Preizkus znanja v 3d iz stožnic in grafa eksponentne funkcije, 16.1. 2012
(vse naloge so enakovredne)

1. Dana je hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$. Zapiši enačbo elipse, ki ima temeni v goriščih, gorišči pa v temenih dane hiperbole. Izračunaj presečišči in ju nariši.

Rešitev: Najprej ugotovimo, kje sta temeni in gorišči hiperbole.

$$x^2 - 4y^2 = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \underline{a_H = 2, b_H = 1} \Rightarrow {e_H}^2 = {a_H}^2 + {b_H}^2 = 5 \Rightarrow \underline{e_H = \sqrt{5}}$$

Iz podatkov sledi $\underline{a_E = e_H = \sqrt{5}}$ in $e_E = a_H = 2$. Iz tega lahko izračunamo še drugo os elipse $\quad {e_E}^2 = {a_E}^2 - {b_E}^2 \Rightarrow {b_E}^2 = {a_E}^2 - {e_E}^2 = 5 - 4 = 1 \Rightarrow \underline{b_E = 1}$

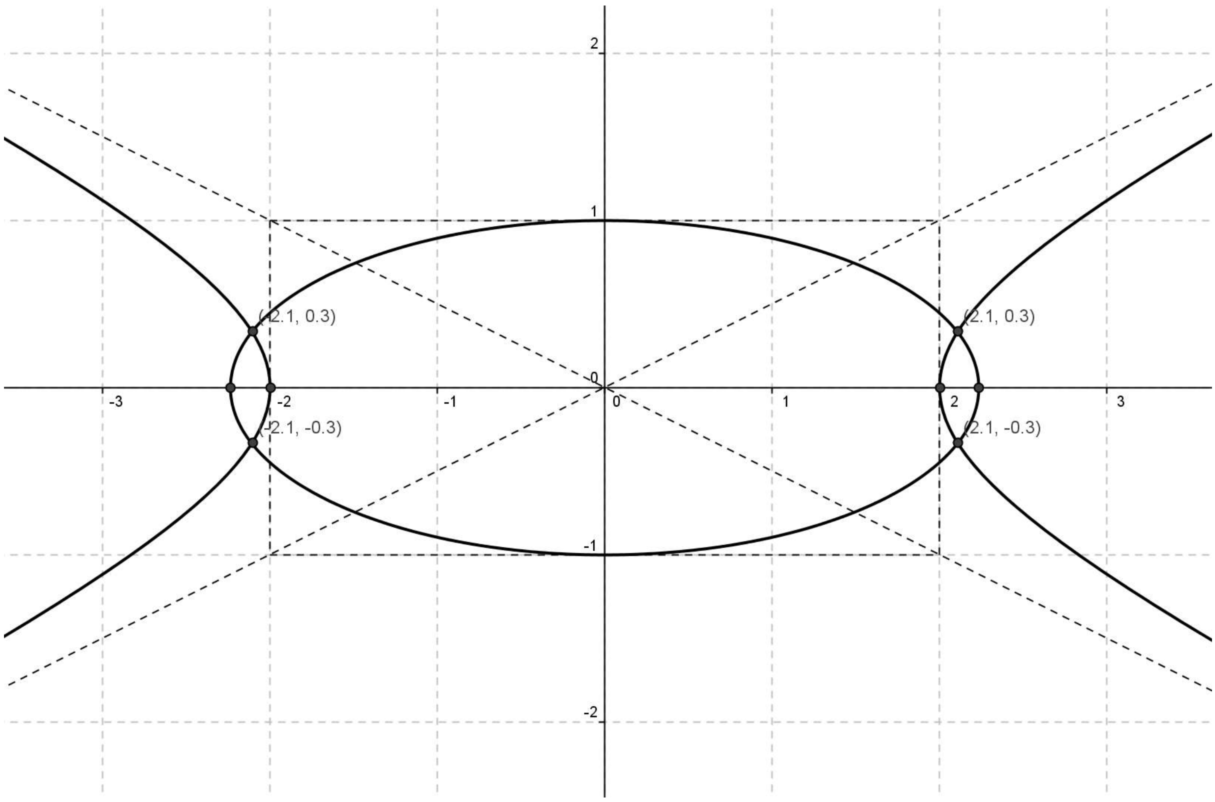
Enačba elipse se glasi $\quad \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{1} = 1 \Rightarrow \underline{\underline{x^2 - 5y^2 = 5.}}$

Še presečišči. Iz hiperbole dobimo $x^2 = 4 + 4y^2$, iz elipse pa $x^2 = 5 - 5y^2$.

