

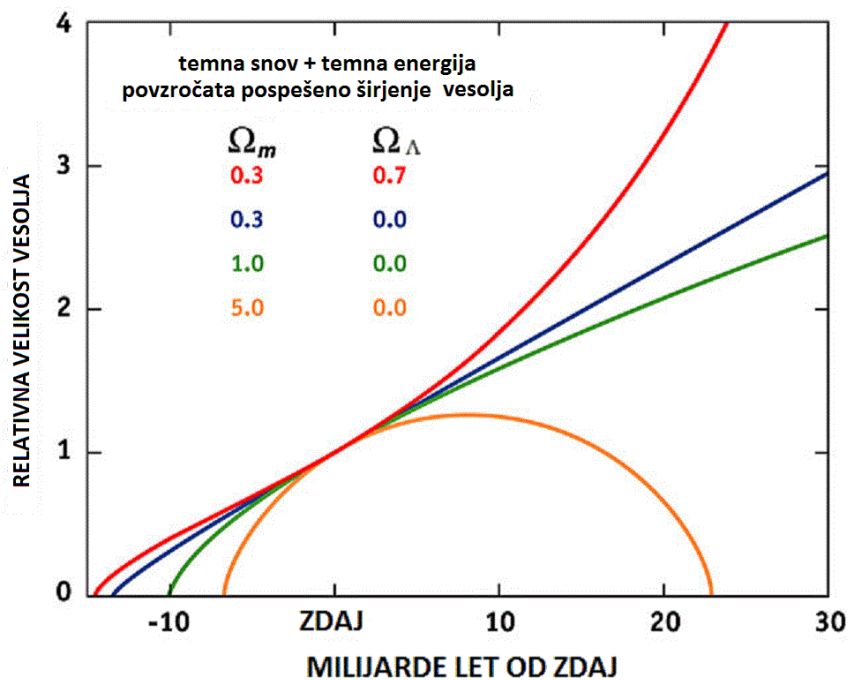
# Modeli vesolja :

Aristarh, Kuzanski, Kepler, Newton, Einstein, Schwarzschild, Lemaître, Friedmann, de Sitter, ...

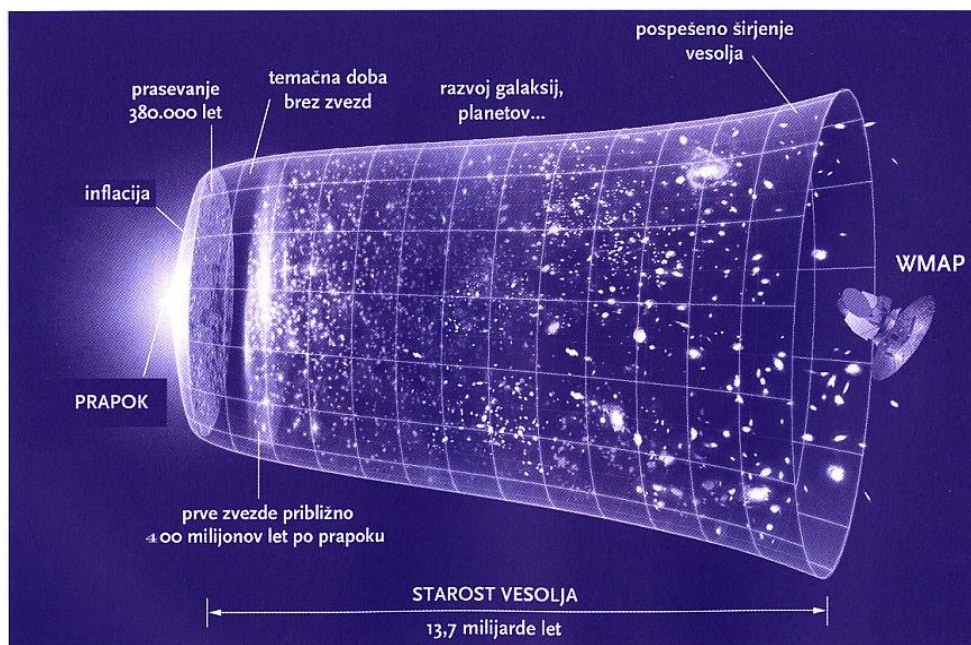
## I. del: Dinamika prozornega vesolja

Vsebino občasno dopolnim! Če nimate radi matematike, preberite prvih 16 strani in zaključek.

### RAZŠIRJANJE VESOLJA



Dinamika vesolja – krivulje velikosti vesolja v odvisnosti od časa, glede na različne scenarije.



Zgodovina vesolja (ilustracija: NASA/WMAP Science Team)

Današnji pogled na razvoj in model vesolja v grafični podobi – meritve sonde WMAP. TEKST NAS BO POSKUŠAL PRIPELJATI BLIŽJE RAZUMEVANJU ZGORNJIH GRAFOV.

## Snov iz šole

Tekst predvideva, da nam je iz srednje šole ostalo v spominu vsaj nekaj razumevanja osnovnih pojmov, kot so: *Pitagorov izrek (nekaj matematike), masa (m), pot(s), čas(t), hitrost (v=ds/dt), pospešek (a=d<sup>2</sup>s/dt<sup>2</sup> ali vektorski zapis pospeška preko zunanjih sil na telo z maso m:  $\vec{a} = (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n)/m$ ), sila gravitacije med krogelno (sferno) simetričnima telesoma 'M' in 'm' na razdalji R ( $F_g = GMm/R^2$ , kjer  $G = 6.67408 \cdot 10^{-11} \text{N(m/kg)}^2$  gravitacijska konstanta), energija (označena z W ali E), kinetična ( $E_k = W_k = mv^2/2$ ) in potencialna energija ( $E_p = -GMm/R$  ali zapis potenciala za sferično homogeno telo  $\phi = -GM/R$ , in da je sila  $F = -m d\phi/dR = -m \nabla\phi$ ), sevanje, moč in energijski tok (P ali  $L = dE/dt$ ), gostota energijskega toka (za zvezdo velja  $j = L/S = L/(4\pi R^2)$ ), Stefanov zakon o sevanju črnega telesa ( $j = L/S = \sigma T^4$ ), paralaksa (recimo - gibajoč opazovalec opazi, da se bližnji predmeti premaknejo glede na oddaljene predmete), valovanje ( $c = \lambda v$ ), valovna dolžina ( $\lambda$ ), frekvenca ( $v = 1/t$ ), hitrost svetlobe ( $c = 3 \cdot 10^8 \text{m/s} = \lambda v$ ), energija svetlobnega delca – fotona ( $E_f = h\nu$ , kjer je  $h = 6.626070040 \cdot 10^{-34} \text{Js} = 4.135667662 \cdot 10^{-15} \text{eVs}$  Planckova konstanta), svetlobno leto, spekter, prizma (lomi svetlobo po barvah, valovnih dolžinah), model atoma, volumen krogle ( $V = 4\pi R^3/3$ ), površina krogle ( $V = 4\pi R^2$ ), gostota ( $\rho = m/V$ ), osnove odvajanja (če je funkcija  $f = x^3 + 2$  potem je njen odvod  $df/dx = d(x^3 + 2)/dx = 3x^2 + 0 = 3x^2$  ali če  $F = 1/u^2$  potem je odvod  $dF/du = -2/u^3$ ) in integriranja ( $\int x^2 dx = x^3/3$ ), risanje grafov, logaritem ( $\log(10^x) = x$ ), pojem zvezde (plin se zaradi lastne teže združi v razbeljeno kroglo, v sredici katere se lažja atomska jedra zlivajo v težja, razlika v masi 'm' gre v energijo preko znane povezave  $E = mc^2$  ...) in galaksije, pojem temperature ( $E_k = mv^2/2 = 3kT/2$ ), Dopplerjev pojav (sprememba frekvence ali valovne dolžine zaradi gibanja  $\lambda' = \lambda + vt = \lambda + v\lambda/c$ ), pojem sorazmernosti (znak je  $\propto$ ), da poznamo enote [m, s, nm, K, m/s, m/s<sup>2</sup>, N, J, W, kg, Pa, V, As, sv.l., ae, W/m<sup>2</sup> ...]. Zelo pomembne so tudi povezave med delom (prej simbol A, sedaj W), toploto (Q), temperaturo ter notranjo energijo U in sicer ( $\Delta U = \delta Q + \delta W$ ), tukaj je še pojem entropije ( $\delta S = \delta Q/T$ ), ki se pri reverzibilnih (ponovljivih) spremembah ohranja, pri ireverzibilnih (nepovratnih) spremembah pa se večja (tako se zdi, da se v vesolju entropija večja, ena izmed razlag entropije trdi, da ker se s časom entropija večja, se večja tudi nered - okrog pojma, interpretacije, entropije je med znanstveniki veliko napetosti, kateri opis je pravilnejši). Omenimo še Heisenbergovo načelo nedoločenosti (ni ravno del srednješolskega programa, a ...), ki v svetu kvantne mehanike (svet atomskih delcev) poda dejstvo, da je recimo nemogoče hkrati natančno pomeriti (določiti) lego delca in njegovo hitrost (gibalno količino:  $\Delta x \Delta p \geq \hbar/4\pi$ ) ali energijo delca točno v danem trenutku, kar se zapiše kot  $\Delta E \Delta t \geq \hbar/4\pi$  (zadnji izraz ima za mnoge izjemen pomen, saj lahko sklepamo, da se je vesolje začelo s kvantno fluktuacijo, ko se je za delček trenutka  $\Delta t$  pojavil paket energije  $\Delta E$  z delci in antidelci, nakar se je simetrija med delci in antidelci podrla in nastalo je vesolje, kjer prevladuje materija nad antimaterijo, tako smo nastali tudi ljudje ..., ta delček časa je tudi prvi možni čas sploh v navezavi z energijo – kot dvojček) ... Zagotovo nam med izobraževanjem niso predstavili navideznega sija zvezd (izraženega v magnitudah [m] – fiziološki občutek svetlosti, ki ga zaznamo z očesom) v povezavi z gostoto svetlobnega toka. Že antični astronomi so svetlost zvezd razdelili na 6 magnitud (zvezde prve magnitude spadajo med svetlejše, šeste magnitude pa komaj vidne s prostim očesom). Danes smo to razdelitev v grobem ohranili in hkrati poiskali povezavo med magnitudo 'm' in gostoto energijskega toka 'j' - za razmerje med tokoma j1 in j2 in njunima magnitudama m1 in m2 velja zveza:*

$j_1/j_2 = 10^{-0.4(m_1 - m_2)}$ . To povezavo bomo še kako rabili pri razumevanju zadnje teorije, ki s pomočjo meritev oddaljenosti supernov (preko magnitude in hitrosti z metodo Dopplerjevega premika spektralnih črt) pravi, da se vesolje širi pospešeno.

Zagotovo bi nam moral, iz šolskih let, v zavesti tleti tudi pojem razširjajočega se vesolja, velikega poka, ... A ker se nas večina o naravi, dinamiki vesolja ni učila – le zakaj ne (?) – je nadaljevanje prispevka namenjena predvsem tej temi.

## **Nekaj vprašanj na tematiko vesolja**

Kako torej živi vesolje, ki ga sestavljajo prah, plini, vroče zvezde – večinoma goreče plinaste (plazemske) krogle (nekatero obdane tudi s planeti, kot naše Sonce), galaksije, v katerih se združuje nekaj 100 milijard zvezd [naša Rimska cesta ima premer približno 100 000 svetlobnih let], jate galaksij, sevanje, temna masa, temna energija, ... Umestna so tudi vprašanja, koliko je vesolje sploh staro, kako veliko je vesolje, ali se vesolje spreminja, kako je in bo živelo – kako bo živel ta naš rod in kdo so žene in možje, ki se že tisočletja trudijo in raziskujejo ta naš oddaljeni svet na »skali« več milijard svetlobnih let, ki gledajo milijarde let v preteklost (vesolje je časovni stroj), ki si upajo napovedovati razvoj zvezd in vesolja za čase, ko našega rodu na Zemlji zagotovo več ne bo, ...

## **Civilizacija in astronomija – čutila in resničnost**

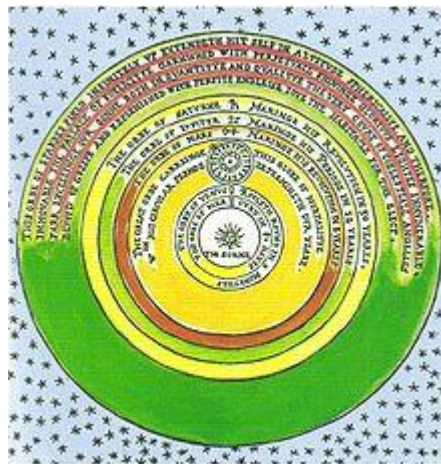
Od kdaj sistematično spremljamo dogodke na nebu, ni enoznačnega odgovora. Zagotovo pa je pojav poljedelstva zahteval setveni koledar in s tem sistematično spremljanje periodičnih dogodkov na nebu. Pred 8000 leti, ko je razvoj poljedelstva že bil v polnem razmahu, je bilo pomladišče v ozvezdju Bika in od tod tudi izhaja arheologom znano dejstvo, da je večina starih civilizacij slavila bika kot mitološko bitje plodnosti, pomladi – novega začetka, setve [mitreji na Ptuju in v okolici so dejansko svetišča bika]. To je eden prvih dokazov, da so ljudje začeli sistematično opazovati nebo in povezovati zvezde v like - v ozvezdja – ki so glede na pojavljanje na nebu, pomenila nebesni koledar. Naši predniki so torej zelo logično povezovali dogajanje na nebu z dogajanjem na Zemlji. Od tod seveda izhaja tudi zvezdni živalski ali zodiakalni krog navideznega gibanja Lune, planetov, Sonca. Potrebe po beleženju pridelkov, zapisov koledarja, merjenjih obdelovalnih površin, itn so rodile pisavo – izjemno pomemben temelj razvoja civilizacij in znanosti. Seveda je bil razvoj govora prva točka preloma k modernemu človeku - človek govori v današnjem pomenu te besede že najmanj sto do dvesto tisoč let (pomembna je bila pokončnost človeka – posledično je razvoj anatomije govornega aparata omogočil govorjenje, možgani pa tvorjenje in razumevanje govora).

V zgodovinskih pisnih virih je težko ločiti, kje in kdaj se začne znanost, astronomija in kje literatura, religija, poezija, kaj pomenijo zapisane prisposode. Naši prvi poskusi opisa sveta, vesolja, začetkov stvarstva so, če gledamo brez predsodkov, zajeti v svetih spisih na različnih koncih sveta. Religiozne knjige so torej, poleg čisto verskih, etičnih, političnih, ekonomskih in socioloških ciljev, vsebovale prve kozmologije. Tudi če se danes nasmihamo njihovi (takratni) razlagi, pa je bil to temelj bodočih razmišljanj in predvsem raziskovanj (v potrditev ali zanikanje trditve iz svetih spisov). Ne smemo pa pozabiti tudi na izjemno pomemben simbolni in intuitivni vidik svetih tekstov, ki so temelj abstraktnega razmišljanja, brez katerega ni moderne znanstvene paradigme. Veliko polemik dvigujeta dva citata - Prva Mojzesova knjiga (Geneza), začetki sveta in človeštva: »*Bog je rekel: 'Bodi svetloba!' In nastala je svetloba. Bog je videl, da je svetloba dobra. In Bog je ločil svetlobo od teme.*« in drugi znan citat: »... *prah si in v prah se povrneš ...*« Razlagati ju je moč na več načinov, na kratko se ustavimo pri »prahu«. Zagotovo ta prisposoda v sebi skriva veliko potencialno interpretativno moč in sama misel o prahu ni daleč od resnice, ki jo danes razkriva moderna astrofizika in tudi kozmologija. Astrofizika nas je poučila, da smo zagotovo nastali iz zvezdnega prahu (težji elementi od vodika večinoma nastajajo v sredicah zvezd in pri eksplozijah supernov), in da se na nek način v zvezdni prah tudi vračamo – če pogledamo časovno skalo v milijardah let, to dobesedno velja. A to ne pomeni, da lahko z današnjega vidika, z metodo relativizacije znanstvene interpretacije, damo prav vsem trditvam (prisposobam) v starih spisih – odgovor je NE. Je ravno obratno – vse stranpoti in intuitivna tipanja ter logika »samoumevnosti« videnege v starih tekstih, so bili (protislovno, kjub zmotam, pričakovanim glede na stopnjo takratnega vedenja) temelji za današnjo sliko vesolja. Zakaj smo dali besedo »samoumevnost« v narekovaja. »Samoumevnost« videnege nas namreč lahko zelo prevara (preslepi). Recimo dejstvo, da se Zemlja vrti in potuje okrog Sonca, je bilo ljudem zelo, zelo težko sprejeti – ker se tega v vsakdanji izkušnji čutil ne zazna – saj ne na trivialen način. Iz »samoumevnosti« tudi izhaja dejstvo, da je Luther, sam reformator, velikemu znanstvenemu reformatorju Koperniku očital, da bodo bedaki vso astronomsko znanost postavili na glavo – saj da zagovarjajo misel o potovanju Zemlje okrog Sonca. Kar pa je bilo za večino, glede na takratni razvoj fizike in astronomije, nemogoče

uskladiti z vsakdanjo izkušnjo – ki nas (napačno) prepričuje, da vendar ta nas svet miruje, če ne, bi ... Da pa je svet okrogel, vemo že iz antike (iz Eratostenovih meritev polmera Zemlje, iz različne lege in vidnosti ozvezdij glede na položaj na Zemlji, iz podnebnih pasov – višine Sonca, ...) in temu ni nasprotoval nobeden ugleden učenjak (zahodnega izročila) v zadnjih 2000 letih. To dejstvo izhaja tudi iz znamenite srednjeveške astronomske knjige - "Tractatus de Sphaera" - Johna iz Holywooda (to izjemno bogastvo stare astronomije hrani tudi knjižnica Frančiškanskega samostana Kostanjevica pri Novi Gorici).

## Zgolj koščki iz kozmoloških teorij - do standardnega modela vesolja

Veliko je bilo (tudi anonimnih) mož in žena, ki so tlakovali pot do današnje znanstvene podobe sveta – vesolja. Tudi zmot in zamer ni manjkalo. Naštejmo nekatere osebe, ki so bolj ali manj uspešno gradile današnje vedenje o vesolju, so (dokaj) pravilno sklepale o dinamiki bližnjega sveta (Sončevega sistema) in oddaljenega sveta (vesolja kot celote). Že v antiki (delno pitagorejci Hiket, Ekfant, Heraklit Pontski, ..., tudi Filolaj, vsekakor pa Grk Aristarh) in v srednjem veku (Nicole Oresme - 14. stoletje in Nikolaj Kuzanski - 15. stoletje) so zagovarjali heliocentrični sistem. Sledil jim je Kopernik, izjemen Kepler z nebesno mehaniko, Galilei, ... Velik evolucijski preskok pomeni iznajdba teleskopa (najverjetneje Lippershey). Sledijo Hook, Newton (do konca oblikuje gravitacijski zakon), Huygens (1659 izpelje izraz za centripetalno silo:  $F_r = m \cdot v^2 / r$ ). Vsekakor ne moremo mimo Einsteina ( $E = m \cdot c^2$  ...), Henriette Swan Leavitt (povezava med frekvenco kefeid in sijem), Hubbla (odkrije, da se vesolje širi), Zwickeja (na sledi temni masi) in seveda dveh izjemnih Slovencev - Jožefa Stefana ( $j = \sigma \cdot T^4$ ) in Hermana Potočnika (pionir poletov v vesolje). Pa še koga bi morali omeniti, nekateri še pridejo v naš tekst.



**Ilustracija kopernikovega Vesolja iz knjige Thomasa Diggesa – leto 1576. Digges je med prvimi zvezde iz sfere premaknil v prostor. Nekaj podobnega je trdil že v 15. stoletju Nikolaj Kuzanski, saj je zapisal, da Zemlja ni center vesolja, kot tudi ostale zvezde niso center vesolja (trdil je tudi, da so zvezde sonca z naseljenimi planetnimi sistemi).**

Sledi kratek povzetek oseb in teorij, ki so z opazovanji, predvsem pa na začetku z bolj ali manj posrečeno intuicijo, prispevali k današnjemu modelu vesolja – ki nikakor ni dokončen. Po vrsti si sledijo: 'anonimni' Kaldejci, Grki - »Pitagora«, Aristarh, Ptolemaj, srednjeveški učenjaki - Oresme, Kuzanski, renesančni astronomi - Kopernik, Brahe, Lippershey, Kepler, Galilei, Huygens, Hooke, Römer, Halley, Newton, Leibniz, Michell, Coulomb, Volta, Fraunhofer, Niépce, Sturgeon, Bessel, Doppler, Stefan, Clausius, Edison, Lorentz, gospa Henrietta Swan Leavitt, Rutherford, Bohr, Einstein, Schwarzschild, de Sitter, Friedmann, De Broglie, Heisenberg, Lemaître, Hubble, Gamov, Hoyle, Penzias, gospa Vera (Cooper) Rubin, Alan H. Guth, »Perlmutter, Schmidt in Riess«. Sledijo slike v enakem vrstnem redu in nato kratek povzetek njihovih dognanj.



**Sledijo letnice, imena in spoznanja – kratek opis (za nekatere osebe boste zagotovo prvič slišali, nekateri dosežki se zdijo čisto tehnične narave, a brez njih ni moderne znanstvene metode, ni astronomskih meritev, ni modelov sveta ...):**

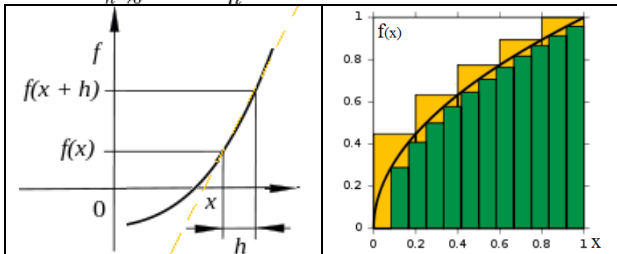
• 3000 do 500 pr. Kr. (okoli) : najstarejši zapis danes t. i. »Pitagorovega« izreka ( $a^2 + b^2 = c^2$ ); zagotovo so ga poznali že Babilonci vsaj 1500 let pred Pitagoro (živel je v 6. stol. pr. Kr.); v tem pomembnem izreku se skriva zgoščen prikaz človeškega razvoja zadnjih 100000 let, ko smo izoblikovali govor (izjemen korak), pred približno 8000 leti pa se je zgodil prehod v moderno civilizacijo, del človeškega rodu se je namreč začel ukvarjati s poljedelstvom, ki je zahtevalo kompleksno načrtovanje opravi obdelave zemlje, prostora, časa, koledarja, štetje, merjenje površin, meja, načrtovanje bivališč, svetišč; šli smo na pot pisave, novega vedenja, zavedanja, samorefleksije. Ustvarili smo nova komunikacijska orodja (govor, novo organizacijo družbe z vpeljavo merjenja prostora in časa, pisavo, matematiko, astronomijo, filozofijo, poezijo, ...) in korenine teh začetkov so danes nezavedno vgravirane v ritem našega vsakdana, v temelje moderne civilizacije – tudi in predvsem v kozmološke modele. To je bil tudi čas začetka rudarjenja - pridobivanja kovin, posledično novih orodij in vedenj o snovi, naravi – in tudi to so nezamenljivi materialni in duhovni temelji moderne družbe.

Prve začetke geometrije lahko najdemo v Mezopotamiji, Egiptu (Rhindov papirus) in v dolini Inda okoli leta 3000 pr. Kr. Ta geometrija je bila predvsem praktično usmerjena. Preučevala je probleme povezane z zemljemerstvom. Tudi sama beseda *geometrija* izvira iz grških besed  $\gamma\eta$  [ge] (starejša oblika:  $\gamma\acute{\alpha}\lambda\alpha$  [gaja]) = *zemlja* +  $\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$  [metria] = *merjenje* (direkten prevod je torej: geometrija = zemljemerstvo). Sama beseda geometrija (zemljemerstvo) torej razkriva, da je začetek poljedeljstva hkrati katalizator razvoja matematike – poljedeljstvo je dalo zagon razvoju matematike.

- 310 pr. Kr. - okoli 230 pr. Kr. : Aristarh predlaga geocentrični in tudi heliocentrični sistem - vesolje.
- 168 : Ptolemaj privzame geocentrično sliko vesolja (slika deluje matematično solidno, a je daleč od dejanske dinamike, takratni argument za Zemljo v središču je - s prostimi očmi nezaznavna paralaksa zvezd).
- 1320 – 1382 : Oresme dopušča tudi heliocentrični sistem - bolj smiselno se mu zdi, da okrog masivnejšega Sonca potujejo manjši planeti, a sprejema tudi, takrat splošno uveljavljeno, geocentrično sliko vesolja.
- 1401 – 1464 : Nikolaj Kuzanski je v »Učeni nevednosti« zatrjeval, da se Zemlja vrti okoli svoje osi in kroži okoli Sonca, da v vesolju ni nobenega zgoraj ali spodaj, da je svetovje brezmejno, da so zvezde druga sonca in vežejo nase druge naseljene svetove.
- 1514 : Kopernik še enkrat (po Aristarhu v antiki in srednjem veku - Orseme, Kuzanski, ...) predlaga heliocentrično sliko vesolja.
- 1588 : Tycho Brahe nastopi proti heliocentričnemu modelu, ker pri opazovanjih zvezd ne opazimo paralakse (ravna podobno kot Aristotel); predlaga sliko, da Sonce kroži okrog Zemlje, planeti pa okrog Sonca (enako sliko je podal že Grk Apolonij). Njegove meritve lege Marsa so odločilnega pomena pri nastanku Keplerjevih zakonov nebesne mehanike.
- 1608: optik Hans Lippershey predstavi v nizozemskem parlamentu prvi uporabni daljnogled (teleskop), je še nekaj drugih teorij o izumu daljnogleda (daljnogled predstavlja prelomni korak v opazovalni astronomiji).
- 1609 : Johannes Kepler – izpelje zakone gibanja planetov: so ključni za potrditev Kopernikovega (seveda tudi Kuzanskejevega in Orsemovega) heliocentričnega modela - planeti se premikajo po elipsah in ne krogih (leta 1618 zapiše z besedami tretji zakon:  $T^2/a^3 = konst$ , ki je že vseboval pot do gravitacijskega zakona).
- 1610 : Galilei s teleskopom odkrije lune, ki krožijo okoli Jupitra: hud udarec za Ptolemajev geocentrični model.
- 1659 : Huygens, izpelje izjemno pomemben izraz za centripetalno silo:  $Fr = m \cdot v^2/r$ .
- Hooke (1635 - 1703) : sklepa, da je gravitacijska sila odvisna od  $1/r^2$ .
- 1675: Römer izmeri (oceni) hitrost svetlobe s pomočjo zakasnitve okultacije Jupitrove lune (končna hitrost svetlobe je izjemnega pomena pri opisu vesolja in pri omejitvah, ki ga to dejstvo prinaša s sabo).
- 1684: Halley komunicira z Newtonom in mu predlaga določene pomembne rešitve pri matematičnem opisu gibanja nebesnih teles.
- 1687 : Newton objavi »Philosophiae Naturalis Principia mathematica« (zapis gravitacijskega zakona  $F_g = Gm_1m_2/r^2$  [  $m_1 \bullet \text{-----} > \text{-----} \mathbf{r} \text{-----} < \text{-----} \bullet m_2$  ] ).
- 1676–1689: Gottfried Wilhelm Leibniz govori o ohranitvi žive sile (conservation of 'vis viva'), omenjal je količino, ki ima dimenzijo energije in iz katere izhaja današnji koncept energije, njenega ohranjanja; definiral jo je kot produkt mase in kvadrata hitrosti določenega telesa (danes je tak produkt povezan z definicijo kinetične energije ' $mv^2/2$ '), hkrati pa je bil na sledi potencialni energiji ' $mgh$ ', bolje ( $-GMm/r$ ). Pozneje ga je v tej ideji zelo podpirala matematičarka in fizičarka gospa Émilie du Châtelet (1706 - 1749). Prvi pa preimenuje omenjene Leibnizove pojme v energijo Thomas Young leta 1807. Zagotovo je pri vpeljavi energije veliko vlogo igral opis poenostavljenega sistema v katerem trčita dve telesi. Pri tem ohranitev gibalne količine, ki jo je kot zadosten opis narave zagovarjal Newton, ni dala zadovoljivih odgovorov – pri prožnem trku se brez vpeljave (kinetične) energije ni dalo izračunati končnih hitrosti, pri neprožnem trku pa se ni dalo razložiti končnih posledic gibanja

(deformacije, segrevanja teles, ...). Pojem energije, toplote in dela je - poleg sile in ohranitvenih zakonov energije, gibalne količine, vrtilne količine ... – eden od temeljnih kamnov opisa narave in s tem vesolja. V astronomiji je, med drugimi, zelo pomembna kinetična ( $E_k = mv^2/2$ ) in potencialna energija ( $E_p = -GMm/r$ ), recimo za sistem Sonce – planet velja:  $E = E_k + E_p = mv^2/2 - GMm/r$ . Leta 1676 je Leibniz razvil infinitezimalni račun, neodvisno od Newtona; velja da je odvod funkcije  $f(x)$  strmina tangente ( $df(x)/dx = f'(x)$ ) na dano funkcijo v dani točki  $x$ :

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$



Recimo da poznamo funkcijo  $F(x) = x^{q+1}/(q+1)$ , odvod je:  $F'(x) = f(x) = dF(x)/dx = d(x^{q+1}/(q+1))/dx = x^q$ , integral pa je (geometrijsko tudi ploščina pod funkcijo) nasprotna funkcija odvodu. Iz prejšnjega primera velja, da je integral za funkcijo  $f(x) = x^q$  enak  $F(x) = x^{q+1}/(q+1)$ .

