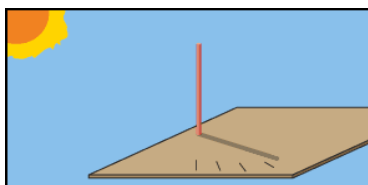


Marijan Prosen - Majo

# **Teorija sence**

**od Sonca osvetljene ravne palice**

*Kratka razprava*



E-knjžica  
Slike: Maja Prosen

Kranj – Zlato Polje, spomlad 2018

## Uvod

1. Senca od Sonca osvetljene ravne palice na ravnini
2. Enačba sence od Sonca osvetljene ravne palice na ravnini
3. Dolžina opoldanske od Sonca osvetljene sence ravne palice na ravnini

Zaključek

*Literatura*

*Senca se sprehaja tam,  
kjer hoče Sonce.*

Kitajski pregovor

## Uvod

O senci od Sonca osvetljenih predmetov, posebno ravne palice (gnomona), sem kar precej pisal. Odločil sem se, da to moje pisanje zberem in ga v primerni obliki in obsegu sistematično uredim, obdelam in objavim na enem mestu, in sicer v tej e-knjižici. Ker ima opazovana senca ravne palice na ravnini v njenem poteku določene zakonitosti, sem te njene značilne lastnosti združil v nekakšno homogeno matematično celoto in ji nadel ime *Teorija sence od Sonca osvetljene ravne palice*.

To je strokovno delo. Ni poljudno pisanje. Za razumevanje snovi zato potrebujemo nekoliko predznanja. Vedeti je treba nekaj osnovnih pojmov iz astronomije, geografije in tudi geometrije. Taki pojmi so na primer: kaj je deklinacija Sonca, višinski kot Sonca, kaj je poldne in kdaj nastopi (v zimskem in poletnem času), kdaj je podnevi Sonce najvišje nad obzorjem in v kateri smeri takrat leži na nebu, kaj je nadglavišče ali zenit, kaj je ekvatorialna ravnina, kaj je zemljepisna ali geografska širina kraja na Zemlji, kaj je Zemljin ekvator in severni Zemljin pol, kaj je koordinatni sistem v ravnini in v prostoru, kaj je dvojni stožec in plašč dvojnega stožca, kaj so stožnice in kako nastanejo, kaj je enačba krivulje, kaj je enotski vektor in kaj skalarni produkt dveh vektorjev, kako so opredeljene kotne funkcije sinus, kosinus in tangens in kakšne zveze veljajo med njimi. Obvezno moramo poznati glavne strani neba: sever, jug, vzhod, zahod in imeti občutek in precejšnjo sposobnost za orientacijo v prostoru. Veliko teh pojmov sicer delno pojasnujemo sproti v tekstu, vendar je le dobro, če jih poznamo in obvladamo že od prej.

Kot že rečeno, v e-knjižici obravnavamo samo sence od Sonca osvetljene ravne palice na določeni ravnini. Sence palice niso ostre. To zato, ker Sonce ni točkasto, ampak razsežno sveto. S tem, da sence niso ostre, se tu ne bomo ukvarjali ali se obremenjevali, ampak preprosto privzeli.

Senca ravne palice s svojima temeljnima karakteristikama, z dolžino in smerjo, je za nas izključno predmet vsesplošnega raziskovanja; konec sence palice pa predstavlja točko, ki se giblje na izbrani ravnini, kamor pada senca od

Sonca osvetljene palice, in na njej opiše določeno krivuljo. To krivuljo raziskujemo. Ima svoje ime in svojo enačbo. Enačbo krivulje na izbrani ravnini imenujemo tudi enačbo sence na tej ravnini. Zato izraza *enačba krivulje* in *enačba sence* v našem primeru enačimo, pomenita eno in isto stvar oziroma isti pojem.

Včasih se skozi kakšen del snovi nekoliko težje prebijemo in ga osvojimo šele po daljšem času razmišljanja, vendar naj vselej velja volja, želja in vztrajnost do novih spoznanj. Vsake snovi ne moremo v hipu razumeti. Šele polagoma nam postaja sprejemljivejša, razumljivejša in naposled tudi povsem domača. Raziskovanje teh senc ni ravno mačji kašelj. Je kar zahtevno miselno teoretično in tudi praktično opravilo (če ga le prvovrstno izvedemo), ki zahteva precejšnjo mero prostorske orientacije, miselne matematične domišljije in vsesplošne ustvarjalnosti.

Predlagam, da se kar podate skupaj z menoj na to lepo, zanimivo, čudežev narave polno in nikoli dokončno zaključeno raziskovalno pot. Vedno lahko tudi vi kaj novega odkrijete. Nikjer ne piše, da to ni nemogoče. Je mogoče. In prav to vam iz srca želim in privoščim.

X

Naj tu dodam še drobec zgodovine mojih prvotnih prizadevanj, da izpeljem enačbo sence, ki jo navpična od Sonca osvetljena ravna palica meče na vodoravno ravnino, čeprav bom izpeljavo te enačbe sence pozneje še posebej natančno predstavil, seveda predvsem duhovito izpeljavo z vektorji v popolni matematični luči.

Tako torej. Zadal sem si nalogo, da na vsak način poiščem (najdem, izpeljem, odkrijem) enačbo sence navpične palice, to je enačbo krivulje, po kateri se giblje konec sence od Sonca osvetljene navpične palice na vodoravni ravnini. Niti od daleč si nisem predstavljal, kako zelo zahtevno nalogo sem si zadal. Vzela mi je več kot deset let časa, pri čemer nisem raziskoval zvezno. Končno sem izpeljal elegantno obliko enačbe, univerzalnega in globalnega pomena, saj velja za vse kraje na Zemlji in za vsak dan v letu. Izpeljana pa je z vektorji na elementarni način s srednješolsko matematiko, vendar po globoki zamisli, za katero še zdaj natančno ne vem, kako da se mi je prikazala.

V bistvu gre za nekakšno poročilo o mojem raziskovanju sence. Povem, da je pot do uspeha trda, dolga in velikokrat tudi nepredvidljiva. Meni je k sreči uspelo. Odkritje je bilo v trenutku. Ostalo naprežanje pa tavanje v temi. Da je senca od Sonca osvetljenih predmetov zanimiv naravni pojav in zelo primeren za raziskovanje, ne bom posebej pojasnjeval. To mora človek čutiti v sebi, da se upa podati v tako neznane in nepredvidljive vode. Enačbo sence sem vztrajno iskal več kot deset let. Večkrat mi je spodletelo in sem raziskovanje za nekaj časa opustil. Potem pa znova nadaljeval. Vsakič iz popolne ničle.

Senco, ki jo meče od Sonca osvetljena navpična palica na vodoravna tla, sem ogromno opazoval v naravi: na travniku, domačem vrtu, na plaži ob morju; na balkonu naše počitniške hiše na velikem vodoravnem belem listu papirja, itn. Krivuljo, ki jo je popisal konec sence navpične palice v različnih letnih časih, sem po vsakem opazovanju natančno narisal na papir in jo obravnaval, študiral, raziskoval iz različnih zornih kotov. Vedel sem, da je krivulja hiperbola. In to sem poskušal na vsak način dokazati, najti enačbo hiperbole. A mi ni in ni uspelo, leta in leta.

