

SERIJSKA IN SKUPNA WEIBULLOVA PORAZDELITEV TRDNOSTI KERAMIČNIH MATERIALOV

¹Maša Gomilšek, ¹Milan Ambrožič, ²Lovro Gorjan

STROKOVNI ČLANEK

¹Univerza v Mariboru, Fakulteta za naravoslovje in matematiko, Koroška 160, 2000 Maribor

²Institut »Jožef Stefan«, Jamova 39, 1000 Ljubljana

POVZETEK

Izmerjene upogibne trdnosti keramičnih vzorcev se navadno zelo dobro ujemajo z Weibullovo porazdelitveno funkcijo. Pri vsaki seriji v industrijski proizvodnji keramičnih izdelkov se vzame majhno število preizkusnih vzorcev pravilne geometrijske oblike in se jih zlomi pri tri- ali štiritočkovnem upogibnem preizkusu. Zato se v več letih proizvodnje keramičnih izdelkov in meritev trdnosti vzorcev nabere veliko število podatkov, tako da lahko na njihovi osnovi zanesljivo potrdimo veljavnost Weibullove porazdelitve. Nastane pa vprašanje, koliko se parametri porazdelitve za posamezne serije razlikujejo od parametrov za celotno večletno porazdelitev (tudi potem, ko upoštevamo sistematično napako pri oceni parametrov za majhno število vzorcev pri različnih metodah). Problem je namreč v tem, da so razmere pri izdelavi od serije do serije vsakič malo drugačni (temperatura, vlaga, človeški dejavnik itd.).

Ključne besede: Weibullova porazdelitev, upogibna trdnost, linearna regresija, metoda največje verjetnosti, metoda momentov

Serial and total Weibull strength distribution of ceramic materials

ABSTRACT

Measured values of the bend strength of ceramic samples usually agree very well with the Weibull distribution function. For each series of industrial production a small number of testing samples with regular shape are broken in the three- or four-point bending test. Therefore, in several years of manufacturing ceramic products and strength measurements a large amount of data is gathered, and on their basis we can reliably confirm the validity of the Weibull distribution. A question appears, of how the parameters of the strength distribution for individual series differ from the corresponding parameters for the entire distribution over several years (after the systematic bias in the evaluation of the parameters for small number of samples according to different methods has been considered). There is a problem that the fabrication conditions vary from series to series (temperature, humidity, human factor, etc.).

Keywords: Weibull distribution, bend strength, linear regression, maximum likelihood method, moments method

1 UVOD

Weibullova porazdelitev je znana že od sredine prejšnjega stoletja in temelji na principu »najšibkejšega člana«, to je, material oz. izdelek se zlomi, ko popusti njegov najšibkejši del [1]. Povedano drugače: ko lokalna mehanska napetost preseže trdnost materiala, nastane tam razpoka, ki se hitro razširi in povzroči zlom celotnega vzorca ali izdelka. Izmerjene trdnosti keramičnih vzorcev pri tri- ali štiritočkovnem upogibnem preizkusu se navadno zelo dobro ujemajo z Weibullovo porazdelitveno funkcijo. Zanesljivost in uporabnost te porazdelitve je bila preverjena za zelo

širok razpon eksperimentalnih razmer in podprta s teoretičnimi raziskavami [2–10].

V prejšnjem prispevku smo opisali statistično obdelavo 5100 vrednosti meritev upogibnih trdnosti keramičnih vzorcev iz korundne keramike (Al_2O_3) v podjetju Hidria AET, d. o. o. [11]. Za oceno obeh Weibullovih parametrov iz omejenega vzorca meritev smo uporabili metodo maksimalne verjetnosti. S primerjavo korelacijskega koeficienta ali faktorja R^2 na osnovi verjetnostnih diagramov $Q - Q$ za štiri različne statistične porazdelitve smo ugotovili, da se meritve najboljše ujemajo ravno z Weibullovo porazdelitvijo.

V tem članku se bomo torej ukvarjali samo z Weibullovo porazdelitvijo, za primerjavo pa bomo poleg metode maksimalne verjetnosti uporabljali tudi linearno regresijo in metodo momentov [5]. Z njimi ocenimo vrednosti obeh parametrov Weibullove porazdelitve. Zanimala nas bo predvsem korelacija med dobljenimi parametri pri vseh treh metodah, še bolj pa zveza med parametri za majhno in veliko število serij vzorcev.

Ena od zanimivih možnosti pri uporabi eksperimentalnih trdnosti, ki so jo raziskovalci večkrat uporabili, je naključno mešanje vrstnega reda teh podatkov in ugotavljanje parametrov porazdelitve naključnih vzorčnih skupin [3, 8]. Za takšno sistematično mešanje velike množice podatkov lahko uporabimo računalnikov generator naključnih števil. Tako lahko preverjamo zanesljivost statističnih napovedi na osnovi manjših preizkusnih grup. V tem prispevku bomo primerjali predvsem Weibullov modul v primeru preizkusnih skupin podatkov, kot so bili dobljeni po vrstnem redu v podjetju, z Weibullovim modulom na osnovi mešanja eksperimentalnih podatkov.

