Preizkus znanja v 3d iz stožnic in grafa eksponentne funkcije, 11.1.2012

(vse naloge so enakovredne)

1. Izračunajte razdaljo med presečiščema hiperbole $9x^2 - y^2 = 144$ in premice $x - y + 4 = 0$.

Rešitev: Najprej poiščemo presečišči. V enačbo hiperbole vstavimo $y = x + 4$.

$9x^2 - (x+4)^2 = 144 \Rightarrow 9x^2 - x^2 - 8x - 16 = 144 \Rightarrow 8x^2 - 8x - 160 = 0 /{:}8 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - x - 20 = 0 \Rightarrow (x-5)(x+4) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x_1 = 5,\ x_2 = -4 \text{ in } y_1 = 9,\ y_2 = 0.}}$

Razdalja med presečiščema $A(5, 9)$ in $B(-4, 0)$ je $d(AB) = \sqrt{9^2 + 9^2} = \underline{\underline{9\sqrt{2}}}.$

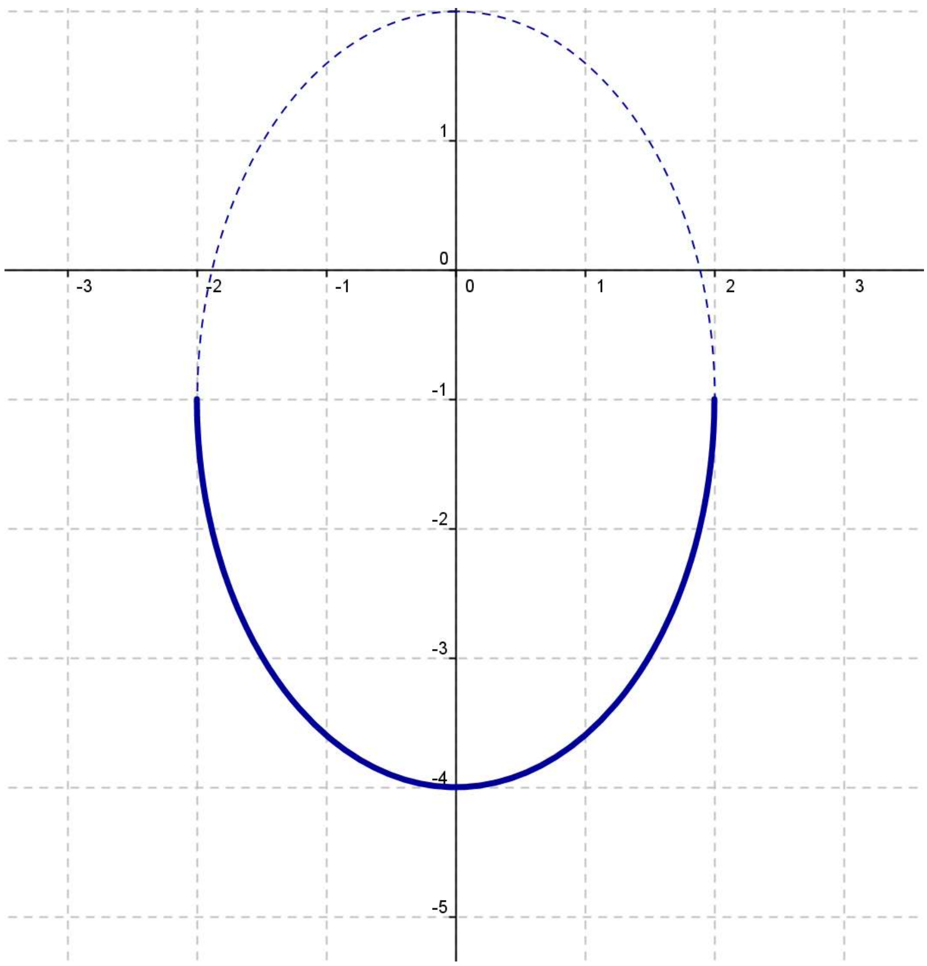
2. Zapišite funkcijo, katere graf je narisan spodaj.

Rešitev: Najprej napišemo enačbo ustrezne elipse.

$S(0,-1),\ a = 2,\ b = 3 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

Da bi dobili zapis ustrezne funkcije, eksplicitno izrazimo y in vzamemo negativno vrednost korena.

$\dfrac{(y+1)^2}{9} = 1 - \dfrac{x^2}{4} = \dfrac{4 - x^2}{4} \Rightarrow (y+1)^2 = \dfrac{9}{4}(4 - x^2) \Rightarrow \underline{\underline{y = -\tfrac{3}{2}\sqrt{4 - x^2} - 1}}$



3. Dana je krivulja $y^2 = 2x$. Narišite jo, jo prezrcalite čez simetralo sodih kvadrantov, zapišite njeno enačbo in izračunajte presečišči.