Prvič sem poskušal poiskati enačbo sence, ko sem leta 1981 pisal poljudne prispevke za revijo Pionir. Tam sem krivulje sence za poletje, zimo in premice za enakonočje celo narisal z razlago, zakaj so takšne. Podobno sem narisal, opisal in pojasnil potek krivulj senc v knjigah za otroke *Astronomček Tonček* (1985) in *Opazujem Sonce in Luno* (1987). Joj, kako neskončno daleč sem bil takrat še od enačbe sence, če zdaj pogledam nazaj.

Resneje sem se lotil iskanja enačbe sence po letu 1987. Kljub velikemu vložnemu miselnem naporu mi je ni uspelo odkriti. Iz opazovanj narisano krivuljo sem prestavljal v ustrezno izbranem pravokotnem koordinatnem sistemu v vodoravni ravnini, da bi dobil matematični izraz za krivuljo. Enačbo sem želel izpeljati elementarno z znanjem ravninske geometrije, a ni šlo.

Leta 1994 oktobra je bil Prvi kongres matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Želel sem sodelovati, in to prav s prispevkom o senci. Imel sem veliko voljo in željo. Začel sem senco zagrizeno pospešeno in poglobljeno raziskovati. Zelo sem si želel ugotoviti njeno enačbo, predvsem elegantnejšo obliko. Brskal sem po številnih knjigah. V neki stari nemški astronomski še v gotici napisani knjigi sem zasledil opombo, da je mogoče izpeljati enačbo sence v pravokotnem koordinatnem sistemu (v opazovalni, tj. vodoravni ravnini) z uporabo sferne trigonometrije. To me je zelo zanimalo. Lotil sem se iskanja. Vse poletje 1994 sem preračunaval. Po precej zamotani poti, ki ne sodi v to knjižico (gl. literaturo [6]), mi je res uspelo dobiti krasno enačbo sence v obliki

$$(x - m)^2/a^2 - y^2/b^2 = 1,$$

kjer je  $a$  realna polos hiperbole,  $b$  imaginarna polos in  $m$  oddaljenost središča hiperbole od koordinatnega izhodišča, kjer je zapičena navpična palica, vse tri navedene količine  $a$ ,  $b$  in  $m$  pa so odvisne od časa oziroma natančneje od deklinacije  $\delta = \delta(t)$  Sonca med letom in zemljepisne širine  $\varphi$  kraja na Zemlji.

To je bila moja prva enačba sence. Izpeljava do nje zelo zahtevna. Z rešitvijo nisem bil zadovoljen, ker je bilo v njej preveč sferne trigonometrije in dolga (rekel bi skoraj neužitna) izpeljava. Poskušal sem izpeljati na krajši način in dobiti primernejšo obliko enačbe sence. Raziskoval sem dalje. Ker so stožnice krivulje, ki jih dobimo s presekom plašča dvojnega stožca in ravnine, sem pozornost usmeril v to smer. Za ravnino sem vedel, katera naj bi bila. Vodoravna, seveda, na kateri stojim, sem si mislil. Kako pa naj najdem v prostoru plašč dvojnega stožca, ki bi presekal to ravnino. Tega nisem vedel. Glede tega vprašanja sem plaval v popolnem mraku. V neki ruski geometriji

prostora sem zasledil nalogo o dvojnem stožcu, da enačbo njegovega plašča v prostoru lahko ugotovimo s skalarnim produktom dveh enotskih vektorjev, od katerih je eden fiksni (gleda v določeno smer), drugi pa kroži okoli fiksnega (pleše po krožnici). Prvi vektor sem takoj povezal s smerjo proti Severnici oziroma severnemu nebesnemu polu (ker miruje), drugi vektor pa šele po dolgem času s smerjo proti Soncu (ker se giblje - ima dnevno in letno gibanje), in tako nenadoma odkril enačbo plašča dvojnega stožca v prostoru, ki sem jo za rešitev naloge o senci potreboval. Pot do enačbe sence se mi je potem odprla sama od sebe, vendar ni bilo tako preprosto, kot tukaj opisujem. A bistveno sem nakazal.

S skalarnim produktom dveh enotskih vektorjev (ki izhajata iz vrha navpične palice, od katerih prvi kaže konstantno v severni nebesni pol, drugi pa v središče gibajočega se Sonca na nebu) sem izpeljal enačbo ploskve v prostoru, to je plašča krožnega dvojnega stožca z vrhom v vrhu palice:  $(x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2$ . Presek tega plašča z vodoravno ravnino opazovanja  $z = -a$  skozi podnožje palice pa je stožnica z enačbo (izpeljavo v celoti navajamo v 2. poglavju):

$$(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi - a \sin \varphi)^2$$

To je ta slavna, vsaj zame zelo opevana enačba sence navpične palice na vodoravni ravnini. Kar ponosen sem na to izpeljavo. Je zelo kratka, zelo razumljiva in ima malo trigonometričnih elementov. Nikjer nisem zasledil podobne enačbe sence, pa sem prebrskal precej knjig. Ta lepa, predvsem pa elegantna enačba velja splošno za katerikoli dan v letu ( $\delta$  je deklinacija Sonca, ki nosi čas in se med letom spreminja) in katerikoli kraj na Zemlji ( $\varphi$  je stalna zemljepisna širina kraja). Pozitivna smer osi  $x$  je usmerjena proti severu (ordinatna os), pozitivna smer osi  $y$  pa proti zahodu (abscisna os). Točke  $T(y, x)$  ležijo na krivulji – stožnici, ko pri znanih  $a$ ,  $\delta$  in  $\varphi$  koordinati  $x$  in  $y$  pretečeta vse vrednosti od minus neskončnosti do plus neskončnosti.

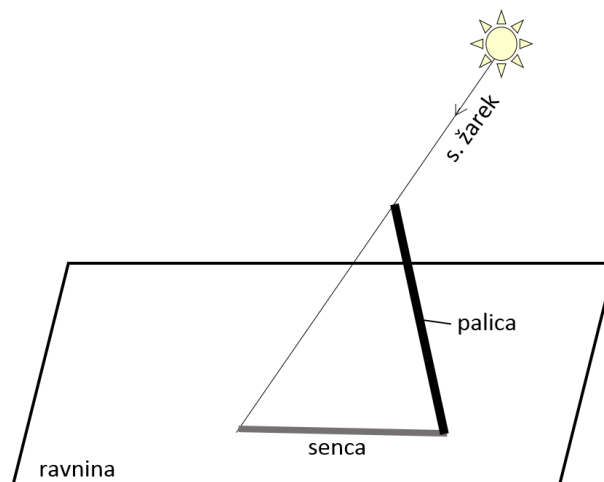
S tema dvema enačbama sence, prikazanima na plakatu, sem potem sodeloval na kongresu. Prevevala me je velika mera zadovoljstva in zadoščenja, da sem v pravem času rešil zastavljeno si nalogo in jo tudi prikazal na pravem mestu. Zanimanje zanj na kongresu pa je bilo skrajno klavrno. Rekel bi, nično, neopazno. In toliko dela.

Na osnovi zadnje rešitve te naloge sem senco ravne palice raziskoval nadalje in še marsikaj odkril (gl. še 2. in 3. poglavje).