2 STATISTIČNI MODEL

Eksperimentalne parametre pri lomljenju vzorcev iz aluminijevega oksida (Al_2O_3) smo že opisali v eni od prejšnjih števil Vakuumista [11], zato opisujemo tu le statistično obdelavo meritev trdnosti. Naša statistična (naključna) spremenljivka je 4-točkovna upogibna trdnost (na kratko trdnost), σ . V računih uporabimo obe porazdelitveni funkciji: verjetnostno gostoto $p(\sigma)$ in kumulativno verjetnostno funkcijo:

$$P(\sigma) = \int_0^{\sigma} p(x) dx$$

Pri dvoparametrični Weibullovi porazdelitvi sta obe verjetnostni funkciji p in P :

$$p(\sigma) = \frac{m}{\sigma_0} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^{m-1} \cdot \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right) \quad (1)$$

$$P(\sigma) = 1 - \exp \left(- \left(\frac{\sigma}{\sigma_0} \right)^m \right) \quad (2)$$

z Weibullovim modulom m in karakterističnim parametrom σ_0 .

Najznačilnejša statistična parametra vsake teoretične in eksperimentalne porazdelitve sta pričakovana vrednost naključne spremenljivke (pri eksperimentalni porazdelitvi je to povprečna vrednost) in njena standardna deviacija. Zapišimo povprečno trdnost $\langle \sigma \rangle$ in njeno standardno deviacijo $\delta \sigma$ na osnovi eksperimentalnih podatkov in teoretične Weibullove porazdelitve:

$$\langle \sigma \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^N \sigma_i = \sigma_0 \Gamma \left(1 + \frac{1}{m} \right) \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \sigma &= \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=0}^N (\sigma_i - \langle \sigma \rangle)^2} = \\ &= \sigma_0 \sqrt{\Gamma \left(1 + \frac{2}{m} \right) - \Gamma^2 \left(1 + \frac{1}{m} \right)} \end{aligned} \quad (4)$$

Pri tem N pomeni število zlomljenih vzorcev pri upogibnem preizkusu, σ_i pa je i -ta trdnost po vrsti. Simbol Γ označuje funkcijo gama, definirano takole:

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt \quad (5)$$

3 METODE ZA OCENO PARAMETROV WEIBULLOVE PORAZDELITVE

Naredimo kratek povzetek bistva uporabljenih metod za izračun Weibullovih parametrov.

Pri linearni regresiji (LR) uporabljamo različne preproste funkcije (v angleški literaturi se je za takšno funkcijo uveljavilo ime *rank estimator*), zato da vrstnemu redu izmerjene trdnosti (če jih razvrstimo po velikosti od najmanjše do največje) priredimo kumulativno verjetnost P . Omenimo štiri takšne pogosto uporabljane funkcije [5]:

$$P_i = \frac{i-1/2}{N} \quad (6a)$$

$$P_i = \frac{i}{N+1} \quad (6b)$$

$$P_i = \frac{i-3/10}{N+4/10} \quad (6c)$$

$$P_i = \frac{i-3/8}{N+1/4} \quad (6č)$$

Pri tem je i indeks, ki ustreza eksperimentalni vrednosti trdnosti σ_i , N pa je število zlomljenih vzorcev. Pare (σ_i, P_i) potem pri metodi LR primerjamo s funkcijo (2), pri kateri ocenimo parametra m in σ_0 , da se pari funkciji najbolj prilegajo. Če enačbo (2) preuredimo v primerno linearizirano obliko (od tod metodi ime), je problem iskanja obeh parametrov analitično rešljiv in preprost. Zato je metoda LR tako uporabna, čeprav pri majhnem številu vzorcev N vodi do sistemske napake, predvsem pri oceni parametra m (metoda daje v povprečju premajhne vrednosti parametra).

Pri metodi največje verjetnosti (ML = maximum likelihood) uporabljamo porazdelitveno funkcijo (1). V tem primeru ni treba sortirati eksperimentalnih podatkov. Za vsako eksperimentalno vrednost trdnosti σ_i izrazimo po enačbi (1) vrednost p_i in potem tvorimo produkt vrednosti p_i za vse vzorce. Parametra m in σ_0 variiramo tako, da ima ta produkt maksimalno vrednost. Ustrezno rešitev poiščemo numerično z iterativno metodo.

Metoda momentov (MM) je v bistvu najpreprostejša. Weibullova parametra izračunamo tako, da se eksperimentalni in teoretični vrednosti za povprečno trdnost in njeno standardno deviacijo na osnovi enačb (3) in (4) ujemata.