Integral kot vsoto (sumo z znakom  $\int$ ) majhnih ploščin  $f(x)dx$  zapišemo kot:


$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a). \quad \text{primer} \quad \int_0^1 \sqrt{x} dx = \int_0^1 x^{1/2} dx = F(1) - F(0) = \frac{2}{3}$$

Že prej navedeni Leibnizovi fizikalni in matematični pojmi so osnovna orodja pri matematičnem opisu sveta in vesolja. Seveda pa brez razumevanja dogajanj v vesolju matematični opis ne velja prav nič.

- 1783: duhovnik in geolog John Michell se sprašuje ali gravitacija vpliva na svetlobo, ali imajo nekatere zvezde tako veliko maso, da svetloba ne more pobegniti z njih (imenuje jih temne zvezde, pravilno izpelje celo njihov polmer iz predpostavke, da je ubežna hitrost iz zvezde enaka hitrosti svetlobe  $r = 2GM/c^2$ ). To je osnova za teorijo črnih lukenj in Einsteinove izračune več kot 120 let pozneje. Do enakega zaključka je nekaj let pozneje prišel matematik Pierre Simon de Laplace.

- 1783: Charles Augustin de Coulomb je leta 1783 s svojo torzijsko tehtnico prvi raziskoval in objavil izraz za silo med dvema točkastima električnima nabojema. Absolutna vrednost sile je premo sorazmerna produktu obeh nabojev in obratno sorazmerna s kvadratom razdalje med njima. Sila je privlačna, če sta naboja različno predznačena (eden pozitivno in drugi negativno), in odbojna, če sta enako predznačena:  $F_e = e_1 e_2 / (4\epsilon_0 \pi r^2)$  ali  $F_e = q_1 q_2 / (4\epsilon_0 \pi r^2)$ . Ta zakon je pomemben za razlago atomske slike sveta in seveda tudi vesolja, matematično je enak gravitacijskemu zakonu.

- 1800: Alessandro Volta je na osnovi Galvanijevih raziskav sestavil dve ploščici iz bakra in cinka, vmes pa je dal klobučevino prej namočeno v žvepleno kislino. Takšne elemente je povezal in sestavil prvo električno baterijo (Voltov člen, kemijske reakcije so [ cink:  $Zn \rightarrow Zn^{2+} + 2e^-$ ; žveplena kislina:  $2H^+ + 2e^- \rightarrow H_2$  ]). S tem je ustvaril nov vir elektrike, ki je precej razširil eksperimentalne in uporabne možnosti, kar je bil praktični uvod v elektrifikacijo sveta – v naš svet svetlobe, motorjev, strojev, ekranov, računalnikov, telekomunikacij, izjemne informatike, računalniških modelov, obdelave podatkov, ta orodja so nepovratno zaznamovala vse znanosti, tudi astronomijo ...

- 1814: Joseph von Fraunhofer je med preskušanjem svojih izjemnih prizem in raziskovanjem Sončevega spektra, odkril - po njem imenovane – številne temne absorpcijske črte v Sončevi svetlobi. To odkritje je čez desetletja postala osnovna metoda raziskovanja vesolja (iz črt se da določiti atomska zgradba in temperatura oddaljenih zvezd, galaksij, iz Dopplerjevega premika črt pa hitrosti zvezd [  $v/c = \Delta\lambda/\lambda$  ], galaksij, plinov, poznamo tudi gravitacijski premik črt ...). Spektralne črte so tudi omogočile spoznanje, da se vesolje širi in to spet s pomočjo Dopplerjevega (rdečega) premika galaksij in tozadavnega Hubblovega zakona ( $v = HR$ ). Preko premika spektralnih črt smo detektirali tudi temno snov, ki je celo veliko več kot vidne snovi. Danes vemo, tudi preko Bohrove slike atoma, da vsak atom seva ali absorbira zgolj njemu lastne valovne dolžine svetlobe – atome torej ločimo po spektrih, ki jih seveda določajo energijska stanja, ki so vezana na število protonov v jedru. Še zanimivost - leta 1801 se je podrla optična delavnica, v kateri je kot 14-letni deček stanoval in delal tudi Fraunhofer - in bil je edini preživel. 

- 1822: Nicéphore Niépce izumi metodo foto jedkanice in tako nastane prva obstojna fotografija (a ekspozicija je trajala kar nekaj ur). 1839 je Jacques Daguerre našel kemijsko osnovo za permanentni

fotografski pozitiv – za nekoliko krajše ekspozicijske čase. Slovenec Janez Avguštin Puhar pa je leta 1842 izumil fotografijo na steklo, z zelo kratkim časom ekspozicije - 15 sekund – take slike se dajo tudi reproducirati. Fotografija je v znanosti postala nepogrešljivo orodje objektivnega zaznavanja in obdelave podatkov – tudi v astronomiji. Danes je klasični kemijski fotopostopek zamenjala digitalna fotografija, tozadevno pa so se možnosti uporabe zelo povečale, tudi sama računalniška obdelava posnetkov je zelo napredovala. Tako lahko recimo preko elektromagnetnih valov sprejemamo slike iz sond na robu Sončevega sistema.

- 1824: William Sturgeon je kot samouk (veliko je bral) izumil elektromagnet. Njegov prvi elektromagnet je bila stara železna podkev (pa naj kdo reče, da podkev ne prinese sreče), ki jo je ovil s približno 18 ovoji bakrene žice (izolirane žice takrat še ni bilo). Železo je polakiral, da ga je izoliral od navitja žice. Ko je pognal tok skozi tuljavo, je železo postalo namagneteno; to je bil korak v električne generatorje, elektromotorje, transformatorje, v električni nihajni krog kondenzatorja in tuljave – oddajnike in sprejemnike, v svet izjemnih novih tehnologij, ki so danes temelj moderne družbe – moderne znanstvene metode, tudi astronomije.

- 1838: Bessel izmeri paralakso zvezde 61 Laboda, tako tudi dokaže, da zvezda leži daleč onstran solarnega sistema, in da Zemlja potuje »okrog« Sonca (pade eden zadnjih dvomov, ki so še držali geocentrizem pri životarjenju).

- 1842: zdravnik Julius Robert von Mayer objavi vrednost mehanskega ekvivalenta toplote; določil jo je v poskusu, v katerem je konj gnal stroj za mešanje papirne pulpe v kotlu – primerjal je opravljeno delo z dvigom temperature; Mayer je pravilno postavil in razumel tezo o ohranitvi energije (recimo mehanske in notranje energije, ki se lahko pod določenimi pogoji transformirata ena v drugo) še pred, iz učbenikov bolj znamenitima gospodoma, Joulom in Helmholtzom.

- 1842: Doppler razloži fizikalni pojav pri valovanju, ko zaradi gibanja vira valovanja, opazovalca ali obeh nastane razlika v valovni dolžini in frekvenci zvoka ali svetlobe (ta pojav je v astronomiji eno od glavnih orodij pri opisu dinamike zvezd, galaksij, vesolja):  $v/c = \Delta\lambda/\lambda$ .

- 1879: Jožef Stefan pride preko absolutne temperature do zakona o sevanju črnega telesa ( $j = \sigma \cdot T^4$ ), zakon je ključ do moderne astrofizike, prasevanja, razlage življenja vesolja - kozmologije, energijske bilance Zemlje, dogajanj v njeni atmosferi (vremena), ... Z njim računamo tudi temperaturo vesolja, razdalje do zvezd, naselitvene cone okrog zvezd (iščemo planete primerne za življenje), je eden od ključev do prapoka. itn.

- 1865: Rudolf Clausius vpelje entropijo kot količnik med izmenjano toploto in temperaturo: ( $\delta S = \delta Q/T$ ), ki se pri reverzibilnih (ponovljivih) spremembah ohranja, pri ireverzibilnih (nepovratnih) spremembah pa se večja (tako se zdi, da se v vesolju entropija večja). Ena izmed razlag entropije trdi, da ker se s časom entropija večja, se večja tudi nered in s tem zmanjšuje zmožnost opravljanja dela - okrog interpretacije entropije se med znanstveniki krešejo vroče razprave. Nekateri entropiji v vesolju pravijo tudi toplotna smrt vesolja (idejo poda William Thomson že v letih 1851 - 1862) – torej se vesolje kot sistem v neskončnosti bliža temperaturi 0 Kelvinov. Če dodamo še opcijo, da bodo vsi delci razpadli, je slika končnega vesolja še bolj skrivnostna. Drugi scenarij, drugo ugibanje pa predvideva, da maksimalna možna entropija vesolja narašča hitreje od toplotne smrti - temu pojavu rečemo tudi »entropijska vrzel« in naj bi se pojavila že ob samem začetku nastanka vesolja. Malo zapleteno – a ti pojmi še čakajo popolnejših fizikalno-matematičnih modelov na podlagi novih meritev, spoznanj.

- 1880: Thomas Alva Edison dobi patent za žarnico (polnjeno z ogljikovo nitjo), uporabi višji vakuum in še učinkovito žarilno nitko (polnilo iz ogljika z visoko upornostjo), kar je njegovo žarnico naredilo trajno in zato uporabno. Nekateri viri celo navajajo 22 kronoloških soavtorjev, že leta 1802 Humphry Davy (kmalu po izumu baterije) spusti električni tok skozi tanek listič platine, ki je zasvetil. Tehnologija žarnic (vakuuma v steklenih bučkah) je močno vplivala na razvoj elektronk, diod, tranzistorjev, pozneje televizijskih katodnih cevi, pospeševalnikov osnovnih delcev (Edison je spoznal, da med žarilno nitko in ločeno ploščico v bučki lahko teče električni tok, a le v eno smer – tako je odkril diodo, a njena uporabnost je bila nekaj časa neznan). John Ambrose Flaming pa je leta 1904 prišel do zamisli, da bi lahko Edisonov pojav uporabil za izdelavo radijskega sprejemnika na elektronko - diodo. Dve leti zatem je ameriški izumitelj Lee de Forest elektronki dodal še krmilno

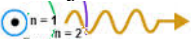


mrežico s čimer je dioda postala trioda (ojačevalnik). Danes sta večino elektronk izpodrinila polprevodniška dioda in tranzistor. Vse to so gradniki računalnikov in seveda množice detektorjev, brez katerih si danes ni več moč zamisliti znanstvenega eksperimentalnega udejstvovanja.

- 1892: Hendrik Lorentz objavi transformacije (nazadnje 1904, pri izpeljavi transformacij je sodelovalo več sodobnikov). Z njimi je dokazal, da so Maxwellove enačbe invariantne, nespremenjene pri transformacijah. Hitrost svetlobe ( $c$ ) oziroma hitrost elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru, je v vseh inercialnih (nepospešenih) opazovalnih sistemih konstantna. Lorentzove transformacije povezujejo meritve v prostoru in času dveh ali večih opazovalcev, ki se gibljejo z različnimi hitrostmi. Transformacije pridejo do izraza, če je hitrost gibajočega opazovalnega sistema znatna glede na hitrost svetlobe. Opazovalci izmerijo različne razdalje, pretečeni čas in lahko tudi drugačen vrstni red dogodkov. Odločilen je Lorentzov člen (faktor):  $\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ . Posledica povedanega je, da je recimo dolžina ( $L'$ ) palice najdaljša v tistem sistemu, v katerem miruje ( $L' = L\gamma$ ), dolžina gibajoče palice  $L'$  se za zunanjšega mirujočega opazovalca skrči na  $L = L'/\gamma$ . Čas ( $\Delta t$ ), ki ga izmeri mirujoč opazovalec, je daljši od časa ( $\Delta t'$ ), ki ga izmeri opazovalec, ki se giblje z dogodkom (recimo odboj svetlobe v vozilu), velja:  $\Delta t = \Delta t'\gamma$ . Iz omenjenih predpostavk tudi sledi znamenita enačba ( $E=mc^2$ ). Tako je bila odprta pot do Einsteinovih enačb splošne teorije relativnosti, kjer je upoštevana tudi gravitacija - vesolje.

- 1908 : gospa Henrietta Swan Leavitt odkrije povezavo med izsevom in frekvenco utripanja zvezd kefeid, odpre se pot za merjenje razdalj do galaksij (Hubbleovega zakona o širjenju vesolja).

- 1909: so pod Rutherfordovim vodstvom na Manchesterski univerzi z obstreljevanjem zlatih lističev odkrili, da je atom sestavljen iz majhnega pozitivno nabitega jedra in velikega negativno nabitega elektronskega oblaka, ki obdaja jedro (iskanje lastnosti in zgradbe atomov je neločljivo povezano z razvojem vesolja, nas samih).

- 1913:  Niels Bohr poda zanimiv koncept atoma – pri vodiku izpelje emisijski in absorpcijski diskretni spekter svetlobe, ki ga je empirično določil že Rydberg s formulo:  $1/\lambda = R(1/n_1^2 - 1/n_2^2)$ ,  $n_1$  in  $n_2$  so kvantna (naravna) števila (1, 2, 3, ...). Predpostavil je diskretne stacionarne valovne orbite elektrona z različnimi energijami, z danimi kvantnimi (naravnimi) števili. Atom izseva foton pri prehodu iz višje energijske orbite na nižjo, pri absorpciji fotona pa elektron skoči na višjo orbito. Orbite so točno določene in se razlikujejo za različne atome, molekule. Valovne dolžine izsevanih fotonov so tako hkrati njihovi prstni odtisi, kar predstavlja izjemno orodje v rokah astronomije, saj lahko tako, le iz valovnih dolžin svetlobe, določi kemijske elemente zvezd, plinov, ki so oddaljeni milijone in milijarde svetlobnih let. To je bila vmesna slika med klasično podobo atoma, ki bi moral biti, zaradi pospešenega gibanja elektronov – tozadevnega sevanja - nestabilen in kvantno sliko atomov Heisenberga in Schrödingerja. Heisenbergovo načelo nedoločenosti govori, da ne moremo hkrati določiti lege in hitrosti kvantnega delca, recimo elektrona. Govorimo lahko torej le o verjetnosti, da na določeni oddaljenosti od jedra najdemo elektron. Iz Rutherfordovega eksperimenta izhaja, da je atom sestavljen iz majhnega ( $10^{-15}$  m), a masivnega pozitivno nabitega jedra in velikega ( $10^{-10}$  m) negativno nabitega lahkega elektronskega oblaka. Iz tega dejstva izhaja veliko dilem. Če je masa atoma zgoščena v majhnem jedru atoma iz večih nevtronov in protonov, ki se med sabo odbijajo, odrivajo – zakaj tak atom takoj ne razpade? Odgovor je - ne razpade, ker ga skupaj drži močna jedrska sila, ki je znotraj razdalje nekaj  $10^{-15}$  m močnejša od elektrostatične odbojne sile. To je torej razlog, da imamo poleg vodika še težje elemente – da lahko obstajmo živa bitja v taki obliki ... Seveda pa atomi tudi razpadejo. Ker ima močna jedrska sila omejen doseg, je tudi velikost atomskega jedra navzgor omejena, zadnje stabilno jedro ima izotop svinca z 208 gradniki (82 protonov in 126 nevtronov). Razpolovni čas razpada urana-238 je še zmeraj 4.47 milijarde let (starost Zemlje), izotopa U-235 pa 704 milijonov let. Ununoktij (294 - Uuo je sestavljen iz 118 protonov in 176 nevtronov) pa ima razpolovni čas zgolj 0,89 ms. Za radioaktivni razpad je odgovorna šibka jedrska sila – in zdi se, da vsi atomi razpadejo, razpade tudi recimo sam proton, kateremu ocenjuje razpolovno dobo kar na  $6.6 \times 10^{33}$  let. Kako bo torej končalo naše vesolje – bo vse razpadlo? A še prej se pojavi vprašanje, kje in kako so nastali težji elementi od vodika?

- 1915: Einsteinova splošna teorija relativnosti opiše vesolje kot celoto, ta enačba je:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

A predvsem razlaga fotoefekta je Einsteinu prinesla Nobelovo nagrado in ne relativnost – zakaj pa gre pri fotoefektu? Odvisnost največje mogoče kinetične energije izbitih fotoelektronov iz kovine  $E_k$  od frekvence ( $\nu$ ) vpadle svetlobe podaja Einsteinova enačba iz leta 1905:  $E_k = mv^2/2 = h(\nu - \nu_0) = h\nu - W_i$ ;  $W_i$  je izstopno delo,  $h$  je Planckova konstanta, energija fotona je  $E_f = h\nu$  (energijske delce svetlobe, fotone, vpelje že leta 1900 Max Planck pri razlagi spektra sevanja črnega telesa – velik dosežek – iz integrala Planckovega spektra dobimo Stefanov zakon).

- 1915 : Schwarzschild poda rešitev Einsteinove enačbe za sfero in sicer za kvadrat razdalje med dogodkoma ob krogli mase  $M$  - Schwarzschildova metrika torej je:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 (1 - 2GM/(c^2 R)) + dR^2/(1 - 2GM/(c^2 R)) + R^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

- 1917 : de Sitter reši Einsteinove enačbe gravitacijskega polja v katerih je napetostni tenzor 0, kjer je gostota mase nič in, ki je nakazovala eksponentno razširjanje Vesolja, »z dinamiko brez snovi«; to je bil presenetljiv rezultat in po Hubblovih meritvah ga je sprejel tudi Einstein sam; kozmologi podobne sklepe uporabijo spet čez 70 let, ob teoriji inflacije – hitrega širjenja vesolja.

- 1917 (1922) : **Friedmann** zapiše enačbo širitve vesolja z maso

(ena izmed izpeljank enačbe je:  **$H^2 = 8 \pi G \rho / 3 - k c^2 / R^2$** ).

- 1924: De Broglie pokaže na dvojno naravo gibanja kvantnih delcev z maso (recimo elektronov), ki jih lahko obravnavamo tudi kot valovanje, pravilno zapiše tudi njihovo valovno dolžino kot kvocient Planckove konstante in gibalne količine:  $\lambda = h/(mv)$ . Temu so se nekateri na začetku posmehovali, a so resni eksperimentatorji kmalu potrdili pravilnost njegovega razmišljanja – elektronski mikroskopi pa s pridom izkoriščajo to izjemno lastnost dvojne narave delcev. Brez elektronskega mikroskopa si ne moremo predstavljati raziskav celic, genskega zapisa, ...

- 1927: Heisenberg zapiše osnovni postulat kvantne mehanike - načelo nedoločenosti, ki v svetu atomskih delcev (kvantne mehanike) izraža lastnost, da je recimo nemogoče hkrati natančno pomeriti (določiti) lego delca in njegovo hitrost (gibalno količino:  $\Delta x \Delta p \geq h/4\pi$ ) ali energijo delca točno v danem trenutku, kar se zapiše kot  $\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$  (zadnji izraz ima za mnoge izjemen pomeni, saj lahko sklepamo, da se je vesolje začelo s kvantno fluktuacijo, ko se je za delček trenutka  $\Delta t$  pojavil paket energije  $\Delta E$  z delci in antidelci, nakar se je simetrija med delci in antidelci podrla in nastalo je vesolje, kjer prevladuje materija nad antimaterijo, tako smo nastali tudi ljudje ...) ...

- 1927 : Georges Lemaître (duhovnik in fizik) objavi svojo novo idejo, da se vesolje širi (prvi izpelje Hubblov zakon in poda prvo opazovalno oceno Hubblove konstante).

- 1929 : Hubble dokaže, da so določene meglice (galaksije) daleč izven naše galaksije, in da se oddaljujejo od nas s hitrostjo, ki linearno narašča z oddaljenostjo  $R$  ( **$v = HR$** ).

- 1932: Zwicky, preko opazovanja dinamike jate galaksij v Berenikinih kodrih, pride na sled temni masi.

- 1948 : Gamov uvede začetno singularnost.

- 1948 : Hoyle skuje stavek 'veliki pok' – 'Big Bang' (čeprav je sam zagovarjal stacionarno vesolje).

- 1964 : Penzias in Wilson odkrijeta mikrovalovno ozadje - prasevanje vesolja iz časov velikega poka (tako so zavrnilo Hoylov statični model vesolja).



- 1975 : gospa Vera (Cooper) Rubin pomeri hitrosti na robu galaksij in tako pride do t. i. "ravnih krivulj vrtenja«, to je, po Zwickeju, eden najneposrednejših in najbolj čvrstih dokazov o t. i. temni snovi (rezultate objavi skupaj s sodelavcem Fordom).

- 1980 : Alan H. Guth predlaga zamisel o inflaciji vesolja - faza eksponentnega (bliskovitega) razširjanja (tako bi tudi lažje razložili enakost vesolja v vseh smereh) - posledica hitrega širjenja morajo biti tudi gravitacijski valovi, ki bi lahko zasukali ravnino polarizacije mikrovalovnega ozadja; za detekcijo teh valov je Seljak predlagal prav iskanje zasuka polarizacije mikrovalov ozadja - prasevanja.

• 1998 : Perlmutter, Schmidt in Riess - dve skupini - eno je vodil Perlmutter, v drugi sta delovala Riess in Schmidt, sta tekmovali v kartiranju vesolja, odkrili sta, da se vesolje pospešeno širi. To sta dokazali z opazovanjem svetlobe oddaljenih supernov tipa Ia, ki so šibkejše od pričakovanih (izračunov iz Dopplerjevega rdečega premika). Projekt se je imenoval - »The Supernova Cosmology Project«. Gre za okoli 50 supernov, ki so svetile zelo šibko. Zamisel, da se vesolje širi pospešeno, je elegantna rešitev problema svetlosti supernov, a je po drugi strani zelo radikalna ideja. Šele ko sta obe skupini prišli do enakih sklepov, je teorija dobila potrditev v znanstveni srenji.

Sedaj velja dopolnjena **Friedmannova enačba** - opis vesolja s kozmološkim členom ( $\Lambda c^2/3$ ), ki vesolje pospešuje:  **$H^2 = 8 \pi G \rho / 3 - k c^2 / R^2 + \Lambda c^2/3$**

Kaj pa prispevek Slovencev? V seznamu zaslužnih oseb smo že omenili Puharja in fizika **Jožefa Stefana** (\* 24. 3. 1835, † 7. 1. 1893), ki je **prvi na svetu** pravilno ocenil temperaturo površine **Sonca** (današnja ocena je 5780 K) – in sicer **iz lastnega zakona o sevanju črnega telesa**. Njegov zakon je danes nepogrešljiv pri modelih življenja zvezd in pri opisu vesolja kot celote. Več v nadaljevanju.

	<p style="text-align: center;"><math>j = \sigma * T^4</math></p> 	<p>To je edini osnovni naravni fizikalni zakon, ki se imenuje po kakem Slovcu:</p> <p style="text-align: center;"><math>j = \sigma * T^4</math></p> <p>Iz Stefanovega zakona izhaja enačba za časovno odvisnost temperature vesolja (bomo 'izpeljali'):</p> <p style="text-align: center;"><math>T = T_0(t_0/t)^{2/3}</math></p> <p>Stefan in Vega imata na Luni svoja kraterja.</p>
--	--	--

Naslednji stavki temu pritrjujejo. Točne meritve prasevanja so za fizikalno kozmologijo zelo pomembne, saj mora vsak model Vesolja pojasniti to sevanje. Prasevanje ima toplotni spekter absolutno črnega telesa pri temperaturi 2,7277 K ( $j = \sigma * T^4$ ), tako da je njegov vrh (velja za spektralno gostoto sevanja na enoto frekvence po Planckovem zakonu) v mikrovalovnem delu s frekvenco 160,4 GHz, kar odgovarja valovni dolžini 1,870 mm - ostanek prapoka. Če vzamemo gostoto na enoto valovne dolžine, bo po Wienovem zakonu vrh pri valovni dolžini 1,062 mm, kar odgovarja frekvenci 282,2 GHz. Več v nadaljevanju.

O še kom, recimo o dr. Urošu Seljaku pa pozneje – za potrditev inflacije vesolja (izjemno hitri širitvi) in tozadevne detekcije gravitacijskih valov, je Uroš predlagal izvirno idejo »vrtinčne« polarizacije prasevanja – metoda še ni rodila sadov, čeprav so to nekateri (BICEP2) že nekoliko prezgodaj trdili.

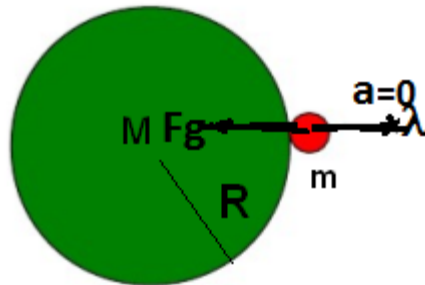
## Ali lahko razumemo moderno sliko vesolja s srednješolskim znanjem, poskusimo

### A) KONSTANTNO VESOLJE

Sila gravitacij, teže - je privlačna sila med deli vesolja – ali bi končno vesolje moralo zaradi lastne teže kolapsirati? Če pogledamo v vesolje, se zdi, da so zvezde več ali manj zmeraj na istem mestu. Saj tako se je zdelo do leta 1917 (navidezna statičnost vesolja je bila tudi problem za Newtona – ki pa recimo na kroženje zvezd, kot možnega modela vesolja, najbrž ni pomislil).

Pa mi začnimo z nadvse preprostim modelom. Naj bo zelena kroglja vesolje z maso M, rdeča pika pa neko nebesno telo na robu vesolja. Če predpostavimo, oziroma se naslonimo zgolj na čutila, ki

»pravijo«, da se razdalje med zvezdami bistveno ne spreminjajo, da je torej njihov pospešek  $a = 0$ , tudi hitrost bi naj bila nič (danes vemo, da se vesolje celo pospešeno širi), je za pričakovati, da silo teže uravnoveša neka druga njej nasprotna sila – recimo kozmološka sila. Tako nekako je leta 1917 sklepal tudi Einstein (v skladu z razumom do takrat videnega dogajanja ...).



