}{|PQ_2'|} = \frac{|PQ_1'|}{|PQ_2|} \Rightarrow |PQ_1| \cdot |PQ_2| = |PQ_1'| \cdot |PQ_2'|.$$

(3) Točka P leži na krožnici.
Trivialno: $|PQ_1| \cdot |PQ_2| = 0$, saj je vsaj eden od faktorjev enak 0. $\square$

Orientirajmo sedaj premico p.



Zanima nas vrednost produkta $(PQ_1)(PQ_2)$. Hitro opazimo:
(•) absolutna vrednost izraza je neodvisna od izbire premice p (to sledi iz prejšnje trditve, absolutna vrednost produkta je enaka $|PQ_1| \cdot |PQ_2|$).
(•) produkt je neodvisen od orientacije (če bi premico orientirali v nasprotni smeri, bi vdak izmed faktorjev v izrazu spremenil predznak, kar pa ne vpliva na vrednost izraza)
(•) predznak izraza je neodvisen od premice p, odvisen je le od lege točke P glede na krožnico K (če točka P leži v notranjosti kroga, je produkt negativen, če pa leži zunaj kroga pa je produkt pozitiven)
Torej velja: z izbiro točke P je produkt $(PQ_1)(PQ_1)$ enolično določen.

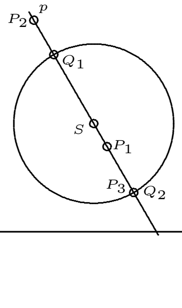
Definicija 1 *Naj bo v ravnini podana krožnica K in točka P. Premica, ki poteka skozi točko P, seka krožnico v točkah Q_1 in Q_2. Vrednost produkta $(PQ_1)(PQ_2)$ imenujemo* ***potenca točke P glede na krožnico K.***

Očitno velja:
(i) če je P zunaj krožnice, je potenca pozitivna,
(ii) če je P znotraj krožnice, je potenca negativna,
(iii) če je P na krožnici, je potenca enaka 0.
Z naslednjo trditvijo izrazimo potenco točke s polmerom krožnice r.

Trditev 2 *Naj bo K krožnica s središčem S in radijem r in P neka točka v ravnini. Potenca točke P glede na krožnico K je enaka*

$$|SP|^2 - r^2.$$

Dokaz:
Ker je potenca točke na premico neodvisna id izbire sekante, potegnemo kar premico skozi središče krožnice.



(i) Naj bo P zunaj kroga. $P = P_2$.
Tedaj velja

$$(P_2Q_1)(P_2Q_2) = (|P_2S| - r) \cdot (|P_2S| + r) = |P_2S|^2 - r^2.$$

(ii) Naj bo P znotraj kroga. Na sliki je $P = P_1$. Očitno je

$$(P_1Q_1)(P_1Q_2) = (|P_1S| + r) \cdot (|P_1S| - r) = |P_1S|^2 - r^2.$$

(iii) Naj bo P na krožnici: $P = P_3$. $|SP_3| = R$ Potem je

$$|P_3S|^2 - r^2 = 0 = (P_3Q_1)(P_3Q_2).$$

□

Potenčna premica dveh krožnic

Kako točki P, podani s koordinatama v koordinatnem sistemu, določiti potenco glede na krožnico s središčem v točki $S(a, b)$ in polmerom r?

Lema 1 *Naj bo K krožnica, podana z enačbo $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ oziroma $x^2 - 2ax + y^2 - 2by + c = 0$, kjer je $c = a^2 + b^2 - r^2$. Potenca točke $P(x_0, y_0)$ glede na krožnico K je*

$$x_0^2 - 2ax_0 + y^2 - 2by_0 + c \quad \text{oz.} \quad (x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2.$$

Dokaz:
Potenca točke na krožnico je $|SP|^2 - r^2$. Ker je $|SP| = d(P, S) = \sqrt{(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2}$, je potenca enaka

$$(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 - r^2 = x_0^2 - 2ax_0 + y_0^2 - 2by_0 + c.$$

□

Kako določiti množico točk, ki ima glede na več krožnic enako potenco? V ta namen definirajmo potencialo.