Pri zelo velikem številu meritev pa lahko neposredno uporabimo tudi histogramsko (H) metodo. Kot pri metodi LR izmerjene trdnosti najprej sortiramo, interval vseh vrednosti razdelimo na majhne »predalčke« enakih širin in preštejemo število meritev v vsakem predalčku. S takšnim histogramom simuliramo porazdelitveno funkcijo (1). S prilagajanjem Weibullovih parametrov dobimo najboljše ujemanje med funkcijo (1) in eksperimentalno dobljenim histogramom.

Ko sta parametra Weibullove porazdelitve izračunana po kateri koli od teh metod, lahko kasneje izračunamo še korelacijski faktor R^2 , ki nam poda kvantitativno ujemanje med teorijo in eksperimentom:

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \sigma_{i,th})^2}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i - \langle \sigma_i \rangle)^2} \quad (7)$$

kjer $\langle \sigma_i \rangle$ pomeni povprečno vrednost izmerjenih trdnosti. Vsaki eksperimentalni vrednosti trdnosti σ_i v enačbi (7) ustreza teoretična trdnost $\sigma_{i,th}$ na osnovi teoretičnih Weibullovih parametrov. Vendar pa moramo za izračun vsake vrednosti $\sigma_{i,th}$ uporabiti eno od funkcij (6), ne glede na to, po kateri metodi smo prej izračunali parametra m in σ_0 . Na primer, pri izračunu obeh parametrov po metodah ML, MM in H sploh ne potrebujemo funkcij (6), pri izračunu R^2 po enačbi (7)

pa uporabimo eno od njih. Pri dobrem ujemanju teorije in eksperimenta je korelacijski faktor zelo blizu vrednosti 1.

Če imamo veliko preizkusnih skupin, kjer ima vsaka enako število vzorcev, izračunamo oba Weibullova parametra za vsako skupino posebej. Potem izračunamo povprečno vrednost parametrov, npr. $\langle m \rangle$ za Weibullov modul. Poskusi in simulacije Monte Carlo (MC) pa kažejo na to, da je porazdelitev vrednosti obeh parametrov pri velikem številu skupin največkrat log-normalna in ne Gaussova. To je najbolj očitno pri majhnih velikostih skupin, npr. $N = 12$. Zato je včasih morda smiselno logaritemsko povprečenje Weibullovih parametrov namesto direktnega povprečenja, ker je logaritemsko povprečje večkrat bližje pravi vrednosti parametrov za zelo veliko število vzorcev. Vzemi mo na primer logaritemsko povprečni Weibullov modul $\langle m_{LN} \rangle$. Za vsako preizkusno skupino izračunamo naravni logaritem Weibullovega modula, te logaritme povprečimo in nazadnje spet antilogaritmiramo. Za primerjavo zapišimo obe povprečni vrednosti Weibullovega modula:

$$\langle m \rangle = \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K m_i \quad (8a)$$

$$\langle m_{LN} \rangle = \exp\left(\frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \ln m_i\right) \quad (8b)$$

kjer K pomeni število preizkusnih skupin, m_i pa je Weibullov modul za i -to skupino. Seveda pa ostane posebno pri nepredvidljivi statistiki eksperimentalnih podatkov vprašanje, katero povprečenje nam daje vrednosti bližje vrednosti za celotno zbirko podatkov, $\langle m \rangle$ ali $\langle m_{LN} \rangle$.

4 REZULTATI IN DISKUSIJA

4.1 Statistika za celoten nabor podatkov

V podjetju Hidria AET, d. o. o., so pri vsaki proizvodni seriji izdelkov iz korundne keramike zlomili po 12 preizkusnih vzorcev v obliki kvadra in izračunali njihove upogibne trdnosti. Najprej smo izračunali Weibullova parametra na osnovi vseh 5100 eksperimentalnih trdnosti, to je 425 proizvodnih ciklov po 12 preizkusnih vzorcev za zlom. Povprečna trdnost (aritmetična sredina vseh 5100 vrednosti) je bila $\langle \sigma \rangle = 289,56$ MPa, standardna deviacija pa $\delta\sigma = 37,48$ MPa.

Primerjali smo rezultate in zanesljivost vseh štirih prej omenjenih metod: LR, ML, MM in H. Že samo pri metodi LR imamo več možnosti: poskusili smo z vsemi štirimi funkcijami (6) za oceno kumulativnih verjetnosti P_i . Poleg tega pa imamo tudi pri iskanju najmanjše vsote kvadratov razdalj posameznih točk lineariziranega grafa od premice $y = kx + n$ več

možnosti: lahko gre za vodoravne odmike točk od premice (x -regresija), za navpične odmike (y -regresija), lahko pa gledamo »pravokotne« odmike (najkrajše razdalje točk od premice). Zavedati se moramo, da je odločitev za en ali drug kriterij subjektivna, zato se navadno uporablja y -regresija. Pri drugih treh metodah pa nimamo takšnih variacij kot pri LR.