Einstein 1917 seveda ni vedel za širjenje vesolja (kot recimo Aristotel ni priznal Zemljinega gibanja okrog Sonca, ker tozadevno ni zaznal učinka paralakse) in je menil, da mora težo uravnovežiti (uravnovesiti) neka sila, ki jo je poimenoval kozmološka konstanta  $\lambda$  ali  $\Lambda$ . Zelo preprosto povedano torej velja:

$$\text{»}F_g - \Lambda = 0\text{«}$$

Bolj učeno pa je Einstein to zapisal v tenzorski obliki z enačbo (z enačbami polja):

**Einsteinov tenzor +  $\Lambda$  \* metrični tenzor =  $(8\pi G/c^4)$  \* napetostni tenzor**

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Ta(e) »enačba(e)« je danes še zmeraj v celoti aktualna - s tem, da je kozmološki člen  $\Lambda$  celo pridobil na veljavi in sicer kot pospeševalec vesolja. Poenostavljeno bi lahko povedali, da desni del enačbe [ $(8\pi G/c^4)$  \* napetostni tenzor] predstavlja maso in energijo (gostoto mase in energije), ki povesta, kako je prostor-čas ukrivljen. Levi del enačbe pa predstavlja ukrivljen prostor-čas, ki pa pove masi (ali tudi svetlobi), kako se naj giblje. V polnem zapisu, učeno povedano, so enačbe sistem desetih sklopljenih, nelinearnih, hiperbolično-eliptičnih parcialnih diferencialnih enačb. Na enačbe se torej lahko gleda kot na množico enačb, ki narekujejo kako je ukrivljenost prostor-časa povezana s porazdelitvijo mase in energije v vesolju. Einsteinove enačbe polja dajo splošni gravitacijski zakon v približku s šibkim poljem in počasnim gibanjem (recimo  $F = GMm/r^2$  ali  $\phi = -GM/r$ ). Sledi kratek opis členov enačbe.

$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$	- $G_{\mu\nu}$ je Einsteinov tenzor ( $R$ je Riccijev skalar ukrivljenosti)
$R_{\mu\nu}$	- je Riccijev tenzor ukrivljenosti prostora in se zapiše s simboli $\Gamma$ $R_{ij} = R^k_{ikj} = \partial_l \Gamma^l_{ji} - \partial_j \Gamma^l_{li} + \Gamma^l_{l\lambda} \Gamma^\lambda_{ji} - \Gamma^l_{j\lambda} \Gamma^\lambda_{li}$ - spodaj je matematični zapis Christoffelovega simbola gama $\Gamma$ $\Gamma^l_{kj} = \frac{1}{2}g^{lm} \left( \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^m} \right)$
$T_{\mu\nu}$	- je tenzor gostote energije in gibalne količine (napetostni tenzor), v vakuumu je nič

$c^{-2}$  (energy density)

$T^{00}$	$T^{01}$	$T^{02}$	$T^{03}$
$T^{10}$	$T^{11}$	$T^{12}$	$T^{13}$
$T^{20}$	$T^{21}$	$T^{22}$	$T^{23}$
$T^{30}$	$T^{31}$	$T^{32}$	$T^{33}$

momentum density      momentum flux

energy density      energy flux

$T_{00}$	$T_{01}$	$T_{02}$	$T_{03}$
$T_{10}$	$T_{11}$	$T_{12}$	$T_{13}$
$T_{20}$	$T_{21}$	$T_{22}$	$T_{23}$
$T_{30}$	$T_{31}$	$T_{32}$	$T_{33}$

momentum density      momentum flux

shear stress (between columns 1-2, 2-3, 3-4)  
pressure (diagonal elements)

Spodaj sta primera takih tenzorjev za idealno tekočino, oz. tek. v mirovanju :

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \rho & \rho v_x & \rho v_y & \rho v_z \\ \rho v_x & p + \rho v_x^2 & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y & \rho v_x v_y & p + \rho v_y^2 & \rho v_y v_z \\ \rho v_z & \rho v_x v_z & \rho v_y v_z & p + \rho v_z^2 \end{pmatrix} \quad (T^{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=0,1,2,3} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix}$$

$g_{\mu\nu}$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix}$$

Spodaj je metrični tenzor, ki se simbolično začne s členom  $g_{00}$ , kar pa ne spremeni fizike, oba zapisa sta torej enakovredna.

$$\begin{pmatrix} g_{00} & g_{01} & g_{02} & g_{03} \\ g_{10} & g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{20} & g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{30} & g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}$$

-  $g_{\mu\nu}$  je metrični tenzor,  
 - v navadnem nerelativističnem 3D prostoru je to tenzor z diagonalnimi vrednostmi 1 in s pomočjo njega se izračuna razdalja med točkama  $ds$  s krajevnim vektorjem  $(dx, dy, dz) = (dx^1, dx^2, dx^3)$  in sicer s prduktom vektor-tenzor-vektor:

$$ds^2 = \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} dx^1 & dx^2 & dx^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ dx^2 \\ dx^3 \end{pmatrix}$$

$$= (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2$$

- v posebni teoriji relativnosti je ta tenzor za prostor-čas  $(ct, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  kar enak

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow ds^2 = -(c*dt)^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

(kdaj metrični tenzor v posebni teoriji relativnosti zapišmo tudi s simbolom  $\eta_{\mu\nu}$ , s tem poudarimo, da le ta velja brez gravitacijskega polja)  
 - v sferičnih koordinatah se metrika zapiše kot  
 $(ct, r \sin\theta \cos\phi, r \sin\theta \sin\phi, r \cos\theta) \Rightarrow ds^2 = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$

Metrični tenzor  $g_{\mu\nu}$   
 Schwarzschildove metrike za okroglo telo iz leta 1916.

$$(x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, r, \theta, \phi)$$

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2GM}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix}$$

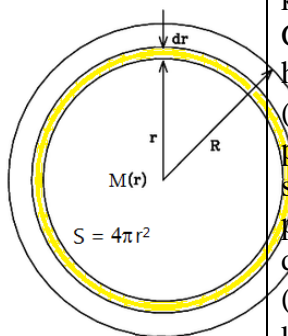
$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2Gm}{rc^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

ALI

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = (c dt, dr, d\theta, d\phi) \begin{bmatrix} -(1 - \frac{2GM}{rc^2}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1 - \frac{2GM}{rc^2})^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c dt \\ dr \\ d\theta \\ d\phi \end{bmatrix}$$

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2$$

Eisteinove enačbe polja dajo splošni (Keplerjev, oz. Newtonov) gravitacijski zakon v približku s šibkim poljem in počasnim gibanjem (gravitacijski zakon



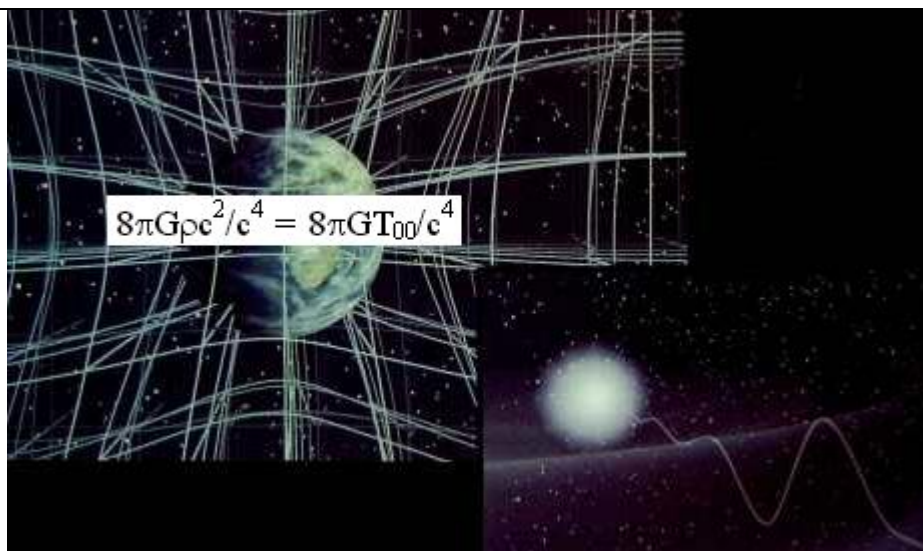
Gaussov gravitacijski zakon  
 $\oint_{\partial V} \mathbf{g} \cdot d\mathbf{A} = -4\pi GM$ .  
 - ta zakon obravnava težo preko gravitacijskega polja, kot posledico mase in integral pospeška po celotni zaključni površini je sorazmeren zaobjeti masi ( $4\pi r^2 GM/r^2 \propto M$ ).

poznamo v obliki  $F = GMm/r^2$ , G je gravitacijska konstanta). Naredimo majhen napor in poskusimo Einsteinove enačbe polja saj v grobem razumeti v simbolnem matematičnem zapisu za homogeno sferično (okroglo) telo. **Ker Einstein trdi, da masa, oz. energija krivita prostor-čas, poiščimo tako povezavo med gibanjem v prostoru (po starem v gravitaciji), ki bo na eni strani enačbe opisovala dinamiko nekega gibanja (dinamiko telesa z maso m ali fotona) – na drugi strani enačbe pa naj bo zbrana vsa masa in energija protora (izražena je lahko preko gostote mase pomnožene s hitrostjo svetlobe na kvadrat in gostote vseh energij, recimo sevanja, itn).**

Pomagajmo si z gravitacijskim potencialom  $\phi$  in zgoraj zapisano Schwarzschildovo metriko, izpeljavo katere bomo, delno preko hevrističnega pristopa, nakazali v nadaljevanju. Sedaj si bomo pomagali zgolj s prvim členom metričnega tenzorja:  $\mathbf{g}_{00} = -(\mathbf{1}-2GM/(c^2r)) = -(\mathbf{1}+2\phi/c^2)$ . Gravitacijski potencial za sferično telo z maso M je kar  $\phi = -GM/r$ , ko velja, da je sila na telo z maso m kar sorazmerna odvodu, gradientu potenciala  $\phi$ , velja:  $F = m\mathbf{d}^2\mathbf{r}/dt^2 = m\mathbf{d}\phi/d\mathbf{r} = GMm/r^2$ . Gradient je tukaj mišljen zgolj v radialni smeri, saj se pri sferičnem homogenem telesu gravitacija ne spreminja po poti loka okrog telesa. Odvod (gradient) potenciala je po definiciji kar pospešek  $g = -d\phi/dr = -GM/r^2$ . V prostoru, v vesolju, nas recimo zanima, kako se na neki ukrivljeni ploskvi spreminja pospešek, oziroma sila na neko telo. Ploskovni prispevek lupine k pospešku na razdalji r od centra sferičnega telesa lahko zapišemo preko diferenciala dM mase lupine, ki jo izrazimo z gostoto in diferencialom volumna (slika levo:  $dM = \rho dV = \rho S dr = \rho 4\pi r^2 dr$ , kjer je  $S=4\pi r^2$  kar površina lupine - krogle na razdalji r); velja  $dg = -GdM/r^2 = -G\rho 4\pi r^2 dr/r^2 = -G\rho 4\pi dr$ . Iz česar sledi, da je odvod (gradient) pospeška kar  $dg/dr = -G\rho 4\pi$ , oziroma drugi odvod potenciala po r je  $\mathbf{d}^2\phi/d\mathbf{r}^2 = 4\pi G\rho$ . Namesto d/dr bi morali pisati parcialne odvode  $\partial/\partial x + \partial/\partial y \dots$  (uporabimo standardni simbol za gradient  $\nabla = \partial/\partial r$ ), oz. drugi odvod s simbolom  $\partial^2/\partial r^2$ , kar zapišemo z znakom  $\nabla^2$  (to je Laplaceov operator). Tako smo prišli do Poissonove enačbe [ $\partial^2\phi/\partial r^2 = \nabla^2\phi = 4\pi G\rho$ ] (dejansko smo čez palec uporabili tudi Gaussov zakon). **Sedaj smo pa že delno izpolnili naš zastavljeni cilj – na desni strani enačbe je ostala zgolj gostota telesa pomnožena s konstantama  $4\pi$  in G, na levi pa dvojni gradient potenciala, ki določa dinamiko teles v prostoru.** Člen  $\mathbf{g}_{00}$  v metričnem tenzorju zgoraj zapisane Schwarzschildove metrike je  $\mathbf{g}_{00} = (\mathbf{1}-2GM/(c^2r))$ , kar je enako  $\mathbf{g}_{00} = (\mathbf{1}+2\phi/c^2)$ , saj je  $\phi = -GM/r$ . Prvi člen metričnega tenzorja  $\mathbf{g}_{00}$  je torej sorazmeren z  $2\phi/c^2$ .

Od koder sledi  $\partial^2\mathbf{g}_{00}/\partial r^2 = 2(\partial^2\phi/\partial r^2)/c^2 = 8\pi G\rho/c^2 = 8\pi G\rho c^2/c^4 = 8\pi GT_{00}/c^4$ . Tukaj smo uporabili kar Einsteinovo enačbo  $E = mc^2$  ali  $T_{00} = E/V = mc^2/V = \rho c^2$ , za gostoto energije prvega člena napetostnega tenzorja:  $T_{00} = \rho c^2$ . Tako pridemo do enačbe  $\nabla^2\mathbf{g}_{00} = 8\pi GT_{00}/c^4$ . Ta enačba (to je zgolj prvi člen tenzorja) je že zelo podobna prvotni Einsteinovi enačbi (enačbam) polja v tenzorski obliki ( $\mathbf{G}_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}/c^4$ ), oziroma današnjemu zapisu:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu} R + g_{\mu\nu} \Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$



Priložena slika kaže prisposodbo ukrivljenosti prostora zaradi mase Zemlje (desni spodnji kot pa prikazuje nekoliko pretirano ukrivljeno pot žarkov iz oddaljene zvezde po ukrivljenem prostor-času) – to je bistvo naše preproste poti do vsaj približnega razumevanja prvega člena Einstenovega tenzorskega zapisa s predpostavko, da ni razlike med maso in energijo, in da vsaki energiji lahko pripišemo ekvivalent mase in obratno. In Einstein je prav to zapisal v svojih enačbah polja, kjer pravi, da vsa masa in energija nekega prostora ta prostor ukrivlja in določa gibanje po tem prostoru. Določa dinamiko tako masnih delcev in seveda tudi fotonov (recimo odkim žarkov od smeri v bližini zvezd). V Newtonovi sliki sveta gibanje določa sila gravitacije kot posledica mase in v njej je čas absoluten, kar pa je pomanjkljivo. Na gibanje (dinamiko) namreč vpliva vsa energija nekega prostor-časa, ki ukrivlja prostor – in s tem smo razrešili mnoge dileme, recimo kako lahko gravitacija vpliva na svetlobo - in tudi čas ni več absoluten.

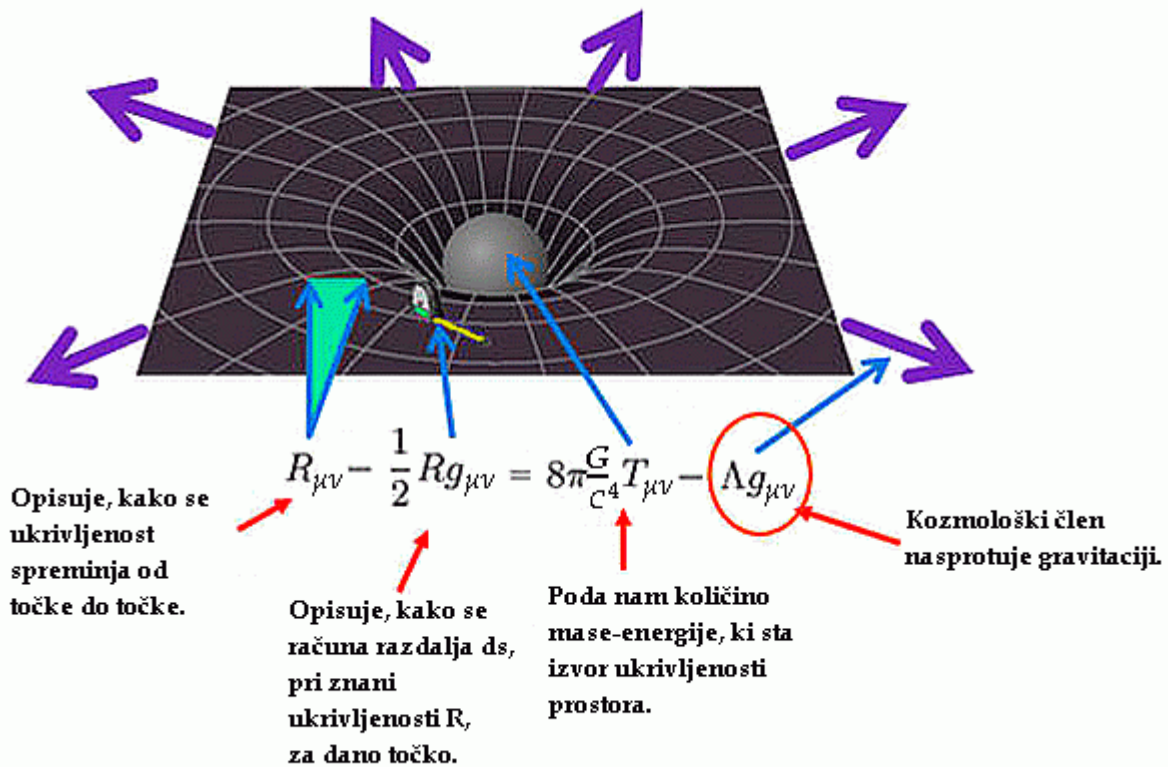
<p>Še dodatek: Lorentzove transformacije: <math>\gamma = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}</math> <math>\beta = v/c</math></p>	$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma ct - \beta\gamma x \\ \gamma x - \beta\gamma ct \\ y \\ z \end{pmatrix}.$ <p>Rabili jih bomo pri prikazu poti do rešitve Einsteinevega gravitacijskega polja za okroglo telo – rešitev je našel Karel Schwarzschild leta 1916.</p>
--	---

**Kot bomo videli, postulat statičnega vesolja kmalu zamajejo močni argumenti meritev (ki kažejo, da se vesolje širi) in tudi sama 'mat-fizika'.**

Še beseda glede vektorjev in tenzorjev (ni trivialno pa vendar) – vsak vektor je tudi neke vrste tenzor, ni pa vsak tenzor tudi vektor. Rečemo lahko tudi, da so skalarji, kot recimo masa, temperatura in druge skalarne količine, tenzorji z redom 0. Sila, hitrost (gibalna količina ( $mv_x, mv_y, mv_z$ )) in druge vektorske količine so tenzorji 1. reda. Linearna transformacija, kot je anizotropno (neka značilnost je odvisna od smeri) razmerje med silo in vektorji pospeška, je tenzor 2. reda. Imamo pa tudi tenzorje 3. reda (prostorske) in tudi višjega reda. V posebni teoriji relativnosti je tenzor za prostor-čas 4. reda. Tenzor je torej matrični zapis (kot se vidi iz opisa Einsteineve enačbe), ki recimo opiše lastnosti neke snovi, prostora, ... (če ostanemo trdno na

Zemlji, lahko omenimo recimo prevodnost toplote, električnega toka, ..., ki za dani objekt, predmet ni nujno enaka v vseh smereh, je anizotropna zaradi nehomogenosti materialov; v vesolju to lahko pomeni nehomogeno gravitacijo glede na smeri, energijo polja ...). Tozadevno je vsak tenzor, ki ni vektor, krajevno strogo vezan na telo, prostor, sistem – kar recimo za vektor ne velja (ga recimo lahko zaporedno premaknemo). Tudi polje gravitacije, oziroma energije, ima lahko v različnih smereh različne vrednosti – zato se dinamika (ukrivljenost prostor-časa) vesolja v splošnem opisuje s tenzorji. Produkt tenzorja in vektorja je zmeraj vektor, kar pa za produkt matrike in vektorja ni nujno.

Opišimo samo še pomen (napetostnega) tenzorja energije in gibalne količine ( $T_{\mu\nu}$ ) iz Einsteinove enačbe polja. To je tenzor, ki opisuje gostoto in pretok energije v prostor-času. To so lastnosti snovi, sevanja in polj nekласičnih-gravitacijskih sil (v tabeli je v barvah opisan tenzor  $T_{\mu\nu}$  glede na vir polja – zaradi mase-energije [energy density], gibalne količine, pritiska, napetosti, ...). Ta tenzor je torej vir gravitacijskega polja (bolje ukrivljenosti prostor-časa) v Einsteinovih enačbah splošne teorije relativnosti - tako kot je masa vir polja v Newtonovi gravitaciji. Einsteinove enačbe polja se torej uporabljajo za določanje ukrivljenosti prostor-časa, ki nastane zaradi prisotnosti mase in energije. Povedano zelo po domače – tudi, če bi namesto Sonca imeli v nepropustni krogli zgolj fotone (N fotonov) z ekvivalentom energije  $M_{\text{Sonca}} * c^2 = Nh\nu$ , bi Zemlja čutila enako gravitacijo, kot jo čutimo danes (zato tudi potujemo okrog Sonca) - kot vemo, da je Sonce v večini sestavljeno iz vodika in helija ( $h\nu$  je energija fotona – o tej enačbi v nadaljevanju).



Slika - nazoren prikaz členov Einsteinovih enačb polja.

V praznem prostoru, ki je raven, je Riccijev tenzor  $R_{\mu\nu} = 0$ , enako velja za Riccijev skalar  $R$ , metrični tenzor  $g_{\mu\nu}$  pa ima v tem primeru v prvem členu vrednost  $g_{00} = 1$  (napetostni tenzor pa ima v prvem členu vrednost  $T_{00} = \rho c^2$ ) in ostaneta nam zgolj enačbi:



$$T_{\mu\nu}^{(\text{vac})} = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} g_{\mu\nu}$$

$$\rho_{\text{vac}} = \frac{\Lambda c^2}{8\pi G}$$

Zadnja enačba predstavlja takoimenovano gostoto vakuuma (naj se sliši še tako čudno, a v vakuumu se stalno dogajajo fluktuacije, pari delec-antidelec, ...) in je to hkrati matematični zapis, poleg Heisenbergovega načela nedoločenosti [  $\Delta E \Delta t \geq h/(4\pi)$  ], v katerem se skriva možna razlaga začetka vesolja: pospešeno širjenje prostor-časa.

Še zgodba o kozmološki konstanti  $\Lambda$

Člen s kozmološko konstanto je izvorno vpeljal Einstein leta 1917, da bi omogočal takšno rešitev enačb polja, ki bi podprla model statičnega nerazširjajočega se Vesolja. Ta poskus uvedbe konstante se je pokazal za neuspešnega. Statično Vesolje je bilo po teoriji nestabilno in 1927 je Georges Lemaître objavil članek ("A homogeneous Universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae" - "Homogeno vesolje konstantne mase in naraščajočega polmera izračunanega iz radialne hitrosti izvengalaktičnih meglic"), enako je Hubble po desetletju opazovanj leta 1929 odkril oddaljevanje galaksij, kar je kazalo na širjenje Vesolja. Einstein je člen  $\Lambda$  opustil in imenoval svojo vpeljavo »za svojo največjo zablodo v življenju«. Dolgo časa so menili, da je vrednost kozmološke konstante enaka 0. Novejša izboljšana astronomska opazovanja so odkrila, preko sija supernov tipa Ia, da rezultate lahko pojasni le od 0 različna kozmološka konstanta  $\Lambda$ , saj se vesolje pospešeno širi.

V nadaljevnju še nekoliko razčlenimo Einsteinovo tenzorsko enačbo in to brez kozmološkega dela ter si oglejmo nekaj členov enačbe. Kot lahko razberemo iz uvodnih opisov indeksov  $\mu$  in  $\nu$  tenzorjev Einsteinovih enačb, le ta zavzemata vrednosti 0, 1, 2 in 3.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{\mu\nu}.$$

Tako vse kombinacije indeksov  $\mu$  in  $\nu$  dajo sistem enačb (enačb polj), zapišimo nekatere:

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{00}$$

$$R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{01}$$

$$R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{11}$$

In tako naprej.

Vrednost 0 opisuje časovni del prostor-časa, vrednostmi 1, 2 in 3 (recimo x, y, z) pa tri dimenzije prostora. Enačba

$$R_{01} - \frac{1}{2}Rg_{01} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{01}$$

se torej nanaša na čas (0) in smer prostora (1, recimo x). Na desni izraz  $T_{01}$  (v idealni tekočini je  $T_{01} = \rho v_1$ ) opisuje gostoto gibalne količine (hitrost in maso, oz. gostoto) snovi, ki se gibljejo v 1-smeri prostora (recimo v smeri x). Gibanje v času in 1-smeri prostora se kombinirata in povezujeta med seboj - posledica delovanja je opisana na levi strani enačbe (analogna je razlaga enačb za indeksa 2 ali 3).

Če ima enačba le prostorske komponente 1, 2 ali 3, recimo

$$R_{11} - \frac{1}{2}Rg_{11} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{11},$$

se enačba nanaša samo na prostor. Izraz na desni strani  $T_{11}$  (v idealni tekočini velja  $T_{11} = p + \rho v_1^2$ ) sedaj upošteva vpliv pritiska v ustrezni smeri prostora ( $\mu=1, \nu=1$ ). Leva stran enačbe pa nam pove, kako je prostor ukrivljen v tej smeri.

Če sta indeksa  $\mu$  in  $\nu$  enaka 0, potem se enačba

$$R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = \frac{8\pi G_N}{c^4}T_{00}$$

nanaša le na čas. Izraz  $T_{00}$  (recimo  $T_{00} = \rho c^2$ ) sedaj predstavlja energijo, ki povzroča, da se čas pospeši ali upočasni. Na levi strani enačbe pa so opisane spremembe samega toka časa.

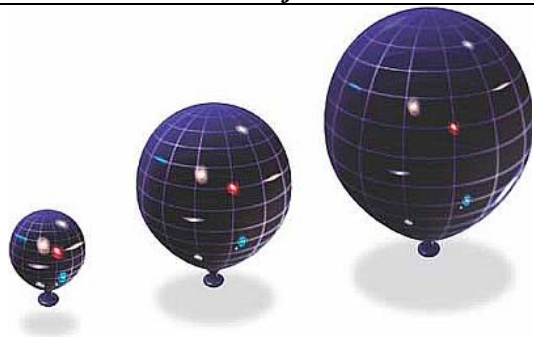
Ker vsak indeks  $\mu$  in  $\nu$  (komponente prostor-časa) lahko zavzame eno od štirih vrednosti, to da skupaj  $4 \times 4 = 16$  enačb. Vendar pa se izkaže, da je enačba  $\mu\nu$  enaka  $\nu\mu$  (za vsak izmed indeksov 0, 1, 2 ali 3), recimo  $T_{01} = T_{10}$ . S tem se zmanjša skupno število enačb na deset (4 po diagonali in še 6 izven matrične diagonale).

## Omenimo še izjemno pomembno kozmološko načelo, ki pravi, da ima vesolje v vseh točkah in v vseh smereh enake lastnosti.

