Numerične metode v fiziki – izbor končnih nalog

Vaje iz predmeta Numerične metode v fiziki

Igor Grešovnik

Revision 3, February 2015.

Revision 0: January 2008.

Vsebina:

1 DIF01 – NITNO NIHALO

Na tanki jekleni žici dolžine l = 2 m je utež večje mase. Žica je togo vpeta pod stropom. Nihalo odmaknemo za določen kot θ_0 iz ravnovesne lege in ga izpustimo.

Pri majhnih amplitudah θ_0 nihalo niha približno harmonično, tako da se kot spreminja po formuli

$$\theta = \theta_0 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right), \tag{1}$$

kjer nihajni čas oziroma perioda nihanja enaka

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{2}$$

in g=9,8 m/s^2 težnostni pospešek. Takšno nihanje dobimo ob prespostavki, da je pospešek uteži premo sorazmeren odmiku, kar približno velja za male kote, ko velja približek

$$\theta \approx \sin(\theta) \tag{3}$$

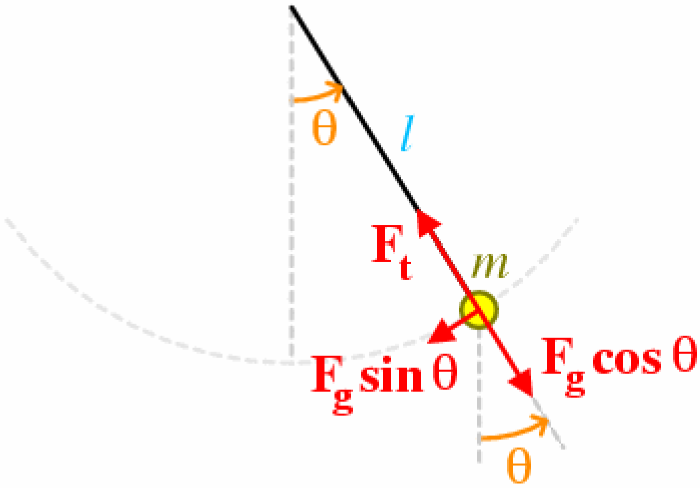
Pri večjih kotih moramo upoštevati, da dejanska zveza med silo (in zato pospeškom) ter odmikom od ravnovesne lege ni linearna.

Izračunaj časovni potek pomika in (vektorskega) pospeška na intervalu $t \in [0, 1.5\,T]$ za amplitude $\theta_0 = 5^\circ$, $\theta_0 = 20^\circ$, $\theta_0 = 45^\circ$ in $\theta_0 = 80^\circ$, kjer je T perioda nihanja po harmoničnem približku iz enačbe (2)). Pri izračunih zanemari trenje in zračni upor ter računaj, kot da je vsa masa nihala zbrana v točki, ki je za dolžino l odaljena od vpetja nihala. Iz podatkov izračunaj tudi približen nihajni čas in časovni interval med prvim trenutkom, ko pospešek kaže v navpični smeri in prvim naslednjim trenutkom, ko pospešek kaže v navpični smeri.

Za orientacijo: prvi členi pri razvoju nihajnega časa v vrsto so

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{1}{16}\theta_0^2 + \frac{11}{3072}\theta_0^4 + \ldots\right) \tag{4}$$

V zgornji formuli je kot podan v radianih.



Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum
http://newton.ex.ac.uk/research/qsystems/people/sque/physics/simple-pendulum/
http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)

2 DIF02 - PADALEC

Padalec skoči iz lebdečega balona in 60 s prosto pada, preden odpre padalo. Izrčunaj časovni potek hitrosti, pospeška in razdalje od točke odskoka v tem času. Pri tem uporabi naslednje predpostavke:

- velikost težnostnega pospeška je g=9,8 m/s^2
- končna hitrost, ki bi jo dosegel padalec, če bi na enak način prosto padal neomejeno dolgo, je 53 m/s (okrog 191 km/h)
- velja kvadratni zakon upora
- koeficient upora je konstanten, ker
    - padalec proti tlem pada ves čas v nespremenjeni v stabilni legi
- okoliški zrak miruje in je konstantne temperature, gostota se z višino ne sperminja
- padalec se spusti in ne odrine, tako da je začetna hitrost enaka 0

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Free_fall#With_turbulent_drag

3 DIF03 – LETALSKA AKROBACIJA

Pilot jadralnega letala začne izvajati pentljo (angl. looping) v vodoravnem letu pri hitrosti 60 m/s. Manever izvaja tako, da v trenutku potegne krmilno palico za določen kot nazaj in nato palico ves čas manevra obdrži v isti legi. Začetni centripetalni pospešek pri manevru je 30 m/s^2 in v smeri navpično navzgor.

Izračunaj lego, hitrost in pospešek letala v odvisnosti od časa v intervalu od začetka izvajanja akrobacije do časa, v katerem bi letalo pri konstantnem pospešku orisalo polni krog. Ali v tem času letalo pride nazaj v začetno smer leta? Koordinatno izhodišče postavi v točko, v kateri letalo preide iz vodoravnega leta v pentljo.

Poleg podanih podatkov uporabi naslednje predpostavke:

- težnostni pospešek je 9,8 m/s^2
- zračni upor lahko zanemarimo, tako da sta edini sili, ki delujeta na letalo, sila teže in sila vzgona, ki je pravokotna na smer trenutne hitrosti letala
- sila vzgona je sorazmerna kvadratu hitrosti letala
- pri manevru se letalo ne vrti okrog svoje vodoravne ali navpične osi
- okoliški zrak miruje glede na Zemljo

Nekaj pojasnil v zvezi z nalogo:

Mehanika letenja je sicer precej zapletena, vendar jo lahko za osnovno razumevanje poenostavimo na nekaj osnovnih pojmov. Na letalo delujejo sila težnosti in aerodinamične sile, ki so posledica gibanja letala v okoliškem zraku. K aerodinamičnim silam prispevajo predvsem krila in trup ter krmilne površine. Zaradi trupa in krill deluje na letalo sila upora, ki jo zaradi manjših izgub poskušamo čimbolj zmanjšati z aerodinamično obliko letala. Krila dajejo letalu vzgon, s katerim v normalnem režimu leta predvsem uravnovesimo silo teže. Vzgon je odvisen predvsem od hitrosti letala glede na okoliški zrak ter od oblike profila in vpadnega kota (kota med srednjico profila in relativno hitrostjo obtekajočega zraka glede na letalo). Z nagibanjem krmilnih ustvarimo ob teh površinah dodatni vzgon, ta pa zarati oddaljenosti od težišča letala ustvari navor, ki povzroči vrtenje letla v različnih oseh. Odklon krilc (na zunanji strain kril) povzroči vrtenje okrog vodoravne osi, odklon smernega krmila (navpična krmilna površina na repu) vrtnje okrog navpične osi in odklon višinskega krmila (vodoravna krmilna površina na repu) odklon okrog prečne osi.

Ko se letalo ne nagiba, lahko rezultanto aerodinamičnih sil razstavimo na zračni upor, ki deluje v nasprotni smeri od smeri letenja, in na vzgon, ki deluje v pravokotni smeri glede na hitrost letala, ki se približno ujem s smerjo navpične osi. Pri hitrostih iz naloge je zračni upor vsekakor upoštevanja vreden, vendar so sodobna jadralna letala tako dobro oblikovana, da so drsna razmerja 1:45 in več.

V vodoravnem letu sila vzgona deluje v navpični smeri in ravno uravnovesi silo teže. Ko pilot nagne višinsko krmilo nazaj, se letalo začne vrteti okrog prečne osi, kar povzroči povečanje vpadnega kot zraka glede na krila letala in zato povečanje vzgona. Presežni vzgon povzroči cenripetalni pospešek in letalo se prične gibati približno v krožnem loku. Iz začetnega centripetalnega pospeška zmanjšanega za težnostni pospešek in iz hitrosti lahko izračunamo sorazmernostni koeficient med silo vzgona in kvadratom hitrosti letala, za katerega smo predpostavili, da je konstanten.