Ker je bistvo uporabljenih metod tako različno, bi bilo naivno pričakovati, da bomo pri vseh dobili enaki vrednosti Weibullovih parametrov, pa čeprav gre za 5100 podatkov. V **tabeli 1** so prikazane vrednosti Weibullovih parametrov, izračunanih po različnih metodah. Za metodo LR je v tabeli prikazan le izid za y -regresijo in funkcijo (6a), čeprav smo preizkusili vseh možnih 12 kombinacij (štiri funkcije in tri vrste regresij). Razlike v okviru metode LR so majhne: izračunani parameter m je v intervalu od 9,315 do 9,355, σ_0 pa je med 305,22 MPa in 305,28 MPa.

Medtem ko se najmanjši in največji izračunani skalirni parameter σ_0 , izračunan po različnih metodah, razlikujeta le za 1,5 %, pa je razlika v Weibullovem modulu m med metodo LR (9,34) in ML (9,05) nekoliko presenetljivo velika: okrog 3 %. Res je splošno znano, da je izračun skalirnega parametra precej zanesljivejši kot izračun Weibullovega modula, vendar bi pri 5100 podatkih vseeno pričakovali manjše odmike v vrednostih m , kot jih dobimo. Zato smo za vse štiri pare Weibullovih parametrov izračunali še korelacijski koeficient R^2 , da bi primerjali zanesljivost metod; izbrali smo funkcijo (6a). Morda se primerjava R^2 za vse štiri metode ne zdi povsem poštena, ker uporabljamo pri tem računu princip, prirejen za metodo LR. Vendar pa ugotavljamo, da je korelacijski koeficient pri vseh metodah zelo visok in skoraj enak.

Za primerjavo, pri Gaussovi porazdelitvi v prejšnjem prispevku v Vakuumistu smo dobili po metodi ML vrednost $R^2 = 0,9855$, pri drugih dveh porazdelitvah, log-normalni in gama, pa je bil še manjši [11]. Torej nam novi izračuni spet dokazujejo, da je Weibullova porazdelitev res pravilna, le njeni parametri so nekoliko negotovi. Kako si torej lahko razložimo tolikšno negotovost v Weibullovem modulu: med 9,05 in 9,34? Celotna porazdelitvena funkcija je pri tolikšnem Weibullovem modulu že kar ozka in očitno dokaj neobčutljiva za manjše variacije tega parametra.

Tabela 1: Izračunana Weibullova parametra za 5100 podatkov po štirih metodah in ustreznih faktor R^2

Metoda	m	σ_0 /MPa	R^2
LR	9,34	305,25	0,9986
ML	9,05	305,50	0,9985
MM	9,25	305,39	0,9987
H	9,24	305,05	0,9987

4.2 Majhne in velike vrednosti trdnosti

Druga težava pri interpretaciji izmerjenih trdnosti s teoretično porazdelitvijo so zelo majhne in zelo velike trdnosti. Izmerjene trdnosti vedno ležijo na omejenem intervalu, pa če jih je še tako veliko, medtem ko segajo teoretične vrednosti po Weibullovu porazdelitvi od nič do neskončno. Ali imajo potem zelo majhne in zelo velike teoretične trdnosti sploh kak praktičen pomen? V primeru 5100 vrednosti trdnosti Al_2O_3 vzorcev v Tolminu je bila najmanjša trdnost okrog 137 MPa, največja pa 400 MPa.

Vprašamo se lahko, kolikšna je teoretična verjetnost, da bo res vseh 5100 vzorcev pri zgoraj ocenjenih Weibullovih parametrih imelo trdnosti med omenjenima vrednostima. Enačba (2) velja za en sam izbran vzorec izmed mnogih, npr. $P(400 \text{ MPa})$ pomeni verjetnost, da izmerjena trdnost ne bo večja od 400 MPa. Podobno pomeni $1 - P(137 \text{ MPa})$ verjetnost, da izmerjena trdnost ne bo manjša od 137 MPa. Pri vseh 5100 vzorcih pa moramo posamezne verjetnosti množiti. Račun pokaže, da je verjetnost, da bodo imeli vsi vzorci večje trdnosti od 137 MPa, samo 5 %. Nasprotno je verjetnost, da bodo imeli vsi vzorci manjše trdnosti od 400 MPa, kar 98-odstotna. Da med 5100 vrednostmi trdnosti nimamo večjih od 400 MPa, je potem kar v skladu s teoretično porazdelitveno funkcijo, pa čeprav nam je jasno, da noben vzorec ne more imeti večjih trdnosti, kot jih dopuščajo medatomske sile.

Zakaj pa potem nima vsaj en vzorec manjše trdnosti kot 137 MPa, čeprav je verjetnost za to 95-odstotna? Prvič, lahko je to čisto naključje, saj gre še vedno za statistične negotovosti in morda bi imel ravno 5101. vzorec trdnost recimo samo 100 MPa. Drugič, statistična analiza, povezana z zlomom materiala na osnovi mehanskih napetosti okrog mikrodefektov, pokaže, da je Weibullova statistika odvisna od kvantitativne velikostne porazdelitve mikrodefektov v snovi [4]. Zato je lahko pri obravnavi majhnih mehanskih obremenitev preprosto napačna. Tako lahko opazimo v literaturi tudi uporabo triparametrične Weibullove porazdelitve namesto dvoparametrične; tretji parameter poleg m in σ_0 je najmanjša teoretična trdnost, ki je večja od nič.