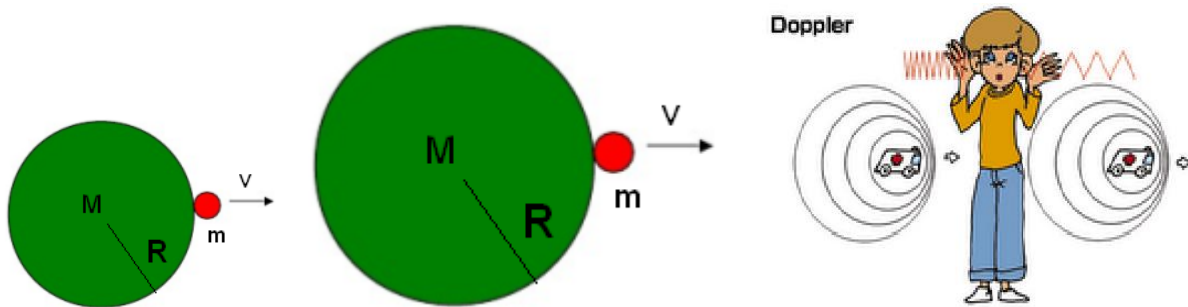
*Pa še načelo, da je hitrost elektromagnetnega valovanja ( $c$ ) maksimalna hitrost s katero lahko potujejo informacije - energija:  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . V tem primeru je hitrost lokalni pojem v prostoru in času.*

*No - drugače je pri relativnih gibanjih – ko recimo govorimo o »širitvi prostora« med galaksijami. Zaradi oddaljevanja (približevanja) galaksij, lahko izmerimo relativne hitrosti večje od hitrosti svetlobe – a to ne pomeni, da smo recimo sposobni energijo pošiljati s hitrostjo, ki presega svetlobno. Eno je hitrost signala, drugo pa meritev relativne hitrosti v razširjajočem vesolju. Večina učbenikov poda kot zgled za ta pojav (»paradoks« hitrosti večjih od svetlobe) primer dinamike dveh mravelj, ki se premikata na napihajočem balonu. No sam prostor-čas pa se lahko širi veliko hitreje od svetlobe – to predvideva teorija inflacije mladega vesolja, ki se je za »trenutek« širilo hitreje od svetlobe.*

**Dinamika na površini napihajočega balona je lep primer za lažje razumevanje, razlago, kozmološkega načela, dinamike vesolja nasploh. V vseh smereh so namreč, na površini napihajočega balona, lastnosti enake, nikjer ni centra in dominantne smeri, ni roba, itn. Tudi Hubblova zakon ( $v_{\text{gal}} = H \cdot \text{razdalja}_{\text{gal}}$ ) se da nazorno utemeljiti z vajo napihovanja balona in merjenjem razdalj med točkami površine balona v odvisnosti od časa.**



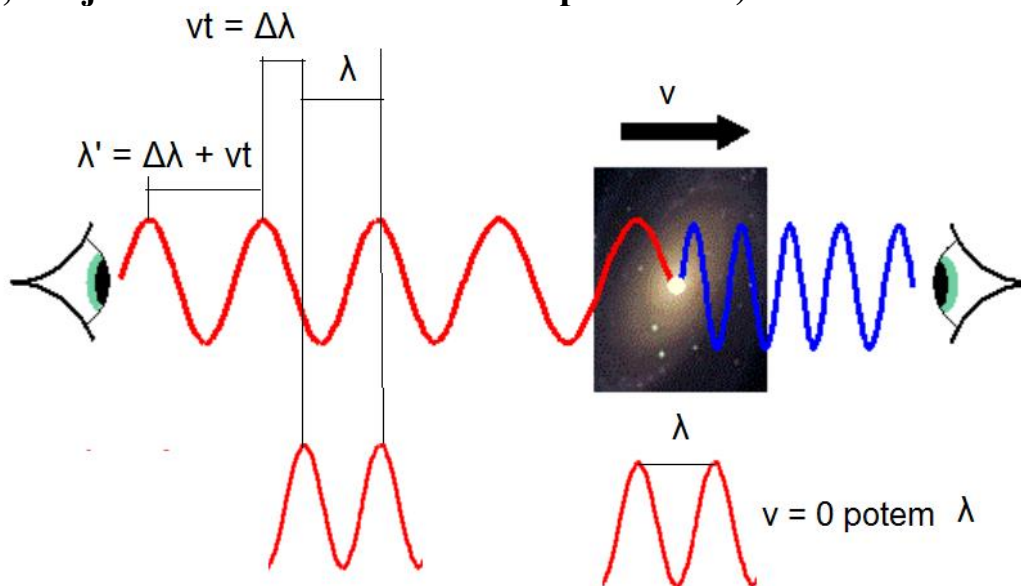
## B) DINAMIČNO VESOLJE



Kaj se je zgodilo, ko je de Sitter 1917 našel eno izmed rešitev Einsteinovih enačb, ki je dopuščala tudi širitev vesolja, in ko je Hubble odkril (v 1920-tih, še pred njim je idejo o širitvi vesolja objavil Belgijec Lemaître) povezavo med hitrostjo in oddaljenostjo galaksij:

$$V = HR$$

Ta zakon lahko zapišemo še v drugi obliki:  $dR/dt = HR$  ali tudi  $H = (dR/dt)/R$ . **Einstein je nato, kot smo že omenili, umaknil kozmološko konstanto in jo imenoval za svojo "največjo zmoto" ("It was the biggest blunder of my life." - a ne pozabite je, ker jo bomo začuda še srečali in uporabili ...!)**



**Kako so pa ugotovili, da se vesolje širi (?)** - preko podaljšanja valovne dolžine ( $\Delta\lambda$ ) svetlobe z valovno dolžino  $\lambda$  iz oddaljene galaksije. Večina valovnih dolžin iz galaksij se podaljša. Ker ima rdeča barva najdaljšo valovno dolžino v vidnem delu elektromagnetnega spektra [380 nm do približno 780 nm], poimenujemo podaljšanje valovne dolžine, zaradi oddaljevanja galaksij, **rdeči premik**. Pojav je poznan tudi kot t. i. Dopplerjev efekt. Obstaja še gravitacijski rdeči premik, a o tem pozneje. Galaksiji s hitrostjo  $v$  glede na opazovalca, se podaljša valovna dolžina (za  $\Delta\lambda$ ) oddane svetlobe – in sicer v času  $t$  prehoda valovnih maksimumov, glej sliko, za vrednost  $vt = \Delta\lambda$ . Iz tega izhajajo nekaj pomembnih sklepov.

**Najprej ponovimo nekaj pojmov iz šole in jih »rahlo« dopolnimo**

Za svetlobo velja: hitrost  $c = \lambda t = \lambda \nu = 3 \cdot 10^8$  m/s.

Frekvenca je:  $\nu = 1/t$

$$\lambda' = \lambda + \nu t = \lambda + \nu \lambda / c$$

$$\nu \lambda / c = \lambda' - \lambda = \Delta \lambda$$

$$\nu / c = \Delta \lambda / \lambda$$

Razmerje  $\nu / c$  imenujemo **rdeči premik** in ga označujemo s črko "z", velja če je razmerje  $\nu / c \ll 1$ :

$$z = \nu / c = \Delta \lambda / \lambda$$

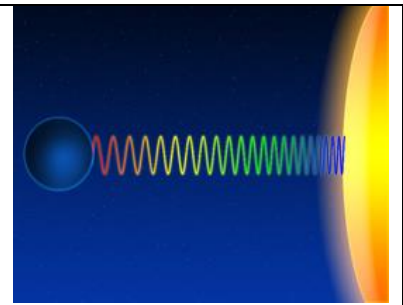
Za velike hitrosti velja relativistična povezava:

$$1 + z = (1 + \nu / c) \gamma = \left( (1 + \nu / c) / (1 - \nu / c) \right)^{1/2}$$

**Gravitacijski (Einsteinov) rdeči premik se zapiše kot:**

$$1 + z = 1 / \left( 1 - (2GM / (Rc^2)) \right)^{1/2}$$

Je neposredna posledica gravitacijske dilatacije časa, saj se frekvenca elektromagnetnega sevanja zmanjša pri prehodu na območje višjega gravitacijskega potenciala. Večinoma je ta prispevek za galaksije minimalen glede na efekt premika galaksij. Člen '1-(2GM/(Rc<sup>2</sup>))' bomo srečali tudi pri vaji o dinamiki dveh teles.

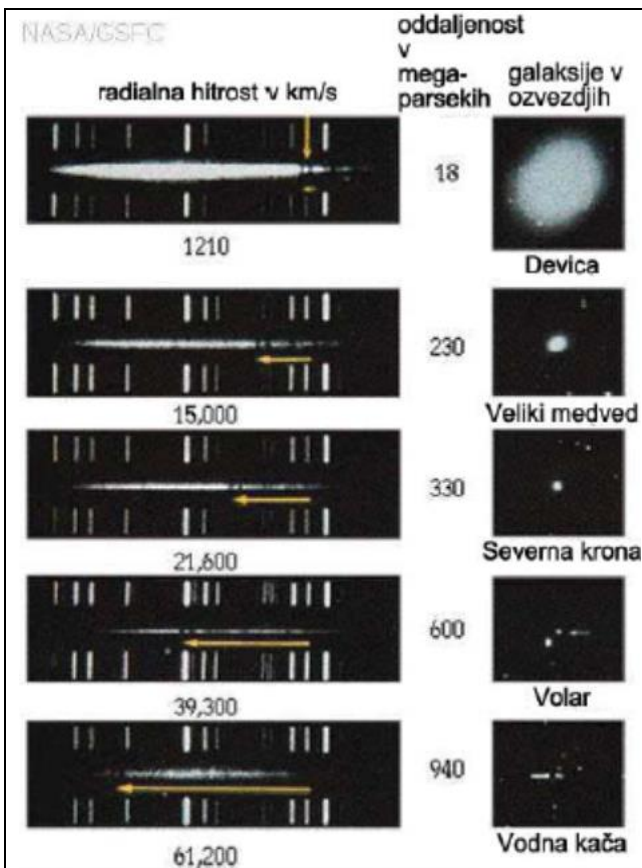


Sedaj lahko Hubblov zakon ( $V = HR$ ) preoblikujemo, oziroma zapišemo rdeči premik s Hubblovim zakonom:

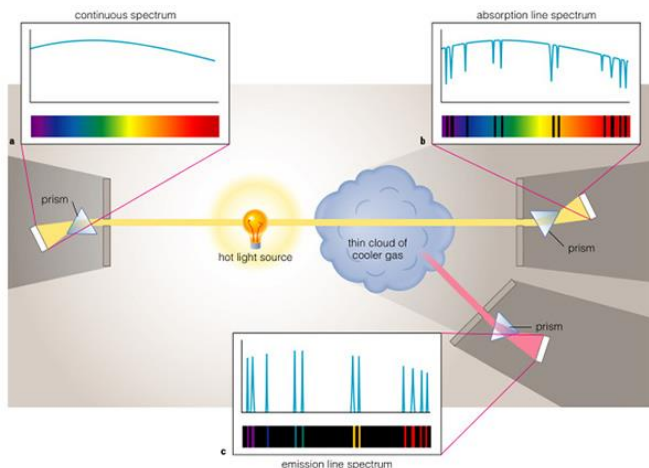
$$z = \nu / c = \Delta \lambda / \lambda = HR / C = Ht$$

Poglejmo še povezavo med valovno dolžino  $\lambda' = \Delta \lambda + \lambda$ , ki se zaradi širjenja vesolja daljša in t. i. polmerom vesolja R – količini sta sorazmerni. Iz zveze  $\Delta \lambda / \lambda = HR / C$  sledi, da je  $\Delta \lambda \propto R$ .

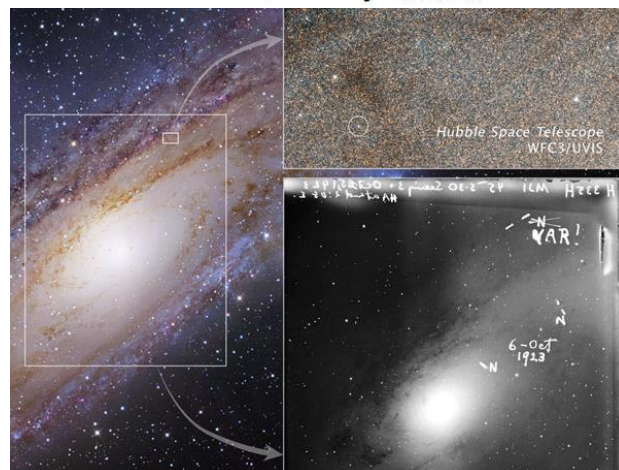
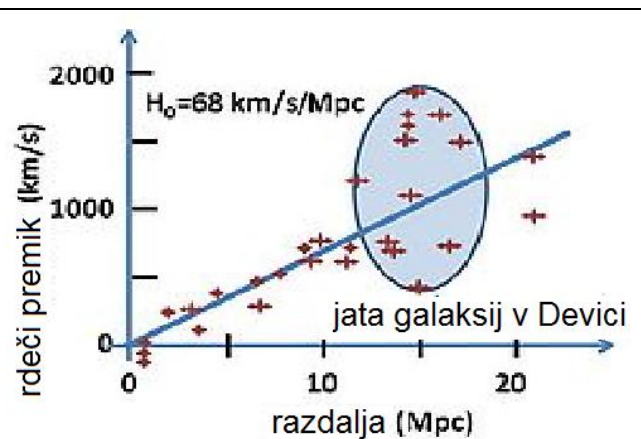
-----  
\* Še beseda o pojmu sorazmernosti, ki ga večina pozna pa vendar. Znak  $\propto$  pomeni sorazmernost. Primer, recimo masa (m) je pri konstantni gostoti ( $\rho$ ) sorazmerna z volumnom ( $m = \rho V$ ), kar zapišemo kot:  $m \propto V$ . Toliko o razumevanju znaka in pojma za sorazmernost – ga bomo še večkrat srečali.



V 1920-tih sta Hubble in njegov asistent Milton Humason izmerila oddaljenosti in rdeče premike nekaj ducatov galaksij. Iz meritev sta razbrala nekaj »čudnega«. Kot razmišlja Hubble: "Bolj ko so galaksije oddaljene, hitreje se oddaljujejo od nas." (zgoraj) To je danes znani Hubblov zakon:  $V = HR$  ali  $z = v/c = HR/C$ .

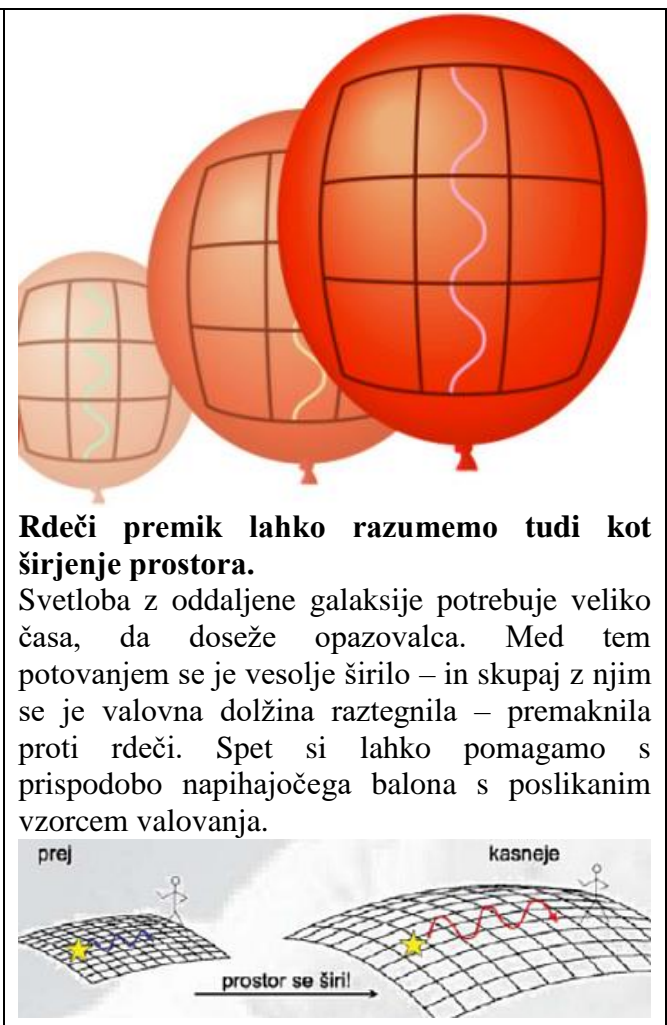
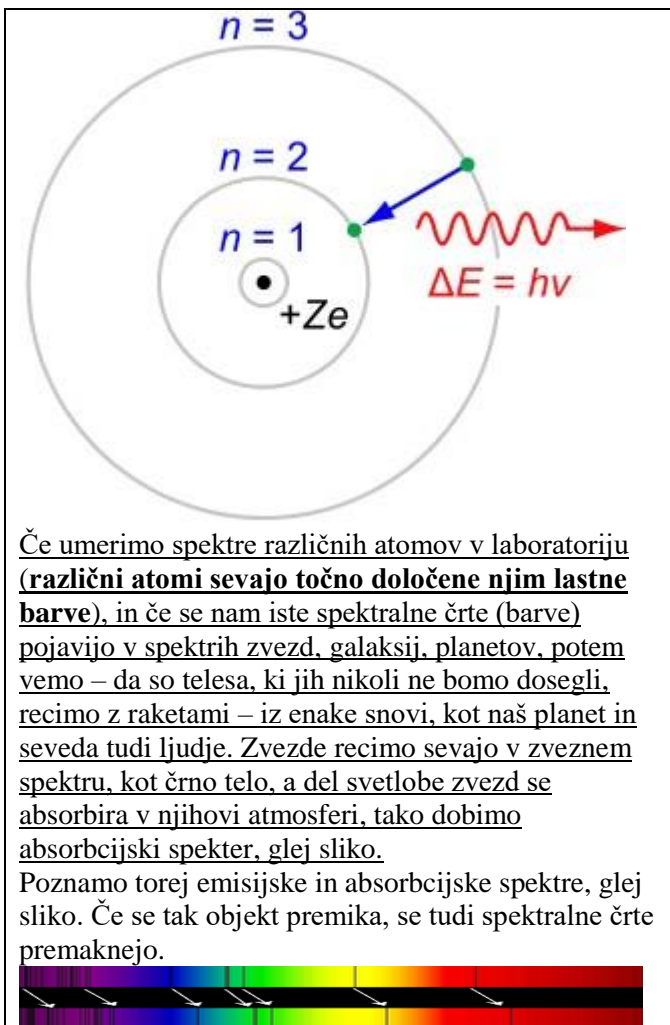


Še beseda o napravah za detekcijo spektra svetlobe nekega objekta, snovi. **Spektroskop** je recimo prizma, ki lomi žarke (snop svetlobe različnih barv iz ozke reže) na zaslon z umeritveno skalo.

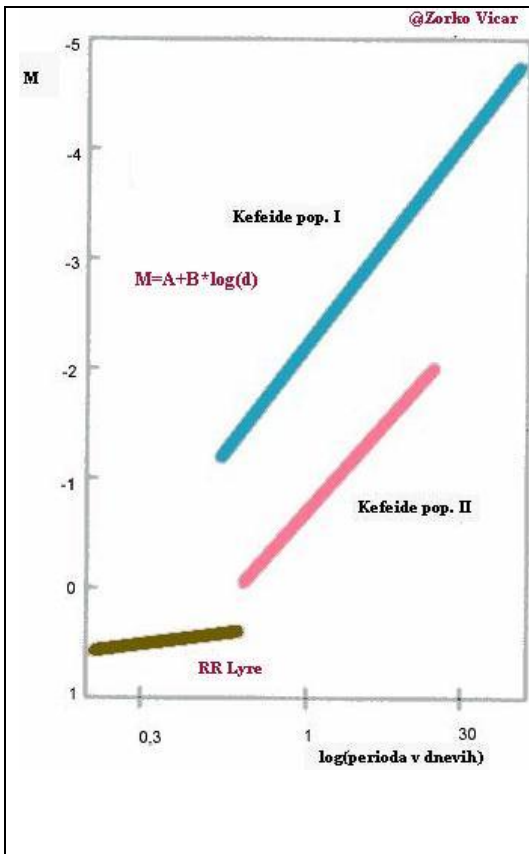


Zahvaljujoč delu Harvardske astronomke Henriette Leavitt, lahko zvezde kefeide, ki enakomerno spreminjajo sij, uporabimo kot standardne svetilnike za določanje razdalj. Identifikacija tovrstnih zvezd je omogočila Hubblu, da je pokazal, kako Andromeda ni majhna kopica zvezd in plinov znotraj naše Galaksije, ampak velika samostojna galaksija, precej oddaljena od Rimske ceste. **Hubblovo odkritje je omogočilo uveljavitev modernega koncepta vesolja, napolnjenega z galaksijami, ki se oddaljujejo (to dokazujejo meritve premika spektralnih črt oddaljenih galaksij proti rdeči svetlobi).**

V 20. letih prejšnjega stoletja je s proučevanjem fotografskih plošč, posnetih z 2,5-metrskim teleskopom observatorija Mt. Wilson, Edwin Hubble določil razdaljo do Andromedine meglice in prepričljivo demonstriral obstoj galaksij daleč onkraj Rimske ceste. Njegove opombe so vidne na zgodovinskem posnetku, vstavljenem spodaj desno, prikazanem v povezavi z zemeljskim ter posnetki s Hubblovim vesoljskim teleskopom, narejenimi skoraj 90 let kasneje. Z medsebojno primerjavo različnih plošč, je Hubble iskal nove, zvezde ki doživijo nenadno povečanje sija. Nekaj jih je našel na tej plošči in jih označil z "N". Kasneje, ko je odkril, da je zvezda blizu zgornjega desnega kota (označena s črticama) v resnici spremenljiva zvezda, poznana kot kefeida, je prečrtal "N" in napisal "VAR!".



Že leta 1917 je tudi Vesto Slipher posnel spekter (graf intenzitete svetlobe v odvisnosti od frekvence, oziroma valovne dolžine) z mnogih oddaljenih galaksij in ugotovil, da so bile vse valovne dolžine premaknjene proti rdečemu delu spektra. Najenostavnejša razlaga je bila, da se galaksije oddaljujejo od nas z ogromnimi (tisoči km/s!) hitrostmi. **A takrat še niso znali meriti razdalj do galaksij.** Počasi, a vztrajno se je utrjevala slika vesolja, ki pravi, da se je vse začelo s t. i. velikim pokom, in da se vesolje še zmeraj širi. To fiziko, matematiko in meritve, ki so kazale na širitev vesolja, so dolgo zavračali (podobno kot heliocentrizem) – tudi iz ideoloških razlogov – recimo, model(i) vesolja sploh ni bil del učnega programa. Kako pa je danes? Tudi prva Nobelova nagrada, ki se je neposredno nanašala na astronomijo (v okviru nagrad za fiziko), je bila podeljena zelo pozno – leta 1974 (Ryleu in Hewishu za radijsko astrofiziko, odkritje pulzarjev).



Če poznamo sij zvezde (magnitudo iz katere izrazimo gostoto svetlobnega toka  $j$ ) in izsev  $P$  (kdaj tudi oznaka  $L$ ), potem lahko izračunamo oddaljenost ( $R$ ) zvezd in posredno strukturo (kopic in galaksij), ki jim zvezde pripadajo. Velja:  $j = L/(4\pi R^2)$  oziroma  $R = (L/(4\pi j))^{1/2}$ . Kako določiti energijski tok (izsev) zvezde? Na začetku 20. stoletja, so opazili, da je izsev utripajočih zvezd (kefeid, po delti Kefeja) povezan s periodo utripanja. Tako je Hubble izmerili razdaljo do nam najbližje galaksije M31 v Andromedi in s tem se je začelo novo, izjemno pomembno, kozmološko poglavje. Poznamo populacijo I, delta Kefeja in populacijo II, W-device. Henrietta S. Leavitt, je leta 1912 na Harvard College Observatory, odkrila povezavo med izsevom in periodo utripanja kefeid.  $\delta$ -Kefeja ima periodo ( $t_0$ ) okrog 5,3663 dni (to je 5 dni, 8 ur, 47 minut in 31,9 sekund). Temperatura se spreminja od 5400K (temnordeča barva), do 6100K (belo-modra barva). Sprememba magnitude je od 3,5 to 4,4. Po natančnih meritvah so astronomi prišli do naslednje empirične povezave med izsevom, oziroma povprečno absolutno magnitudo ( $M$ ) in periodo ( $t_0$ ) utripanja za populacijo I:  $M=A+B*\log(t_0)$ . Koeficienta  $A$  in  $B$  določimo iz meritev, grafa.

## Kako pa bo vesolje živelo v bodoče, če se sedaj širi?

### Poglejmo možne scenarije

Vesolje se trenutno širi - ali se bo:

- **večno širilo (bo hitrost v neskončnosti večja od nič:  $v > 0$ ),**
- **kdaj ustavilo (v neskončnosti bo hitrost nič:  $v=0$ ),**
- **kdaj ustavilo in celo začelo krčiti?**

Spomnimo se na izrek o ohranitvi vsote kinetične in potencialne energije. Še prej pa definirajmo spremenljivke našega preprostega vesolja.

$M$  – masa vesolja

$m$  – masa delca na »robu« vesolja s hitrostjo  $v$

$R$  – polmer vesolja

Ohranitev energije

• Kinetična energija  $W_k = m v^2/2$

• Potencialna energija  $W_p = -G M m/R$  ( $W_p = -mgh = -mgR = -RGMm/R^2 = -G M m/R$ )

-  $G$  je gravitacijska konstanta ( $G \approx 6.67428(67) \times 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ )

Velja:  $W = W_k + W_p = \text{konstanta}$  (ali zapis  $E = E_k + E_p = \text{konstanta}$ )

$$m v^2/2 - G M m/R = E = \text{konstanta}$$

## VAJE

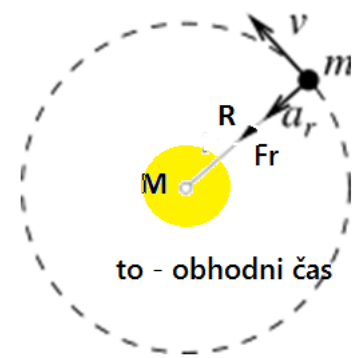
Da se malo navadimo na enačbe iz srednje šole, rešimo nalogo, kako je s skupno energijo Lune, ki potuje okrog Zemlje, še boljše, kako je z energijo dveh gravitacijsko vezanih teles. **Kakšna je njuna skupna energija?**

Zapišimo povezavo med radialno (centripetalno) silo v povezavi s privlačno gravitacijsko silo. Za kroženje velja:

$$F_r = F_g \rightarrow mv^2/R = GMm/R^2$$

iz izraza sledi (če okrajšamo R in delimo z dva), da je  $W_k$ :

$$mv^2/2 = GMm/(2R) = W_p/2$$



Pri kroženju (če poenostavimo, recimo Lune okrog Zemlje) je kinetična energija enaka polovici potencialne. Kako je s skupno energijo?  $W = W_k + W_p$

$$W = mv^2/2 - GMm/R = GMm/(2R) - GMm/R = -GMm/(2R)$$

Skupna energija je torej negativna in enaka polovici potencialne energije. To je primer, kako enostavno dokažemo, da so telesa gravitacijsko vezana, če je energija negativna. V primeru, ko je energija enaka nič, velja, da ko se telo oddalji v neskončnost, hitrost pade na 0 – sledi račun:

$$W_k + W_p = 0 \rightarrow mv^2/2 - GMm/R = 0 \rightarrow mv^2/2 = GMm/R$$

$$v = (2GM/R)^{1/2} \quad \text{- to je hrati ubežna hitrost,}$$

recimo rakete, da **zapusti** »gravitacijo« **Zemlje** in znaša približno **11.2 km/s**.

Da predmet **zapusti** naše **Osončje**, če ga izstrelimo iz Zemlje, je **16.6 km/s**.

Da predmet **zapusti** našo **Galaksijo**, če ga izstrelimo iz Zemlje, je **129 km/s**.

Če telo izstrelimo s hitrostjo, ki je večja od ubežne, je kinetična energija večja od potencialne ( $W_k > |W_p|$  ali  $W_k + W_p > 0$ ), se bo telo tudi v neskončnosti z neko hitrostjo oddaljevalo od matičnega telesa.