Zaradi centripetalnega pospeška se začne letalo dvigati in zaradi sile teže izgubljati hitrost (ker teža ne deluje več pravokotno na smer hitrosti). Zaradi zmanjšane hitrosti se zmanjšuje tudi vzgon (saj je ta sorazmeren kvadratu hitrosti), kar vpliva na manjši centripetalni pospešek. Če se hitrost ne bi zmanjševala, bi se pri gibanju po loku navzgor centripetalni pospešek povečeval, ker sila teže ni več usmerjena nasprotno od sile vzgona.

Opisane razmere veljajo, dokler letalo ne doseže zgornje točke pentlje, potem se razmere obrnejo.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/File:Loop1.gif
http://en.wikipedia.org/wiki/Circular_motion
http://en.wikipedia.org/wiki/Flight_dynamics

4 DIF04 POŠEVNI MET Z UPOŠTEVANJEM ZRAČNEGA UPORA

Telo vržemo poševno v zrak. Izračunaj njegovo trajektorijo, pri čemer upoštevaš kvadratni zakon upora.

Podatki:

- m = 0.145 kg (masa telesa)
- v_0 = 44.7 m/s (začetna hitrost)
- $\theta = 45^\circ$ (začetni kot, pod katerim vržemo telo)
- g = -9.81 m/s² (težnostni pospešek)
- v_t = -33.0 m/s (končna navpična hitrost, ki bi jo telo doseglo pri prostem padu)

Opomba: Iz končne hitrosti in mase lahko sklepaš na produkt koeficienta zračnega upora in površine, ki ga potrebuješ v izrazu za silo zračnega upora.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Projectile_motion
http://en.wikipedia.org/wiki/Terminal_velocity

5 DIF05 PRAZNJENJE PLINSKEGA REZERVOARJA SKOZI ODPRTINO V STENI

Rezervoar z neprepustnimi stenami in odprtino napolnimo z idealnim plinom pod tlakom in ga zamašimo. V nekem trenutku odstranimo zamešek, da začne plin iztekati iz rezervoarja. Zanima nas, kakšen je časovni potek tlaka v rezervoarju.

Iz meritev opravljenih s podobnimi rezervoarji vemo, da plin izteka, kot da za pretok skozi odprtino velja naslednji zakon upora:

$$\Delta p = C_u \ \rho v^2 \quad , \tag{5}$$

kjer je $\Delta p = p - p_z$ razlika med trenutnim tlakom v rezervoarju p in med zunanjim tlakom p_z, ρ trenutna gostota plina v rezervoarju, v trenutna povprečna hitrost iztekanja plina iz rezervoarja merjena pri tlaku v rezervoarju in C_u neznana konstanta.

Privzamemo, da za plin v rezervoarju velja Avogadrov zakon:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1 n_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2 n_2} = konst., \tag{6}$$

da se temperature plina v rezervoarju s časom ne spreminja in da je okoliški tlak konstanten. V zgornji enačbi je p tlak plina, V njegov volumen, T temperatura in n količina plina v molih, indeksa 1 in 2 pa se nanašata na dve različni količini istega plina pri različnih pogojih.

Podatki so naslednji:

- volumen rezervoarja: V=5 m^3
- zunanji tlak: p_z=100 kPa
- začetni tlak v rezervoarju: $p(t=0)$=200 kPa
- začetni volumski pretok <u>pri tlaku znotraj rezervoarja</u>: $\phi(t=0) = 10^{-3}\,\frac{m^3}{s}$

Izračunaj časovni potek tlaka v rezervarju od trenutka, ko odstranimo zamašek, pa približno do časa, ko razlika med tlakom v rezervoarju in med zunanjim tlakom pade na desetino začetne razlike. Ta čas lahko določiš s poskušanjem, za prvi približek vzemi čas, ko bi pri konstantnem začetnem pretoku iztekanja volumen iztečenega plina dosegel volumen rezervoarja.

Opozorilo:
Pri hitrosti iztekanja plina iz rezervoarja upoštevaj, da je trenutna gostota plina v rezervoarju obratno sorazmerna s trenutnim tlakom v rezervoarju!

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law
http://en.wikipedia.org/wiki/Avogadro%27s_law
http://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)

6 DIF06 PUŠČANJE REZERVOARJA S POROZNIMI STENAMI

Rezervoar s poroznimi stenami napolnimo z idealnim plinom pod tlakom in ga zapremo. Zaradi poroznosti plin počasi izteka iz rezervoarja. Zanima nas, kakšen je časovni potek tlaka v rezervoarju.

Iz meritev opravljenih s podobnimi rezervoarji vemo, da za hitrost iztekanja plina velja:

$$\Delta p = C_v\,\phi = C_v \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{\rho} C_v \frac{dm}{dt} \ , \tag{7}$$

kjer je $\Delta p = p - p_z$ razlika med trenutnim tlakom v rezervoarju p in med zunanjim tlakom p_z, ϕ volumski pretok plina, ki izteka iz rezervoarja (pri tem volumen merimo pri tlaku v rezervoarju) in C_v neznana konstanta.

Privzamemo, da za plin v rezervoarju velja Avogadrov zakon:

$$\frac{p_1 V_1}{T_1 n_1} = \frac{p_2 V_2}{T_2 n_2} = konst., \tag{8}$$

da se temperature plina v rezervoarju s časom ne spreminja in da je okoliški tlak konstanten. V zgornji enačbi je p tlak plina, V njegov volumen, T temperatura in n količina plina v molih, indeksa 1 in 2 pa se nanašata na dve različni količini istega plina pri različnih pogojih.

Podatki so naslednji:

- volumen rezervoarja: V= 1 m^3
- zunanji tlak: p_z=100 kPa
- začetni tlak v rezervoarju: $p(t=0)$=200 kPa
- začetni volumski pretok pri tlaku znotraj rezervoarja: $\phi(t=0)=10^{-4}\frac{m^3}{s}$

Izračunaj časovni potek tlaka v rezervarju v prvih petih urah.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Ideal_gas_law
http://en.wikipedia.org/wiki/Avogadro%27s_law

http://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity

7 DIF07 NIHANJE NABITEGA DELCA MED TOČKASTIMA ELEKTRIČNIMA NABOJEMA Z ENAKIM PREDZNAKOM

Pozitivno nabit delec mase m=10^{-9} kg in naboja 10^{-11} As niha v vakuumu na zveznici med dvema mirujočima točkastima nabojema enakega predznaka in velikosti. Vzamemo, da na delec delujejo samo elektrostatične sile zaradi obeh mirujočih nabojev. Razdalja med mirujočima nabojema je 1 mm, najmanjša razdalja med nihajočim in mirujočim nabojem pa 0,01 mm. Izračunaj pozicijo nihajočega naboja v odvisnosti od časa vsaj za en cel nihaj. Čas začni meriti v eni od skrajnih leg nihajočega naboja. Oceni nihajni čas.

Približen nihajni čas, s katerim določiš časovni interval računanja, lahko ugotoviš s poskušanjem. Prva ocena je lahko dvakratni preletni čas delca, ki bi se gibal z enakomerno hitrostjo enako maksimalni hitrosti v opisanem sistemu. Maksimalno hitrost lahko izračunaš iz mase delca in razlike potencialnih energij med ravnovesno in skrajno lego delca.