Ko izenačimo, dobimo enačbo $\quad 4 + 4y^2 = 5 - 5y^2 \Rightarrow 9y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm\frac{1}{3}$.

Vstavimo v eno od enačb $\quad x^2 = 4 + \frac{4}{9} = \frac{40}{9} \Rightarrow x = \pm\frac{2}{3}\sqrt{10}$.

Dobili smo štiri presečišča $\underline{\underline{T_1\left(-\underbrace{\tfrac{2}{3}\sqrt{10}}_{\approx -2,1}, \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\approx 0,3}\right), T_2\left(-\underbrace{\tfrac{2}{3}\sqrt{10}}_{\approx -2,1}, -\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\approx -0,3}\right), T_3\left(\underbrace{\tfrac{2}{3}\sqrt{10}}_{\approx 2,1}, \underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\approx 0,3}\right) \text{in } T_4\left(\underbrace{\tfrac{2}{3}\sqrt{10}}_{\approx 2,1}, -\underbrace{\tfrac{1}{3}}_{\approx -0,3}\right)}}$



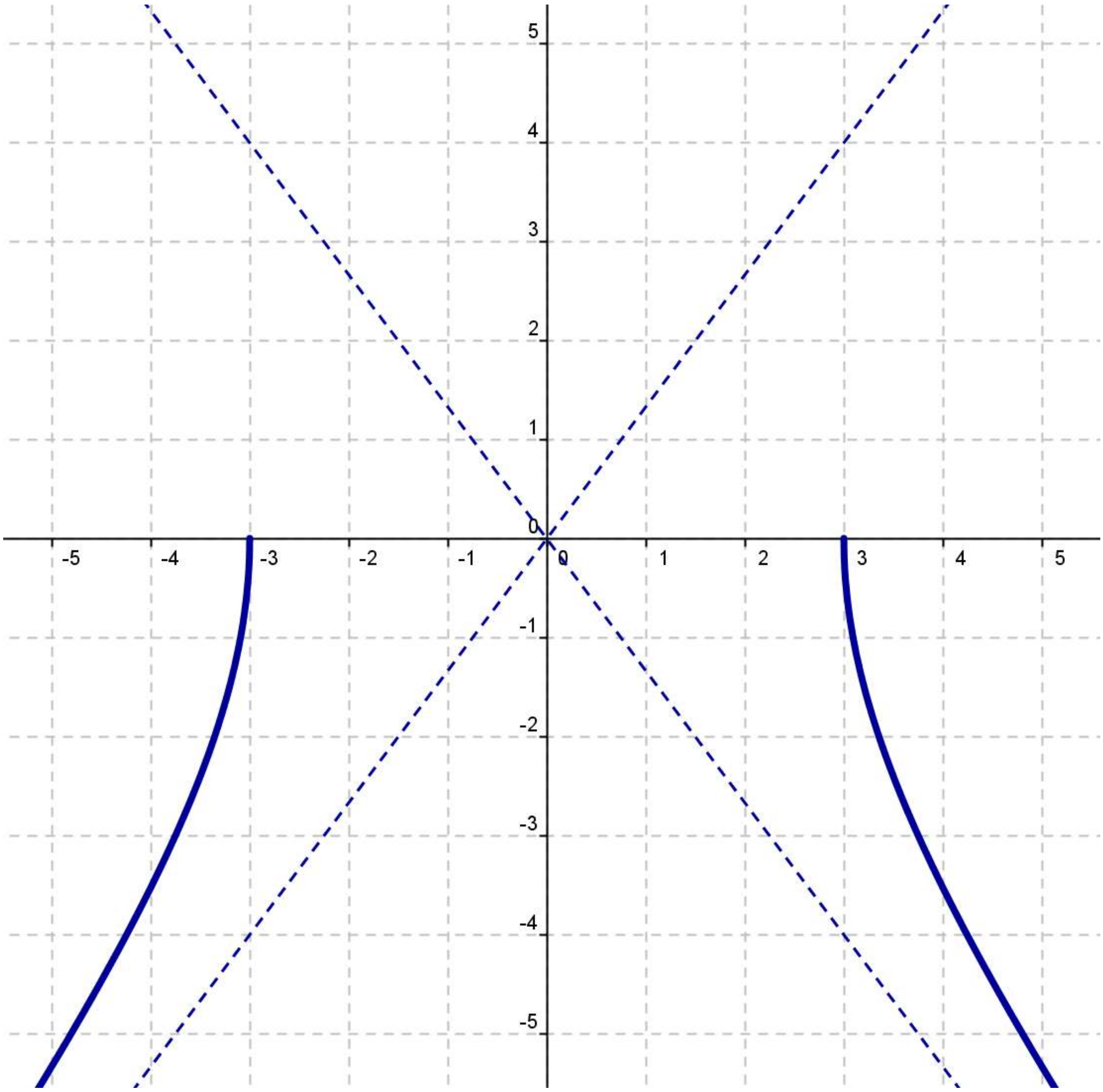
2. Zapišite funkcijo, katere graf je narisan spodaj.

