

Ponovitev preizkusa znanja v 3d iz trigonometrije, 10. 5. 2012
(vse naloge so enakovredne)

1. Natančno izračunajte $\log_2 \frac{\sin 720^\circ + \cos 855^\circ}{(\cos 450^\circ - \sin 585^\circ) \cdot \sin 675^\circ}$.

2. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $2 \sin 3(x - \frac{\pi}{3})$.

3. Poenostavite izraz $\left(\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan 2x} \right)^2 + \sin^2 2x$.

4. Dani sta premici $y = 2x + 4$ in $y = -3x + 6$.

a) Izračunajte presčišče in kot med njima.

b) Obe narišite v koordinatni sistem in izračunajte ploščino trikotnika, ki ga omejujeta obe premici in abscisna os.

5. Zapišite kot produkt $\cos 36^\circ + \sin 24^\circ - \sin 48^\circ$

6. Rešite enačbo $\cos(x + \frac{\pi}{3}) = \cos x$.

1. Natančno izračunajte $\log_2 \frac{\sin 720^\circ + \cos 855^\circ}{(\cos 450^\circ - \sin 585^\circ) \cdot \sin 675^\circ}$.

$$\begin{aligned} & \log_2 \frac{\sin(720^\circ - 720^\circ) + \cos(855^\circ - 720^\circ)}{(\cos(450^\circ - 360^\circ) - \sin(585^\circ - 360^\circ)) \cdot \sin(675^\circ - 360^\circ)} = \\ & = \log_2 \frac{\sin 0^\circ + \cos 135^\circ}{(\cos 90^\circ - \sin 225^\circ) \cdot \sin 315^\circ} = \log_2 \frac{\cos(180^\circ - 45^\circ)}{-\sin(180^\circ + 45^\circ) \cdot \sin(360^\circ - 45^\circ)} = \\ & = \log_2 \frac{-\cos 45^\circ}{\sin 45^\circ \cdot (-\sin 45^\circ)} = \log_2 \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \log_2 \frac{-\frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{2}{4}} = \log_2 \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{2} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

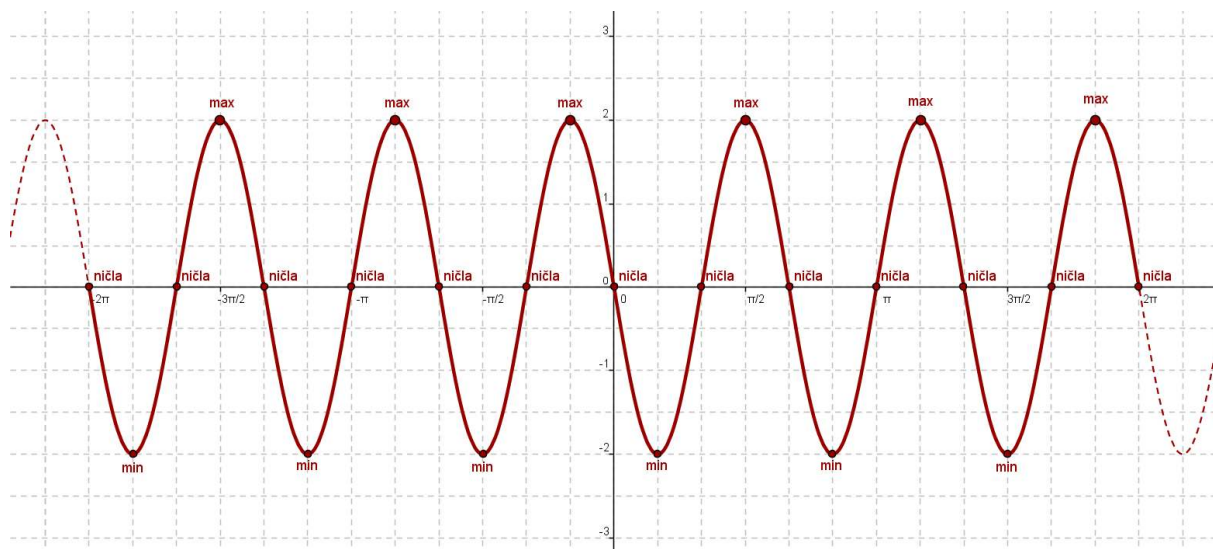
2. Na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$ narišite graf funkcije $2 \sin 3(x - \frac{\pi}{3})$.