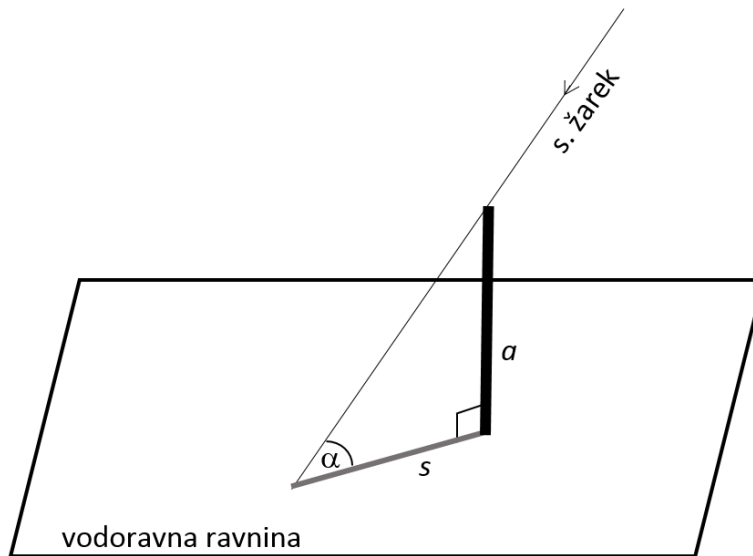
⌘

## 1. Senca od Sonca osvetljene ravne palice na ravnini

Od Sonca osvetljeno ravno palico zapičimo v poljubno ravnino. Palica meče senco na ravnino. Senca je ravna. Ravna palica vedno meče ravno senco na ravnino (razen v posebnem primeru, ko je palica vzporedna s smerjo Sončevih žarkov). Senca ima svojo dolžino in svojo smer. Dolžina sence je odvisna od višinskega kota Sonca (kako visoko je Sonce na nebu) in tudi od postavitve palice. Za navpično palico, ki meče senco na vodoravno ravnino, velja: ko je višinski kot Sonca majhen (ko je Sonce nizko), so sence dolge, ko pa je višinski kot Sonca velik (ko je Sonce visoko), so sence kratke. Smer sence pa vedno kaže v nasprotno smer, kot leži Sonce na nebu.



**Sonce, ravna palica in ravna senca od Sonca osvetljene palice na ravnini.**



Navpična palica  $a$  in ravna senca  $s$  navpične od Sonca osvetljene palice na vodoravni ravnini. Palica in senca palice oklepata pravi kot ( $90^\circ$ ). Podnožišče palice, vrh palice in konec sence palice so oglišča, ki sestavljajo pravokotni trikotnik, v katerem sta palica in senca kateti, od vrha palice do konca sence palice pa poteka hipotenuza. Sončev žarek gre od Sonca, čez vrh palice in konča na koncu sence palice. Kot  $\alpha$  med vodoravno ravnino (med senco v vodoravni ravnini) in smerjo Sončevega žarka je višinski kot Sonca. Ko Sonce vzide ali zaide, je višinski kot Sonca nič ( $\alpha = 0$ ), ko pride v nadglavišče, pa je natančno nad opazovališčem ( $\alpha = 90^\circ$ ). Pri nas Sonce nikoli ne pride v nadglavišče. So pa kraji na Zemlji, kjer pride. Sprašujem: Kje so taki kraji?



Tri opoldanske sence na vodoravnih tleh; vse kažejo v isto smer. Kje na nebu leži Sonce, če sence opoldne kažejo proti severu?

*V sredini vsega je Sonce;  
sence so njegovi otroci.*  
X

## 2. Enačba sence od Sonca osvetljene ravne palice na ravnini

V tem poglavju bomo predstavili izpeljavo enačbe sence v treh ravninah, v vodoravni, navpični in ekvatorialni ravnini. Natančno pa bomo obravnavali le enačbo sence na vodoravni ravnini in enačbo sence na navpični ravnini. Ostale možnosti najdete v člankih, navedenih v literaturi.

S senco, ki jo od Sonca osvetljena ravna palica meče na različne ravnine, sem se veliko ukvarjal (1981-2017). Tu navajamo le del teh raziskav, in sicer tri izpeljave enačb krivulj, po katerih se med dnevom premika konec sence od Sonca osvetljene ravne palice v omenjenih treh ravninah. Prvo enačbo sence sem odkril leta 1994, drugi dve pa leta 2017.

Enačbe senc so podane za kraje (opazovališča) severne Zemljine polute skupaj z Zemljinim ekvatorjem, to je za kraje z geografsko širino  $\varphi \geq 0$ , in za določen dan v letu, ko je deklinacija  $\delta$  Sonca znana. Za kraje v Sloveniji je  $\varphi$  blizu  $45^\circ$ , deklinacija Sonca pa se med letom spreminja v mejah od  $-23,5^\circ$  do  $+23,5^\circ$ .

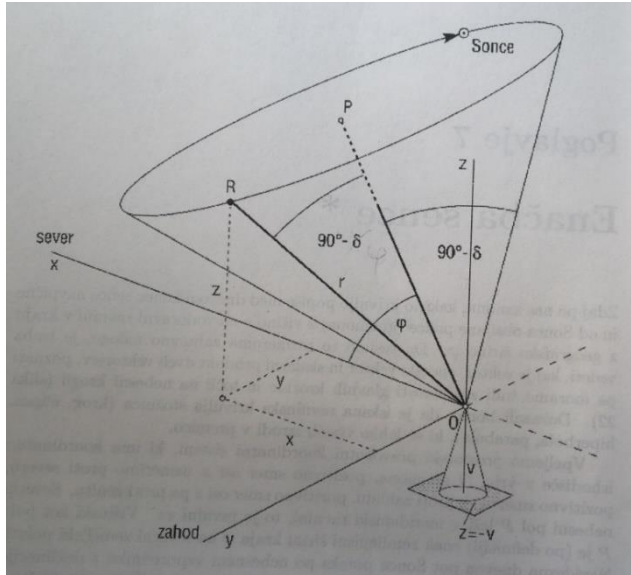
Vpeljemo prostorski pravokotni koordinatni sistem, ki ima koordinatno izhodišče v vrhu  $O$  navpične palice (gnomona). Pozitivna smer osi  $x$  je usmerjena proti severu, pozitivna smer osi  $y$  proti zahodu, pozitivna smer osi  $z$  proti zenitu. Severni nebesni pol  $P$  leži v meridianski ravnini, to je ravnini  $(xz)$ . Višinski kot pola  $P$  za kraje na severni Zemljini poluti je po definiciji enak geografski širini  $\varphi$  kraja. Navidezna dnevna pot Sonca poteka po nebesnem vzporedniku z deklinacijo  $\delta$ , to je po nebesnem vzporedniku, katerega točke so za kot  $(90^\circ - \delta)$  oddaljene od  $P$ . Sončevi žarki, ki gredo med dnevom čez vrh palice, ležijo na plašču krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi  $P$ . Kot med vektorjem  $OP$  in vektorjem  $OR = \mathbf{r} = (x, y, z)$  Sončevega žarka je  $(90^\circ - \delta)$ .