Izhajamo iz hiperbole. Iz grafa in asimptot preberemo vrednost obeh osi in zapišemo enačbo hiperbole v središčni legi.

$$a = 3,\ b = 4 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Nato eksplicitno izrazimo y, pri čemer vzamemo negativno vrednost korena$_{\text{spodnji veji hiperbole}}$.

$$a = 3,\ b = 4 \Rightarrow \frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{9} - 1 = \frac{x^2 - 9}{9} \Rightarrow y^2 = \frac{16\left(x^2 - 9\right)}{9} \Rightarrow \underline{\underline{y = -\tfrac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9}}}$$



3. Dana je krivulja $y^2 = 2x + 2$. Narišite jo, jo prezrcalite čez simetralo lihih kvadrantov, zapišite njeno enačbo in izračunajte presečišči.

Čez simetralo lihih kvadrantov jo prezrcalimo tako, da v zapisu zamenjamo x in y.

$y^2 = 2x + 2 \xrightarrow{Z_{x=y}} x^2 = 2y + 2 \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{2}x^2 - 1}}$

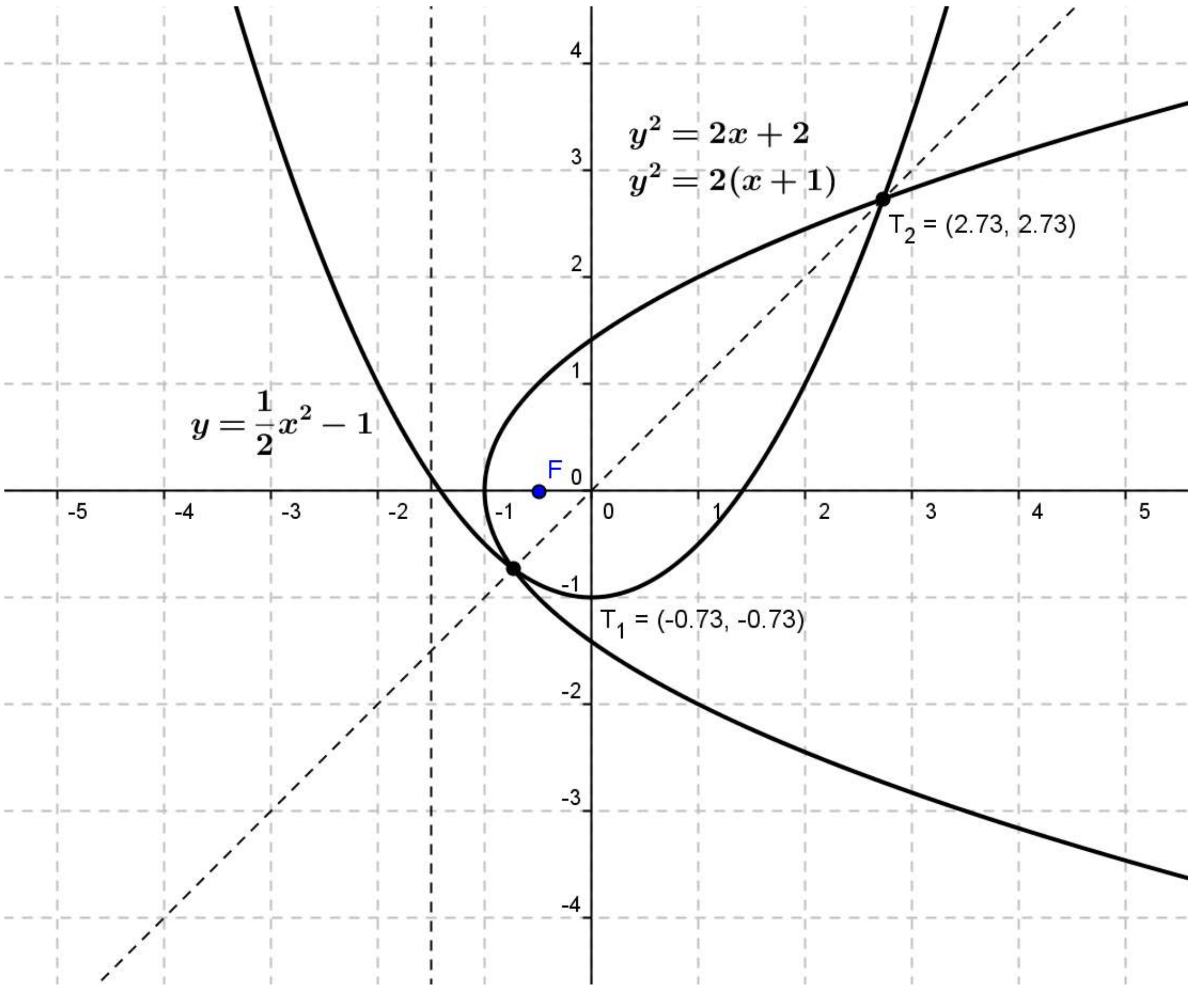
Poiščemo še presečišča: $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$ vstavimo v $y^2 = 2x + 2$