Definicija 2 *Naj bosta K_1 in K_2 dve krožnici.* ***Potenciala*** *teh dveh krožnic je množica točk P, ki imajo enako potenco glede na K_1 in glede na K_2.*

Potencialo dveh krožnic določa naslednji izrek:

Izrek 1 *Naj bosta K_1 in K_2 krožnici. Tedaj velja:*
*(*i*) če krožnici sovpadata ($K_1 = K_2$), je potenciala kar celotna realna ravnina,*
*(*ii*) če krožnici nista kocentrični, je potenciala neka premica, ki je pravokotna na nosilko središč krožnic K_1 in K_2,*
*(*iii*) če sta krožnici koncentrični in različni, je potenciala prazna množica.*

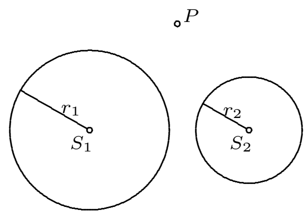
Dokaz:
(i) Očitno.
(ii) Naj bo točka $P(\zeta, \eta)$ takšna, da je njena potenca na krožnici $K_{1_{r_1}}(S_1(a_1, b_1))$ in $K_{2_{r_2}}(S_2(a_2, b_2))$ enaka. Po lemi velja

$$(\zeta - a_1)^2 + (\eta - b_1)^2 - r_1^2 = (\zeta - a_2)^2 + (\eta - b_2)^2 - r_2^2$$

oziroma

$$2(a_2 - a_1)\zeta + 2(b_2 - b_1)\eta + a_1^2 - a_2^2 + b_1^2 - b_2^2 - r_1^2 + r_2^2 = 0 \qquad (1)$$

Ker krožnici nista koncentrični, je $a_1 \neq a_2$ ali $b_1 \neq b_2$. Torej je (1) enačba neka premice. Zapišimo še nosilko središč obeh krožnic $S_1(a_1, b_1)$ in $S_2(a_2, b_2)$:

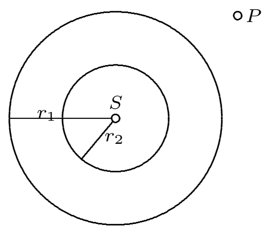


$$(b_1 - b_2)x - (a_1 - a_2)y + a_1 b_2 - b_1 a_2 = 0.$$

Hitro opazimo, da sta smerna vektorja, ki določata premici pravokotna, saj je njun skalarni produkt enak $(b_1 - b_2, a_2 - a_1) \cdot (a_2 - a_1, b_2 - b_1) = 0$. Torej je premica z enačbo (1) pravokotna na nosilko skozi središči.

(iii)

Naj velja $S = S_1 = S_2$ ter $r_1 > r_2$. Izberimo si poljubno točko ravnine, recimo P. Potenca točke P na prvo krožnico je $|PS_1|^2 - r_1^2$, potenca na drugo krožnico pa $|PS_2|^2 - r_2^2$. Ker velja $S_1 = S_2$ in $r_1 > r_2$, sta potenci različni.



□

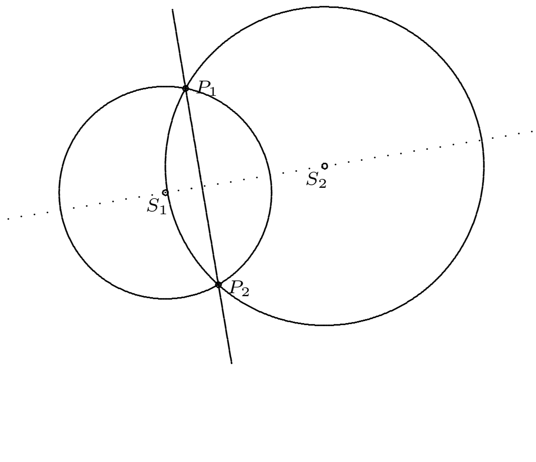
Definicija 3 *Premico, na kateri ležijo vse točke, ki imajo enako potenco glede na dve krožnici, imenujemo* ***potenčna premica.***

Čas je že, da skonstruiramo potenčno premico dveh krožnic. Po prejšnjem izreku je edino (ii) takšen, ki zahteva malce razmisleka.