Naj bo na vektorju  $OP$  enotski vektor  $\mathbf{e} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$ , na vektorju  $OR$  pa enotski vektor  $\mathbf{f} = (x, y, z)/r$ . Najprej je skalarni produkt enotskih vektorjev  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \delta) = \sin \delta$ . Nato pa je tudi  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = (\cos \varphi, 0, \sin \varphi) \cdot (x, y, z)/r = x \cos \varphi / r + z \sin \varphi / r$ . Enačbo ploskve, to je plašča krožnega dvojnega stožca, dobimo iz enakosti:  $x \cos \varphi / r + z \sin \varphi / r = \sin \delta$ , od koder sledi  $r \sin \delta = x \cos \varphi + z \sin \varphi$ . Zapisano enačbo kvadriramo, upoštevamo  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ , in dobimo

$$(x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi + z \sin \varphi)^2.$$



To je enačba plašča krožnega dvojnega stožca z odprtino  $2 \cdot (90^\circ - \delta)$ . Presek tega plašča z vodoravno ravnino, vzporedno z ravnino  $(xy)$ , pa je stožnica. Enačbo stožnice, to je krivulje, ki jo tekom dneva na vodoravni ravnini popiše konec sence navpične palice (pokončnega stožca), dobimo s presekom plašča tega krožnega dvojnega stožca in vodoravne ravnine z enačbo  $z = -a$ .



**Izpeljava enačbe plašča krožnega dvojnega stožca, katerega os gre skozi severni nebesni pol  $P$ . Presek tega plašča z vodoravno ravnino skozi podnožiče palice (gnomona; tukaj pokončnega stožca) je stožnica, ki je pri nas v splošnem hiperbola, v drugih krajih in časih pa tudi krožnica, elipsa ali parabola. Plašč tega krožnega dvojnega stožca preseka tudi navpično ravnino v smeri vzhod-zahod (gl. dalje). Tako dobimo kot presek plašča krožnega dvojnega stožca z navpično ravnino spet stožnico.**

1. Krivulja, ki jo določenega dne ( $\delta$ ) popiše konec sence navpične palice na vodoravni ravnini v kraju z geografsko širino  $\varphi$ , ima enačbo:

$$(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi - a \sin \varphi)^2$$

To je izpeljana enačba sence navpične palice v vodoravni ravnini, vzporedni z  $(xy)$  ravnino. O tej enačbi lahko razpravljamo za različne geografske širine  $\varphi \geq 0$  (različne kraje) in za različne deklinacije  $\delta$  Sonca (različne datume). Enačba splošno velja za vsak kraj  $\varphi \geq 0$  in dan ( $\delta$ ) na Zemlji.

2. Namesto vrha  $O$  navpične palice z višino  $a$  si lahko mislimo vrh vodoravne palice z dolžino  $a$ , ki jo pravokotno zapičimo v

navpično ravnino vzhod-zahod. Enačba sence vodoravne palice v navpični ravnini vzhod-zahod, vzporedni z ravnino(yz), za  $x = a$  dobi obliko:

$$(a^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (a \cos \varphi + z \sin \varphi)^2$$

3. Če pa si predstavljamo, da leži  $O$  na vrhu ravne palice z dolžino  $a$ , ki jo navpično zapičimo v ekvatorialno ravnino tako, da je palica usmerjena proti severnemu nebesnemu polu  $P$ , dobimo enačbo plašča krožnega dvojnega stožca iz enakosti skalarnih produktov  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = 1 \cdot 1 \cdot \cos(90^\circ - \delta) = \sin \delta$  in  $\mathbf{e} \cdot \mathbf{f} = (0, 0, 1) \cdot (x, y, z)/r = z/r$ . Tako je enačba plašča krožnega dvojnega stožca  $z/r = \sin \delta$  oziroma:

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta.$$

Enačba sence palice v ekvatorialni ravnini za  $z = -a$  dobi najprej obliko:  $a^2 = (x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta$  in končno:

$$x^2 + y^2 = a^2 / \tan^2 \delta; \delta > 0$$

To pa je izpeljana enačba krožnice z radijem (ki je hkrati tudi dolžina sence palice)  $R = a / \tan \delta$  in ob enakonočjih ( $\delta = 0$ ) ni opredeljen, saj gre  $R$  v neskončnost, in to za vse  $\varphi \geq 0$ . Na ekvatorialni ravnini je namreč tega dne pot vrha sence palice neopredeljena (je ni), jeseni in pozimi pa senca palice sploh ne pade na ekvatorialno ravnino. Spomladi in poleti se vrh sence palice giblje po krožnicah, od katerih doseže  $R$  minimum ob poletnem Sončevem obratu, ko je  $R = a / \tan 23,5^\circ \approx 2,3 a$ . Tega dne je torej radij krožnice (dolžina sence palice) najmanjši, ostale dni pa je večji in se večja vse do neopredeljenosti ob enakonočjih.

Razen, ko gre za neopredeljenost, je krivulja, po kateri se giblje konec sence od Sonca osvetljene ravne palice v vseh treh ravninah, vedno stožnica (krožnica, elipsa, hiperbola, parabola), ki se le v redkem primeru (na primer pri nas v vodoravni in navpični ravnini za  $\delta = 0$ ) izrodi v premico (gl. dalje tekst in tudi sliko).

Navedli smo teoretično izpeljane enačbe senc za tri navedene ravnine. Lahko pa z neposrednim opazovanjem sence, ki jo ravna palica meče na te ravnine, teorijo preskusimo tudi v praksi. Treba si je vzeti čas. Jaz sem to naredil. Opazovanja sence potrdijo teorijo.

Na sliki je prikazano moje enoletno opazovanje sence navpične palice na vodoravnih tleh.

Nadalje natančno obravnavamo le enačbo sence na vodoravni ravnini in enačbo sence na navpični ravnini.



**Moja zelo skrbna več kot enoletna opazovanja sence, ki jo navpična od Sonca osvetljena palica meče na vodoravno ravnino – leta 1994 v kraju Javornik pod Joštom nad Kranjem. Plastični narobe obrnjeni in na količke natakneni beli jogurtovi lončki so razporejeni po treh hiperbolah in eni premici. Najbolj leva hiperbola prikazuje premikanje konca sence palice blizu zimskega Sončevega obrata, desno od nje je hiperbola, ki prikazuje premikanje konca sence okoli 1. 11., premica prikazuje premikanje konca sence ob jesenskem enakonočju, najbolj desna hiperbola pa prikazuje premikanje konca sence palice natanko ob poletnem Sončevem obratu. Teorija se lepo ujema s prakso, to je z neposrednim opazovanjem sence palice na prostem, v naravi. - *Presek* 29 (2001/2002), številka 3 (naslovnica);  
*foto: Stana Prosen***

⌘

## 2. a Senca navpične palice na vodoravni ravnini na Zemljinem ekvatorju, pri nas in na severnem Zemljinem polu

V tem razdelku razširimo in posebej obravnavamo potek sence navpične palice na vodoravnih tleh v treh krajih na Zemlji. Omejimo se na severno Zemljino poluto.

Od prej že vemo, da ima krivulja, ki jo določenega dne ( $\delta$ ) v letu popiše konec sence od Sonca osvetljene navpične palice na vodoravni ravnini v določenem kraju ( $\varphi$ ) enačbo:

$$(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = (x \cos \varphi - a \sin \varphi)^2$$

Zdaj to enačbo sence obravnavajmo v kraju na Zemljinem ekvatorju, pri nas in na Zemljinem polu.