$\left(\frac{1}{2}x^2 - 1\right)^2 = 2x + 2 \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 - x^2 + 1 = 2x + 2 /\cdot 4 \Rightarrow x^4 - 4x^2 - 8x - 4 = 0 \Rightarrow$

Rešitve se dobijo z bisekcijo, in sicer $x_1 = -0{,}73$ in $x_2 = 2{,}73$.

Imamo torej presečišči: $\underline{\underline{T_1(-0.73, -0.73) \text{ in } T_2(2.73,\ 2.73)}}$

Parabola $y^2 = 2x + 2 = 2(x+1)$ je parabola $y^2 = 2x$, premaknjena za eno v levo.



4. Določite tak a, da se bo premica $y=(a+10)x-3a$ dotikala parabole $y=6x^2$.

Premico in parabolo sekamo in postavimo pogoj za dotikanje, diskriminanta je enaka nič.

$$(a+10)x-3a=6x^2 \Rightarrow 6x^2-(a+10)x+3a=0 \Rightarrow D=(-(a+10))^2-72a=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+20a+100-72a=0 \Rightarrow a^2-52a+100=0 \Rightarrow (a-2)(a-50)=0$$

$\underline{\underline{a_1=2 \text{ in } a_2=50}}$ Dotikališči:$_{\text{nista zahtevani}}$ $a=2 \Rightarrow 6x^2-12x+6=0 \Rightarrow 6(x-1)^2 \Rightarrow \underline{x_1=1,\ y_1=6}$

$$a=50 \Rightarrow 6x^2-60x+150=0 \Rightarrow 6\left(x^2-10x+25\right) \Rightarrow \underline{x_2=5,\ y_2=150}$$

5. Ugotovite imeni krivulj, ki ju določata enačbi, izračunajte presečišča in rešitve preverite tako, da narišete obe krivulji v isti koordinatni sistem.

$2x^2+5y^2+7x-4y-9=0, \quad y-x+1=0$

Prva krivulja je zelo verjetno elipsa, druga pa je premica.

$$2x^2+5y^2+7x-4y-9=0 \Rightarrow 2\left(x^2+\tfrac{7}{2}x+\tfrac{49}{16}-\tfrac{49}{16}\right)+5\left(y^2-\tfrac{4}{5}y+\tfrac{4}{25}-\tfrac{4}{25}\right)-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2+5\left(y-\tfrac{2}{5}\right)^2-\tfrac{49}{8}-\tfrac{4}{5}-9=0 \Rightarrow 2\left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2+5\left(y-\tfrac{2}{5}\right)^2-\tfrac{245}{40}-\tfrac{32}{40}-\tfrac{360}{40}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2+5\left(y-\tfrac{2}{5}\right)^2-\tfrac{637}{40}=0 \Rightarrow 2\left(x+\tfrac{7}{4}\right)^2+5\left(y-\tfrac{2}{5}\right)^2=\tfrac{637}{40} \Big/ : \tfrac{637}{40} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{\left(x+\frac{7}{4}\right)^2}{\frac{637}{80}}+\frac{5\left(y-\frac{2}{5}\right)^2}{\frac{637}{200}}=1}}$$

E: $S(-1.75,\ 0.40),\ a=\sqrt{\tfrac{637}{80}}=2{,}82 \Rightarrow$ temeni $A\left(-4.75_{-1,75-2,82},\ 0.40\right),\ A\left(-1.07_{-1,75+2,82},\ 0.40\right)$