Graf najlaže narišemo, če poiščemo ekstreme, n.pr. maksimume (v tem primeru 2):

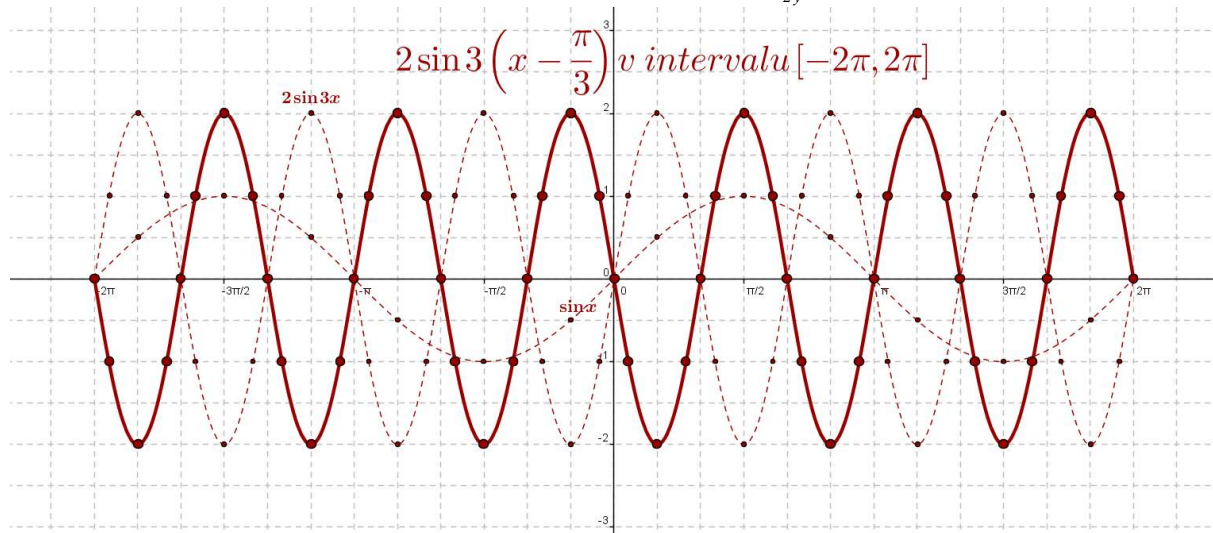
$$2 \sin 3(x - \frac{\pi}{3}) = 2 \Rightarrow \sin 3(x - \frac{\pi}{3}) = 1 \Rightarrow 3(x - \frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{2} + k\pi_{k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k \frac{\pi}{3}_{k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} + k \frac{\pi}{3}_{k \in \mathbb{Z}} \Rightarrow \underline{\underline{x_{\max} = \frac{\pi}{2} + k \frac{\pi}{3}_{k \in \mathbb{Z}}}}$$

V koordinatnem sistemu označimo točke, kjer funkcija doseže 2, vmes doseže vrednost -2 , med obema pa so ničle. Omejimo se na interval $[-2\pi, 2\pi]$



Graf pa lahko rišemo tudi s transformacijami: $\sin x \xrightarrow[R_{2,y}]{R_x} 2 \sin 3x \xrightarrow[P_{x+\pi/3}]{x+\pi/3} 2 \sin 3(x - \frac{\pi}{3})$



3. Poenostavite izraz $\left(\frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan 2x}\right)^2 + \sin^2 2x$.

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x - 1}{\tan 2x}\right)^2 + \sin^2 2x = \left(\frac{1 + \sin 2x - 1}{\tan 2x}\right)^2 + \sin^2 2x = \\ & = \left(\frac{\sin 2x}{\frac{\sin 2x}{\cos 2x}}\right)^2 + \sin^2 2x = \left(\frac{\cos 2x \sin 2x}{\sin 2x}\right)^2 + \sin^2 2x = \cos^2 2x + \sin^2 2x = \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

4. Dani sta premici $y = 2x + 4$ in $y = -3x + 6$.

a) Izračunajte presečišče in kot med njima.

$$\begin{aligned} \text{Izenačimo } 2x + 4 &= -3x + 6 \Rightarrow 5x = 2 \Rightarrow \\ x &= \frac{2}{5} = 0,4 \Rightarrow y = 2 \cdot \frac{2}{5} + 4 \Rightarrow y = \frac{24}{5} = 4,8 \end{aligned}$$