Za velikost elektrostatične silo med točkastima nabojema velja

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, \tag{9}$$

kjer sta e_1 in e_2 naboja, r razdalja med nabojema in

$$\varepsilon_0 = 8{,}8542 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}.$$

Dodatek (neobvezno):

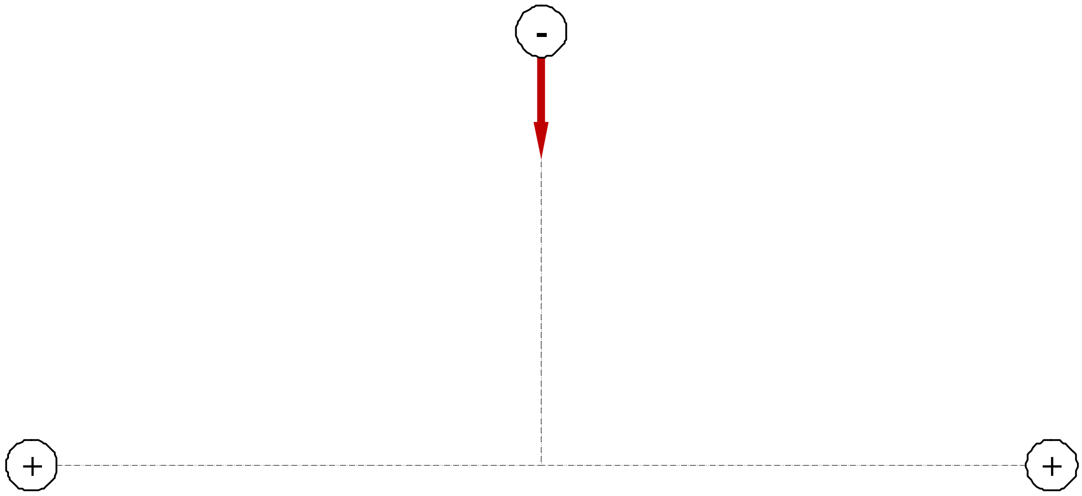
V nasprotju s harmoničnim nihalom, pri katerem je pospešek sorazmeren odmiku od ravnovesne lege, je nihajni čas pri tem sistemu močno odvisen od amplitude nihanja. Izračunaj nihajne čase za deset različnih amplitud med 0,01 mm do 0,49 mm z enakomernimi razmiki.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatic_potential
http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics

8 DIF08 NIHANJE NABITEGA DELCA MED TOČKASTIMA ELEKTRIČNIMA NABOJEMA Z NASPROTNIM PREDZNAKOM OD NABOJA DELCA

Negativno nabit delec mase m=10^{-9} kg in naboja 10^{-11} As niha v vakuumu prečno na zveznico med dvema mirujočima pozitivnima točkastima nabojema enake velikosti. Vzamemo, da na delec delujejo samo elektrostatične sile zaradi obeh mirujočih nabojev. Razdalja med mirujočima nabojema je 1 mm, največja razdalja med nihajočim nabojem in zveznico med mirujočima nabojema pa ravno tako 1 mm. Izračunaj pozicijo nihajočega naboja v odvisnosti od časa vsaj za en cel nihaj. Čas začni meriti v eni od skrajnih leg nihajočega naboja. Oceni nihajni čas.

Približen nihajni čas, s katerim določiš časovni interval računanja, lahko ugotoviš s poskušanjem. Prva ocena je lahko na primer dvakratni preletni čas delca, ki bi se gibal z enakomerno hitrostjo enako maksimalni hitrosti v opisanem sistemu. Maksimalno hitrost lahko izračunaš iz mase delca in razlike potencialnih energij med ravnovesno in skrajno lego delca.



Za velikost elektrostatične silo med točkastima nabojema velja

$$F = \frac{e_1 e_2}{4\pi \varepsilon_0 r^2}, \tag{10}$$

kjer sta e_1 in e_2 naboja, r razdalja med nabojema in

$$\varepsilon_0 = 8,8542 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}.$$

Dodatek (neobvezno):

V nasprotju s harmoničnim nihalom, pri katerem je pospešek sorazmeren odmiku od ravnovesne lege, je nihajni čas pri tem sistemu močno odvisen od amplitude nihanja. Izračunaj nihajne čase za deset različnih amplitud med 0,01 mm in 1 mm z enakomernimi razmiki.

Koristne povezave:

http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatic_potential
http://en.wikipedia.org/wiki/Electrostatics

9 DIF09 – NITNO NIHALO Z VISKOZNIM DUŠENJEM

Na tanki jekleni žici dolžine l = 2 m je utež mase m=1kg. Žica je togo vpeta pod stropom. Nihalo odmaknemo za kot $\theta_0 = 45^\circ$ iz ravnovesne lege in ga izpustimo. Na nihalo deluje poleg sile teže še sila upora, ki je sorazmerna hitrosti uteži, tako da velja

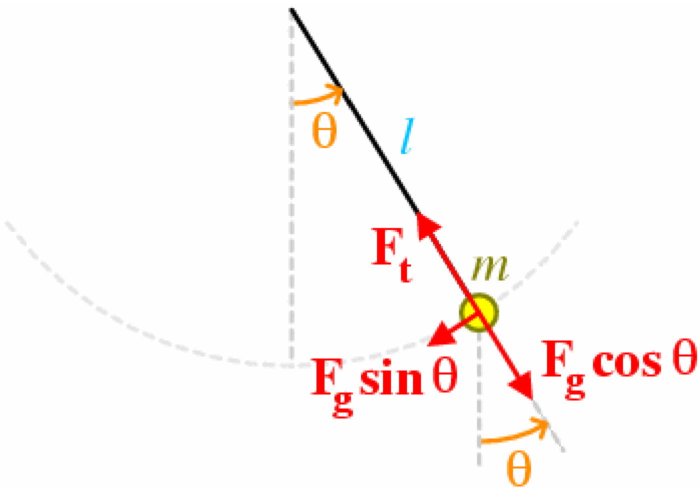
$$\mathbf{F} = -k_u\, \mathbf{v}\,, \tag{11}$$

kjer je k_u koeficient dušenja. Težnostni pospešek je g=9,8 m/s^2.

Izračunaj nihanje nihala $\theta(t)$ v časovnem intervalu od 0 do 8 T, kjer je

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{12}$$

Koeficient dušenja je enak $k_u = 0.1\,\dfrac{N\,s}{m}$.



Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum
http://newton.ex.ac.uk/research/qsystems/people/sque/physics/simple-pendulum/
http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_(mathematics)

10DIF10 – NIHANJE VZMETNEGA NIHALA Z UPOROM

Opazujemo vzmetno nihalo, ki je sestavljeno iz prožne vzmeti, ki je na eni strani togo vpeta, na drugi pa je nanjo pritrjena utež mase *m*. Nihalo lahko prosto niha v vodoravni smeri (os *x*), maso vzmeti in trenje s podlago lahko zanemarimo.

Pri majhnih amplitudah nihanja, ko lahko zanemarimo zračni upor, velja

$$F = m\frac{d^2 x}{d t^2} = -k x , \tag{13}$$

kjer je *F* sila vzmeti, *m* masa uteži, *x* odmik iz ravnovesne lege vzmeti, *t* čas in *k* koeficient vzmeti. V tem primeru utež niha po enačbi

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\; t \right), \tag{14}$$

kjer je *A* amplituda nihanja in velja predpostavka, da ima ob času *t*=0 hitrost uteži *v*=0 in odmik iz ravnovesne lege *x*=0.

V tem primeru je frekvenca nihanja enaka

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{15}$$

Nihajni čas je enak

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}, \tag{16}$$

kotna hitrost je enaka

$$\omega_0 = 2\pi\nu_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \tag{17}$$

največja hitrost uteži je

$$v_0 = A\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{18}$$

in jo utež doseže, ko gre skozi ravnovesno lego.