In tretjič, za pomanjkanje majhnih izmerjenih trdnosti je lahko kriv tudi človeški dejavnik s selekcijo izdelkov in vzorcev. Na primer, če operator stroja za nizkotlačno brizganje keramične suspenzije v kalupe vidi, da se je en vzorec ponesrečil in da bo imel slabe mehanske lastnosti, ga preprosto zavrže, namesto da bi ga dal sintrati skupaj z drugimi vzorci.

4.3 Statistika za majhne preizkusne skupine

Pri tej natančni kvantitativni statistični interpretaciji trdnosti pa nas je najbolj zanimala sistematična odvisnost izračunanih Weibullovih parametrov od velikosti preizkusnih skupin in od uporabljenih metod (samo LR, ML in MM, ker je histogramska metoda za majhno število vzorcev neuporabna). Zgoraj smo omenili, da je imela vsaka preizkusna skupina v tolminskem podjetju samo 12 vzorcev, ovrednotili pa smo statistiko za vseh 5100 vzorcev skupaj. To pa ni enako, kot če bi obravnavali vsako preizkusno skupino posebej. Paziti moramo tudi, da razlikujemo sistematsko napako uporabljene metode od resničnih razlik v izračunanih parametrih za različno velike preizkusne skupine.

Dobro znano je na primer, da pri majhnem številu vzorcev N metoda LR daje premajhne vrednosti Weibullovega modula m in nekoliko prevelik σ_0 [5]. Nasprotno daje ML prevelik m in nekoliko premajhen σ_0 [5]. To ugotovitev se da lepo potrditi s simulacijami Monte Carlo (MC), kar smo z izčrpnimi računi večkrat preverili tudi sami [8, 9]. V splošnem je tako negotovost kot sistematična napaka parametra σ_0 veliko manjša kot pri parametru m . Zato se tu omejimo na opis rezultatov za Weibullov modul.

Ker je bilo pri eksperimentu $N = 12$ za vsako proizvodno serijo, se nam je zdelo smiselno za različne velikosti preizkusnih skupin v naših računih vzeti mnogokratnik tega števila. To pomeni, da smo združevali vedno več eksperimentalnih preizkusnih skupin, največ 10 ($N = 120$). Združevanje je šlo po istem vrstnem redu, kot so časovno potekale meritve. S povečevanjem N od 12 do 120 se je pri metodah LR, ML in MM vrednost parametra m spreminjala in to smo primerjali s tremi referenčnimi vrednostmi v **tabeli 1** za 5100 vzorcev (**sluke 1–3**). Razlike so nastale, prvič zaradi večje naključnosti in negotovosti za majhen N , drugič pa zaradi zgoraj omenjene sistematične napake posameznih metod. Vendar obstaja še tretji mogoči vzrok: razmere pri izdelavi vzorcev se lahko od serije do serije nekoliko spreminjajo in to lahko pomeni dodatno sistematično napako glede na veliko število vzorcev. S tem mislimo, da se lahko celotna proizvodnja izdelkov po kvaliteti razlikuje od serije do serije in ne gre le za razlike zaradi naključno izbranih vzorcev iz vsake serije.

Naključno napako zaradi statističnih variacij lahko navadno hitro odstranimo od sistematičnih napak (zaradi naključnega nihanja vrednosti obravnavanega parametra gor ali dol), teže pa razlikujemo eno sistematično napako od druge. Tu si lahko pomagamo s čisto teoretičnimi MC-simulacijami, kjer izberemo kot vhodni podatek neko vrednost Weibullovega modula m_0 , na primer pri preizkusu metode LR vrednost

$m_0 = 9,34$ iz **tabele 1**. Potem izberemo npr. $N = 12$ in zelo velikokrat ponovimo simulacijo, recimo 100 000-krat po 12 vzorcev. Tako dobimo 100 000 različnih vrednosti m , ki se bolj ali manj razlikujejo od vhodne vrednosti m_0 . Vseh teh 100 000 vrednosti m povprečimo, da dobimo $\langle m_{MC} \rangle$. S povprečenjem smo se znebili naključne napake zaradi statističnih variacij. Izkaže se, da se povprečje $\langle m_{MC} \rangle$ razlikuje od m_0 in to tem bolj, čim manjša je vsaka preizkusna skupina (recimo $N = 12$). Kot smo že omenili, v primeru LR metode velja: $\langle m_{MC} \rangle < m_0$. Tako smo ugotovili sistematično napako metode za vsak N posebej in jo vemo vnaprej, ko preverjamo dejanske eksperimentalne trdnosti.