1. Enačba sence navpične palice na vodoravni ravnini v kraju na Zemljinem ekvatorju ( $\varphi = 0$ ) dobi obliko  $(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = x^2$ . Krivulje so hiperbole s splošno enačbo:  $x^2/a^2 \operatorname{tg}^2 \delta - y^2/a^2 = 1$ . Gre seveda za eno vejo hiperbole<sup>1</sup>. Ob enakonočju ( $\delta = 0$ ) se veja hiperbole izrodi v os  $y$  ali premico  $x = 0$ . Senca je vidna vsak dan v letu.

Ob enakonočju v krajih na ekvatorju Sonce vzhaja natančno na vzhodu, se nato navpično dviga na vzhodnem delu neba, je opoldne v nadglavišču, popoldne pa se na zahodnem delu neba navpično spušča in zaide natančno na zahodu. Zato dopoldne sence palice kažejo natančno proti zahodu, opoldne sence ni (palica se projicira v podnožišče – v točko), popoldne pa kažejo natančno proti vzhodu. Konec sence palice se premika natanko po premici zahod-vzhod.

Od spomladanskega enakonočja mimo poletnega Sončevega obrata do jesenskega enakonočja (pomlad in poletje) ležijo posamezne veje hiperbol, po katerih se premika konec sence palice, južno od palice, od jesenskega enakonočja mimo zimskega Sončevega obrata do spomladanskega enakonočja (jesen in zima) pa severno od palice. Veje hiperbol južno in veje hiperbol severno so si simetrične glede na premico  $x = 0$  in so usločene (upognjene) stran od palice, seveda najbolj ob Sončevih obratih.

2. Enačba sence navpične palice na vodoravnih tleh v naših krajih (recimo za  $\varphi = 45^\circ$ ) dobi v tem primeru obliko  $(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = \frac{1}{2} (x - a)^2$ . Krivulje so hiperbole, razen ob enakonočju, ko se veja hiperbole izrodi v premico  $x = a$ . Senca je vidna vsak dan.

---

<sup>1</sup> Hiperbola ima dve veji. Razumljivo je, da se konec sence palice določenega dne lahko giblje le po eni veji.

Od spomladanskega enakonočja mimo poletnega Sončevega obrata do jesenskega enakonočja (pomlad in poletje) so veje hiperbol usločene (upognjene) k palici, od jesenskega enakonočja mimo zimskega Sončevega obrata do spomladanskega enakonočja (jesen in zima) pa so usločene v nasprotno smer, stran od palice. Najbolj usločena k palici je veja hiperbole ob poletnem Sončevem obratu, najbolj usločena v obratno smer pa veja hiperbole ob zimskem Sončevem obratu (gl. sliko na strani 10).

**3.** Enačba sence navpične palice na vodoravni ravnini na severnem Zemljinem polu ( $\varphi = 90^\circ$ ) dobi obliko  $(x^2 + y^2 + a^2) \sin^2 \delta = a^2$ . Krivulje so krožnice z enačbo  $x^2 + y^2 = a^2 / \tan^2 \delta$ . Senca je vidna le pol leta, od spomladanskega do jesenskega enakonočja (pomlad in poletje). Radij teh krožnic je najmanjši ob poletnem Sončevem obratu ( $\delta = 23,5^\circ$ )  $R = a / \tan 23,5^\circ \approx 2,3 a$ , ob enakonočjih pa je neopredeljen.

Obravnavali smo teoretično izpeljane enačbe senc oziroma krivulje, po katerih se giblje konec sence palice v določenem primeru. Lahko pa senco od Sonca osvetljene navpične palice na vodoravnih tleh tudi opazujemo in teoretično dobljene krivulje primerjamo z opazovanimi, s prakso.

Da to natančno ugotovimo, na primer za naše kraje, potrebujemo eno leto opazovanj. Opazovanja so preprosta, a dolgoročna. Seveda ni treba opazovati senc palice vsak dan. Zadostuje eno ali dve opazovanji okoli spomladanskega enakonočja, okoli poletnega Sončevega obrata, okoli jesenskega enakonočja, okoli zimskega Sončevega obrata in še kakšno opazovanje vmes. In tako mine eno leto. Vedno opazujemo senco enako visoke palice na istem opazovalnem prostoru in na enak način.

Sam sem ta opazovanja za naše kraje naredil. Teorija se ujema s prakso. Poskusite to tudi vi ugotoviti.

Σ

## 2. b Senca vodoravne palice na navpični ravnini na Zemljinem ekvatorju, pri nas in na severnem Zemljinem polu

Tudi v tem razdelku že znano vsebino dopolnimo in razširimo tako, da potek sence vodoravne palice na navpični ravnini obravnavamo v treh krajih na Zemlji, na ekvatorju, pri nas in na severnem polu.

Od prej že vemo, da ima krivulja, ki jo določenega dne v letu popiše konec sence vodoravne palice na navpični ravnini vzhod-zahod, vzporedni z (yz) ravnino, v znanem kraju enačbo:

$$(a^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = (a \cos \varphi + z \sin \varphi)^2$$

Obravnavajmo zdaj to enačbo sence najprej v kraju na Zemljinem ekvatorju, nato pri nas in končno še na Zemljinem polu.

1. Enačba sence vodoravne palice na navpični ravnini v kraju na Zemljinem ekvatorju ( $\varphi = 0$ ) dobi obliko:  $(a^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = a^2$ . Krivulje so krožnice z enačbo:  $y^2 + z^2 = a^2/\text{tg}^2 \delta$  in radijem  $R = a/\text{tg} \delta$ . Senca palice je vidna pod koordinatno osjo  $y$ , to je pod premico  $z = 0$ , in to le od jesenskega do spomladanskega enakonočja (jesen in zimo). Ob enakonočju ( $\delta = 0$ ) je neopredeljena. Ob zimskem Sončevem obratu ( $\delta = -23,5^\circ$ ) pa ima krožnica najmanjši radij  $R = a/\text{tg}(-23,5^\circ) = -2,3 a$  (– zato, ker središče  $S$  krožnice leži na osi  $z$  pod premico  $z = 0$ ). Spomladi in poleti senca ni vidna, saj se na nebu Sonce giblje za navpično ravnino in senca palice sploh ne pade na navpično ravnino.

2. Enačba sence vodoravne palice na navpični ravnini v naših krajih ( $\varphi = 45^\circ$ ) ima obliko:  $(a^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = \frac{1}{2} (a + z)^2$ . Krivulje so hiperbole, razen ob enakonočju ( $\delta = 0$ ), ko se veja hiperbole izrodi v premico  $z = -a$ . Senca je vidna vsak dan v letu.

Od spomladanskega enakonočja mimo poletnega Sončevega obrata do jesenskega enakonočja (pomlad in poletje) ležijo veje hiperbol pod premico  $z = -a$  in imajo vrhove (maksimume), od jesenskega enakonočja mimo zimskega Sončevega obrata do spomladanskega enakonočja pa so veje hiperbol nad to premico in imajo doline (minimume). Hiperbole so usločene (upognjene) stran od palice. Najbolj so usločene ob Sončevih obratih.