Zanima nas nihanje nihala, kjer na utež poleg sile vzmeti deluje še sila upora, ki je sorazmerna kvadratu trenutne hitrosti in kaže v nasprotni smeri hitrosti vzmeti, tako da velja

$$F_u = -k_u |v| v\,. \tag{19}$$

Izračunaj nihanje nihala v času od 0 do 10 T_0 z naslednjimi podatki:

- m = 0,1 kg
- k = 40 N/m
- Ob času t=0 je odmik iz ravnovesne lege enak $x(0) = A$ = 0,5 m, hitrost pa je enaka 0, $v(0)$ = 0.
- Velikost sile upora pri hitrosti 10 m/s je 10 N.

Iz izračunanih pomikov v odvisnosti od časa oceni zaporedne nihajne čase tako, da meriš čas med trenutki, ko gre nihalo skozi ravnovesno lego. Za to lahko uporabiš linearno interpolacijo pomika v odvisnosti od časa med najbljižjima izračunanima trenutkoma, ko je nihalo na nasprotnih straneh ravnovesne lege. Primerjaj zaporedne nihajne čase z nihajnim časom nedušenega nihanja T_0.

Nihanje izračunaj še za 100 nihajev.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Oscillation
http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic_oscillator

11INT01 LOM SVETLOBE V NEHOMOGENI SNOVI

Na veliko planparalelno vodoravno ploščo debeline h = 0,1 m iz nehomogene prozorne snovi posvetimo z laserskim žarkom pod vpadnim kotom 45°. Plošča je narejena tako, da lomni koeficient pada z globino po enačbi

$$n(h) = n_0 + \delta \; e^{-(h/h_0)^2}, \tag{20}$$

kjer je $n_0 = 1,2$, $\delta = 0,3$ in h_0=0,05 m. Nad ploščo je zrak, za katerega privzamemo, da je lomni količnik kar enak 1.

Izračunaj pot žarka $x(h)$! Za koliko je na dnu plošče žarek odklonjen od tistega, ki bi ga dobili s homogeno ploščo z lomnim količnikom n_0?

Izračunaj, kolikšen bi moral biti parameter h_0, da bi žarek zadel dno plošče natančno na sredini med mestom, kjer bi žarek zadel dno v primeru, da je plošča homogena z lomnim količnikom n_0, in mestom, kjer bi žarek zadel dno v primeru, da je plošča homogena z lomnim količnikom $n_0 + \delta$.

Namig:
Kot, pod katerim je na dani globini usmerjen žarek glede na pravokotnico na ploščo, ni odvisen od prepotovane poti, temveč le od vpadnega kota in od lomnega količnika na trenutni globini. Za kote velja enačba

$$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{n_2}{n_1}. \tag{21}$$

Z $n=c/v$ smo označili lomni količnik snovi, po kateri potuje svetloba, in je enak razmerju med hitrostjo potovanja svetlobe v vakuumu c in hitrostjo potovanja svetlobe v tej snovi v. S θ označujemo kot žarka glede na normalo na ploskev, na katero pada svetloba.

Koristne povezave:
http://en.wikipedia.org/wiki/Refraction
http://en.wikipedia.org/wiki/Gradient_index_optics

12INT02 – ELEKTRIČNI POTENCIAL V POLJU TOČKASTIH NABOJEV

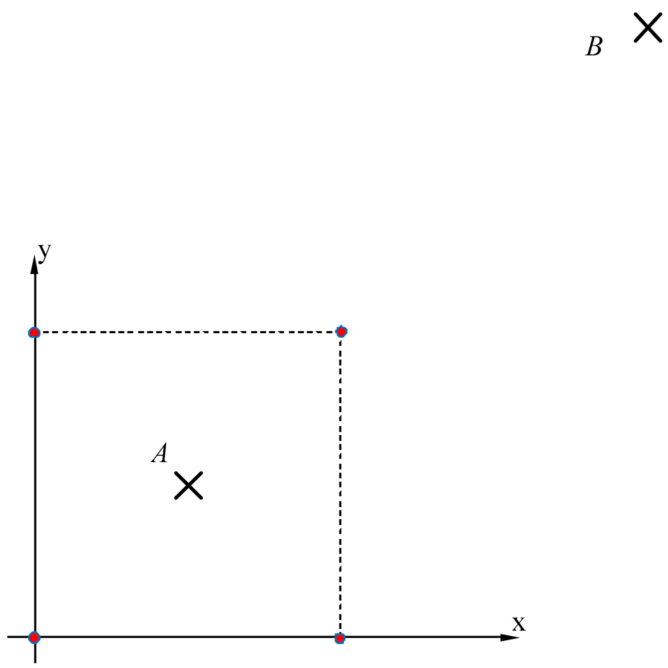
V ravnini so razporejeni točkasti električni naboji, kot je podano v tabeli. Izračunaj razliko električnega potenciala (napetost) med točkama A in B z numerično integracijo skupnega električnega polja nabojev po izbrani poti, kjer je referenčni naboj e_0=0,01 As, točki pa imata koordinate

A=(0.5 m, 0.5 m)
B=(2 m, 2 m)

Primerjaj tako izračunani potencial z vrednostjo, ki jo dobiš s seštevanjem potencialov točkastih nabojev!

Tabela 1: Koordinate in velikostis statičnih nabojev, naboji so podani kot večkratnik referenčnega naboja e_0.

Koordinate naboja		Naboj
x[m]	y[m]	$e[e_0]$
0	0	1
1	0	1
1	1	1
0	1	1



Slika 1: Razporeditev nabojev

Električni potencial je definiran kot krivuljni integral

$$\phi_E = \int_C \mathbf{E}\, d\mathbf{s} \quad . \tag{22}$$

Električno polje točkastega naboja je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \tag{23}$$

kjer je e naboj, **r** pa razlika med koordinatami točke, v kateri merimo jakost električnega polja, in koordinatami naboja. $\varepsilon_0 = 8,8542\, As/Vm$ je influenčna konstanta.

Potencial, ki ga ustvari točkast naboj, je

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad . \tag{24}$$

Namig:
Pri računanju potenciala lahko integriraš po poljubni poti. Pot lahko sestaviš tudi iz več ravnih odsekov tako, da se izogneš morebitnim singularnostim.

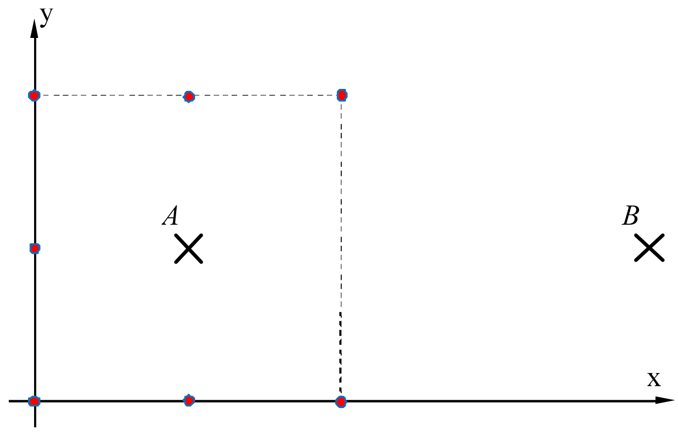
13INT03 – POTENCIAL V POLJU TOCKASTIH NABOJEV

V ravnini so razporejeni točkasti električni naboji, kot je podano v tabeli. Izračunaj razliko električnega potenciala (napetost) med točkama A in B z numerično integracijo skupnega električnega polja nabojev po izbrani poti, kjer je referenčni naboj e_0=0,01 As, točki pa imata koordinate
A=(0.5 m, 0.5 m)
B=(0,5 m, 2 m)

Primerjaj tako izračunani potencial z vrednostjo, ki jo dobiš s seštevanjem potencialov točkastih nabojev!

Tabela 2: Koordinate in velikostis statičnih nabojev, naboji so podani kot večkratnik referenčnega naboja e_0.