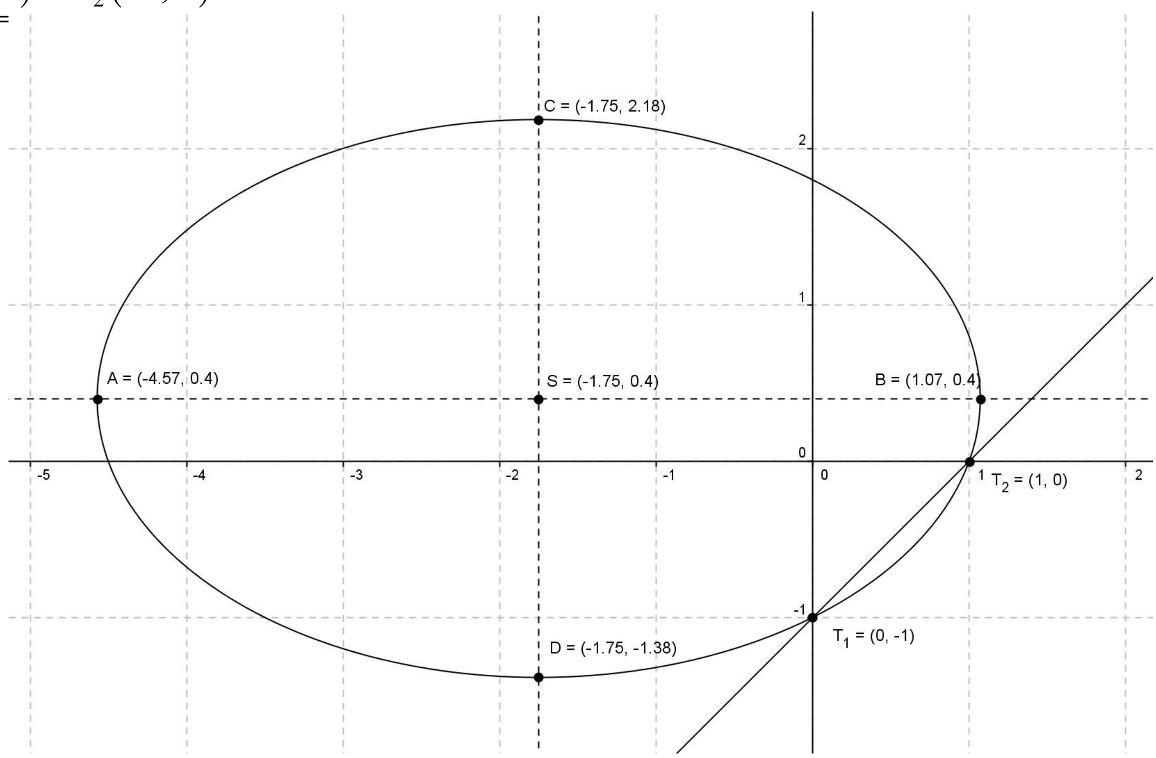
$b=\sqrt{\tfrac{637}{200}}=1{,}78 \Rightarrow$ temeni $C\left(-1.75,\ 2.18_{0,40+1,78}\right),\ D\left(-1.75, -1.38_{0,40-1,78}\right)$

Presečišči: $y=x-1$ vstavimo v $2x^2+5y^2+7x-4y-9=0$

$$2x^2+5(x-1)^2+7x-4(x-1)-9=0 \Rightarrow 2x^2+5x^2-10x+5+7x-4x+4-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2-7x=0 \Rightarrow 7x(x-1)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=1 \Rightarrow y_1=0-1=-1,\ y_2=1-1=0$$

$\underline{\underline{T_1}}(0,-1)$ in $T_2(-1,\ 0)$



6. Grafično rešite enačbo $\left|2^{x-1}-3\right| = 2x-3$ in preveri rešitev.

Rešitev: Graf funkcije na levi strani enačbe narišemo tako, da premaknemo graf funkcije 2^x za eno na desno in za tri navzdol in nato preslikamo del grafa pod x osjo čez x os. Dobljeni graf$_{\text{modra črtkana}}$ presekamo s premico $2x-3_{\text{rdeča črtkana}}$ in odčitamo abscisi obeh presečišč.

Dobljeni rešitvi $x_1 = 2$ in $x_2 = 4$ še preizkusimo:

$\underline{\underline{x_1 = 2}}$ $\quad L = \left|2^{2-1}-3\right| = \left|-1\right| = 1 = D = 4-3 = 1$

$\underline{\underline{x_4 = 4}}$ $\quad L = \left|2^{4-1}-3\right| = \left|8-3\right| = 5 = D = 8-3 = 5$