Kako naredimo primerjavo? Recimo, da smo izbrali najmanjšo velikost grupe $N = 12$. Za vseh 5100 vzorcev pomeni to 425 skupin. Za vsako od teh skupin po 12 vzorcev izračunamo z izbrano metodo, npr. LR, drugo vrednost m . Teh 425 eksperimentalnih vrednosti m povprečimo in dobimo $\langle m \rangle$. Vrednost $\langle m \rangle$ se lahko razlikuje tako od $m_0 = 9,34$ kot od $\langle m_{MC} \rangle$ iz MC-simulacij. Z razliko med vrednostima $\langle m \rangle$ in $\langle m_{MC} \rangle$ tako odstranimo eksperimentalni odmik Weibullovega modula (glede na veliko število vzorcev) od sistematične napake same metode. Podobno naredimo tudi za metodi ML in MM.

Vendar smo uporabili za nazornejšo interpretacijo rezultatov drugo pot. Namesto teoretičnih MC-simulacij smo pri vsaki izbiri preizkusnih skupin z računalniškim generatorjem naključnih števil temeljito premešali vrstni red vseh 5100 meritev trdnosti. Torej smo poleg časovno pravilnega vrstnega reda meritev uporabili tudi naključni vrstni red in primerjali rezultate. Tu velja omeniti, da imamo kljub omejenemu številu vseh vrednosti trdnosti (5100) pri naključnem mešanju podatkov veliko več možnosti kot pri časovno pravilnem vrstnem redu.

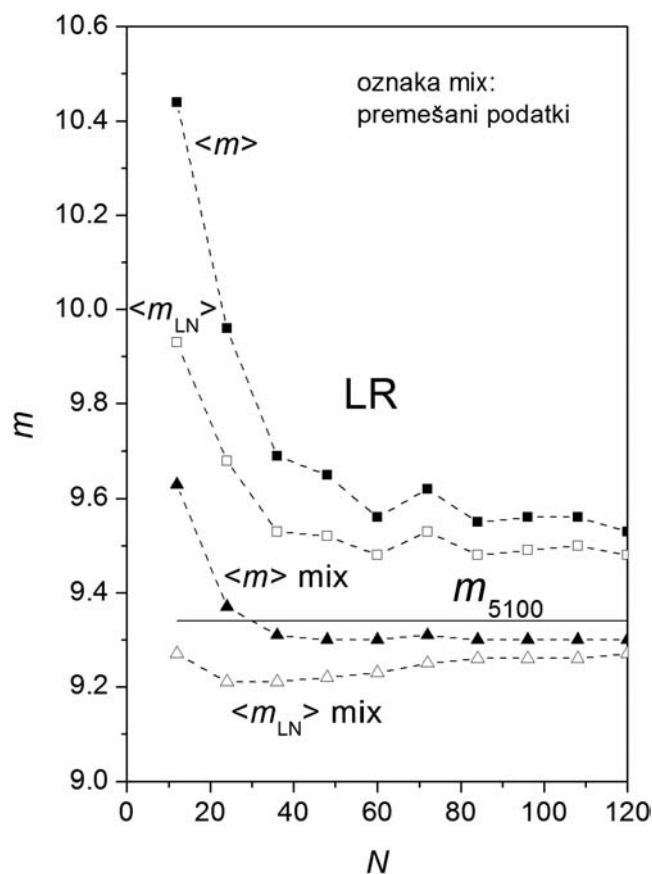
Za lažjo razlago vzemimo spet velikost skupine $N = 12$. Pri časovno pravilnem vrstnem redu smo dobili 425 skupin ter toliko vrednosti m . Ko pa premešamo 5100 meritev in potem razdelimo to po vrsti na 425 skupin s 425 vrednostmi m , lahko mešanje ponovimo in ponovno vse skupaj razdelimo na 425 skupin. Te bodo zaradi ponovnega mešanja seveda drugačne od prvih 425 skupin. To lahko praktično ponavljamo v neskončnost, saj je število mogočih kombinacij, kako 5100 vzorcev razdeliti na 425 skupin po 12, nepredstavljivo veliko. Tako lahko zaradi mešanja učinkovito povprečimo neprimerno več kot 425 vrednosti m in s tem je rezultat zanesljivejši.

Kaj smo sicer z mešanjem eksperimentalnih podatkov sploh dosegli? Zaradi časovne naključnosti smo izničili variacije od serije do serije v proizvodnji. Če torej dobimo veliko razliko v rezultatih za nepremešane in premešane podatke, pomeni to veliko serijsko