**Izvedena vaja nam bo zelo pomagala pri scenarijih dinamike vesolja – pri kozmologiji (po Newtonovi mehaniki).**

Še malo stranpoti. Ker tekst izrecno ne obravnava zvezd, si tukaj le bežno oglejmo mejni tip zvezde z nenavadnim imenom - »črna luknja«. **Pri nadaljevanju vaje si zastavimo še eno zanimivo vprašanje – kolikšen pa mora biti polmer ( $R_s$ ) neke zvezde z maso M, da tudi svetloba ne more uideť iz površja ali iz notranjosti zvezde?** Izhajajmo iz ohranitve vsote kinetične in potencialne energije in namesto hitrosti v, zapišimo hitrost svetlobe c (delec svetlobe, foton, sicer nima mase, a predpostavimo, da gravitacija nanj vseeno deluje). Za mejni primer velja, da je  $W_k + W_p = 0$ , iz česar sledi:

$$m_f c^2/2 = GMm_f/R_s$$

Iz zadnje enačbe sledi, da je polmer take zvezde, ki še svetlobi ne pusti iz površja (zato so jo poimenovali – **črna luknja**), manjši od:  **$R_s = 2GM/c^2$**

Ker je  $M = \rho V = \rho 4\pi R^3/3$  velja,  $R = 2GM/c^2 = \rho 8\pi R^3/(3c^2)$ , iz česar sledi, da je  $R_s$  povezan z gostoto enak:

$$R_s = (3c^2/(8\pi G\rho))^{1/2}$$

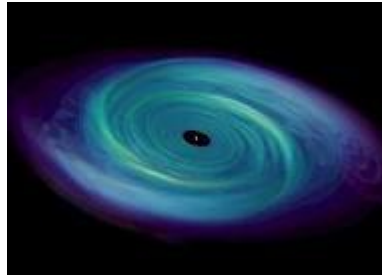
Temu polmeru pravimo tudi Schwarzschildov radij (ta radij je poračunal že naravoslovec in duhovnik Joh Michell leta 1784 - tako zvezdo je poimenoval »temna zvezda«). Temu polmeru  $R_s$  rečemo tudi dogodkovni horizont. Karel Schwarzschild je, spodbujen s strani Einsteinovega članka o splošni teoriji



gravitacije, izpeljal rešitev gravitacijskega polja za okroglo telo (Einstein je 1916 njegov prispevek prebral pred prusko akademijo, saj je bil Schwarzschild na fronti, kjer je bil tudi smrtno ranjen – nenavadni časi). Njegova rešitev kvadrata razdalje med dogodkoma ob krogli  $M$  je:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 (1 - 2GM/(c^2 R)) + dR^2/(1 - 2GM/(c^2 R)) + R^2 d\vartheta^2 + R^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Člen  $dR^2/(1 - 2GM/(c^2 R))$  naraste čez vse meje, ko je  $R = R_s = 2GM/c^2$ , pride do singularnosti (»neskončne« gostote, ukrivljenosti – posledica je recimo t. i. »črna luknja«). Matematika, ki smo jo uporabili v zadnjem primeru, je šla nekoliko čez pričakovane osnove, pa vendar bo koristila - kvadrat razdalje med dogodkoma in podobne izraze, bomo še srečali v nadaljevanju teksta o življenju vesolja.



Koliko bi znašal polmer Zemlje, če bi jo stisnili v črno luknjo,  $R_z=6400$  km,  $M_z = 6 \cdot 10^{24}$  kg,  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s,  $G = 6.67428 \cdot 10^{-11}$  m<sup>3</sup>/(kg·s<sup>2</sup>):

$$R_s = 2GM/c^2 = 0.0089 \text{ m} = 8.9 \text{ mm}$$

Polmer Sonca pa slabe 3 km.

### Še provokativno vprašanje – kolikšna je ubežna hitrost, da zapustimo vesolje?

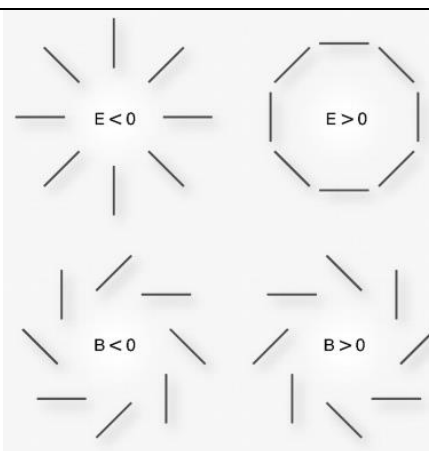
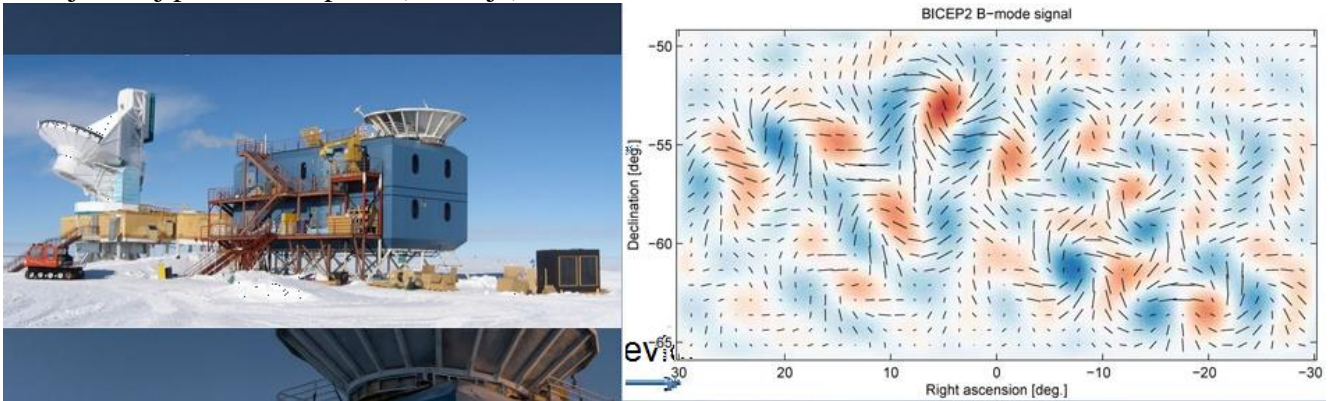
Vrnimo se k vesolju kot celoti.

Preden kar koli povemo o starosti vesolja, je potrebno upoštevati banalno dejstvo, da vesolje ne more biti mlajše od samih »potomcev« - zvezd, kopic, ... Vsem razumljivo pa vendar, otroci so zmeraj mlajši od bioloških staršev. Zadnji modeli in meritve kažejo, da so najstareše zvezde lahko stare okrog 14 milijard let - in to je pomemben podatek. Kaj pa je vesolje, kakšne so bile razmere na začetku - to lahko zaznamo, vidimo posredno ali neposredno. Recimo preko prasevanja (mikrovalovnega ozadja), ki skoraj na 100000 kelvina natančno enakomerno napolnjuje vesolje iz vseh smeri. Kaj bi nam pa lahko povedalo prasevanje? Zelo poučna je primerjava prasevanja in ploskanja. Recimo, če smo na robu neke množice, ki navdušeno ploska ob koncu koncerta, lahko ploskanje oddaljene množice slišimo še nekaj časa potem, ko so udeleženci z njim že končali. Iz časa trajanja zadnjega ploskanja (in jakosti zvoka) lahko celo ocenimo, kako daleč od nas so najbolj oddaljeni udeleženci zabave (določimo velikost množice – nekaj podobnega velja za prasevanje in velikost vesolja). Ugotovili pa so tudi, da prasevanje vseeno nima povsod enake temperature – torej so rahla odstopanja v temperaturi (valovnih dolžinah prasevanja). To pa tudi pomeni, da je svetloba prasevanja nekoliko polarizirana - Thomsonovo sipanje.

**Sedaj si oglejmo še najnovejšo kozmološko zmoto (iz 2014) zaradi prehitrega sklepanja o vzrokih polarizacije mikrovalovnega sevanja. A iz nje se bomo veliko naučili in zgodba še daleč ni zaključena.**

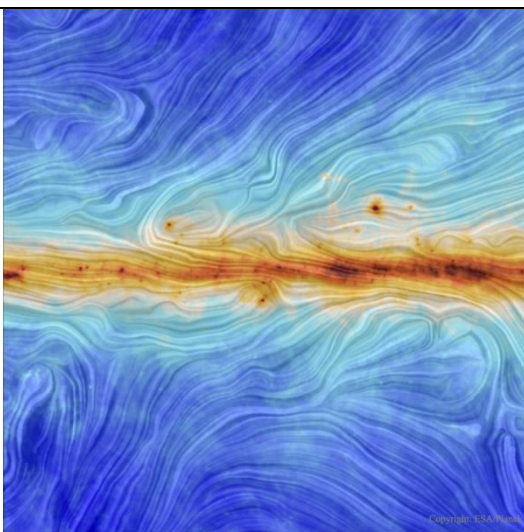
Slovenski astrofizik in kozmolog dr. Uroš Seljak (vodja Centra za kozmološko fiziko na Berkeleyju), je kot prvi leta 1996 napovedal, da bi ta polarizacija morala biti rahlo zasukana (v obliki vetrnice) - če je seveda napoved o inflaciji vesolja resnična. Kaj je inflacija vesolja? Alan Harvey Guth, ameriški fizik in kozmolog, \* 27. februar 1947, New Brunswick, New Jersey, ZDA, je leta 1980/81 formalno predlagal zamisel o inflaciji vesolja, po kateri naj bi nastajajoče Vesolje prešlo fazo eksponentnega (bliskovitega) razširjanja, ki ga je gnala negativna energijska gostota vakuuma (pozitivni tlak vakuuma). Tako bi tudi lažje razložili enakost vesolja v vseh smereh. Posledica hitrega širjenja morajo biti tudi gravitacijski valovi, ki bi lahko zasukali ravnino polarizacije mikrovalovnega ozadja. Na sledi teh valov je tudi Seljakova metoda iskanja zasuka polarizacije mikrovalov ozadja - prasevanja. Leta 2014 so dokaj nepričakovano - preko merjenj na južnem polu - eksperiment BICEP2 - Background

Imaging of Cosmic Extragalactic Polarization 2 (Snemanje ozadja kozmične izvengalaktične polarizacije 2 - SOKIP 2) potrdili zasuk polarizacije mikrovalov. A nekoliko prezgodaj so sklepali, da je to že korak k potrditvi inflacije in gravitacijskih valov, ki bi naj bili posledica hitrega razširjenja vesolja takoj po velikem puku (inflacije).



Slike kažejo rezultate pregleda polarizacije mikrovalov na (lokalno) zelo praznem delu vesolja – kjer naj ne bi bilo veliko motenj Rimske ceste in tudi ne motenj naše civilizacije (v resnici temu ni tako, vmes je še prah naše Galaksije). Kot se je izkazalo, so iz zgornjih rezultatov napačno ocenili energijo inflacije na velikostni red  $10^{16}$  GeV. V bistvu je BICEP 2 teleskop, ki meri na valovni dolžini mikrovalov (100 - 150 GHz). Meritev 7 sigma bi naj izpolnjevala znanstvene standarde novega odkritja. Metodo je predlagal dr. Uroš Seljak.

E-način polarizacija v CMB podaja informacijo o nihanju gostote (temperature) v zgodnjem vesolju (leva zgornja slika). Ker bi naj gravitacijski valovi izmenoma stiskali prostor v eni smeri in ga širili v pravokotni smeri, bi naj to povzročilo "kodranje" (vrtinčnost), oziroma B-način polarizacije (leva spodnja slika). To je Seljakova metoda detekcije inflacije preko gravitacijskih valov. A kje so se člani ekipe BICEP2 motili?

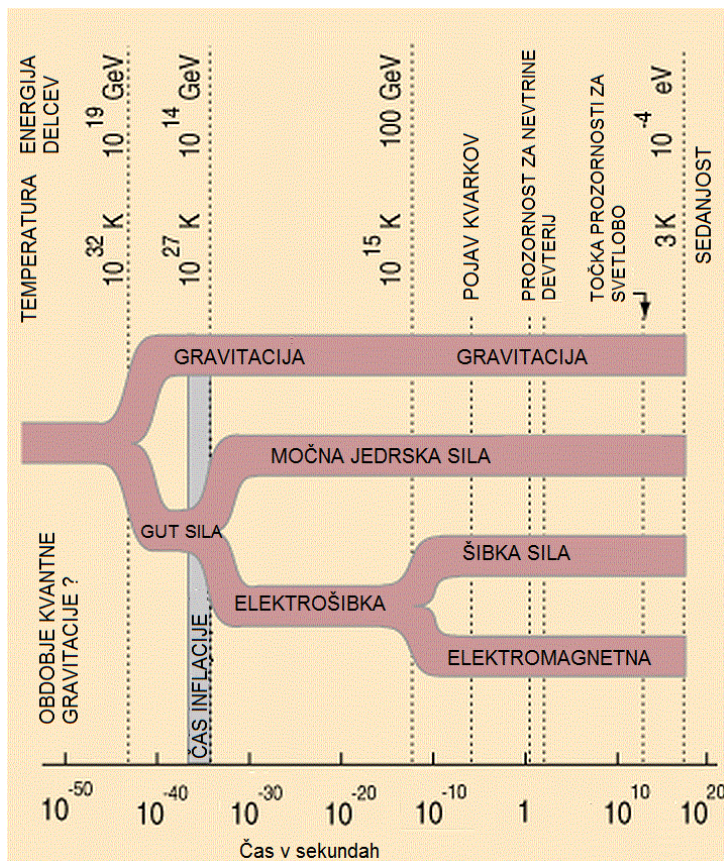


**ZAKAJ SE JE INTERPRETACIJA POLARIZACIJE PROJEKTA BICEP2 IZKAZALA ZA NAPAČNO?**

Slika levo kaže karto magnetnega polja naše Galaksije. Šele pred kratkim je satelit Planck v orbiti okrog Sonca naredil to visokoresolucijsko karto magnetnega polja (objavljena 2015). Posledica tega polja pa je poravnava orientacije malih prašnih delcev. In kaj povzročajo ti usmerjeni prašni delci - povzročajo polarizacijo svetlobe iz ozadja.

In to so v bistvu zaznali z eksperimentom BICEP2 in ne polarizacije zaradi inflacijskih gravitacijskih valov.

A znanstveniki pravijo, da je to lekcija za nov zagon iskanja inflacije in tozadevno posledičnega gravitacijskega vala - kjer zagotovo prasevanje (v iskanju prstnih odtisov) še ni odpisano!



Graf (levo), ki zgolj shematično prikazuje spreminjanje temperature vesolja in delovanje osnovnih sil skozi čas. Mnoge od navedenih vrednosti bomo poskušali oceniti iz osnovnih zakonov. Računsko bomo torej tudi ocenili časovne mejnike v zgodovini vesolja. Desna slika prikazuje štiri osnovne sile narave: gravitacija, močna jedrska sila, šibka jedrska sila, elektro-magnetna sila. O izjemni prepletenosti osnovnih sil z dinamiko vesolja pa več v drugem delu opisa vesolja.

Najprej pa se bomo soočili z vesoljem, ko so nastali prvi atomi in se je prasevanje ločilo od atomov (vesolje je bilo takrat staro že okrog 380 000 let). Temperatura je takrat padla do vrednosti, ko sevanje ni več ioniziralo atomov – sevanje se je ločilo od materije in je začelo prosto potovati po vesolju. Takrat pravimo, da je vesolje postalo prozorno in je gravitacija prevzela ples tvorjenja zvezd, kopic, galaksij, seveda tudi planetov, življenja, ... Temu »prostemu« sevanju rečemo danes tudi prasevanje ali mikrovalovno sevanje ozadja.

**Lotimo se torej najprej scenarijev dinamike vesolja po nastanku atomov (vesolje je bilo takrat staro že okrog 380 000 let). Pod:**

- B1 – ravno vesolje,**
- B2 – odprto vesolje,**
- B3 – zaprto vesolje.**

## **B1) Vesolje se bo v neskončnosti nehalo širiti (»ravno vesolje«), če**

$$m v^2/2 - G M m/R = 0 \quad \text{sledi} \quad m v^2/2 = G M m/R$$

$$v^2 = 2G M /R$$

Ali v tem primeru znamo izraziti funkcijo, kako se vesolje širi s časom, iščemo torej  $R(t)$ . Tokrat bo šlo in to zgoj z znanjem srednješolske matematike. Izrazimo hitrost  $v$ .

$v = (2G M / R)^{1/2}$  - ker je radialna hitrost,  $v = dR/dt$ , odvod radija po času, velja

$$dR/dt = (2G M / R)^{1/2}$$

$$\int R^{1/2} dR = \int (2G M)^{1/2} dt \quad (\text{meje integracije so od 0 do R in od 0 do t})$$

- po integraciji dobimo

$$(2/3)R^{3/2} = (2G M)^{1/2} t$$

- ker je hitrost po Hubblovem zakonu  $v = HR$ , velja  $v^2 = 2G M / R$ , oziroma za trenutni polmer  $R_0$  velja:  $H^2 = 2GM/R_0^3$

$$(2/3)R^{3/2} = (2G M)^{1/2} t = (2G M R_0^3 / R_0^3)^{1/2} t = (H^2 R_0^3)^{1/2} t = H R_0^{3/2} t \rightarrow t = (2/3)R^{3/2} / (H R_0^{3/2})$$

$$t = (2/(3H))(R / R_0)^{3/2} = t_0 (R / R_0)^{3/2} \rightarrow t_0 = 2/(3H)$$

- vpeljali smo trenutno starost vesolja  $t_0 = 2/(3H)$ , ki je kar obratno sorazmerna s  $H$ , sorazmernostni koeficient je  $2/3$ .

Velikost  $R$  ravnega vesolja pa se spreminja sorazmerno s »časom na  $2/3$ «, velja  $R = R_0(t/t_0)^{2/3}$ :

$$R = R_0(t/t_0)^{2/3}$$

Poglejmo kako je v ravnem vesolju dinamika prostora povezana z gostoto vesolja?

Uporabimo enačbi za gostoto snovi ( $M = \rho V = \rho 4\pi R^3/3$ ) in Hubblov zakon ( $v = HR$ ).

$$v^2/2 - G M/R = 0 \rightarrow v^2 = 2G M/R \rightarrow (HR)^2 = 2G\rho 4\pi R^3/3/R = 8\pi G\rho R^2/3$$

V zadnji enačbi se polmer  $R$  pokrajša in za gostoto, ki jo imenujemo tudi kritična (saj je mejna – če je večja ali manjša, se bo vesolje ali začelo krčiti ali se bo večno širilo), dobimo zelo zanimiv in relativno preprost izraz.

$$\rho = \rho_c = 3H^2/(8\pi G)$$

O gostoti odločata torej gravitacijska konstanta  $G$  in Hubblova konstanta  $H$ . Velikokrat se uporablja relativna **masna** gostota z oznako  $\Omega_m$ , ki je razmerje med gostoto in kritično gostoto vesolja, velja:

$$\Omega_m = \rho/\rho_c$$

Mejna relativna gostota je torej 1 ( $\Omega_m = \rho/\rho_c = \rho_c/\rho_c = 1$ ). Velja za »ravno« vesolje.

Ocenimo še starosti »ravnega« vesolja, za  $H = 73.2 \pm 0.3$  km/s/Mpc (vrednost pred letom 2011)!

Uporabimo izpeljano enačbo. Enota km/s/Mpc =  $1/9.78877 \cdot 10^{11}$  let.

$$t_{(zdaj)} = (2/3) \cdot (1/H_{(zdaj)}) = (2/3) \cdot 13372632796 \text{ let} = 8.9 \text{ milijard let}$$

Ta rezultat velja danes kot neveljaven (zadnje meritve namreč kažejo, da se bo vesolje »večno« širilo), splošna ocena starosti vesolja je približno kar obratna vrednost Hubblove konstante  $t_H = (1/H)$ , kar znaša 13.4 milijard let (to je blizu trenutno veljavnim ocenam zaokroženim med 13.7 in 13.8 milijard let). V splošnem velja  $t_{\text{vesolja}} = F \cdot (1/H)$ .  $F$  je korekcijski faktor starosti vesolja. Za zaprto vesolje je  $F$  enak izračunanemu razmerju  $2/3$ , če pa upoštevamo kozmološko konstanto, je ta faktor blizu 1 (2013 je bil  $F=0.956$ ).  $F$  se določa numerično - več o tem v nadaljevanju. Kot bomo videli, se ocena za  $H$  spušča pod 70 km/s/Mpc – misija Planck 2013 ( $H=67.80 \pm 0.77$  km/s/Mpc), kar da za starost vesolja:  $t_{\text{vesolja}} = F \cdot (1/H) = 13.8$  milijard let. Še ena vzpodbudna primerjava – trenutni (2013) modeli razvoja zvezd ocenjujejo starost najstarejše znane zvezde na  $14.46 \pm 0,8$  milijarde let (to je zvezda HD 140283 - leži v smeri Tehtnice, vsebuje zelo malo težkih elementov).

## B2) Vesolje se bo večno širilo (>>odprto vesolje<<), če

$$m v^2/2 - G M m/R = E > 0 \quad \text{sledi} \quad m v^2/2 > G M m/R$$

$$v^2 > 2G M / R$$

Ker je  $v = dR/dt$ , velja.

$$v = (2G M / R + 2E/m)^{1/2} = dR/dt$$

$$\int dt = \int dR / (2G M / R + 2E/m)^{1/2}$$

Rešitev te enačbe (kako se bo polmer našega preprostega modela vesolja  $R$  spreminjal s časom  $t$ ) je kar zapletena (zapiše se v parametrični obliki za  $t$  in  $R$ ).

Velikokrat zapišemo desni del enačbe kot  $2E/m = \text{konst } c^2 = -kc^2$ ,  $k$  – poimenujemo parameter ukrivljenosti. Namesto  $M$  pa zapišemo ( $M = \rho V = \rho 4\pi R^3/3$ ), gostoto pa izrazimo recimo s trenutno gostoto  $\rho_0$  in danim polmerom  $R_0$ , velja  $\rho = \rho_0 R^3_0 / R^3$ .

Po preoblikovanju dobimo povezavo:

$$\left( \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G \rho_0 R^3_0}{3R} \right) = -k c^2$$

Rešitvi sta:

$$t = \left( \frac{4\pi G \rho_0 R^3_0}{3|k|^{3/2} c^3} \right) (\sinh(x) - x)$$

$$R = \left( \frac{4\pi G \rho_0 R^3_0}{3|k|c^2} \right) (\cosh(x) - 1) \quad - \text{ kjer je } x = t/t_0, \text{ za } t_0 \text{ večinoma privzamemo Hubblov čas } t_0 = t_H = 1/H$$

- zapišimo še izraza za hiperbolični funkciji:

$$\sinh(x) = (e^x - e^{-x})/2 \quad \text{in} \quad \cosh(x) = (e^x + e^{-x})/2$$

V odprtem vesolju je gostota  $\rho$  vesolja pod kritično  $\rho_c$ , velja  $\Omega_m = \rho/\rho_c < 1$ . Lastna gravitacija vesolja zbrana v masi torej nima moči, da bi ustavila širitev vesolja.

### B3) Vesolje se bo ustavilo in začelo krčiti (»zaprto vesolja«), če

$$m v^2/2 - G M m/R < 0 \quad \text{sledi} \quad m v^2/2 < G M m/R$$

$$v^2 < 2G M / R$$

$$\frac{dR}{dt} = (2G M / R - 2E/m)^{1/2}$$

$$\int dt = \int dR / (2G M / R - 2E/m)^{1/2}$$

- ali po prej preoblikovani enačbi:

$$\left( \left( \frac{dR}{dt} \right)^2 - \frac{8\pi G \rho_0 R^3_0}{3R} \right) = k c^2$$

Rešitvi te enačbe sta tudi zapleteni, uporabimo enake zamenjave kot pri odprtem vesolju (sklepamo pa lahko na cikloido, vesolje se širi in krči). V spodnji vrstici sta nakazani rešitvi:

$$t = \left( \frac{4\pi G \rho_0 R^3_0}{3k^{3/2} c^3} \right) (x - \sin(x))$$

$$R = \left( \frac{4\pi G \rho_0 R^3_0}{3kc^2} \right) (1 - \cos(x)) \quad - \text{ kjer je } x = t/t_0, \text{ za } t_0 \text{ večinoma privzamemo Hubblov čas } t_0 = t_H = 1/H$$



$x(t) = r(t - \sin(t))$  in  $y(t) = r(1 - \cos(t))$ , sta enačbi cikloide.

V tem primeru je gostota  $\rho$  vesolja nad kritično  $\rho_c$ , velja  $\Omega_m = \rho/\rho_c > 1$ . Lastna gravitacija vesolja zbrana v masi ima torej dovolj moči, da bo ustavila širitev vesolja.

Recimo rešitve za  $R$  so lahko spodnji izrazi – zgolj za grafično ponazoritev:

$0.7 * (4 - 0.9 * \text{pow}((\text{Exp}(x-3) + \exp(-x+3))/2, 2/3))$

$2 * \text{abs}(\sin(x/2))$  ali  $2 * (1 - \cos(x/2))$

$\text{pow}(x/0.6, 2/3)$

$\text{pow}((\text{Exp}(x) - \exp(-x))/2, 2/3)$

- samo grafična prispodoba ponavljajočega vesolja

- ravno vesolje

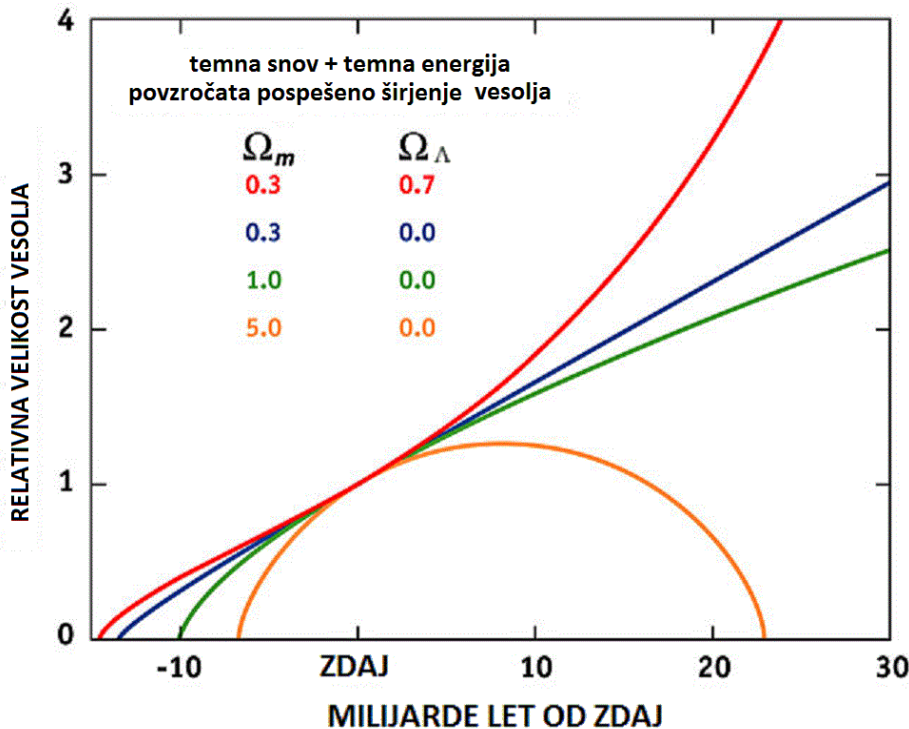
- odprto vesolje

Testiraj različne dinamike vesolja [vstavi zgornje podčrtane izraze v okenca forme, recimo  $\text{pow}(x/0.6, 2/3)$ ] v aplikaciji:

[http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/okni\\_grafi.html](http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/okni_grafi.html)

Vse tri enačbe dajo krivulje, ki jih kaže naslednji graf, razen rdeče (do te še pridemo). Na grafu, ki sledi, so podane rešitve glede na relativno gostoto vesolja ( $\Omega_m = \rho/\rho_c$ ). Enačbe podane z **gostoto** in **Hubblevim zakonom**, nas pripeljejo do **Friedmannovih enačb** – jih bomo tudi izpeljali.