Kot med njima

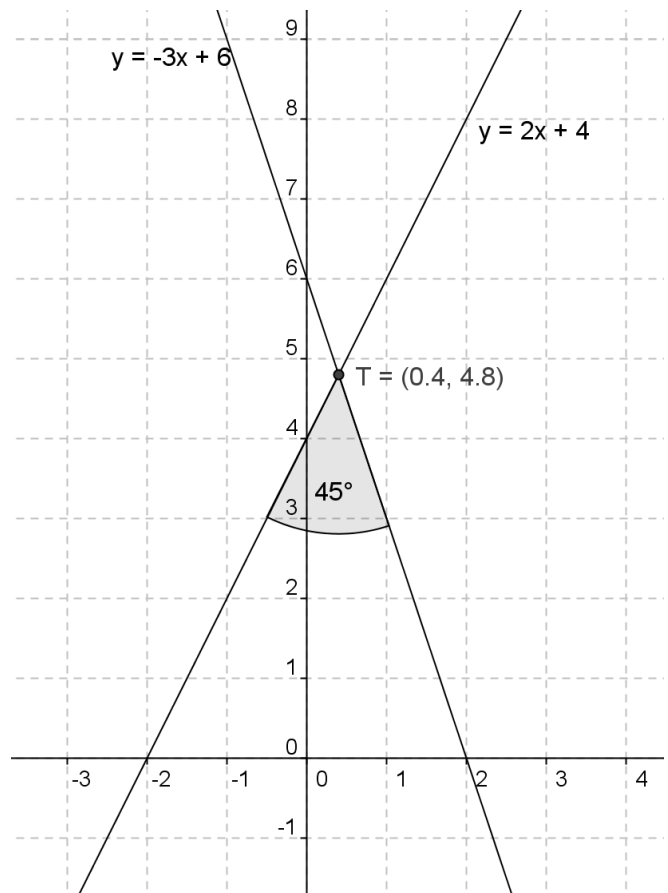
$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = \left| \frac{-3 - 2}{1 - 6} \right| = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 45^\circ}}$$

b) Obe narišite v koordinatni sistem in izračunajte ploščino trikotnika, ki ga omejujeta obe premici in abscisna os.

Premici sekata abscisno os pri $x_1 = -2$ ($2x+4=0$) in pri $x_2 = 2$ ($-3x+6=0$). Osnovnica trikotnika je razdalja med presečiščema $|x_2 - x_1| = 4$.

Višina trikotnika je ordinata presečišča = 4,8.

$$S = \frac{4 \cdot 4,8}{2} = \underline{\underline{9,6}}$$



5. Zapišite kot produkt $\cos 36^\circ + \sin 24^\circ - \sin 48^\circ$

Uporabimo faktorizacijo razlike sinusov: $\sin x - \sin y = 2 \sin \frac{x-y}{2} \cos \frac{x+y}{2}$

$$\begin{aligned}\cos 36^\circ + \sin 24^\circ - \sin 48^\circ &= \cos 36^\circ + 2 \sin \frac{24^\circ - 48^\circ}{2} \cos \frac{24^\circ + 48^\circ}{2} = \cos 36^\circ + 2 \sin(-12^\circ) \cos 36^\circ = \\ &= \cos 36^\circ - 2 \sin 12^\circ \cos 36^\circ\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Izpostavimo } 2 \cos 36^\circ \text{ in pretvorimo } \frac{1}{2} \text{ v } \sin 30^\circ: \quad 2 \cos 36^\circ \left(\frac{1}{2} - \sin 12^\circ \right) = \\ = 2 \cos 36^\circ (\sin 30^\circ - \sin 12^\circ)\end{aligned}$$

Še enkrat uporabimo isti obrazec: $2 \cos 36^\circ (\sin 30^\circ - \sin 12^\circ) =$

$$= 2 \cos 36^\circ \left(2 \sin \frac{30^\circ - 12^\circ}{2} \cos \frac{30^\circ + 12^\circ}{2} \right) = 4 \cos 36^\circ \sin(-9^\circ) \cos 21^\circ = \underline{\underline{-4 \sin 9^\circ \cos 21^\circ \cos 36^\circ}}$$

6. Rešite enačbo $\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x$.

Uporabimo adicijski izrek za kosinus: $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin y \sin x$

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \Rightarrow \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \cos x \Rightarrow \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = 2 \cos x \Rightarrow -\sqrt{3} \sin x = \cos x / : \cos x \Rightarrow -\sqrt{3} \tan x = 1 \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{x = -\frac{\pi}{6} + k\pi_{k \in \mathbb{Z}}}}$$