3. Enačba sence vodoravne palice na navpični ravnini na severnem Zemljinem polu pa ima v tem primeru enačbo:  $(a^2 + y^2 + z^2) \sin^2 \delta = z^2$ . Krivulje so hiperbole z enačbo  $z^2/a^2 \text{tg}^2 \delta - y^2/a^2 = 1$ . Senca je vidna pol leta, od spomladanskega do jesenskega enakonočja (pomlad in poletje). Ob enakonočjih se veja hiperbole

izrodi v os  $y$  oziroma premico  $z = 0$ . Vse hiperbole ležijo na navpični ravnini pod premico  $z = 0$ , imajo vrhove (maksimume) in so usločene (upognjene) stran od palice. Najbolj je usločena veja hiperbole ob poletnem Sončevem obratu.

Navedli in obravnavali smo teoretično izpeljane enačbe senc oziroma krivulje, po katerih se giblje konec sence vodoravne palice na navpični ravnini v treh primerih. Lahko pa to senco tudi opazujemo in teoretično dobljene krivulje primerjamo z opazovanimi.

Da vse to na primer ugotovimo za naše kraje, potrebujemo vsaj eno leto opazovanj. Opazovanja so preprosta, a dolgoročna. Ni treba opazovati sence palice vsak dan. Zadostuje eno ali dve opazovanji okoli spomladanskega enakonočja, okoli poletnega Sončevega obrata, okoli jesenskega enakonočja, okoli zimskega Sončevega obrata in še kakšno opazovanje vmes. Opazujemo vedno senco enako visoko palico na istem opazovalnem prostoru in na enak način.

Sam sem to naredil za naše kraje in teorija se ujema s prakso. Poskusite to ujemanje ugotoviti tudi vi.

⌘

### **3. Dolžina opoldanske od Sonca osvetljene sence ravne palice na ravnini**

Čeprav gre za veliko možnosti (sam sem jih obravnaval najmanj sedem) raziskovanj opoldanskih dolžin senc na različnih ravninah pri različnih legah ravne palice, bomo tukaj obravnavali le dve: dolžino opoldanske sence navpične palice na vodoravni ravnini in dolžino opoldanske sence vodoravne palice na navpični ravnini. Ostale možnosti (variante) najdemo v člankih, navedenih v literaturi.

⌘

#### **3. a Dolžina opoldanske sence, ki jo navpična palica meče na vodoravno ravnino**

V vodoravno ravnino navpično zapičimo ravno palico z višino (dolžino)  $v$ . Od Sonca osvetljena palica meče senco na ravnino. Dolžina opoldanske sence, ki jo palica meče na vodoravno ravnino, je  $s = v/\operatorname{tg} \beta$ , če je  $\beta$  opoldanski višinski kot Sonca določenega dne. Ker je  $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$ , kjer  $\varphi$  pomeni geografsko širino



(za kraje v Sloveniji je blizu  $45^\circ$ ),  $\delta$  pa deklinacijo Sonca ( $|\delta| \leq 23,5^\circ$ ), za opoldansko dolžino sence tako dobimo enačbo:

$$s = v \operatorname{tg}(\varphi - \delta).$$

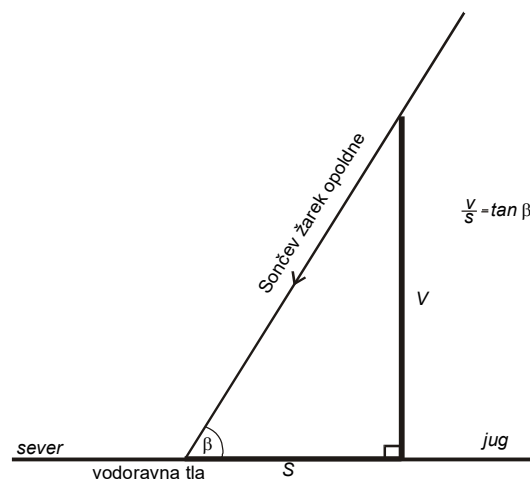
Dolžina opoldanske sence je pri konstantni dolžini palice odvisna od  $\varphi$  in  $\delta$ . Pri nas je opoldanska dolžina take sence palice poleti vedno krajša kot pozimi, ker je poleti Sonce opoldne višje kot pozimi. Opoldanska senca palice kaže proti severu, ker je Sonce opoldne vedno na jugu.

Poglejmo nekaj zgledov.

a) Ob enakonočju ( $\delta = 0$ ) je  $s = v \operatorname{tg} \varphi$ . Dolžina sence je pri konstantni dolžini palice odvisna le od zemljepisne širine. To enačbo lahko s pridom uporabimo za preprosto določitev zemljepisne širine pri izmerjenih  $s$  in  $v$ . Pri nas ( $\varphi = 45^\circ$ ) je  $s = v$ .

b) Za kraje na Zemljinem ekvatorju ( $\varphi = 0$ ) je  $s = v \operatorname{tg}(-\delta) = -v \operatorname{tg} \delta$ . Poleti opoldanska senca kaže proti jugu, pozimi proti severu, ob enakonočjih pa je ni ( $s = 0$ ), palica se projicira v točko, saj je Sonce tam opoldne natančno nad glavo.

c) Na severnem Zemljinem polu ( $\varphi = 90^\circ$ ) je  $s = v \operatorname{tg}(90^\circ - \delta) = v/\operatorname{tg} \delta$ . Ob enakonočjih je senca neopredeljena, sicer je pa vidna le od spomladanskega do jesenskega enakonočja (najkrajša je ob poletnem Sončevem obratu,  $v/\operatorname{tg} 23,5^\circ$ ), jeseni in pozimi pa ni vidna, saj je Sonce pod obzorjem.



**Opoldanska dolžina sence  $s$ , ki jo navpična palica z dolžino  $v$ , meče v kraju z zemljepisno širino  $\varphi$  na vodoravno ravnino (tla);  $\beta$  je opoldanski višinski kot Sonca določenega dne in je  $\beta = 90^\circ - (\varphi - \delta)$ , kjer pomeni  $\varphi > 0$  geografsko širino kraja na severni Zemljini poluti in  $\delta$  ( $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$ ) deklinacijo Sonca. Poleti je  $\delta > 0$ , pozimi je  $\delta < 0$ , ob enakonočjih pa je  $\delta = 0$ , saj se Sonce giblje praktično po nebesnem ekvatorju.**



Na splošno se opoldanska dolžina sence  $s = v \operatorname{tg}(\varphi - \delta)$  pri konstantnem  $\varphi$  v času enega leta spreminja od  $v \operatorname{tg}(\varphi + 23,5^\circ)$  do  $v \operatorname{tg}(\varphi - 23,5^\circ)$ . Če npr. vzamemo  $v = 1 \text{ m}$  in  $\varphi = 45^\circ$ , se opoldanska dolžina sence spreminja od približno 2,54 m (maksimum; zimski Sončev obrat) do 0,39 m (minimum; poletni Sončev obrat). Opoldanska senca je vidna vse leto.

### Še tri raziskovalne naloge za doma

1. Narišite graf  $s = \operatorname{tg}(45^\circ - \delta)$ , ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske navpične palice na vodoravni ravnini v kraju z geografsko širino  $\varphi = 45^\circ$ , torej približno tako kot pri nas. Narišite graf za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja.

Najprej sestavite tabelo: čas (datum) |  $s$ , oziroma tabelo:  $\delta$  |  $s$  in šele nato narišite graf.