### RAZŠIRJANJE VESOLJA



Dinamika vesolja – krivulje velikosti vesolja v odvisnosti od časa glede na različne scenarije. Oranžna krivulja predstavlja »**zaprto vesolje**« (se širi in začne krčiti, gostota je večje od kritične [ $\Omega = \rho/\rho_c$  velja  $\Omega > 1$ ]). Zelena krivulja pomeni, da se bo vesolje v neskončnost nehalo širiti (»**ravno vesolje**«, gostota je enaka kritični [ $\Omega = 1$ ]). Modra krivulja pomeni, da se bo vesolje večno širilo (»**odprto vesolje**«, gostota je manjša od kritične [ $\Omega < 1$ ]). Pojem kritične gostote bomo še enkrat srečali v naslednjem poglavju in tudi kaj pomeni **rdeča krivulja**, ki je preko opazovanja oddaljenosti supernov tipa Ia postala aktualna 1998 in eksperimentatorji so bili zanjo tudi nagrajeni z Nobelovo nagrado za fiziko leta 2011.

## C) **Friedmannova enačba vesolja** *(je rešitev Einsteinovih enačb splošne teorije relativnosti)* - **grafične predstavitve vesolja**

**CF1)**

### Kozmologija je do leta 1998 prispevala scenarije brez rdeče krivulje (glej graf)

Enačbo ( $E = m v^2/2 - G M m/R$ ) preoblikujemo v Friedmannovo obliko, tako da vanjo vstavimo **maso** izraženo z gostoto in volumnom, **hitrost** pa nadomestimo s Hubblovim zakonom (enako vajo smo že izvedli v prejšnjih poglavjih – a ponovitev samo utrjuje sliko vsolje):

$V = HR$  - Hubblov zakon,  $H$  je Hubblova konstanta,  $V$  je hitrost galaksije,  $R$  pa je oddaljenost (recimo galaksije).

$$M = \rho V = \rho 4\pi R^3/3$$

SLEDIJO POUČNI IZRAČUNI IN IZRAZI

$$E = mH^2R^2/2 - 4\pi G\rho R^2m/3$$

Enačbo pomnožimo z  $(2/m)$ .

$$2E/m = H^2R^2 - 8\pi G\rho R^2/3$$

Če  $H^2R^2 - 8\pi G\rho R^2/3 > 0$  potem se bo vesolje večno širilo

$$H^2 > 8\pi G\rho/3$$

Kaj nam odkriva zadnja enačba?

**Da o bodočnosti vesolja odloča gostota  $\rho$ !!!**

Za konstantno vesolje bi veljalo  $H^2R^2 - 8\pi G\rho R^2/3 = 0$  in mejna (kritična) gostota je kar (za  $H_0=73$  km/s/Mpc in  $m_{\text{protona}} = 1.67 \cdot 10^{-27}$  kg):

$$\rho_c = 3H^2/8\pi G = 10^{-29} \text{ g cm}^{-3} = 10^{-26} \text{ kg m}^{-3} = 6 \text{ protonov / m}^3$$

Enačbo še preoblikujemo:

$$H = (dR/dt)/R$$

$$H^2 = 8\pi G\rho/3 - 2E/(mR^2)$$

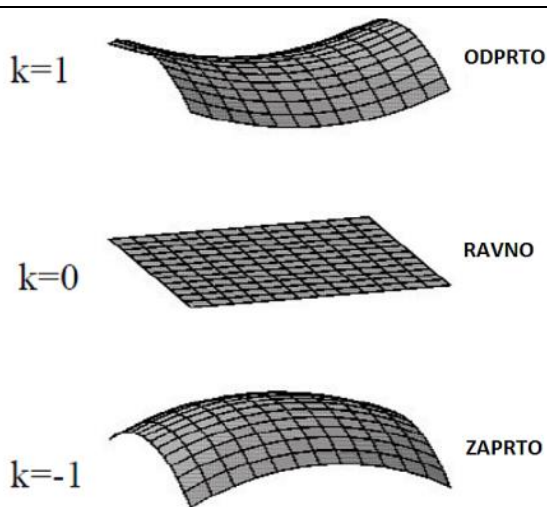
$$\text{Energija} = \text{masa} * c^2$$

$$2E/m = \text{konst } c^2 = k c^2$$

$k$  – poimenujemo parameter ukrivljenosti

Friedmannova enačba se sedaj glasi:

$$H^2 = 8\pi G\rho/3 - k c^2/R^2$$

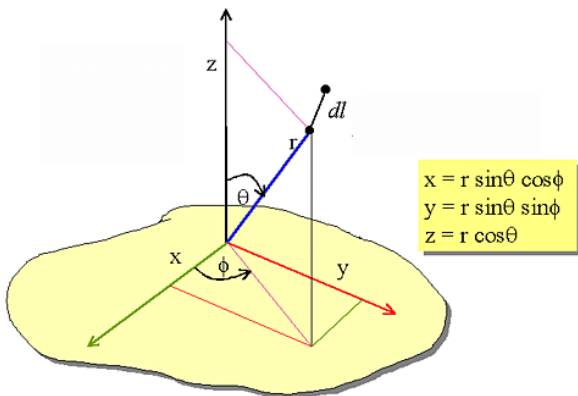


$$\left(\frac{dR}{dt}\right)/R^2 = 8 \pi G \rho / 3 - k c^2 / R^2$$

Spodaj je kvadrat razdalje med bližnjima dogodkoma (Robertson-Walkerjev element ali tudi Friedmannov in Lemaitrov element) – edini možen za Einsteinovo enačbo gravitacijskega polja (upoštevata se ukrivljenost prostorčasa, posledica gravitacije), ki upošteva kozmološko načelo (vesolje ima v vseh točkah in v vseh smereh enake lastnosti).

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[ \frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right]$$

Za lažjo predstavo – zapišimo še, večini znan primer razdalje  $dl$  med točkama v navadnem trirazsežnem prostoru - evklidska geometrija - srednješolska snov (nekaj podobnosti se najde z razdaljo v t. i. gravitacijskem polju ukrivljenega prostorčasa - Robertson-Walkerjevim elementom ...).



$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

Ali tudi bolj domače:  $dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

Nakažimo pot do Schwarzschilda rešitve z metriko ( $ds^2$ ) prostor-časa:

$$ds^2 = -c^2 dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

Za gibanje v radialni smeri pa velja metrika:

$$ds^2 = -c^2 dt'^2 + dr'^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2$$

Iz teorije relativnosti veljajo transformacije:

$$dx' = \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dr' = \frac{dr}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad dt' = dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$$

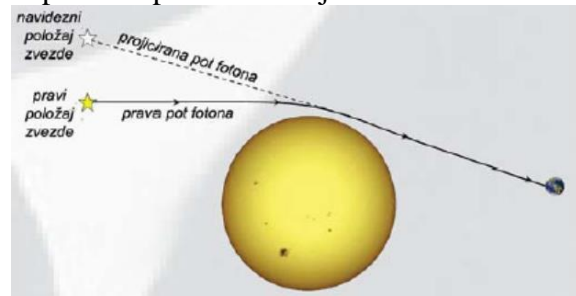
Tudi svetloba čuti gravitacijo (zato se ji spreminja valovna dolžina), za  $v^2$  vstavimo izraz kvadrata ubežne hitrosti  $2GM/r$  (recimo iz neke zvezde), tako dobimo končno Schwarzschildovo rešitev metrike v gravitaciji:

$$ds^2 = -c^2 \left(1 - \frac{2GM}{rc^2}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{rc^2}} + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2 \vartheta d\varphi^2)$$

Slika prikazuje geometrijske podobe vesolja pri različnem parametru ukrivljenosti  $k$ .

### Einsteinov ukrivljen prostorčas

Einsteinova zamisel je bila presenetljiva: gravitacija v resnici ni sila! Telesa se pod vplivom gravitacije še vedno gibljejo po ravnih črtah; le da je "prostorčas" postal ukrivljen in zato je to, kar je v resnici ravno, na koncu videti popolnoma krivo... Masivna telesa v svoji okolici spremenijo geometrijske zakone (čeprav sta v štiridimenzionalni geometriji prostor in čas neločljivo povezana!), zato včasih vsota kotov trikotnika ni 180 stopinj in se vzporedne premice sekajo.

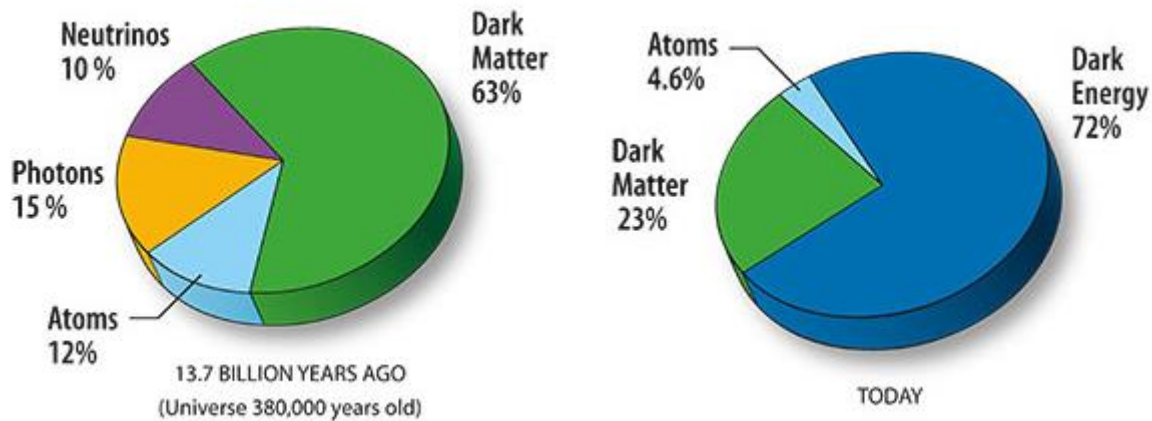


Žarek se ukrivi v bližini Sonca – da se preveriti ob Sončevem mrku.

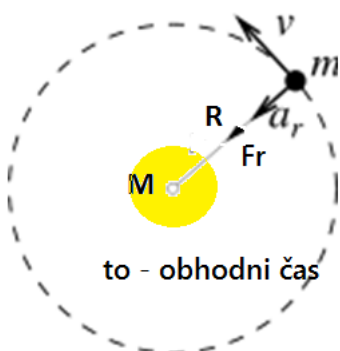
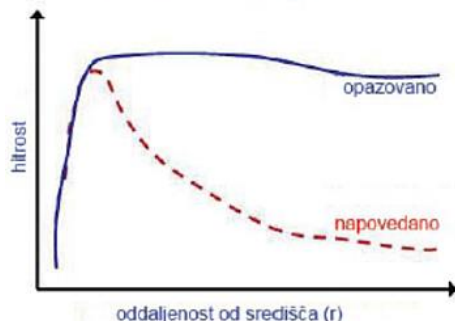
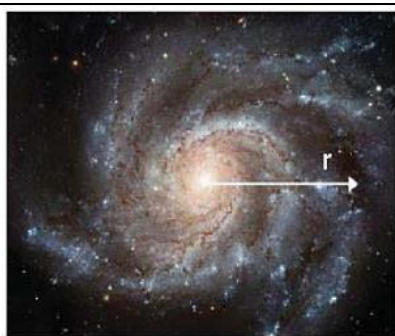


Opazovanje odklona svetlobe ob Sončevem mrku – zvezda pri puščici ima spremenjeno pozicijo, glede na nočno pozicijo, ko je ne opazujemo v bližini Sonca. Razlog je v gravitacijskem odklonu žarka – kar povzroči sila teže Sonca.





**Zgornji sliki kažeta trenutno razmerje mas (desna slika je iz 2012) in razmerje mas, ko je vesolje bilo staro 380000 milijonov let (leva slika - trenutek, ko je materija prevladala nad sevanjem in je vesolje postalo prozorno). Temno energijo bomo razložili v nadaljevanju – in tudi, kako je, »kot strela z jasnega neba«, prišla leta 1998 v model.**



$$F_r = F_g \rightarrow mv^2/R = GMm/R^2$$

$$V = (GM/R)^{1/2} \text{ - črtkana krivulja}$$

### Kako smo prišli do temne mase?

Že leta 1932 je Zwicky, preko opazovanja dinamike jate galaksij v Berenikinih kodrih, prišel na sled temni masi. Hitrosti znotraj jate so bile zdaleč višje, kot bi jih dala vidna masa z uporabo gravitacijskega zakona.

### Nevidni sloni

V 1970-tih je študentka astronomije Vera Rubin izmerila hitrosti zvezd, s katerimi so se te gibale okrog središča svojih galaksij. Po Newtonovi teoriji zlahka ugotovimo t.i. rotacijsko ali krožilno hitrost neke zvezde, če vemo koliko drugih zvezd deluje nanjo s svojo gravitacijo. Ostale zvezde zlahka preštejemo, saj jih lahko vidimo. Galaksije so običajno svetle v sredini in postajajo bolj in bolj redke proti robu: krožilne hitrosti bi morale torej naraščati proti maksimumu v bližini sredine galaksije, na zunanjih delih pa padati. Izmerjene hitrosti tega niso potrdile. Ostajale so približno konstantne vse do velikih razdalj od središča galaksije (slika levo)... kar pomeni, da mora biti proti zunanjemu delu galaksije nabrane VELIKO mase, ki je ne vidimo, zaradi katere pa zvezde krožijo še zmeraj z nezmanjšano hitrostjo. Ko rečem VELIKO, to tudi mislim: desetkrat več kot pa je vidnih zvezd v galaksiji! Ta skrivnostna nevidna snov, ki gravitacijsko drži galaksije skupaj, se imenuje (ker nimamo boljšega imena) TEMNA SNOV.

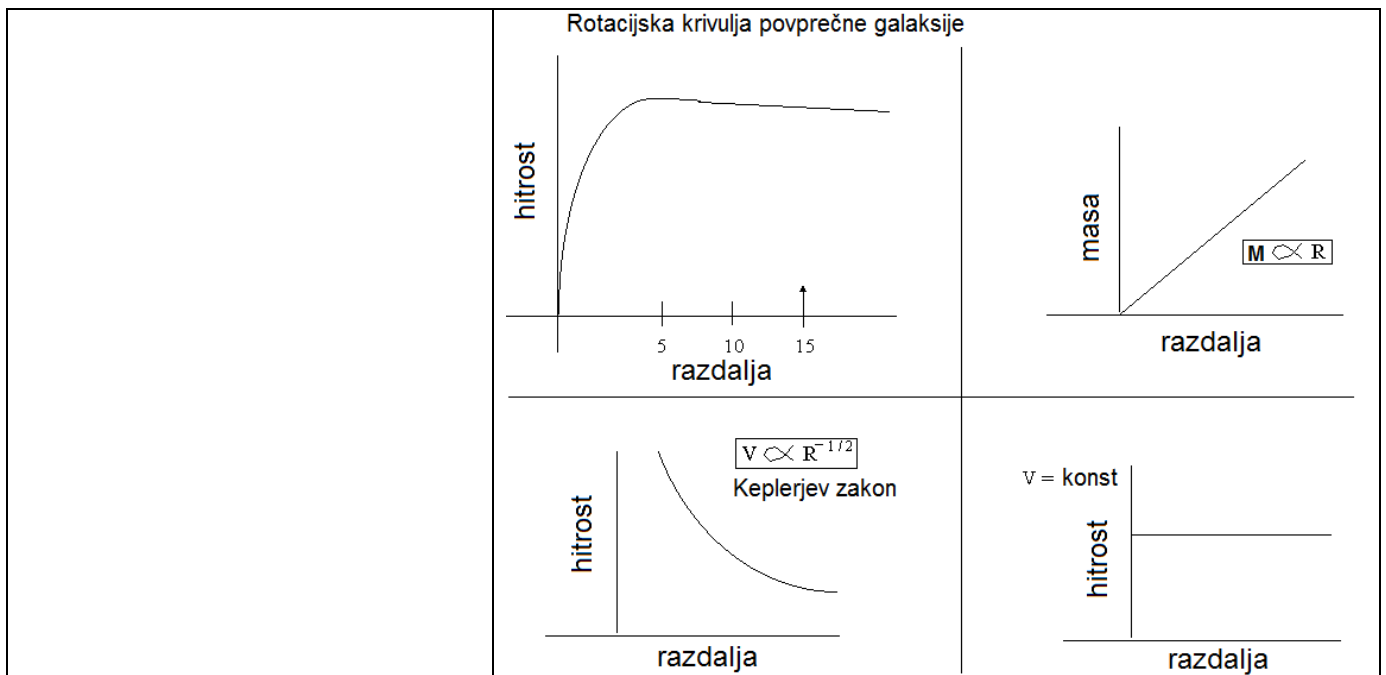
Iz meritev in povedanega torej velja:

$$V = \text{konst}$$

$$v^2 = GM/R = \text{konst}_{\text{gal}}$$

$$M_{\text{temna}} = (v^2/G)R = \text{konst}_{\text{radialna\_gostota}} * R$$

Torej temna snov v disku galaksije narašča linearno z razdaljo od središča galaksije. Velja seveda tudi za našo Rimsko cesto.



**Gravitacija čuti (je posledica) več energij - gostot (vidna barionska snov [to so atomi], temna snov, sevanje, ukrivljenost, ...), nekaj jih naštejmo in poglejmo ocene gostot:**

$\rho_m$  (barionska\_snovna) =  $4.2 \times 10^{-28} \text{ kg/m}^3$  (gostota vidne snovi = 1.5 protona /  $\text{m}^3$ , iz te snovi smo recimo ljudje)

$\rho_t$  (temna\_snov) =  $2.4 \times 10^{-27} \text{ kg/m}^3$  (lahko rečemo, da drži galaksije skupaj)

$\rho_s$  (prasevanje) =  $4 \sigma T^4/c^3 = 4.6 \times 10^{-31} \text{ kg/m}^3$   
 »masa« iz energije kozmičnega mikrovalovnega sevanja ozadja [cosmic microwave background (CMB)] – masa\_prasevanja =  $E/c^2$

$\rho_\Lambda$  = gostota temne energije - o njej in oceni velikosti v naslednjih poglavjih

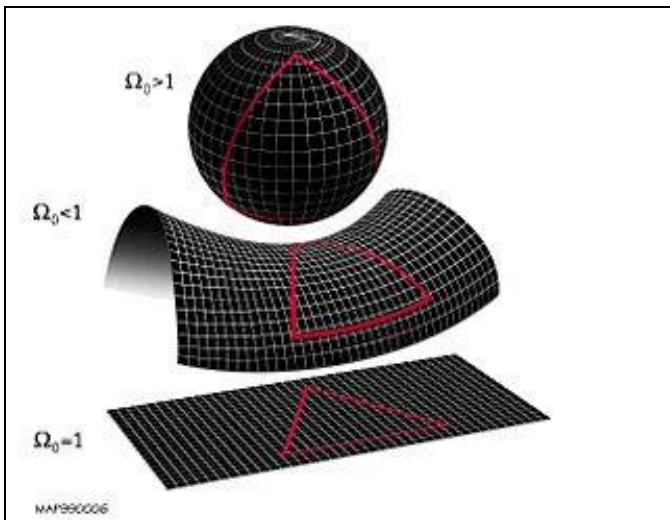
**Kot smo že spoznali, je parameter gostote omega ( $\Omega$ ), enak razmerju realne gostote  $\rho$ , deljene s kritično gostoto  $\rho_c$ . Velja:**

$\Omega = \rho/\rho_c$  - parameter gostote (omega) ali relativna gostota glede na kritično,

vrednosti so:

$$\Omega_m = \rho_m/\rho_c = 0.042 \quad \Omega_t = \rho_t/\rho_c = 0.24 \quad \Omega_s = \rho_s/\rho_c = 4.6 \times 10^{-5}$$

$\Omega_\Lambda$  = ostanek, razlika do 1



Slika prikazuje geometrijske podobe vesolja pri različnih gostotah (kritična  $\Omega=1$ , podkritična  $\Omega<1$ , nadkritična  $\Omega>1$ ).

Če seštejemo omenjene relativne gostote (razen  $\Omega_\Lambda$ ) dobimo vrednost okrog 0.28. Do vrednosti 1 (kritične relativne gostote) nam manjka še okrog 0.72. Če ta delež pretvorimo v procente, se lahko vprašamo (za t. i. ravno vesolje), kje bi se lahko skrivalo vsaj 72% gostote (mase)?

## CF2)

**Kozmologija po letu 1998 je šokirala svet – ponazarja jo rdeča krivulja na grafu.**

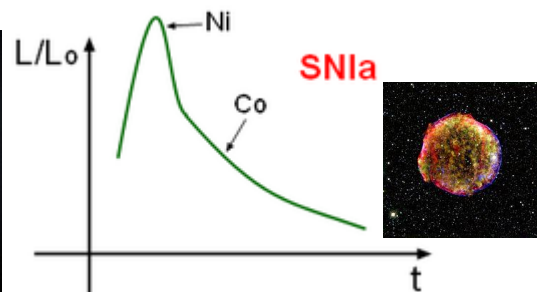
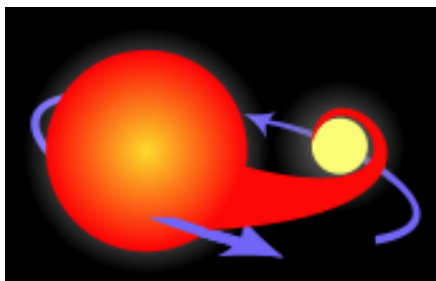
**Zakaj?**

### Kaj pa nam razkrivajo meritve svetlosti supernov tipa Ia?

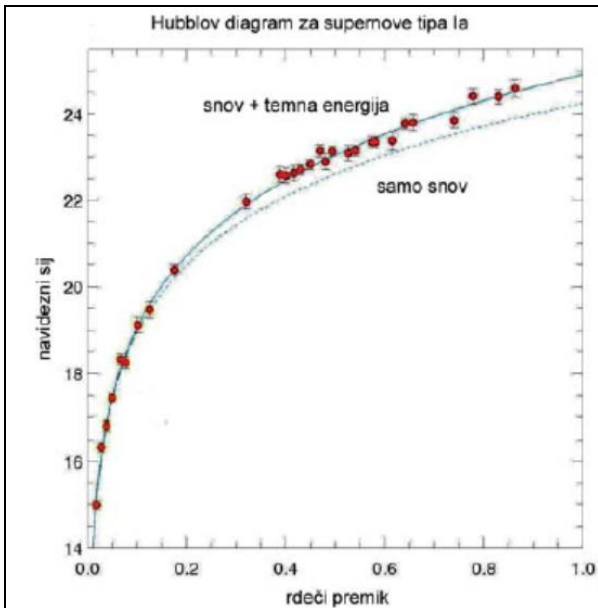
Povejmo direktno. Vesolje se širi, a ne samo to, širi se celo pospešeno!!! Torej se zdi, da je gostota pod kritično, a kaj povzroča pospešeno širjenje?

Odgovor trenutno iščemo v pojmu, ki smo ga poimenovali temna energija (dark energy), ki ji pripisujemo pospeševanje vesolja (to je v bistvu nazaj vpeljana Einsteinova kozmološka 'konstanta'  $\Lambda$ , energija vakuuma, ...). Zanimivo – prav tej t. i. temni energiji pripisujejo teh okrog 70 % »mase«. Splošna teorija relativnosti dopušča še možnost energije prostorske ukrivljenosti, ki je trenutne meritve ne zaznajo.

### Kako vemo, da se vesolje širi pospešeno?



Par kompaktna bela pritlikavka – rdeča orjakinja (slika levo) - ko kompaktna bela pritlikavka posrka dovolj mase (nekaj Sončevih mas) iz rdeče orjakinje, pride do eksplozije t. i. **supernove tipa Ia**. Slika na sredi kaže podobo take eksplozije na robu galaksije. Slika desno pa izsev supernove tipa Ia v odvisnosti od časa. Vse supernove tipa Ia imajo dokaj enak izsev in tudi časovno krivuljo padanja izseva. So standardni svetilniki, podobno kot kefeide. A supernove Ia zasvetijo kot približno 5 milijard Sonc, zato jih lahko spremljamo zelo daleč v vesolje – milijarde svetlobnih let.



*Hubblor diagram za supernove tipa Ia, povzet iz »Supernova Cosmology Project«. Supernove z velikimi rdečimi premiki ( $z > 0.5$ ) – oziroma z visokimi hitrostmi oddaljevanja zaradi širjenja vesolja in velikimi oddaljenostmi - se ne ujemajo s teoretično napovedano krivuljo za vesolje, sestavljeno le iz snovi. Namesto tega potrebujemo pospešeno širjenje vesolja, sestavljenega iz mešanice snovi, temne snovi in temne energije.*

$$m_{\text{izmerjena}} > m_0 + 5 \cdot \log(c \cdot z / (H \cdot R_0))$$

Iz opazovanj supernov tipa Ia (izbruh take supernove se zgodi v sistemu dvozvezdja, pri katerem poteka masni prenos od rdeče orjakinje k beli pritlikavki in ta eksplodira, ko doseže nekaj Sončevih mas), ki vse enako zasvetijo, se da sklepati, kako daleč je galaksija v kateri je prišlo do eksplozije supernove tipa Ia.

Poglejmo ozadje. Zvezo med gostotama energijskega toka in magnitudama lahko zapišemo z že omenjeno Pogsonovo zvezo:  $j_1/j_2 = 10^{-(m_1 - m_2)/2.512}$ , kdaj zvezo zaokrožimo v izraz:

$$j_1/j_2 = 10^{-0.4 \cdot (m_1 - m_2)}$$

Razmerje  $j_1$  in  $j_2$  označimo z  $j_0$  in  $j$ , magnitudi pa z  $m_0$  in  $m$ , velja:

$$(L/4\pi R_0^2)/(L/4\pi R^2) = 10^{-(m_0 - m)/2.512} = (R/R_0)^2,$$

po logaritmiranju sledi izraz za svetlost supernov 'm':

$$m = m_0 + (2 \cdot 2.512) \cdot \log(R/R_0),$$

če namesto razdalje vstavimo  $R$  izražen iz Hubblovega zakon ( $R = v/H$ ), hitrost ' $v$ ' pa zapišimo z Dopplerjevim rdečim premikom  $v = c \cdot z$ , dobimo izraz:

$$m = m_0 + 5 \cdot \log(c \cdot z / (H \cdot R_0))$$

ali izraz za razdaljo  $R$  je:  $R = R_0 \cdot 10^{-(m_0 - m)/5}$

Prvi izraz pojasni graf magnitude 'm' od rdečega premika 'z', 'm<sub>0</sub>' je lahko absolutna magnituda 'M' (po definiciji na razdalji  $R_0 = 10$  pc [parsekov], parsek pc = 3,2616 svetlobnih let). V literaturi boste našli izraz »distance modulus« ( $m - M = 5 \cdot \log(R) - 5$ ,  $R$  mora biti podan v pc), to je v bistvu še ena oblika Pogsonove enačbe. Za večje hitrosti je potrebno uporabiti relativistični izraz [ $z = ((1 + v/c)/(1 - v/c))^{1/2} - 1$  ali tudi  $z + 1 = \lambda/\lambda'$ ]. Zadeva se zaplete, ker je potrebno upoštevati še ostale vplive, recimo gravitacijski rdeči premik. Recimo, da znamo vse vplive pravilno upoštevati pri teoretični odvisnosti magnitude oz. rdečega premika 'z'.