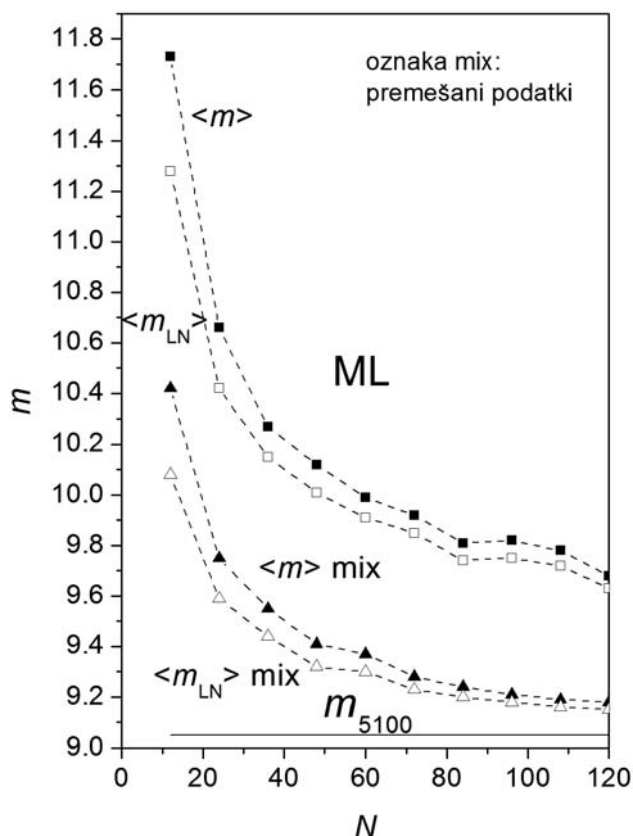
variabilnost, torej tudi nihanje kvalitete izdelkov, kar ni ravno ugodno za podjetje. Omenimo še, da število 5100 ni bilo vedno deljivo z velikostjo vzorčne skupine N . Na primer, pri $N = 24$ je $5100 = 212 \cdot 24 + 12$. V takšnem primeru smo pač vzeli po vrsti 212 skupin po 24 vzorcev, izpustili pa zadnjih 12 meritev.

Slike 1–3 prikazujejo razliko med povprečnim Weibullovim modulom $\langle m \rangle$ za nepremešane in premešane eksperimentalne trdnosti vzorcev v odvisnosti od velikosti skupine N , in sicer za vse tri metode, enačba (8a). Vodoravna asimptota na diagramih prikazuje za primerjavo vrednosti m iz **tabele 1** za vseh 5100 podatkov. Na slikah so prikazane še enake odvisnosti $\langle m_{LN} \rangle$ od N za vse tri metode pri časovno pravilnem vrstnem redu in pri mešanju podatkov, kjer smo namesto navadnega povprečenja Weibullovih modulov vzeli logaritemska povprečja, enačba (8b). Ugotavljamo, da so razlike v m za nepremešane in premešane podatke velike.

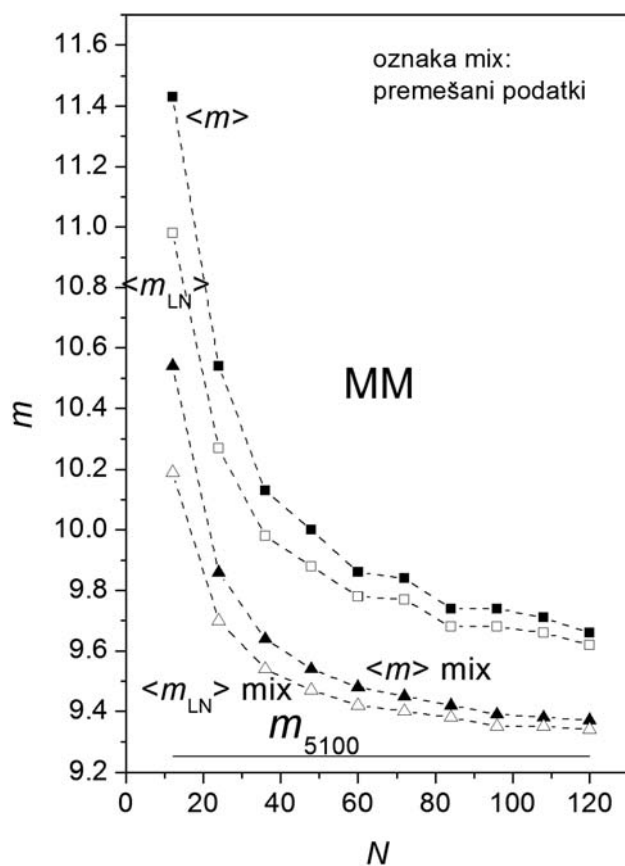
Grafe na slikah se da nazorno razložiti. Prvič, vsa logaritemska povprečenja Weibullovega modula dajejo manjše vrednosti kot navadna povprečenja, kar se da matematično dokazati in tudi izpeljati razmerje



Slika 1: Grafi odvisnosti $\langle m \rangle(N)$ in $\langle m_{LN} \rangle(N)$ pri metodi LR; povprečenje po skupinah velikosti N brez mešanja: direktno (polni kvadrati) in logaritmsko (prazni kvadrati), in s premešanimi podatki: direktno (polni trikotniki) in logaritmsko (prazni trikotniki)



Slika 2: Grafi odvisnosti $\langle m \rangle(N)$ in $\langle m_{LN} \rangle(N)$ pri metodi ML; simboli imajo enak pomen kot pri sliki 1.