Koordinate naboja		Naboj
x[m]	y[m]	$e[e_0]$
0	0	1
1	0	1
1	1	1
0	1	1
0.5	0	1
0.5	1	1
0	0.5	1



Slika 2: Razporeditev nabojev

Električni potencial je definiran kot krivuljni integral

$$\phi_E = \int_C \mathbf{E}\, d\mathbf{s} \quad . \tag{25}$$

Električno polje točkastega naboja je

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{e}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} \quad , \tag{26}$$

kjer je e naboj, $\mathbf{r}$ pa razlika med koordinatami točke, v kateri merimo jakost električnega polja, in koordinatami naboja. $\varepsilon_0 = 8{,}8542\, As/Vm$ je influenčna konstanta.

Potencial, ki ga ustvari točkast naboj, je

$$\phi = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 r} \quad . \tag{27}$$

Namig:
Pri računanju potenciala lahko integriraš po poljubni poti. Pot lahko sestaviš tudi iz več ravnih odsekov tako, da se izogneš morebitnim singularnostim.

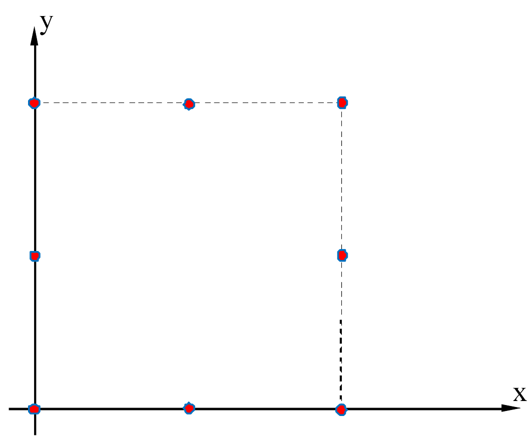
14MIN01 RAVNOVESNA LEGA NABITEGA DELCA V ELEKTROSTATIČNEM POLJU TOČKASTIH NABOJEV – KVADRAT

V ravnini so razporejeni pozitivni točkasti naboji, kot je podano v tabeli. Najdi vsaj eno stabilno ravnovesno lego pozitivnega točkasteg naboja, katerega gibanje je omejeno na to ravnino!

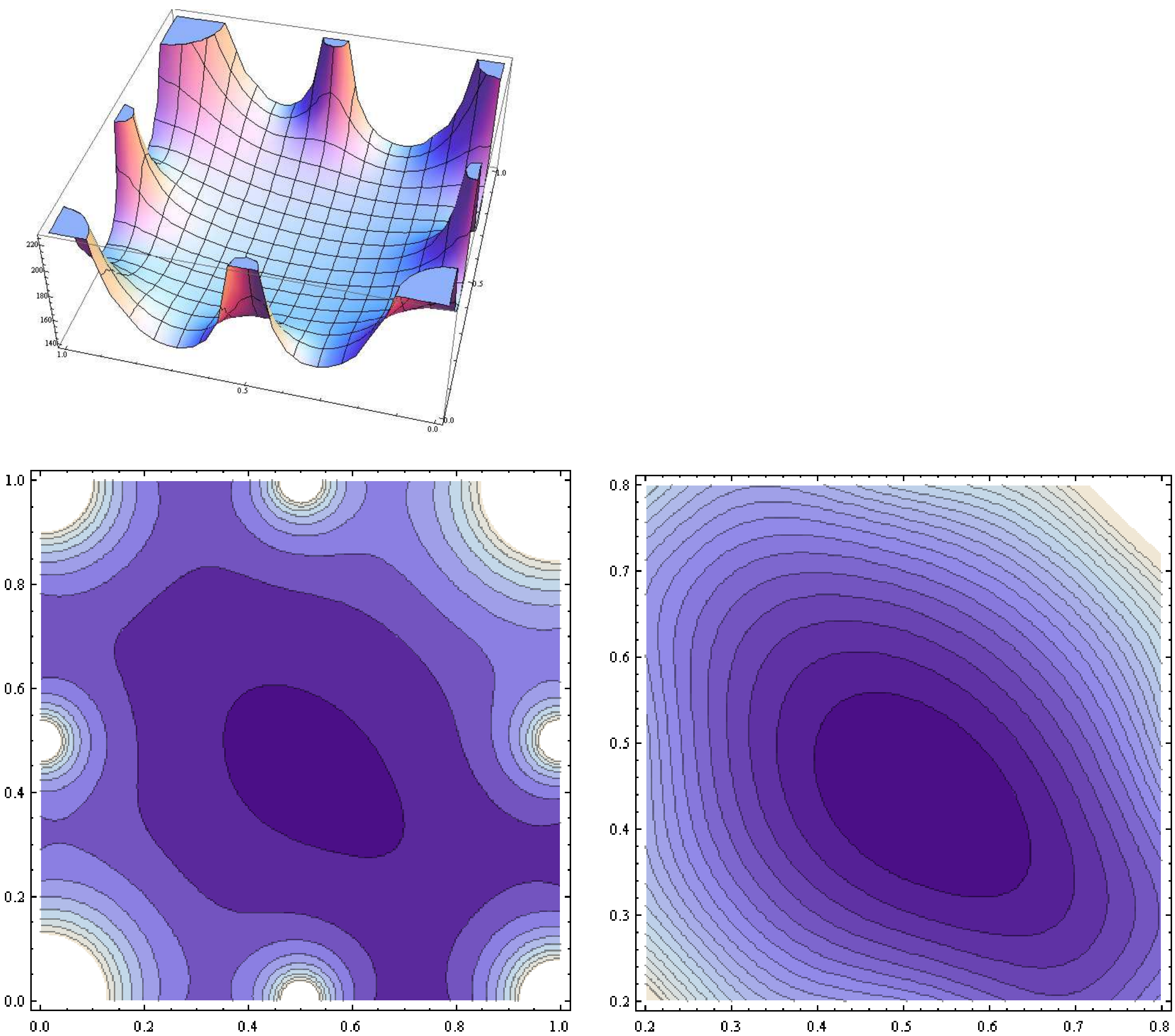
Da je izračunana točka v resnici ravnovesna lega, preveri tako, da izračunaš električne potenciale v ravnovesni točki in še v štirih točkah, ki so za milimeter premaknjene glede na izračunano točko v smeri x ali y v eno ali drugo smer. Izpiši vrednosti potencialov v stabilni legi in kontrolnih točkah!

Tabela 3: Koordinate in velikostis statičnih nabojev, naboji so podani kot večkratnik referenčnega naboja e_0.

Koordinate naboja		Naboj
x[m]	y[m]	$e[e_0]$
0	0	20
1	0	12
1	1	24
0	1	15
0.5	0	5
1	0.5	5
0.5	1	5
0	0.5	5



Slika 3: Razporeditev nabojev



Slika 4: Prikaz električnega potenciala statičnih nabojev. Graf je lahko v pomoč pri izbiri začetnega približka in pri izbiri kazenskih členov, če so ti potrebni.

Pomoč:

Za minimizacijo potenciala lahko uporabiš metodo za minimizacijo brez omejitev (BFGS), ki smo jo uporabili pri eni od vaj. Za začetni približek vzameš točko blizu težišča nabojev.

Problem, ki se lahko pojavi pri tej nalogi, je, da metoda zdivergira vstran od območja med statičnimi naboji, saj se z oddaljenostjo od tega območja potencial manjša. Rešitev bi bila omejiti dovoljeno območje, na katerem lahko metoda išče rešitev. Ker metoda ni neposredno prilagojena minimizaciji z omejitvami, lahko to dosežemo z dodatkom primernih kazenskih členov funkciji, ki jo minimiziramo. Ti morajo biti dovolj zvezni (zvezen 2. odvod), z oddaljenostjo od dovoljenega območja morajo dovolj hitro naraščati (je njihov gradient vedno velik v primerjavi z gradientom minimizirane funkcije), znotraj dovoljenega območja pa morajo biti enaki 0, da ne pokvarijo rešitve.