**Kaj kažejo meritve?** Pri dani izmerjeni magnitudi 'm<sub>izmerjena</sub>' supernove tipa Ia, izmerimo še rdeči premik 'z' in iz njega izrazimo hitrost ' $v$ ' supernove (galaksije). Ko se nariše graf, oziroma primerja teoretične rezultate in meritve, se izkaže, da so pri danem rdečem premiku (večjemu od 0.5), torej pri dani hitrosti ' $v$ ', magnitude supernov veliko večje (**to pomeni, da je supernova šibkejša**), kot napove teoretični model [ $m = m_0 + 5 \cdot \log(c \cdot z / (H \cdot R_0))$ ], ki smo ga izpeljali pravkar. Iz meritev torej

sledi, da je supernova dlje (saj je po svetlosti šibkejša:  $R = R_0 \cdot 10^{-(m_0 - m)/5}$ ), kot bi pričakovali in kot izhaja iz Hubblovega zakona. Spodnja povezava kaže dilemo izmerjenih magnitud ( $m_{izmerjena}$ ).

$$m_{izmerjena} > m_0 + 5 \cdot \log(c \cdot z / (H \cdot R_0)) - \text{ZAKAJ?}$$

Kako bi razrešili to uganko – rešilna misel konca 20. stoletja (vredna Nobelove nagrade) je bila, da je supernova šibkejša zato, ker se vesolje širi pospešeno. Za dokaz navedimo najbolj banalen primer – no, saj vsi poznamo enostaven izraz za pot pri enakomerno pospešenem (pojemajočem) gibanju:

$$s = v_0 \cdot t \pm a \cdot t^2 / 2.$$

Če bi se vesolje ustavljalo v širitvi, kot smo »samoumevno« predvidevali v naši mladosti, bi bil pospešek negativen. Ker pa je pospešek 'a' »očitno« pozitiven, je supernova naredila več poti (zgolj simbolično velja:  $s = v_0 \cdot t + a \cdot t^2 / 2$ ), kot smo pričakovali in je zato dlje od nas, je torej šibkejša.

Seveda je na mestu tudi dvom, kaj če na poti absorbcija zmanjša magnitudo supernov (recimo, da absorbcije ne moremo korektno detektirati), kaj če ne poznamo dovolj supernov ali pa smo kaj spregledali (recimo izgubo energije fotonov zaradi Dopplerjevega pojava, itn).

Ena izmed različic kozmologije, ki (seveda) oporeka standardnemu modelu vesolja, izhaja iz gostote energijskega toka 'j':  $j = j_{sn} / (z^2 \cdot (z+1))$ .

Na meritve prilagodijo funkcijo:  $m = M + 5 \cdot \log(z) + 2.5 \cdot \log(z+1) + C$ . Za C so podane različne vrednosti, recimo 24.020. To je »fitana« funkcija na realne meritve, ki bi naj upoštevala vse vplive na poti svetlobe od supernove do Zemlje. Kdo ima prav? Trenutno so v prednosti zagovorniki pospešenega vesolja (Nobelova nagrada je nedvoumna - zaenkrat)!

Sicer pa - kot smo že povedali – so bili astronomi zelo pozno deležni prve Nobelove nagrade.

Povzetek razlage – zakaj so supernove manj svetle od pričakovanj!

Rdeči premik ( $z = v/c = \Delta\lambda/\lambda$ ) kaže na manjšo hitrost 'v', kot izhaja iz svetlosti supernove, ki je temnejša – je torej dlje. Zakaj - ker se je v tem času vesolje širilo pospešeno.

Tako je potrebno spet vpeljati Einsteinov kozmološki člen ( $W = W_k + W_p + W_{p\Lambda}$ , ali  $E = E_k + E_p + E_{p\Lambda}$ , zadnji člen je potencialna energija kozmološkega člena), ki pa sedaj ne drži vesolja v ravnovesju, ampak ga celo pospešeno širi. K skupni energiji dodamo potencialni člen temne energije ( $-\Lambda m c^2 R^2 / 6$ ), po klasični sliki (po analogiji prožnostne energije, ki recimo z  $x^2$  potiska vzmet narzen):

$$W = W_k + W_p + W_{p\Lambda} = m v^2 / 2 - G M m / R - \Lambda m c^2 R^2 / 6$$

Hitrost zamenjamo z  $v = HR$ , maso z  $M = \rho V = \rho 4\pi R^3 / 3$ , za energijo W (E) vstavimo preoblikovan izraz  $2E/m = \text{konst } c^2 = k c^2$ , izrazimo H, in da ne bomo izpeljevali vsega še enkrat, zapišimo kar spodnji rezultat. Friedmannovo enačbo smo tako dopolnili s kozmološkim členom (iz analogije s prvo obliko enačbe dobimo člen  $\Lambda c^2 / 3$ ) in enačba se sedaj glasi:

$$H^2 = 8 \pi G \rho / 3 - k c^2 / R^2 + \Lambda c^2 / 3$$

Ali za:  $H = (dR/dt)/R$

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)/R)^2 = 8 \pi G \rho / 3 - k c^2 / R^2 + \Lambda c^2/3$$

Rešitev te enačbe je še nekoliko bolj zapletena (namig je spet sinh ...) in predstavlja iskano rdečo krivuljo pospešenega širjenja. Snovni barionski in temni gostoti se sedaj pridruži še gostota »snovi«, ki pripada temni energiji ( $\Omega_\Lambda$ ). Ocena (kot smo že namignili) vrednosti  $\Omega_\Lambda$  je okrog 72 % (ali več):

$$\Omega_\Lambda = 1 - \Omega_m - \Omega_t - \Omega_s = 1 - 0.28 = 0.72 \rightarrow 72 \%$$

$$\Omega_m = \rho_m/\rho_c = 0.042 \quad \Omega_t = \rho_m/\rho_t = 0.24 \quad \Omega_s = \rho_m/\rho_s = 4.6 \times 10^{-5}$$

Na mestu je, da še enkrat ponovimo, da nekateri dvomijo v upravičenost takega modela.

**Sam menim, da je bila Nobelova nagrada podeljena zelo pogumno, a ...**

**A sreča je na strani pogumnih** – vsekakor trenutna slika (model) vesolja najboljše opiše vse merjene vrednosti in procese (recimo sevanje ozadja - temperaturo, svetlost supernov tipa Ia, itn). To je vsekakor ena, v vrsti mnogih, dopolnitev standardnega kozmološkega modela, ki skuša slediti konzistentnosti meritev in matematično-fizikalni razlagi. Dvom pa je seveda tudi del znanstvene metode (paradigme) – a ga ne smemo zamenjevati s prepovedjo določenih teorij, kot se je to dogajalo - zelo očitno tudi še v 20. Stoletju. Tudi naši generaciji, kjer smo se na veliko učili zgolj heliocentrične slike sveta (kar je zelo prav, a smo tako ostali zgolj na robu srednjega veka) – kozmologija pa je bila tabu tema (vsaj na nivoju osnovnega in srednješolskega izobraževanja) – standardni model vesolja je bil zamolčan. Religija materializma je (bila) kdaj bolj zabetonirana kot ostali klasični religiozni sistemi. To se še danes pozna. No, po svetu še zmeraj nekateri vztrajajo pri ravni Zemlji, kreacionizmu, ... Kaj poreči - lahko si pomagamo s staro modrostjo, da ima vsak tepček svoje veselje - hudo pa je, če so to recimo univerze, ministrstva, ...

Še danes mnogi slušatelji študija, ki se ukvarja z atomi, ne vedo, kje nastajajo težki elementi

...

Tukaj omenimo še zgodbo že omenjnega, danes skoraj pozabljenega, belgijskega fizika in teologa Éduarda Lemaîtrea. Leta 1927 objavi svojo svežo idejo ("A homogeneous Universe of constant mass and growing radius accounting for the radial velocity of extragalactic nebulae" – v »Annales de la Société Scientifique de Bruxelles«) in sicer, da se vesolje širi. V njej prvi izpelje Hubblov zakon in poda prvo opazovalno oceno »Hubblove konstante«. Takrat Einstein ni sprejel Lemaîtreve matematike in je zavrnil zamisel o širjenju vesolja. A Lemaître mu ni ostal dolžan in mu takole odgovori: "Vos calculs sont corrects, mais votre physique est abominable (Tvoja matematika je sicer pravilna, vendar je fizika nemogoča)." Kdo je imel prav, se ve – Lemaître. Da pa resnica ne sme pripadati vsakomur – tako je življenje – kaže prevod Lemaîtrevega dela leta 1931 v angleščino. Del teorije, ki se je nanašal na oceno "Hubblove konstante", ni bil preveden v angleščino - iz razlogov, ki (za nekatere) niso bili nikoli primerno obrazloženi (- eni trdijo, da jo bila to želja samega Lemaîtrea, a zakaj?). Podobnih primerov je v zgodovini ogromno - in tudi danes.

## Še beseda o temperaturi vesolja in sevanju ozadja, zadaj je Stefanov zakon

Prasevanje ali mikrovalovno sevanje ozadja, se da vsaj približno ponazoriti z analogijo zvoka. Zelo popularen je primer koncerta, ko recimo velikanska množica na velikem travniku (recimo Woodstock) konča s ploskanjem po nekem dobrem »štiklcu« - kaj se zgodi z zvokom? V določenem območju poslušalci nehajo ploskati, a še slišijo oddaljeno ploskanje? Zakaj? Kljub temu, da so tudi na drugem (x) koncu travnika nehali ploskati, se to ploskanje (hitrost zvoka je približno 330m/s) z zakasnitvijo  $t = x/330\text{m/s}$  širi do x metrov oddaljene skupine poslušalcev (velja tudi obratno). Seveda s časom, oddaljenostjo, jakost zvoka pada, enako je s prasevanjem. Seveda ima analogija svoje meje – je zgolj pomoč za lažjo predstavo!

Ali znamo kaj konkretnjšega povedati o termiki vesolja, kako se temperatura vesolja spreminja s časom?

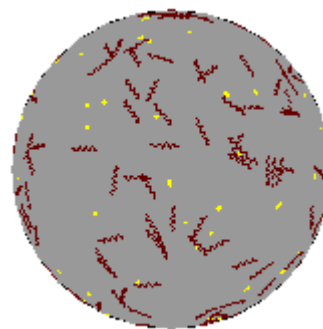
Recimo, da je na desni krogla iz N fotonov z energijo ( $Nh\nu$ ), ki se širi – t. i. prasevanje (kozmično ozadje). Kako se s časom spreminja temperatura takega vesolja?

**Najprej nakažimo razlago, zakaj velja za gostoto energije fotonov ( $w$ ), v razširjajočem vesolju, izraz:**

$$w \propto 1/R^4$$

in za gostoto energijskega toka fotonov  $j$ :

$$j = cw.$$



Energija fotona, paketa svetlobe, je  $E_f = h\nu$ , za hitrost svetlobe pa velja  $c = \lambda\nu$ . Simbol  $h$  je Planckova konstanta,  $\nu$  je frekvenca.

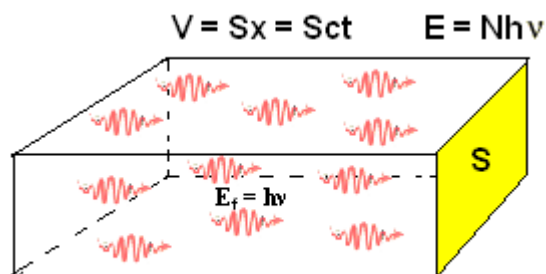
Gostota energije ( $w = E/V$  – energija na volumen) fotonov prasevanja vesolja je:

$$w = NE_f/V \propto h\nu/R^3 \propto hc/(\lambda R^3),$$

ker pa velja sorazmernost med valovno dolžino in velikostjo  $R$  (iz Hubblovega zakona)  $\lambda \propto R$ , dobimo:

$$w \propto 1/R^4$$

In še beseda o gostoti energijskega toka fotonov  $j = (E/t)/S$ ,  $S$  je površina skozi katero potujejo fotoni (glej sliko):



$$j = E/(tS) = Ec/(ctS) = Ec/(xS) = Ec/V = cw$$

Če poznamo Stefanov zakon ( $j = \sigma * T^4$ , gostota energijskega toka elektromagnetnega valovanja črnega telesa 'j' je sorazmerna s Stefanovo konstanto  $\sigma$  in absolutno temperaturo T na četrto potenco), in če privzamemo enačbo širjenja vesolja iz poglavja B2 ( $R = R_0(t/t_0)^{2/3}$ ) s kritično gostoto, in če privzamemo (smo tudi izpeljali), da gostota sevanja  $w$  pada z  $1/R^4$ , in da je gostota energijskega toka enaka  $j=cw$ , potem velja:

$$j = wc \propto 1/R^4 \propto T^4 \quad \rightarrow \quad T = R_0 T_0 / R \quad \rightarrow \quad T = T_0 (t_0/t)^{2/3}$$

Torej iz Stefanovega zakona izhaja znamenita enačba za časovno odvisnost temperature vesolja:

$$T = T_0 (t_0/t)^{2/3}$$

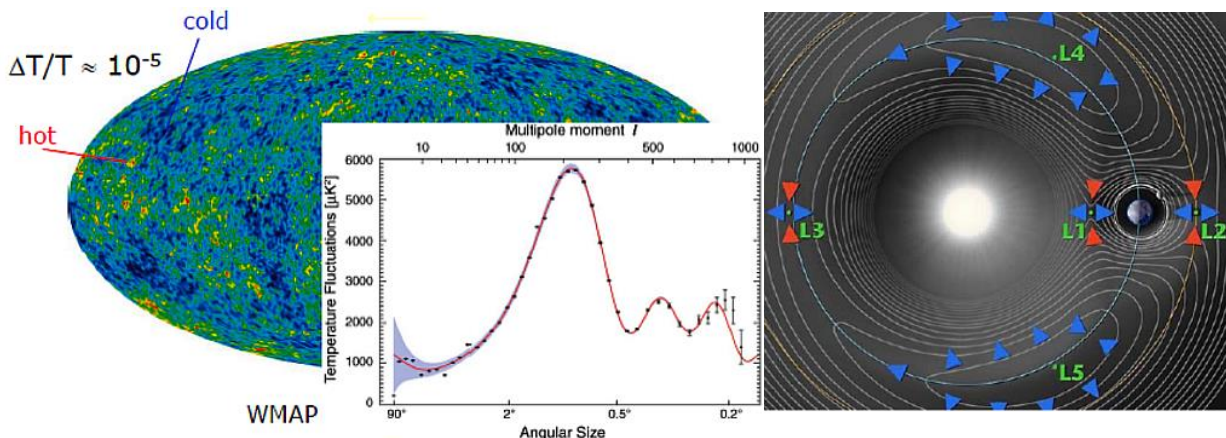
### Vaja z razlago:

Po času  $t = 380\,000$  let po velikem poku, se je snov začela razvijati neodvisno od sevanja – (pra)sevanje se ni več sipalo na plazmi, nastanejo atomi (vesolje je postalo prozorno) – temperatura je padla na  $T = 3000$  K, plazma preide v plin, o dinamiki med delci (sedaj že nevtralnimi atomi, protoni ujamejo elektrone, energija sevanja pa je premajhna, da bi jih ionizirala) več ne odločajo električne sile, ampak začne svojo pot oblikovanja vesolja gravitacija, ki tako dokončno prevlada. Iz enačbe za temperaturo v odvisnosti od časa ( $T = T_0 (t_0/t)^{2/3}$ ), izračunajmo trenutno temperaturo vesolja (mikrovalovnega sevanja ozadja ali tudi prasevanja). Za čas  $t_0$  privzemimo starost vesolja  $t_0 = 13.7$  milijard let. Velja:

$$T_0 = T(t/t_0)^{3/2}$$

Iz te enačbe dobimo za trenutno temperaturo vesolja  $T_0 = 2,7$  K, kar se ujema z meritvami.

### Zaključimo z rezultati misije WMAP



Slika prikazuje rezultate misije WMAP (sevalno prakarto vesolja). Sonda WMAP (Wilkinson Microwave Anisotropy Probe – Wilkinsonova sonda mikrovalovne anizotropije) je snemala prasevanje (mikrovalovno ozadje - *cosmic microwave background* - CMB), oziroma nehomogenosti v tem spektru. Te nehomogenosti so primarno posledica zadnjega sipanja valovanja, delno pa posledica nastanka zgoščenin materije (interakcije med prasevanjem in vročim plinom in gravitacijskimi potenciali), iz katerih nastanejo zvezde, galaksije, jate

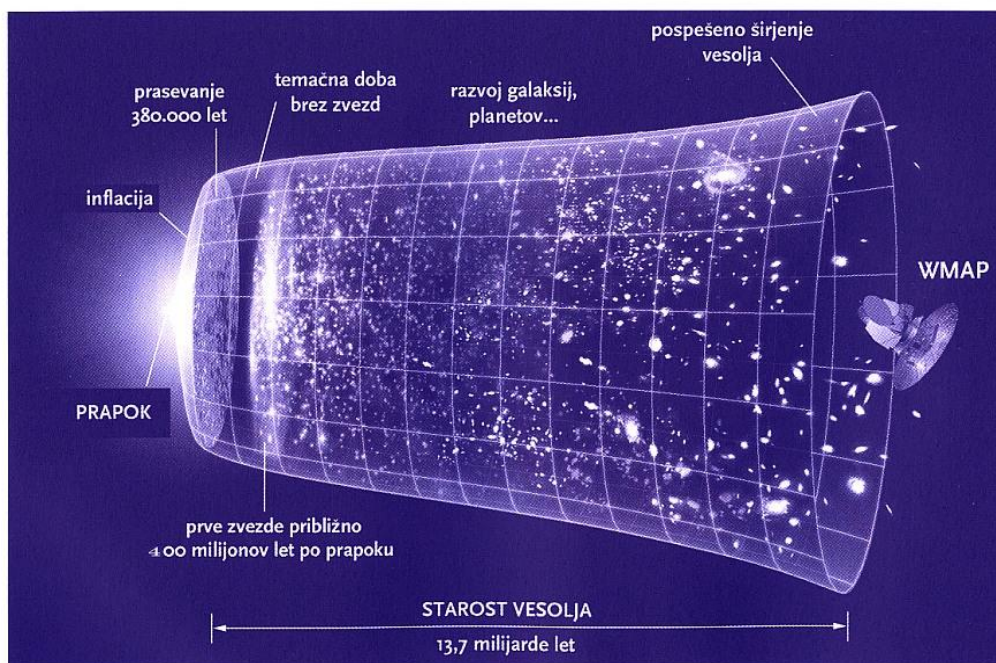


galaksij – »mi sami«. Mikrovalovno ozadje in fluktuacije v tem sevanju so eden ključnih dokazov na katerih temelji standardni model vesolja – začetek z velikim pokom, eksponentno širjenje (inflacija), prevlada gravitacije, nastanek zvezd in galaksij.

NASA je izstrelila sondo WMAP leta 2001 in se nahaja v drugi Lagrangovi točki na zveznici Zemlja – Sonce in tako zmeraj meri sevanje stran od Sonca in Zemlje. Sevanje meri s kotno ločljivostjo  $0.2^\circ$  - razlike v temperaturi (nehomogenosti) so zelo majhne, komaj nekaj  $10^{-5}$  K. Detektorji so ohlajeni pod 0.3 K. Mikrovalovno ozadje ima zelo homogeno temperaturo (relativne razlike od povprečja, ki je trenutno še vedno 2,7 kelvina, so samo reda velikosti  $5 \times 10^{-5}$  K). Rezultati se zelo dobro ujemajo z modelskimi napovedmi. Vrhovi na grafu kažejo zanimive fizikalne značilnosti. Kotna lestvica prvega vrha določa ukrivljenost vesolja (ne pa tudi njegove topologije). Naslednji vrh - razmerje lihih vrhov proti sodim - določa zmanjšano barionsko gostoto. S tretjim vrhom se lahko določijo informacije o gostoti temne snovi.

Sonda WMAP je dodatno podprla in hkrati dopolnila standardni model vesolja, za katerega veljajo naslednje ocene (leto 2012, na koncu so dopolnitve):

- a)  $H_0 = 73.2 \pm 0.3$  km/s/Mpc - Hubblova konstanta
- b)  $t_0 = 13.73 \pm 0.15$  milijard let - starost vesolja
- c)  $t = 380\,000$  let po velikem poku se je snov začela razvijati neodvisno od sevanja – (pra)sevanje se ni več sipalo na plazmi (vesolje je postalo prozorno) – temperatura je padla na  $T = 3000$  K, plazma preide v plin, med delci več ne odločajo električne sile, ampak začne svojo pot gravitacija, ki prevlada. Od tega trenutka velja enačba za temperaturo v odvisnosti od časa  $T = T_0(t_0/t)^{2/3}$  – »enačba je podobna enačbi za širjenje vesolja (dokaz zgoraj)«. Iz te enačbe dobimo za trenutno temperaturo vrednost  $T_0 = 2,7$  K, kar se ujema z meritvami. Enačba  $T = T_0(t_0/t)^{2/3}$  izhaja direktno iz Stefanovega zakona, njeno razlago in izpeljavo smo podali v prejšnjih poglavjih.
- d) Inflacijski model napihovanja zelo mladega vesolja predvideva, da ko je bilo vesolje staro  $10^{-35}$ s, se je inflatorno (hipno) razširilo na  $10^{30}$ -kratno vrednost (tako je vesolje v vseh smereh ohranilo enake lastnosti).
- e) Prve zvezde se pojavijo nekaj 100 milijonov let po velikem poku.
- f) Vesolje se bo (naj bi se?) večno pospešeno širilo.



Zgodovina vesolja (ilustracija: NASA/WMAP Science Team)

### Današnji pogled na razvoj - model - vesolja v grafični podobi – meritve sonde WMAP.

**Še nenavaden zaključek.** Toliko žensk (čeprav samo dve) ni omenjenih in predstavljenih s portretoma, v nobenem pregledu zgodovine kozmologije, kot v tem.

Marsikaj smo poenostavili, privzeli, preskočili - a to je le pomoč za nadaljnje brskanje po sliki in dinamiki vesolja. Do Friedmannove enačbe smo prišli preko Newtonove mehanike, ki pa je vseeno pravilna rešitev Einsteinovih enačb splošne teorije relativnosti. Pri tem smo kršili kozmološko načelo, da je vesolje v vseh smereh enako – kar pri gruči galaksij (naš model) v sliki Newtonove mehanike ne velja, saj ima ta Newtonov oblak galaksij rob. A prišli smo do verodostojnih rešitev preko osnovnega gimnazijskega znanja fizike in matematike – to je bil eden izmed namenov pregleda zgodovine kozmologije (vede o življenju in razvoju vesolja, tudi o nas samih).

## Še Einsteinova najsrečnejša misel v življenju.

A. Einstein je skozi okno svoje pisarne na Patentnem uradu v Bernu opazoval krovca na sosednji strehi (leto 1906).



Pomislil je, kaj bi se zgodilo, če bi možak padel v globino. "Če človek prosto pada, ne čuti teže. Postal sem razburjen. Ta preprosta misel je name naredila globok vtis. Približala me je teoriji gravitacije." Kasneje je Einstein svoj miselni poskus s krovcem označil kot najsrečnejšo misel svojega življenja.

Nič težnosti, nič gibanja. Tudi moderni "krovec", astronaut, prosto pada in zato zanj ni težnosti, poleg tega pa lahko povsem utemeljeno trdi, da miruje. Drugi opazovalci lahko vidijo dogajanje drugače, toda to na astronautova opazovanja in meritve ne vpliva.

**Kaj vse torej vpliva na poti človeškega razmišljanja in delovanja!?**

Povzel: Vičar Zorko

Maj 2012, »Šentvid«

Literatura:

- Modern Astrophysics [Bradley W. Carroll, Dale A. Ostlie]
- zapiski iz predavanj, splet, gradivo MLA2009, biografije, ...
- <http://www.thphys.may.ie/Notes/MP467/cosmology-2.pdf>
- <http://icc.dur.ac.uk/~tt/Lectures/UA/L4/cosmology.pdf>

ps – dopuščam nedoslednosti ..., spodaj so spremembe

**Dodatki 2013:**

**Misija Planck je leta 2013 ocenila Hubblovo konstanto na:**

**$H=67.80 \pm 0.77$  km/s/Mpc**

**Starost vesolja pa na:**

**$t_0 = 13.8$  milijard let**

Dodatek jan. 2015:

Misija Planck je z visokoresolucijsko karto magnetnega polja Galaksije zavrnila napačno interpretacijo polarizacije ozadja, ki so jo zaznali z eksperimentom BICEP2 (to ni polarizacija zaradi inflacijskih gravitacijskih valov, ampak zaradi magnetno usmerjenega galaktičnega prahu).

## **D O D A T E K** (nov. 2015) iz strani:

[http://www2.arnes.si/~qljsentvid10/relativnost\\_in\\_vesolje\\_nekaj\\_primerov\\_03.pdf](http://www2.arnes.si/~qljsentvid10/relativnost_in_vesolje_nekaj_primerov_03.pdf)

– vsebina ki sledi, morebiti lahko pomaga pri razumevanju nekaterih izpeljav, enačb pri opisu vesolja; posebna teorija relativnosti pa tudi pokaže, zakaj za opis sveta niso dovolj tri dimenzije in zakaj čas ni absoluten.

### **Posebna teorija relativnosti**

Podaljšanje časa (dilatacija), skrčenje dolžin (kontrakcija), ... pri velikih hitrostih.

- Zakaj čas (med dogodkoma) za mirujočega opazovalca teče hitreje kot v gibajočem sistemu, kjer se dogodka zgodita, če je hitrost gibajočega opazovalnega sistema znatna glede na hitrost svetlobe? Torej se gibajoča oseba A teoretično stara počasneje od mirujoče osebe B, vsaj tako trdi 'mirujoča' oseba. A katera oseba v resnici miruje? To je paradoks, saj enako pravi tudi oseba A za osebo B! Kdaj pa pride do različnega staranja - le če oseba A pospešuje in se spet pojemajoče vrne nazaj k opazovalcu B, je dejansko A mlajša od B (pomembno vlogo igra tudi obrat rakete in ne zgolj pospešek, ko se tudi spremeni opazovalni inercialni sistem).
- Zakaj se dolžina gibajoče palice za mirujočega opazovalca skrči?

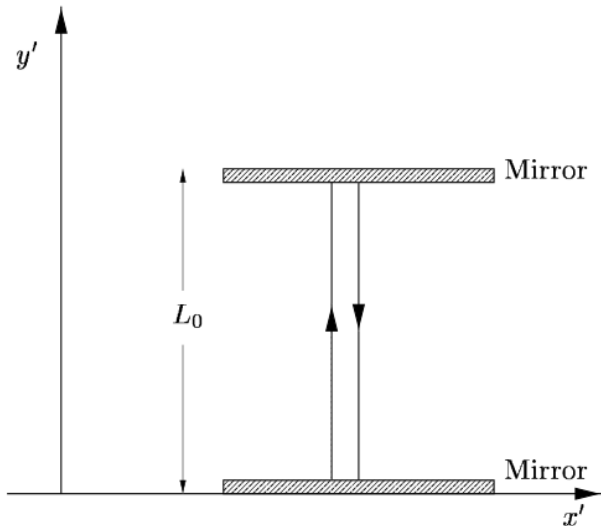
Kot uvod v razlago zgornjih »nepričakovanih« pojavov najprej naštejmo nekaj splošnih in elementarnih resnic (ki niso zmeraj samoumevne). Recimo, da so vsi inercialni (nepospešeni) opazovalni sistemi med seboj enakovredni, povsod so zakoni narave enaki. Hitrost svetlobe ( $c$ ) oziroma hitrost elektromagnetnega valovanja v praznem prostoru je v vseh inercialnih opazovalnih sistemih konstantna. Da morajo vse meritve upoštevati končno hitrost svetlobe (elektromagnetnega valovanja) – svet, ki ga zaznavamo, je torej bistveno določen s hitrostjo svetlobe.

Iz povedanega sledi nekaj pomembnih zaključkov, ki pa so opazni le, če je hitrost ( $v$ ) sistema znatna v primerjavi s hitrostjo ( $c$ ) svetlobe, a še zmeraj manjša od same hitrosti svetlobe. Na tem mestu je potrebno posebej poudariti, da je zgornja hitrost za pošiljanje energije omejena s hitrostjo svetlobe ( $c$ ). V vesolju sicer lahko zaznamo premike hitrejše od svetlobe, a to so relativni premiki – za pojavom stoji širjenje vesolja; pa še kje se da izmeriti pojave, kjer so hitrosti večje od potovanja svetlobe, recimo gibanje sence planeta, itn – a nikoli to ni hitrost s katero bi pošiljali informacije, energijo, transportirali neko telo ... Veliko se govori o kvantni teleportaciji (recimo, ko dva fotona, ki sta bila nekoč blizu, kvantno vplivata drug na drugega tudi na večji razdalji ...), a to še ni rešitev naše želje, saj se sama fotona ne moreta oddaljiti (na neko večjo razdaljo) hitreje od svetlobe. Je pa to upanje za kvantne računalnike. A vrnimo se k posebni teoriji relativnosti.