Slika 3: Grafi odvisnosti $\langle m \rangle(N)$ in $\langle m_{LN} \rangle(N)$ pri metodi MM; simboli imajo enak pomen kot pri slikah 1 in 2.

med obema povprečjema, če je npr. porazdelitev za m res log-normalna. Drugič, pri metodah ML in MM so vse vrednosti Weibullovih modulov nad limitno vrednostjo, ki smo jo na slikah označili z m_{5100} . To je prav že zaradi sistematske napake obeh metod (precenitev vrednosti m), ki pa se postopno zmanjšuje z večanjem N . Pri metodi LR je stvar nekoliko bolj zapletena: pri premešanih podatkih daje metoda manjši modul od limitne vrednosti, tako kot mora biti (razen pri direktnem povprečenju za $N = 12$ in 24).

Vendar pa so pri nemešanih skupinah povprečne vrednosti m nad limitno vodoravno črto in to je lahko samo zaradi dodatne sistematične napake zaradi variacij kakovosti proizvodnih serij. Kar pa je najbolj bistveno, krivulje za povprečni modul za nepremešane podatke so bistveno nad tistimi za premešane podatke. Manjšo vrednost modula pri premešanih trdnostih se da lepo razložiti: ko vzamemo naključno skupaj npr. 12 vzorcev ne samo iz ene proizvodne serije, temveč iz katere koli serije, se naključnosti izbire iz ene serije pridruži še naključnost kvalitete različnih serij. Zato je logično pričakovati večjo širino Weibullove porazdelitvene funkcije trdnosti, to pa pomeni manjši Weibullov modul. Velike razlike med premešanimi in nepremešanimi trdnostmi kažejo na neugodno velike razlike v proizvodnih serijah.

Na kratko opišimo še rezultate za skalirni parameter σ_0 . Metoda LR daje pri nepremešanih podatkih, ne glede na način povprečenja, direktno ali logaritemsko, nekoliko premajhen skalirni parameter v primerjavi z vrednostjo 305,25 v tabeli 1, za premešane podatke pa preveliko vrednost. To je v skladu s prevelikim modulom m za nepremešane podatke in premajhnim modulom za premešane podatke. Nasprotno dajeta metodi ML in MM v primerjavi z vrednostima za 5100 podatkov nekoliko premajhen povprečni skalirni parameter, ker dajeta prevelik Weibullov modul. V splošnem velja: če daje metoda sistematsko premajhen m , potem daje prevelik σ_0 in nasprotno. Sistematična napaka v skalirnem parametru pa je majhna in je največja pri $N = 12$, med 3 ‰ in 7 ‰, odvisno od metode in načina povprečenja.

5 SKLEP

S primerjavo različnih metod za oceno Weibullovih parametrov smo prišli do enakih sklepov o nihanju kakovosti proizvodnih serij keramičnih izdelkov. To prepoznamo po tem, da je povprečni Weibullov modul za množico preizkusnih skupin pri premešanih podatkih veliko manjši kot pri nepremešanih. Pokazalo se je tudi, da so metode LR, ML in MM v splošnem približno enako zanesljive pri oceni Weibullovega modula, čeprav so vse obremenjene s sistematsko napako pri majhnih preizkusnih skupinah in celo pri

5100 vzorcih ne dajejo iste vrednosti m . Vendar pa to ni tako bistveno, saj smo ugotovili, da napaka nekaj odstotkov v vrednosti m ne pomeni praktično nobene razlike v Weibullovi statistiki, posebno ker vrednost skalirnega parametra σ_0 kompenzira nekoliko drugačno vrednost modula m .

6 Literatura

- [1] W. Weibull, *J. Appl. Mech.*, 18 (1951), 293
- [2] P. Kittl, G. Diaz, *Res. Mech.*, 24 (1988), 99
- [3] N. Orlovskaja, H. Peterlik, M. Marczevski, K. Kromp, *J. Mater. Sci.*, 32 (1997), 1903
- [4] R. Danzer, T. Lube, P. Supancic, *Z. Metall.*, 92 (2001), 773
- [5] D. Wu, Y Li, *Chem. Eng. Sci.*, 56 (2001), 7035
- [6] I. J. Davies, *J. Mater. Sci.*, 39 (2004), 1444
- [7] D. Wu, J. Zhou, Y. Li, *J. Eur. Ceram. Soc.*, 26 (2006), 1099
- [8] M. Ambrožič, K. Vidović, *J. Mater. Sci.*, 42 (2007), 9645
- [9] M. Ambrožič, L. Gorjan, *J. Mater. Sci.*, 46 (2011), 1862
- [10] L. Gorjan, M. Ambrožič, *J. Eur. Ceram. Soc.*, 32 (2012), 1221
- [11] M. Ambrožič, L. Gorjan, *Vakuumist*, 32 (2012) 3, 12