2. Narišite graf  $s = \operatorname{tg}(-\delta)$ , ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske navpične palice na vodoravni ravnini v krajih na ekvatorju, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte le  $s > 0$ .

Najprej sestavite tabelo: čas (datum) |  $s$ , oziroma tabelo:  $\delta$  |  $s$  in šele nato narišite graf.

3. Narišite graf  $s = \operatorname{tg}(90^\circ - \delta) = 1/\operatorname{tg} \delta$ , ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske navpične palice na vodoravni ravnini na severnem Zemljinem polu, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte samo  $s > 0$ .

Najprej sestavite tabelo: čas (datum) |  $s$ , oziroma tabelo:  $\delta$  |  $s$  in šele nato narišite graf.

### Splošna pripomba.

Pri risanju vseh grafov zdaj in potem velja omejitev:  $-23,5^\circ \leq \delta \leq +23,5^\circ$ . Zato jih rišemo od točke do točke. Pomagamo si z astronomskimi efemeridami *Naše nebo*, ki jih vsako leto izdaja Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (tu so podatki za deklinacijo Sonca) in kalkulatorjem.

V vseh treh primerih dobimo krivulje, ki jih znamo dobro pojasniti. Prva je zvezna, ostali dve pa sta pretrgani.

## Rešitve

Grafe natančno narišemo in jih smiselno komentiramo.

1. V času enega leta se dolžina sence palice spreminja približno od 0,4 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek dolžine sence med letom, je zvezna, to je nepretrgana.

2. V času enega leta se dolžina sence navpične palice v krajih na ekvatorju spreminja od 0 m (enakonočje) do 0,4 m (zimski Sončev obrat). Senca  $s > 0$ , ki opoldne kaže proti severu, lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času.

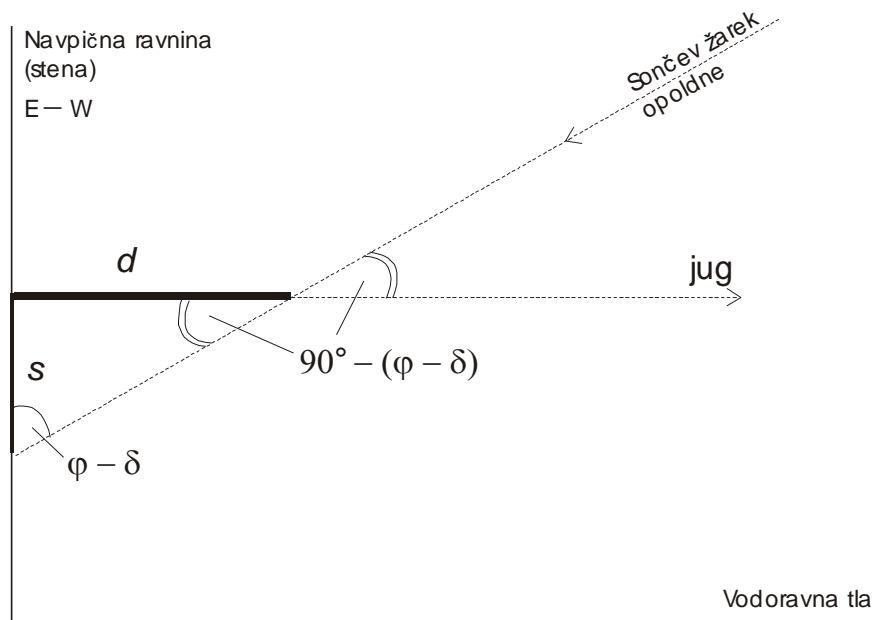
3. V času enega leta se dolžina sence navpične palice na severnem Zemljinem polu spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob poletnem Sončevem obratu, senca opazujemo spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

X

### 3. b Dolžina opoldanske sence, ki jo vodoravna palica meče na navpično ravnino

V navpično ravnino (ravno steno) v smeri vzhod-zahod zapičimo vodoravno palico z dolžino  $d$  tako, da vrh palice gleda proti jugu.

Izračunajmo dolžino  $s$  opoldanske sence, ki jo od Sonca osvetljena vodoravna palica meče na navpično ravnino v kraju z geografsko širino  $\varphi \geq 0$  določenega dne v letu, ko je  $\delta$  deklinacija Sonca znana.



**Dolžina opoldanske sence  $s$ , ki jo od Sonca osvetljena vodoravna palica  $d$  meče na navpično ravnino vzhod-zahod. Opoldanski višinski kot Sonca je  $90^\circ - (\varphi - \delta)$ , kot med smerjo Sončevega žarka opoldne in navpično ravnino pa je  $(\varphi - \delta)$ . Poleti je  $\delta > 0$ , pozimi je  $\delta < 0$ , ob enakonočjih pa je  $\delta = 0$ .**

Sonce je opoldne na jugu, senca palice je usmerjena od podnožišča palice navpično navzdol. Pri nas je opoldne Sonce vedno nad obzorjem, zato ima samo taka senca pomen. Če je Sonce pod obzorjem, do sence ne more priti. V našem primeru je dolžina sence palice pozitivna, torej  $s > 0$ . V primeru, da bi bilo  $s = 0$ , da bi bila senca palice točka, sence ne bi bilo (Sonce bi bilo na idealnem obzorju in njegov višinski kot bi bil nič; žarki Sonca bi padali pravokotno na steno in palica bi se projicirala v točko; ta primer tukaj izključimo, čeprav je na Zemlji mogoč, saj Sonce opoldne ni nikdar na jugu ne zahaja). Da bi bila vrednost dolžine sence negativna,  $s < 0$ , pa sploh ne more priti, saj Sonca ni nad obzorjem, ampak je pod njim. Dogovorimo se, da ima dolžina sence vedno pozitivno vrednost.

Iz slike izpeljemo dolžino  $s$  opoldanske sence, ki jo vodoravna palica meče na navpično ravnino:

$$s = d/\operatorname{tg}(\varphi - \delta); s > 0.$$

Dolžina sence je odvisna je od kraja  $\varphi$  in časa v letu, kar pove deklinacija  $\delta$  Sonca, ki se med letom spreminja. Seveda obravnavamo le senco, ko Sonce osvetljuje palico. Pri nas so poleti sence take palice daljše kot pozimi, ker je Sonce opoldne višje kot pozimi.