#### **Podaljšanje časa (dilatacija)**

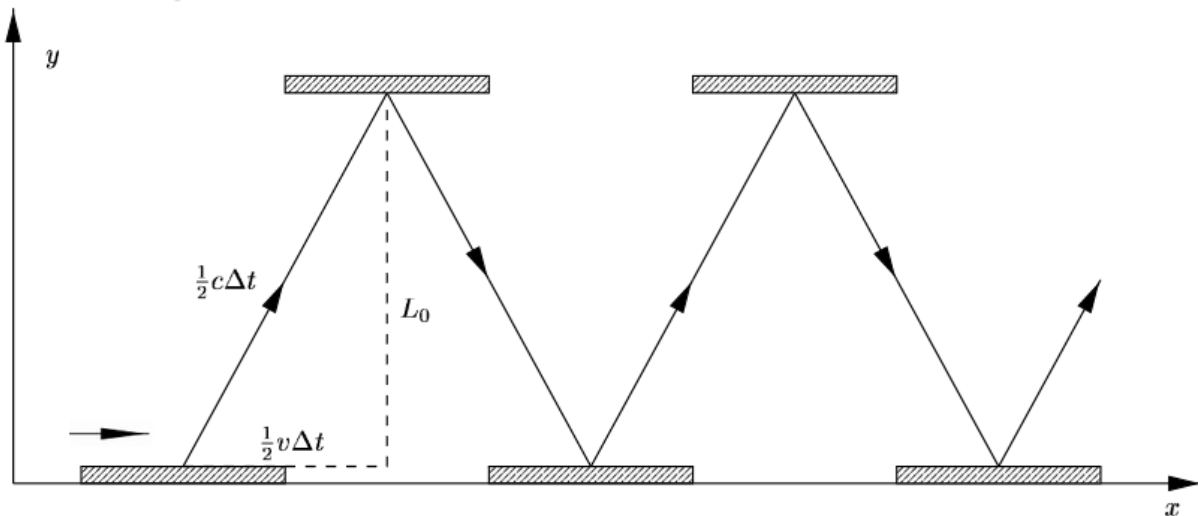
Upoštevajmo povedano in naredimo eksperiment z dvema opazovalcema, prvi naj miruje, drugi pa naj potuje (avto, vlak, ...) in izseva svetlobo, ki se mu odbije nazaj od zrcalnega stropa.

Predstavljajmo si torej opazovalca v vozilu s hitrostjo ( $v$ ), ki meri čas ( $\Delta t'$ ) med izsevom svetlobe in njeno ponovno detekcijo (zaznavo po odboju od zrcala na stropu vozila na višini  $L_0$ ) in opazovalca, ki miruje ter opazuje gibajoči se sistem in meri čas ( $\Delta t$ ) med dogodkoma izseva in ponovne zaznave svetlobe. Če je hitrost ( $v$ ) vozila majhna v primerjavi s hitrostjo svetlobe ( $c$ ), sta čas  $\Delta t$  in  $\Delta t'$  enaka, če pa je hitrost vozila primerljiva s svetlobno, pa sledi veliko presenečenje – izpeljali bomo Lorentzov člen (faktor)  $\Upsilon = 1/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ , ki povezuje čas  $t$  in  $t'$  in sicer velja:  $\Delta t = \Delta t'/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ .



Opazovalec, ki se premika v vozilu z zrcalom na stropu višine  $L_0$ , zazna navpično gibanje svetlobe in temu primerno izmeri čas, ki se izračuna po preprosti povezavi - čas ponovne zaznave svetlobe je kar opravljena pot ( $2L_0$  – pot do stropa in nazaj) deljena s hitrostjo svetlobe:

$$\Delta t' = 2L_0/c$$



Ta ki miruje in gleda od zunaj izsev in detekcijo odbite svetlobe pa opazi, da žarek potuje poševno (saj se je vozilo premaknilo za  $v\Delta t$ ). Ker je v vakuumu hitrost svetlobe neodvisna od tega, kako hitro potuje vir, ki je svetlobo oddal (načelo invariantnosti svetlobe), velja da je pot  $D$  do stropa dolga kar  $c\Delta t/2$  (hitrost svetlobe krat polovični čas), enako velja po odboju. Iz slike razberemo geometrijo dogodka, kjer opazimo pravokotni trikotnik s hipotenuzo  $D = c\Delta t/2$  in katetama  $L_0$  in  $v\Delta t/2$ . Iz Pitagorovega izreka izpeljemo povezavo med časom  $\Delta t$ , hitrostjo svetlobe ( $c$ ) in hitrostjo vozila ( $v$ ), namesto  $L_0$  pa vstavimo čas  $\Delta t' = 2L_0/c$ :

$$\left(\frac{1}{2}c\Delta t\right)^2 = L_0^2 + \left(\frac{1}{2}v\Delta t\right)^2$$

$$\Delta t = \gamma \frac{2L_0}{c}, \quad \gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

$$\Delta t = \gamma \Delta t'$$

Tako smo izpeljali povezavo med časoma v dveh sistemih, ki se relativno gibljeta. Ta zamik časa opazimo pri hitrostih ( $v$ ), ki so primerljive s svetlobno hitrostjo ( $c$ ). Zadnji izraz podaja izjemno pomembno povezavo med časoma v dveh sistemih.

Velikokrat čas  $t'$  označujemo s simbolom tau  $\tau$  in ga imenujemo lastni čas (proper time) – to je čas, ki ga meri mirujoča ura, oziroma ura, ki sledi poti, ura na svetovnici – to je pot v prostor-času. Te pojme bomo še srečevali in jih bomo upam, da zmeraj bolj dojemali, razumeli. Lasten čas  $\tau$  je torej merila ura v vozilu, kjer se je žarek izseval do ogledala na stropu vozila in nazaj.

## $dt = \gamma d\tau$

V nadaljevanju bomo v posebni teoriji relativnosti večinoma uporabljali za lasten čas kar oznako  $t'$ . Prednost oznake  $\tau$  je, da jo enostavno ločimo od časa  $t$  in je zato dojemanje matematičnega opisa nekega dogodka hitrejše in nedvoumno. A iz zgodovinskih razlogov bomo večinoma ostali pri oznaki  $t'$ .

Omenimo samo še neke vrste paradoks, zanimivo posledico podaljšanja časa - če bi se gibal s hitrostjo svetlobe (kar seveda za masni delec ni mogoče). Torej, če bi potovali s hitrostjo svetlobe  $v=c$ , bi nam čas sploh ne tekkel, saj velja  $\tau = t(1-c^2/c^2) = t \cdot 0 = 0$ ;

Še glede zapisa  $dt$  ali  $\Delta t$ , oziroma v čem je razlika med znakoma  $d$  in  $\Delta$ , oba pomenita nek interval, razliko. V primerih, ko imamo linearne spremembe, enakomerne hitrosti, se lahko uporablja znak za poljubno razliko  $\Delta$ , v primeru neenakomernih hitrosti pa znak  $d$ , ki v limiti pomeni neskončno malo spremembo, interval.

## Skrčenje dolžin (kontrakcija)

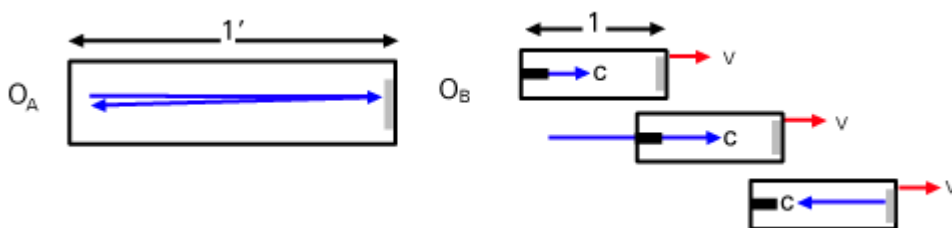
Dolžina gibajoče palice  $L'$  se za mirujočega opazovalca skrči na  $L$ , velja:

$$L = L'/\gamma$$

Seveda lahko zapišemo zadnji izraz tudi z drugimi simboli, recimo s standardno spremenljivko, z notacijo  $x$ :

$$x = x'/\gamma$$

Fenomen relativnega skrajšanja merjene dolžine izpeljimo s pomočjo slik in razmisleka o relevantni metodi merjenja dolžin, razdalj (merjenje razdalj se zdi samoumevno, pa ni – sploh pri hitrostih  $[v]$ , ki so primerljive s svetlobno hitrostjo  $[c]$ ).  $L'$  je lastna dolžina palice merjena v sistemu, kjer opazovalec in palica mirujeta.



Metoda merjenja dolžine palice (razdalj) naj spet temelji na oddanem, nato odbitem in (spet) prejetem žarku svetlobe (velja:  $L' = ct'/2$ , če palica in opazovalec drug glede na drugega mirujeta). Kako pa tako merjenje (dolžino) vidi nekdo, glede na katerega se palica giblje?

Naj torej sistem  $S'$  potuje s hitrostjo  $v$ . V njem je tudi palica dolžine  $L'$  z zrcalom na koncu. Prvi opazovalec, torej v sistemu  $S'$ , pošlje iz začetka palice žarek proti zrcalu na drugem koncu palice dolžine  $L'$  in počaka, da se odbiti žarek vrne v izhodišče. Kako pa vidi dogodke drug opazovalec v sistemu  $S$ , ki recimo miruje glede na prvega opazovalec v sistemu  $S'$ . Kot smo že omenili, v sistemu  $S'$ , skupaj s katerim palica potuje, izmeri prvi opazovalec čas  $t'$  povratka žarka; zagotovo velja  $t' = 2L'/c$  (zanj palica miruje). Tudi drugi opazovalec bo izmeril čas vrnitve žarka, označimo ga s  $t$  (brez črtice). Iz tega časa bo določil dolžino  $L$  (brez črtice). Seveda pa zunanji opazovalec tudi opazi, da se palica premika, in da bo zato oddani žarek dohitel zrcalo nekoliko pozneje, saj je relativna hitrost žarka pri lovljenju zrcala  $c-v$ , pri odboju pa  $c+v$  (glej sliko). Čas  $t$  do povratka žarka je torej  $t = L/(c-v) + L/(c+v) = L2c/(c^2 - v^2)$ . Ker pa smo že v prvem koraku izpeljali povezavo med časoma v gibajočem in mirujočem sistemu, jo tudi uporabimo, velja  $t = \gamma \cdot t' = \gamma \cdot 2 \cdot L'/c$ , iz česar sledi:

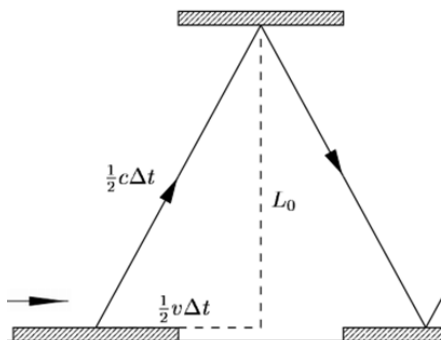
$$\gamma \cdot 2 \cdot L'/c = L \cdot 2 \cdot c/(c^2 - v^2),$$

- oziroma  $\gamma \cdot L' = L \cdot c^2/(c^2 - v^2) = L/(1 - v^2/c^2) = L \cdot \gamma^2$ . Iz zadnjega izraza izhaja, da je izmerjena dolžina palice  $L$  (za opazovalca, ki miruje glede na gibajočo palico) krajša od dolžine  $L'$ , ki je izmerjena v sistemu  $S$  v katerem palica miruje (v našem primeru se giblje skupaj s prvim opazovalcem in zato zanj miruje). Končni rezultat za izmerjeno dolžino premikajoče palice je:

$$L = L'/\gamma = L'(1 - v^2/c^2)^{1/2}$$

Tukaj se postavlja nekaj dilem, recimo ali ne bi razdalj merili še na kak drug način? A pri gibajočem telesu (ali mirujočem) nam ostane edina relevantna metoda preko svetlobe. Tudi, ko po domače z navadnim metrom merimo neko dolžino, je zadaj »le« svetloba, ki od objekta in metra prihaja v naši oči. Posebna teorija relativnosti je to samoumevno dejstvo le dopolnila s pojavi, ki izhajajo iz meritev pri večjih hitrostih – kar pa seveda ni vsakdanja izkušnja.

**Sedaj naenkrat opazimo, da stara trirazsežna metrika (x,y,z) klasičnega trirazsežnega prostora (3D) ne velja. Zakaj? Saj smo pri velikih hitrostih spoznali, da se dolžina nekega telesa glede na različni opazovalni sistem ne ohranja, tudi čas ni več absoluten.** Stara metrika (staro merjenje) je torej odpovedala. Ali je mogoče nekako dograditi naš opis sveta z novo metriko na način, da se bodo »razdalje« v novi metriki (bolje metrike) vseeno ohranjale? Trirazsežni prostor nam te želje, seveda pri višjih hitrostih primerljivih s hitrostjo svetlobe ( $c$ ), ne omogoča. Kako bi torej utemeljili novo metriko? Spet izhajamo iz uvodnega primera z opazovalcema - prvi naj miruje, drugi pa potuje in izseva svetlobo, ki se mu odbije nazaj od zrcalnega stropa. Opisujeta torej isti dogodek in izmerita različna časa in različna kraja dogodka – razdaljo med njima. Zapišimo še enkrat Pitagorov izrek - geometrijo dogodka.



$$(c\Delta t/2)^2 = L_0^2 + (v\Delta t/2)^2 = (c\Delta t'/2)^2 + (v\Delta t'/2)^2$$

Po preoblikovanju enačbe, ko na eni strani ohranimo **videnje dogodka v gibajočem sistemu**, na drugi strani pa **videnje zunanjega opazovalca**, dobimo:  $-(c\Delta t')^2 = -(c\Delta t)^2 + (v\Delta t)^2$   
 Ker je  $v\Delta t = \Delta x$  velja:

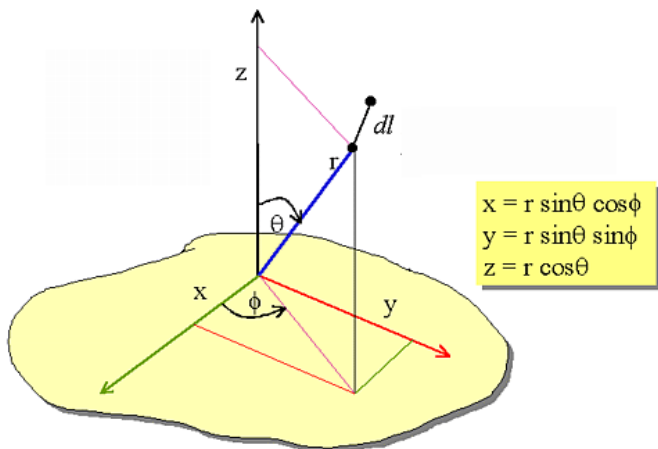
$$-c^2\Delta t'^2 = -c^2\Delta t^2 + \Delta x^2$$

Zadnji zapis je vreden vse pozornosti – je sicer preinterpretiran zgolj na dogodek izsevanja in detekcije žarka (v časih  $\Delta t$  in  $\Delta t'$ , za razdaljo med dogodkoma na  $x$  in  $x'$  osi, saj sta začetna in končna koordinata  $y$  in  $y'$  enaki, enako  $z$  in  $z'$ ). A iz zgornjega zapisa lahko sklepamo na splošno veljavno povezavo. Na desni imamo klasični člen trirazsežnega prostora – to je  $X$  komponenta krajevnega vektorja  $R = (X, Y, Z)$  in člen  $(c\Delta t)$ . Na levi pa samo člen  $(c\Delta t')$ , ker je za opazovalca v vozilu člen  $\Delta x'^2$  enak 0 (žarek se namreč za opazovalca v vozilu po odboju vrne v isto točko  $x'_1 = x'_2$ ). Ali je to torej zveza, nova metrika, ki jo iščemo? **JA – to je zapis nove metrike, vključuje tako različne koordinate, kot različen čas.**

V bistvu smo tako vpeljali četrto dimenzijo, produkt med svetlobno hitrostjo in časom ( $ct$ ).

Če ponovimo in se hkrati še enkrat vprašamo - zakaj vpeljati k dimenziji prostora še časovno komponento ( $ct$ )? Odgovor sta pokazala »preprosta« eksperimenta o relativnosti časa in dolžine - ter želja po opisu sveta, kjer nek dogodek – recimo razdalja med dogodkoma - ali meritev same dolžine, nista odvisna od koordinatnega sistema. Tako smo vpeljali posebno (specialno) teorijo relativnosti.

Pravkar vpeljana posebna (specialna) teorija relativnosti ne upošteva gravitacije – pravimo da je čas-prostor »RAVEN«. To izrazimo s štirirazsežno metriko – z izrazom za merjenje razdalj v prostor-času ( $ds$ ). Kaj to pomeni?



$$dl^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2)$$

$$d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

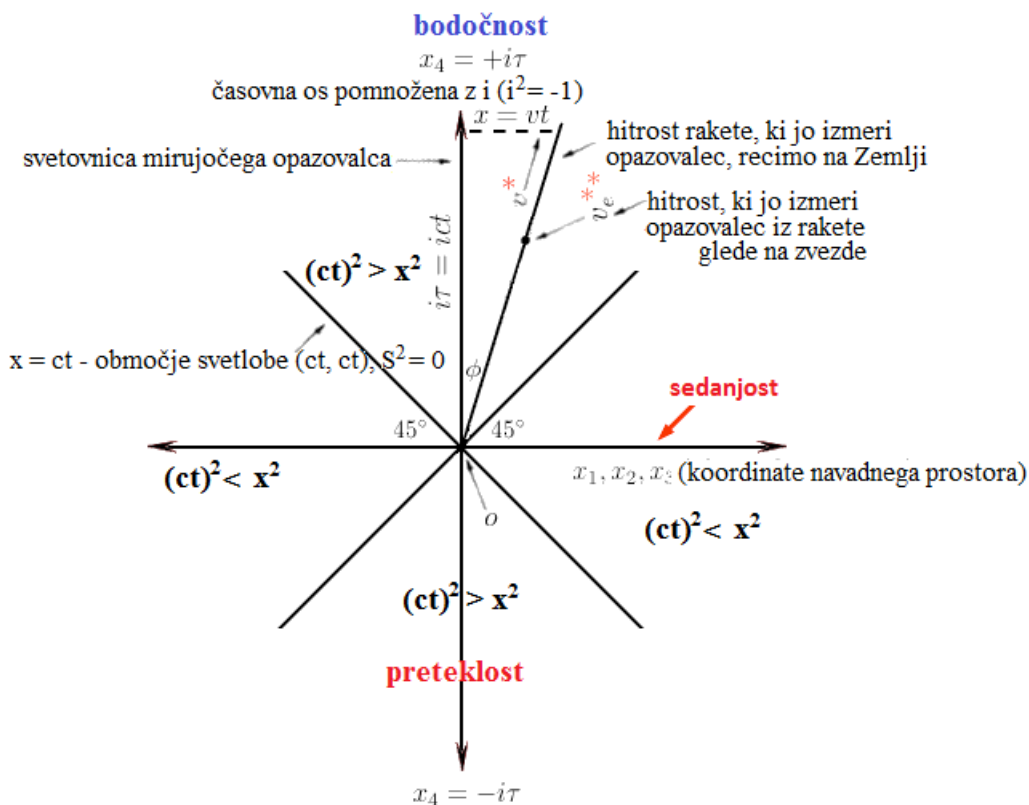
V klasičnem prostoru treh dimenzij velja, da je razdalja  $dl^2$  med točkama skalarni produkt vektorske razlike  $d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$ , glej sliko. Izkazalo se je (tudi iz navedenih primerov), da je smiselno vpeljati še četrto dimenzijo, ki povezuje čas (in hitrost svetlobe) s prostorom v nov štirirazsežni prostor-čas. Tako poenostavimo opis dogodkov med različnimi opazovalnimi sistemi, saj vemo, da čas ni absoluten ampak je vezan na relativno hitrost med sistemi, enako velja za merjenje dolžin. Pa še enemu pogoju smo zadostili, kot pravi eden izmed postulatov relativnosti, da so vsi opazovalni sistemi med seboj enakovredni (povsod so zakoni narave enaki) in sicer, da je opis nekega dogodka v vseh sistemih enakovreden. Klasični opis že takoj pokaže, da je v gibajočem sistemu razdalja med dogodkoma  $dx' = 0$  (naš primer), v mirujočem zunanjem opazovalnem sistemu pa je  $dx = v dt$ . To sicer lahko razumemo, a v klasičnem opisu tudi privzamemo, da je čas absoluten. Vemo pa, da to ni res in z novo metriko prostor-časa se da to razliko v metriki odpraviti. V novi metriki naj velja, da je razdalja v prostor-času za vse sisteme enaka:  $ds'^2 = ds^2$  - vektorji prostora-časa naj v vseh sistemih



ohranijo velikost, primeri sledijo. Prvi korak naj bo, da tridimenzionalnemu vektorju  $(x,y,z)$  dodamo še četrto časovno komponento  $ct$  (tako razširitev imenujemo prostor Minkowskega). Tak zapis je recimo vektor četverec  $\mathbf{X}^\mu = (ct, x, y, z) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$  za opis prostor-časa. Po Einsteinovi interpretaciji je »dogodek« – presečišče lege in časa – edina dejansko merljiva fizikalna količina. Skalarni produkt ( $ds^2 = \mathbf{dx}^\mu \cdot \mathbf{dx}^\mu$ ) ali kar metrika  $ds^2$  se sedaj zapiše kot:

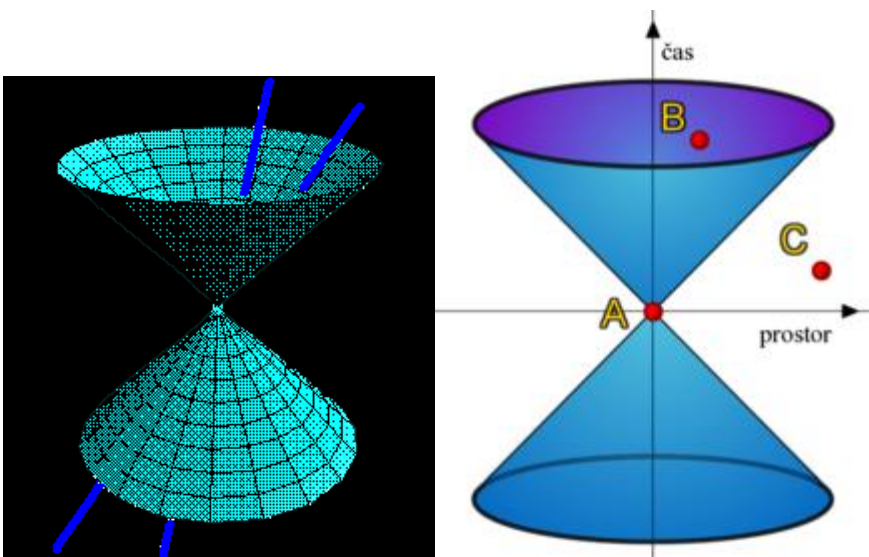
$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Zakaj minus pri časovnem delu razdalje ( $-c^2 dt^2$ ), smo pokazali na primeru vpeljave nove metrike ( $-c^2 \Delta t^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2$ ) – in geometrijsko je to »le« pitagorov izrek.



Zgornja slika kaže eno izmed grafičnih predstavitev štirirazsežnega prostora. Na vodoravni osi je dimenzija klasičnega 3D prostora  $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3) = (x^1, x^2, x^3)$ , na vertikali pa produkt hitrosti in časa ( $ict$ ), pomnožen z imaginarno enoto  $i$ , katere kvadrat je minus ena ( $i^2 = -1$ ) – to je kdaj dobra matematična pomoč pri računanju metrike, razdalj s pomočjo četverca. Prostor-času pravimo tudi prostor Minkowskega in ga na preprost način ponazorimo z zgornjim diagramom. Na njem je podan dogodek potovanja rakete in kako izmeri opazovalec iz Zemlje (ali rakete) hitrosti. Dogodki v realnem svetu se dogajajo znotraj ali na lijaku, štožcu (naklon stožca je  $45^\circ \Rightarrow ct/vt = 1$ , če  $v=c$ ), ki ima mejo v hitrosti svetlobe ( $x = ct$ ).

Prostor-času pravimo tudi prostor Minkowskega in ga na preprost način ponazorimo z zgornjim diagramom. Na njem je dogodek potovanja rakete in kako izmeri opazovalec iz Zemlje (ali rakete) hitrosti. Dogodki v realnem svetu se dogajajo znotraj ali na lijaku, štožcu (naklon stožca je  $45^\circ = ct/vt = 1$ , če  $v=c$ ), ki ima mejo v hitrosti svetlobe ( $x = ct$ ).



Če pogledamo potencialne povezave med A, B in C, lahko iz njih razberemo pogoje za morebitno vzročnost in tudi kdaj to ni mogoče - nezmožnost gibanja hitreje od svetlobe.

Če pogledamo dogodka A in B, uvidimo da sta vzročna - zakaj. A lahko povzroči B (od A do B lahko potuje recimo določeno vozilo (telo), saj ležita znotraj stožca, kjer je hitrost manjša od hitrosti svetlobe, itn), in če se A zgodi pred B, se to vidi iz vseh opazovalnih sistemov. A in B se lahko zgodita v določenem opazovalnem sistemu celo v isti točki prostora – kot recimo izsevanje svetlobe in odboj nazaj v nekem vozilu, kar zunanji opazovalec vidi kot dogodek tako v različnem času, kot tudi legi. Takemu dogodku (dogodkoma) pravimo, da je **(sta) časovnega tipa (razmik med dogodkoma je časovnega tipa, saj velja  $(ct)^2 > x^2$ )**. Dogodka A in C pa nista vzročno povezana, saj bi morala informacija od A do C potovati hitreje od svetlobe, kar pa eksperimenti ne kažejo. Dogodek C se je v prostoru zgodil tako daleč od A in časovno tako blizu (izven stožca  $ct = x$ ), da velja  $(ct)^2 < x^2$ , takima dogodkoma pravimo, da sta **krajevnega tipa (razmik med dogodkoma je krajevnega tipa)**. Dogodka A in C sta torej neodvisna – ne moreta biti vzročna. Seveda se lahko iz različnih opazovalnih sistemov razbere, da se A zgodi pred C in tudi obratno – kar je še en dokaz, da sta dogodka neodvisna. Kadar pa je  $ct = x$  (oziroma  $ds^2 = 0$ ), je **razmik svetlobnega tipa** (informacije pošiljamo s svetlobo) – dogodka ležita na plašču stožca (nekateri ga tudi imenujejo svetlobni stožec).

Oddaljeno (globoko) vesolje spoznavamo zgolj preko dogodkov svetlobnega tipa (sprejemamo in beremo svetlobo oddaljenih galaksij, zvezd, ... in iz teh dogodkov sestavljamo zgodbo razvoja vesolja, galaksij, zvezd, življenja, ...). Gledamo v preteklost, to je spodnji stožec, mi smo v izhodišču, stikališču stožcev preteklosti in bodočnosti. Znotraj Sončevega sistema pa izvajamo tudi dogodke časovnega tipa (misijske z raketami, sondami). Seveda si mnogi želijo informacije in potovanja hitreje od svetlobe – a take dogodke realnost, meritve, izključujejo. Seveda je v vesolju geometrija zaradi gravitacije nekoliko drugačna.

## Več na strani:

[http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/relativnost\\_in\\_vesolje\\_nekaj\\_primerov\\_03.pdf](http://www2.arnes.si/~gljsentvid10/relativnost_in_vesolje_nekaj_primerov_03.pdf)

Dopolnitve: 2016-09-18/2016-09-23/2017-02-05/2017-05-07/2018-04-17/2023-04-04