Pomagamo si lahko tudi z zaporednim reševanjem več zaporednih minimizacijskih problemov, kjer uporabimo različne kazenske člene. Pri tem za začetni približek vsakega naslednjega problema vzamemo rešitev prejšnjega problema.

Za kazenski člen je priročno vzeti funkcijo oblike

$$f_p(\mathbf{x}) = g_p\left(\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_c\|\right) \,, \tag{28}$$

kjer je na primer

$$g_p(r) = \begin{cases} 0\,;\, r \le r_0 \\ h\left(\dfrac{r-r_0}{d}\right)^4 ;\, r > r_0 \end{cases} \,. \tag{29}$$

Tu je $\mathbf{x}_c$ središče območja, v katerem iščemo rešitev, r_0 pa polmer tega območja. Parametra h in d nastavimo glede na to, kako ostro želimo uveljaviti omejitev. Če je h prevelik ali d premali, lahko povzročimo težave pri konvergenci, če pa je obratno, se nam lahko zgodi, da kazenski člen ne prepreči konvergence izven željenega območja.

Pri reševanju naloge lahko kazenske člene izbereš tudi po svoje, izbiro opiši in komentiraj poročilu.

15MIN02 RAVNOVESNA LEGA NABITEGA DELCA V ELEKTROSTATIČNEM POLJU TOČKASTIH NABOJEV – PRAVOKOTNIK

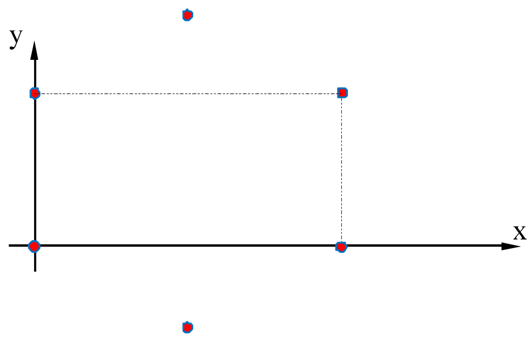
V ravnini so razporejeni pozitivni točkasti naboji, kot je podano v tabeli. Najdi vsaj eno stabilno ravnovesno lego pozitivnega točkasteg naboja, katerega gibanje je omejeno na to ravnino!

Da je izračunana točka v resnici ravnovesna lega, preveri tako, da izračunaš električne potenciale v ravnovesni točki in še v štirih točkah, ki so za milimeter premaknjene glede na izračunano točko v smeri x ali y v eno ali drugo smer. Izpiši vrednosti potencialov v stabilni legi in kontrolnih točkah!

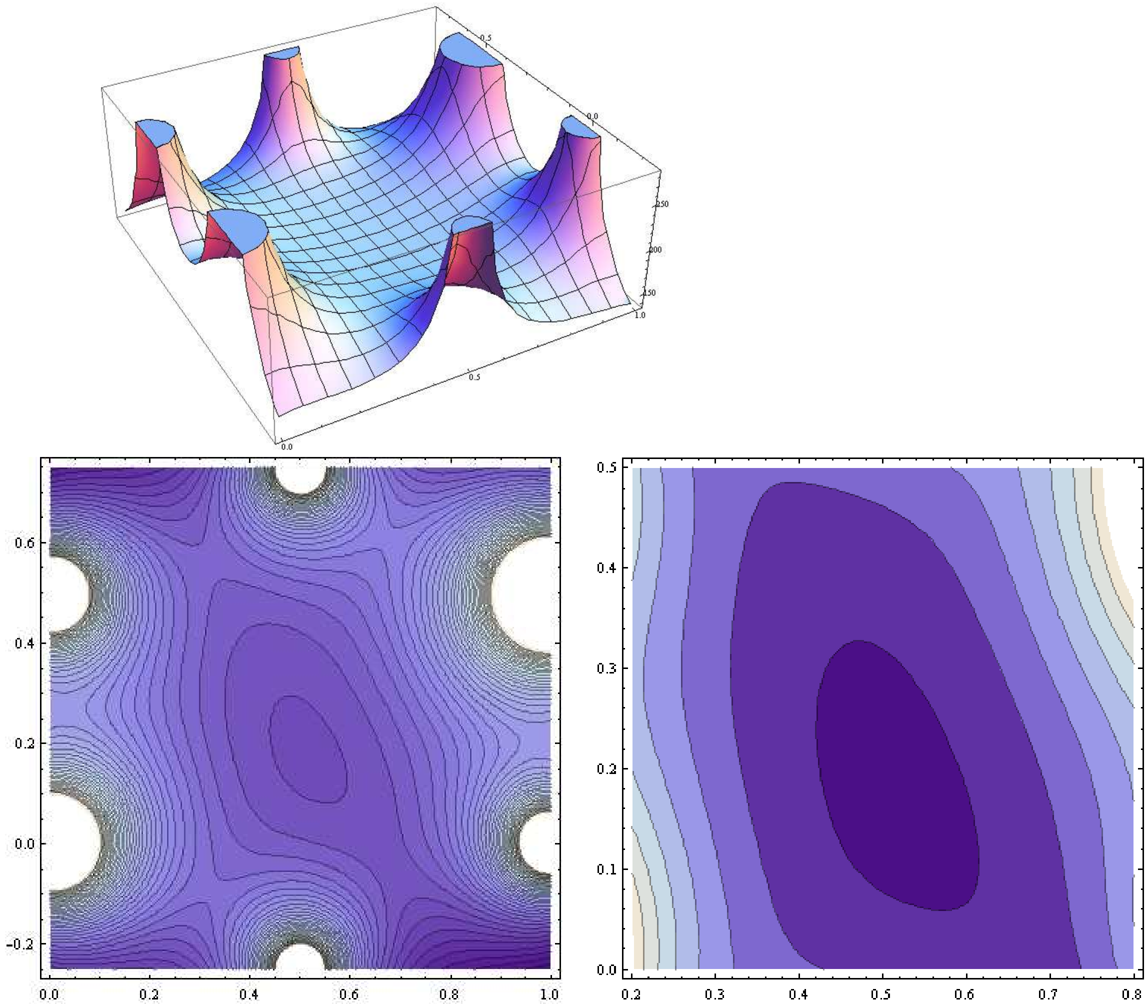
Tabela 4: Koordinate in velikostis statičnih nabojev, naboji so podani kot večkratnik referenčnega naboja e_0.

Koordinate naboja		Naboj
x[m]	y[m]	$e[e_0]$
0	0	20
1	0	12
1	0.5	24
0	0.5	15

0.5	-0.25	10
0.5	0.75	10



Slika 5: Razporeditev nabojev



Slika 6: Prikaz električnega potenciala statičnih nabojev. Graf je lahko v pomoč pri izbiri začetnega približka in pri izbiri kazenskih členov, če so ti potrebni.

Pomoč:

Za minimizacijo potenciala lahko uporabiš metodo za minimizacijo brez omejitev (BFGS), ki smo jo uporabili pri eni od vaj. Za začetni približek vzameš točko blizu težišča nabojev.

Problem, ki se lahko pojavi pri tej nalogi, je, da metoda zdivergira vstran od območja med statičnimi naboji, saj se z oddaljenostjo od tega območja potencial manjša. Rešitev bi bila omejiti dovoljeno območje, na katerem lahko metoda išče rešitev. Ker metoda ni neposredno prilagojena minimizaciji z omejitvami, lahko to dosežemo z dodatkom primernih kazenskih členov funkciji, ki jo minimiziramo. Ti morajo biti dovolj zvezni (zvezen 2. odvod), z oddaljenostjo od dovoljenega območja morajo dovolj hitro naraščati (je njihov gradient vedno velik v primerjavi z gradientom minimizirane funkcije), znotraj dovoljenega območja pa morajo biti enaki 0, da ne pokvarijo rešitve.