### Nekaj zgledov

a) Ob enakonočju ( $\delta = 0$ ) sledi  $s = d/\operatorname{tg} \varphi$ . Dolžina sence je pri znani dolžini palice odvisna le od kraja  $\varphi$ . Na Zemljinem ekvatorju ( $\varphi = 0$ ) je senca nedoločena, saj se Sonce za kraje na ekvatorju ta dan giblje od vzhoda do zahoda natanko po nebesnem ekvatorju na nebu in je opoldne v nadglavišču. Za  $\varphi = 45^\circ$  (približno v naših krajih) je  $s = d$ . Za  $\varphi = 90^\circ$  je formalno  $s = 0$  in sence ni (Sonce se navidezno giblje po nebesnem obzorniku, ki sovpade z nebesnim ekvatorjem; palica pa se projicira v točko; gl. še c).

b) Za kraje na Zemljinem ekvatorju ( $\varphi = 0$ ) je  $s = d/\operatorname{tg}(-\delta) = -d/\operatorname{tg} \delta$ . Dolžina sence je odvisna le od  $\delta$ . Če je  $\delta = 0$ , je senca nedoločena, kar že vemo, če je  $\delta > 0$ , ne more priti do sence (zakaj?), za  $\delta < 0$  pa pride do sence (od jesenskega do spomladanskega enakonočja, torej vso jesen in zimo).

c) Na severnem Zemljinem polu ( $\varphi = 90^\circ$ ) nebesne smeri sicer izgubijo pomen, vendar formalno velja  $s = d/\operatorname{tg}(90^\circ - \delta) = d \operatorname{tg} \delta$ . Dolžina sence je odvisna od  $\delta$ . Za  $\delta = 0$ , je  $s = 0$  in ravna vodoravna palica se projicira v točko, sence ni. Za  $\delta > 0$  pa senca nastopi (od spomladi do jeseni), ko pa je  $\delta < 0$ , ne more priti do sence, saj je Sonce pod obzorjem. Kljub temu, da smeri neba tu niso opredeljene, pa je zanimivo, da izpeljano formulo za dolžino sence lahko dobro pojasnimo in uporabimo. V situacijo se moramo pač vživeti.

Na splošno se dolžina opoldanske sence  $s = d/\text{tg}(\varphi - \delta)$  pri konstantnem  $\varphi$  v času enega leta spreminja od  $d/\text{tg}(\varphi + 23,5^\circ)$  do  $d/\text{tg}(\varphi - 23,5^\circ)$ . Če npr. vzamemo  $d = 1$  m in  $\varphi = 45^\circ$ , se dolžina sence spreminja od 2,54 m (maksimum; poletni Sončev obrat) do 0,39 m (minimum; zimski Sončev obrat).

### Še tri raziskovalne naloge za doma

1. Narišite graf  $s = 1/\text{tg}(45^\circ - \delta)$ , ki prikazuje, kako se med letom spreminja opoldanska dolžina sence metrske vodoravne palice, ki meče senco na navpično ravnino v kraju z geografsko širino  $\varphi = 45^\circ$ , torej približno tako kot pri nas.

Narišite graf za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja.

2. Narišite graf  $s = -1/\text{tg}\delta$ , ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske vodoravne palice, ki meče senco na navpično ravnino v krajih na ekvatorju, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte le  $s > 0$ .

3. Narišite graf  $s = \text{tg}\delta$ , ki prikazuje spreminjanje opoldanske dolžine sence metrske vodoravne palice na navpični ravnini na severnem Zemljinem polu, za dve zaporedni leti, tj. od prvega spomladanskega enakonočja mimo drugega do tretjega spomladanskega enakonočja. Upoštevajte samo  $s > 0$ .

V vseh treh primerih dobimo krivulje, ki jih znamo pojasniti. Prva je zvezna, ostali dve pa sta pretrgani.

### Rešitve

Vse tri grafe natančno narišemo in jih smiselno komentiramo.

1. V času enega leta se dolžina sence spreminja približno od 0,4 m (minimum) do 2,5 m (maksimum). Senca je vidna vse leto. Krivulja, ki prikazuje potek opoldanske dolžine sence med letom, je zvezna, to je nepretrgana krivulja.

2. V času enega leta se dolžina sence spreminja od nedoločene vrednosti ob enakonočjih do 2,3 m (minimum) ob zimskem Sončevem obratu. Senca lahko opazujemo le v jesenskem in zimskem času, spomladi in poleti pa je ni, saj se Sonce giblje po nebu za steno.

3. V času enega leta se dolžina sence spreminja od 0 m do 0,4 m, in to spomladi in poleti; jeseni in pozimi pa sence sploh ni, saj se Sonce giblje pod obzorjem.

## Zaključek

Tu je objavljena kakšna petina mojih raziskav sence od Sonca osvetljene ravne palice. Vendar bistveno.

Z raziskovanjem sence ravne palice se lahko ukvarjamo še na veliko drugih načinov. Raziskujemo senco palice na drugih ravninah (različno naklonjenih k vodoravni in navpični ravnini, tj. na poševnih ravninah) in na raznih ploskvah (plašču valja, plašču stožca, krogli, in to na notranji ali zunanji strani telesa) pri poljubnih legah palice, itn. Ravno palico lahko obravnavamo v povezavi s sončnimi urami, ki imajo številčnice ne samo na različnih ravninah, ampak tudi na različnih ploskvah. Eno raziskovanje je tudi določitev analeme na različnih ravninah ali ploskvah za naše kraje, celo na travniku ali na prisiončnem pobočju kakega hribčka ali kuclja (teoretično in praktično iz opazovanj). S senco od Sonca osvetljene ravne palice določimo sever in se tako orientiramo, ugotovimo poldne, lahko ocenimo kotno hitrost vrtenja Zemlje, trajanje Sončevega dne, zemljepisno širino in dolžino kraja na Zemlji, itn. Veliko povsem teoretičnih (računskih) nalog o ravni palici in senci najdemo še v geometrijskih učbenikih.

Skratka, možnosti za raziskovanje takih in drugačnih senc ni videti konca. Raziskujete eno ali največ dve stvari hkrati, in to zavzeto in čim bolj poglobljeno. Morda najdete povsem svoj stil raziskovanja.

Veliko lepih doživetij, sproščenosti in uspeha pri raziskovanju senc.

*V raziskovanju sence  
sem vedno videl  
nenapisano in skrito  
misel o prizadevanju.  
1981*

## Literatura

(Moji prispevki)

- [1] *Opazuj in izmeri I do IV*, Pionir **2, 4, 6, 8** (1981/82), MK, Ljubljana.
- [2] *Astronomček Tonček*, MK, Ljubljana 1985.
- [3] *Opazujem Sonce in Luno*, MK, Ljubljana 1987
- [4] *Hevreka!*, Proteus **59** (1997), 456, Ljubljana.
- [5] *Senca*, Obzornik za mat. in fiz. **39** (1992), 178, Ljubljana.
- [6] *Enačba sence*, Matematika v šoli **3**, 237 (1995), Ljubljana.
- [7] *Senca gnomona*, Spika **2** (1994), 541, Ljubljana.
- [8] *Kako do enačbe sence*, Presek **29** (2001/02), 3, 144, Ljubljana.
- [9] *Ukvarjanje s senco*, Presekova knjižnica **39**, DMFAS, Ljubljana 2003 in vsa tam v zvezi s senco citirana literatura.
- [10] Spisi o senci in sončnih urah, Splet Knjižnice A. T. Linhart, Radovljica,

rubrika Domoznanstvo.

- [11] *Opoldanska senca*, e-knjižica (2017).
- [12] *Enačba sence ravne palice v treh ravninah*, Matematika v šoli **23**, 2/24 (2017), Zavod RS za šolstvo, Ljubljana in Astronomi v Kmici **20./28**, Murska Sobota 2017.
- [13] *Astronomska opazovanja*, Presekova knjižnica **3**, DMFAS, Ljubljana 1978.
- [14] *Kaj lahko počnemo s senco*, Tempus - razvoj začetnega naravoslovja, Univerza v Ljubljani, Pedagoška fakulteta, Ljubljana 1993.
- [15] *Osmica*, Presek **27**, (1999/2000), 4/206.

⌘