Potenčna premica med dvema krožnicama je pravokotna na nosilko, ki poteka skozi središči obeh krožnic. Zopet ločimo več primerov:

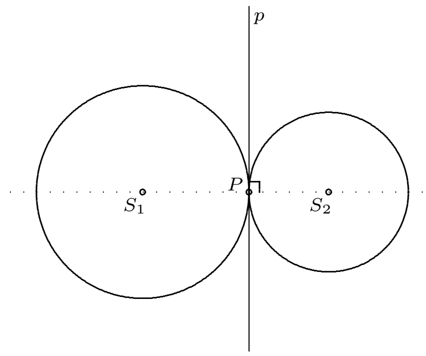
(a) Krožnici se sekata.

Zadostuje poiskati le eno točko, ki ima eno enako potenco glede na obe krožnici. Presečišči obeh krožnic imajo potenco 0, zato potenčna premica poteka skozi presečišči obeh krožnic.



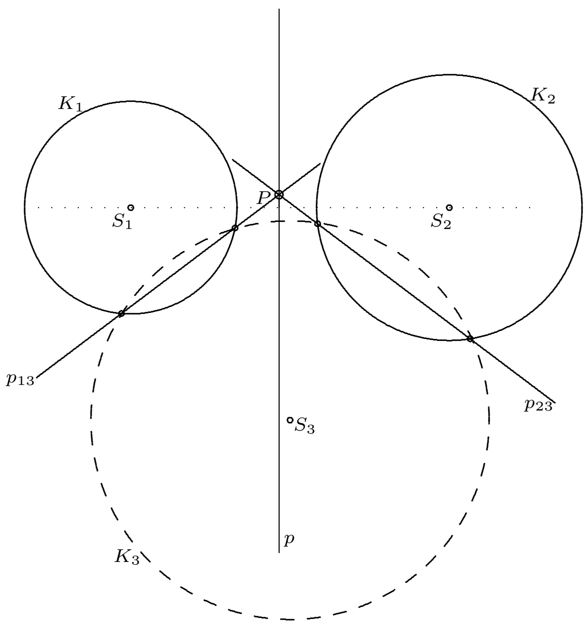
(b) Krožnici se dotikata.

Iz podobnih razlogov kot v (a) je potenčna premica skupna tangenta na obe krožnici.



(c) Krožnici nimata skupnih točk.

Narišemo krožnico K_3 s središčem S_3, ki seka krožnico K_1 in krožnico K_2, središča krožnic pa niso kolinearna. Določimo potenčno premico med krožnicama K_1 in K_3, označimo jo z p_{13} , ter potenčno premico p_{23} med krožnicama K_2 in K_3.Ker so središča krožnic nekolinearna, premici nista vzporedni, zato imata natanko eno skupno točko, označimo jo z P.Za P velja, da ima isto potenco glede na par krožnic K_1 in K_3 in isto glede na par K_2 in K_3. Torej je potenca točke P glede na krožnici K_1 in K_2 enaka, zato točka P leži na potenčni premici glede na krožnici K_1 in K_2.



Potenčna premica p je pravokotnica na nosilko skozi S_1 in S_2 in poteka skozi točko P.

S pomočjo (3) smo dokazali tudi trditev:

Trditev 3 *Naj bodo krožnice K_1, K_2 ter K_3 tri krožnice z nekolinearnimi središči. Potem obstaja natanko ena točka, ki ima isto potenco glede na vse tri krožnice (to točko P imenujemo* ***potenčno središče*** *treh krožnic).*

Šopi krožnic

Zastavimo si sedaj obratno nalogo.

Naj bo podana premica p. Poiščimo čim večjo družino krožnic, da bo p potenčna premica za vsak par krožnic iz te družine.

S poglavjem o potenčni premici doakžimo naslednjo lemo:

Lema 2 *Središča krožnic družine ležita na premici q, ki je pravokotna na potenčno premico p.*

Dokaz:
Naj bodo K_1, K_2 in K_3 tri krožnice iz te družine. Ker je p potenčna premica za par K_1, K_2 velja

$$p \perp n(S_1S_2).$$

Ker je p tudi potenčna premica za par K_1, K_3, sledi

$$p \perp n(S_1S_3).$$

Torej sta nosilki $n(S_1S_2)$ in $n(S_1S_3)$ vzporedni in imata hkrati skupno točko S_1. Odtod sledi, da nosilki sovpadata ter da so središča S_1, S_2, S_3 kolinearna.$\square$