Pomagamo si lahko tudi z zaporednim reševanjem več zaporednih minimizacijskih problemov, kjer uporabimo različne kazenske člene. Pri tem za začetni približek vsakega naslednjega problema vzamemo rešitev prejšnjega problema.

Za kazenski člen je priročno vzeti funkcijo oblike

$$f_p(\mathbf{x}) = g_p\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_c\right\|\right) , \tag{30}$$

kjer je na primer

$$g_p(r) = \begin{cases} 0\,;\, r \le r_0 \\ h\left(\dfrac{r-r_0}{d}\right)^4 ;\, r > r_0 \end{cases} . \tag{31}$$

Tu je $\mathbf{x}_c$ središče območja, v katerem iščemo rešitev, r_0 pa polmer tega območja. Parametra h in d nastavimo glede na to, kako ostro želimo uveljaviti omejitev. Če je h prevelik ali d premali, lahko povzročimo težave pri konvergenci, če pa je obratno, se nam lahko zgodi, da kazenski člen ne prepreči konvergence izven željenega območja.

Pri reševanju naloge lahko kazenske člene izbereš tudi po svoje, izbiro opiši in komentiraj v poročilu.

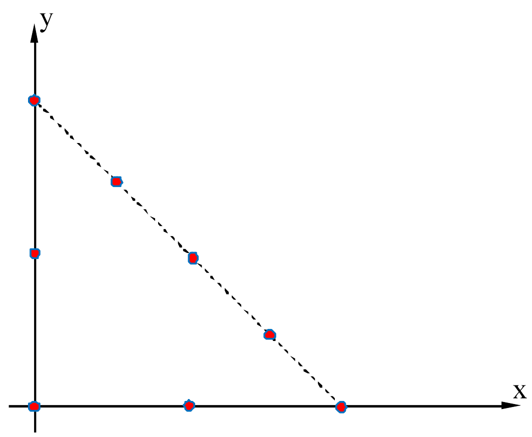
16MIN03 RAVNOVESNA LEGA NABITEGA DELCA V ELEKTROSTATIČNEM POLJU TOČKASTIH NABOJEV –TRIKOTNIK

V ravnini so razporejeni pozitivni točkasti naboji, kot je podano v tabeli. Najdi vsaj eno stabilno ravnovesno lego pozitivnega točkasteg naboja, katerega gibanje je omejeno na to ravnino!

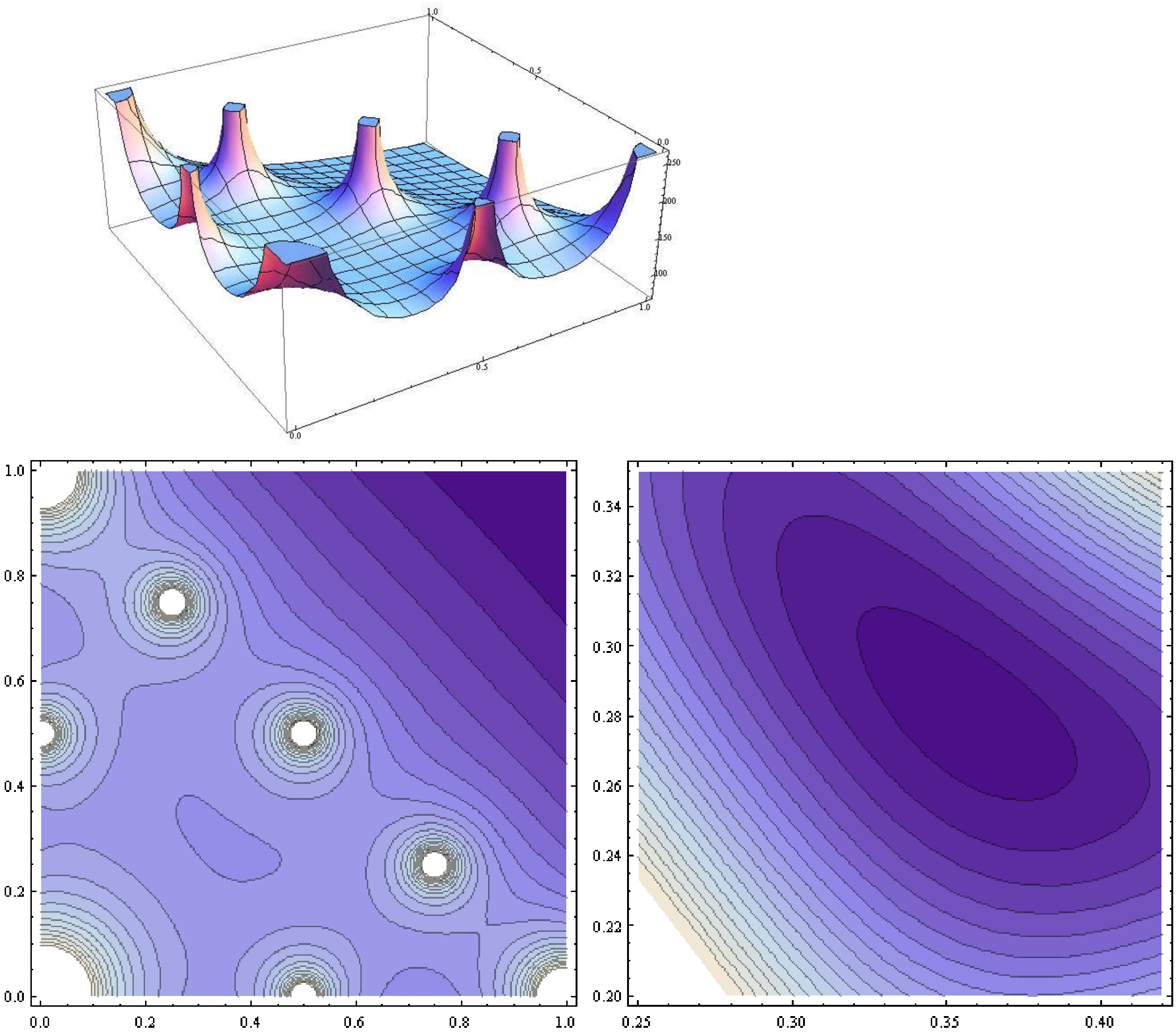
Da je izračunana točka v resnici ravnovesna lega, preveri tako, da izračunaš električne potenciale v ravnovesni točki in še v štirih točkah, ki so za milimeter premaknjene glede na izračunano točko v smeri x ali y v eno ali drugo smer. Izpiši vrednosti potencialov v stabilni legi in kontrolnih točkah!

Tabela 5: Koordinate in velikostis statičnih nabojev, naboji so podani kot večkratnik referenčnega naboja e_0.

Koordinate naboja		Naboj
x[m]	y[m]	$e[e_0]$
0	0	20
1	0	12
0	1	15
0.5	0	5
0.25	0.75	5
0.5	0.5	5
0.75	0.25	5
0	0.5	5



Slika 7: Razporeditev nabojev



Slika 8: Prikaz električnega potenciala statičnih nabojev. Graf je lahko v pomoč pri izbiri začetnega približka in pri izbiri kazenskih členov, če so ti potrebni.

Pomoč:

Za minimizacijo potenciala lahko uporabiš metodo za minimizacijo brez omejitev (BFGS), ki smo jo uporabili pri eni od vaj. Za začetni približek vzameš točko blizu težišča nabojev.

Problem, ki se lahko pojavi pri tej nalogi, je, da metoda zdivergira vstran od območja med statičnimi naboji, saj se z oddaljenostjo od tega območja potencial manjša. Rešitev bi bila omejiti dovoljeno območje, na katerem lahko metoda išče rešitev. Ker metoda ni neposredno prilagojena minimizaciji z omejitvami, lahko to dosežemo z dodatkom primernih kazenskih členov funkciji, ki jo minimiziramo. Ti morajo biti dovolj zvezni (zvezen 2. odvod), z oddaljenostjo od dovoljenega območja morajo dovolj hitro naraščati (je njihov gradient vedno velik v primerjavi z gradientom minimizirane funkcije), znotraj dovoljenega območja pa morajo biti enaki 0, da ne pokvarijo rešitve.

Pomagamo si lahko tudi z zaporednim reševanjem več zaporednih minimizacijskih problemov, kjer uporabimo različne kazenske člene. Pri tem za začetni približek vsakega naslednjega problema vzamemo rešitev prejšnjega problema.

Za kazenski člen je priročno vzeti funkcijo oblike

$$f_p(\mathbf{x}) = g_p\left(\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_c\right\|\right) , \qquad (32)$$

kjer je na primer

$$g_p(r) = \begin{cases} 0\,;\, r \le r_0 \\ h\left(\dfrac{r-r_0}{d}\right)^4 ;\, r > r_0 \end{cases} . \qquad (33)$$

Tu je $\mathbf{x}_c$ središče območja, v katerem iščemo rešitev, r_0 pa polmer tega območja. Parametra h in d nastavimo glede na to, kako ostro želimo uveljaviti omejitev. Če je h prevelik ali d premali, lahko povzročimo težave pri konvergenci, če pa je obratno, se nam lahko zgodi, da kazenski člen ne prepreči konvergence izven željenega območja.

Pri reševanju naloge lahko kazenske člene izbereš tudi po svoje, izbiro opiši in komentiraj v poročilu.

17MIN04 UTEŽI NA ELASTIČNIH VRVICAH

Na visoka navpična toga droga enake višine obesimo uteži na stišiščih treh elastičnih gibkih vrvic, ki so med sabo spete na krajiščih in pritrjene na vrhova drogov, kot je shematično prikazano na sliki. Odvisnost sile vrvic od raztezka je nelinearna in jo opiše enačba

$$F = -k\,\delta l - c\,\delta l^3 , \qquad (34)$$

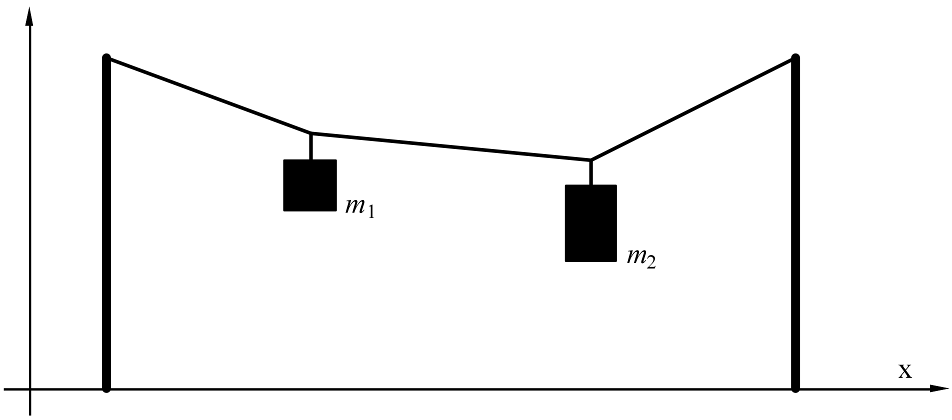
kjer je F sila vrvice, ki deluje v nasprotni smeri raztezka, δl je raztezek vrvice. Vrednosti koeficientov sta

- $k = 100$ N/m
- $c = 200$ N/m^3

Razdalja med drogoma je d=3mm dolžina vsake od vrvic v neobremenjenem stanju je l=3m, masi uteži pa sta m_1=1kg (utež na levi strain slike) in m_2=2kg. Težnostni pospešek je g=9,81m/s^2. Maso vrvic in upogib drogov zanemarimo.

Izračunaj koordinate obeh stičošč vrvic, kjer sta pripeti uteži, ter sile in raztezke vseh treh vrvic. Koordinatno izhodišče postavi na vrh levega droga.

Izračunaj še iste količine za primer, ko bi bil odziv vrvic linearen, torej c=0, in izpiši razlike.



Slika 9: Uteži na elastičnih vrvicah

Namigi:

Ravnovesni legi lahko izračunaš z minimizacijo skupne prožnostne energije vrvic in potencialne energije vzmeti. Kot vedno pri takšnih problemih je potrebno pri zapisu enačb paziti na predznake. Za minimizacijo lahko uporabiš knjižnico, ki smo jo uporabili na vajah. Za neodvisne spremenljivke je najbolje vzeti kar koordinate stičišč vrvic, kjer sta vpeti uteži.

Ker so vrvice gibke, ne prenašajo sil pri skrčkih kot vzmeti. Ker pa je iz skice problema razvidno, da bodo v rešitvi problema vse vrvice napete, lahko le-te vseeno modeliramo kot vzmeti in upoštevamo, kot da pri skrčitvi vrvica deluje s silo, ki se krčenju upira. S tem se olajšamo implementacijo problema in se izognemo nekaterim numeričnim problemom.

18MIN05 ELASTIČNE VRVICE NAPETE NA OKVIR

Štiri elastične vrvice v krajiščih pritrdimo na oglišča togega ravninskega okvir kvadratne oblike in spnemo njihova preostala krajišča. Odvisnost sile vrvice od raztezka opisuje enačba

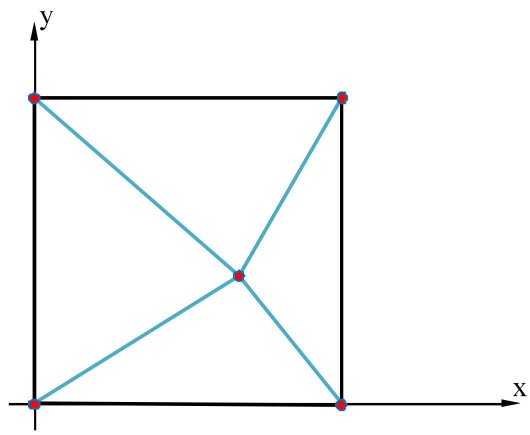
$$F = -k\,\delta l - c\,\delta l^3\ , \qquad (35)$$

kjer je F sila vrvice, ki deluje v nasprotni smeri raztezka, δl je raztezek vrvice. Dolžina stranice okvirja je a=1m, dolžina neobremenjenih vrvic pa je l=0,5m. Koeficienti vrvic in kooerinate točk, kjer so pripete na okvir, so podani v tabeli. Izračunaj koordinate ravnovesnega položaja stičišča vrvic ter sile in raztezke vrvic!

Tabela 6: Točke vpetja in koeficienti elastičnih vrvic.

Točka vpetja	Koeficienta vrvice

vrvice			
x_i [m]	y_i [m]	k_i [N/m]	c_i [N/m^3]
0	0	1	0,4
1	0	1,5	0,5
1	1	1	0,6
0	1	0,8	0,7



Slika 10: Elastične vrvice pripete na okvir in spete med sabo

Namigi:

Ravnovesni legi lahko izračunaš z minimizacijo skupne prožnostne energije vrvic. Za minimizacijo lahko uporabiš knjižnico, ki smo jo uporabili na vajah. Za neodvisni spremenljivki vzameš koordinati stičišč vrvic.

Ker so vrvice gibke, ne prenašajo sil pri skrčkih, tako kot vzmeti. Ker pa je iz skice problema razvidno, da bodo v rešitvi problema vse vrvice napete, lahko le-te vseeno modeliramo kot vzmeti in upoštevamo, kot da pri skrčitvi vrvica deluje s silo, ki se krčenju upira. S tem olajšamo implementacijo rešitve in se izognemo nekaterim numeričnim težavam.

19Sandbox (this is not part of this report)