Rešitev: V zapisu zamenjamo x in y in prezrcalimo preko x osi (pomnožimo z -1).

$$x^2 = 2y \Rightarrow y = \tfrac{1}{2}x^2 \Rightarrow \underline{\underline{y = -\tfrac{1}{2}x^2}}$$

Presečišče $y = -\frac{1}{2}x^2$ vstavimo v $y^2 = 2x \Rightarrow \left(-\frac{1}{2}x^2\right)^2 = 2x \Rightarrow \frac{1}{4}x^4 = 2x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 = 8x \Rightarrow x\left(x^3 - 8\right) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ in $x^3 = 8 \Rightarrow x_2 = 2.$

Poiščemo še y: $y_1 = -\frac{1}{2}0^2 = 0$ in $y_2 = -\frac{1}{2}2^2 = -2.$ Presečišči sta $\underline{\underline{T_1(0, 0) \text{ in } T_2(2, -2)}}.$

4. Določite parameter p, da bo premica $y = -2x - 2$ tangenta parabole $y^2 = 2px$ in obe narišite v koordinatni sistem. Izračunajte dotikališče, označite gorišče parabole in vodnico.

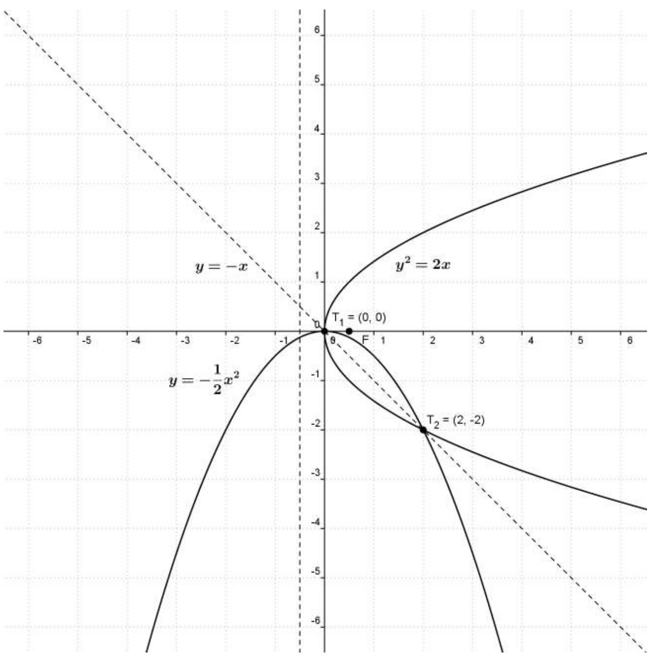
Rešitev: Premico in parabolo sekamo in zahtevamo eno samo rešitev = diskriminanta enačbe mora biti enaka nič.

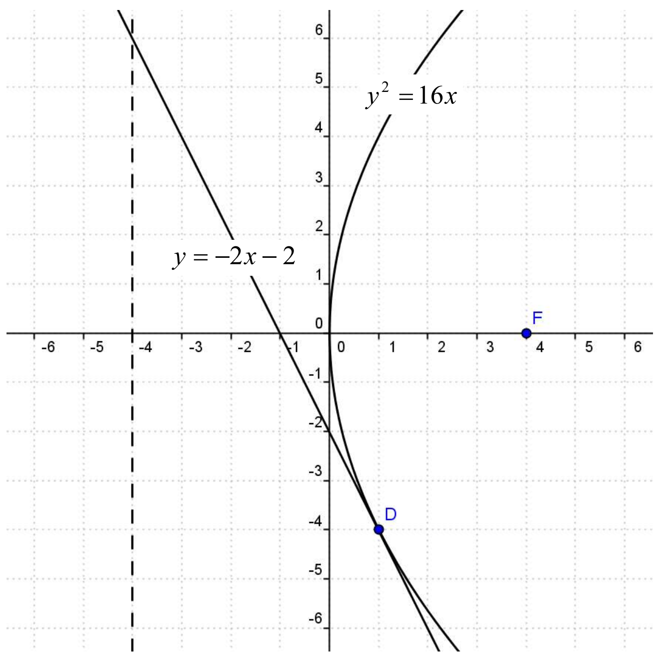
$$(-2x - 2)^2 = 2px \Rightarrow 4x^2 + 8x + 4 - 2px = 0 \Rightarrow 2x^2 + 4x - px + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 + (4 - p)x + 2 = 0$$

$$D = 0 \Rightarrow (4 - p)^2 - 16 = 0 \Rightarrow 4 - p = \pm\sqrt{16} = \pm 4 \Rightarrow p = 0_{\substack{\text{parabola} \\ \text{ne obstaja}}} \text{ in } \underline{\underline{p = 8}}$$

Dotikališče: $2x^2 + (4 - 8)x + 2 = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Rightarrow (x - 1)^2 = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\underline{\Rightarrow x = 1 \text{ in } y = -4_{\substack{\text{vstavili smo v enačbo} \\ \text{premice ne v parabolo}}}}}$$





5. Ugotovite imeni krivulj, ki ju določata enačbi, izračunajte presečišča in rešitve preverite tako, da narišete obe krivulji v isti koordinatni sistem.

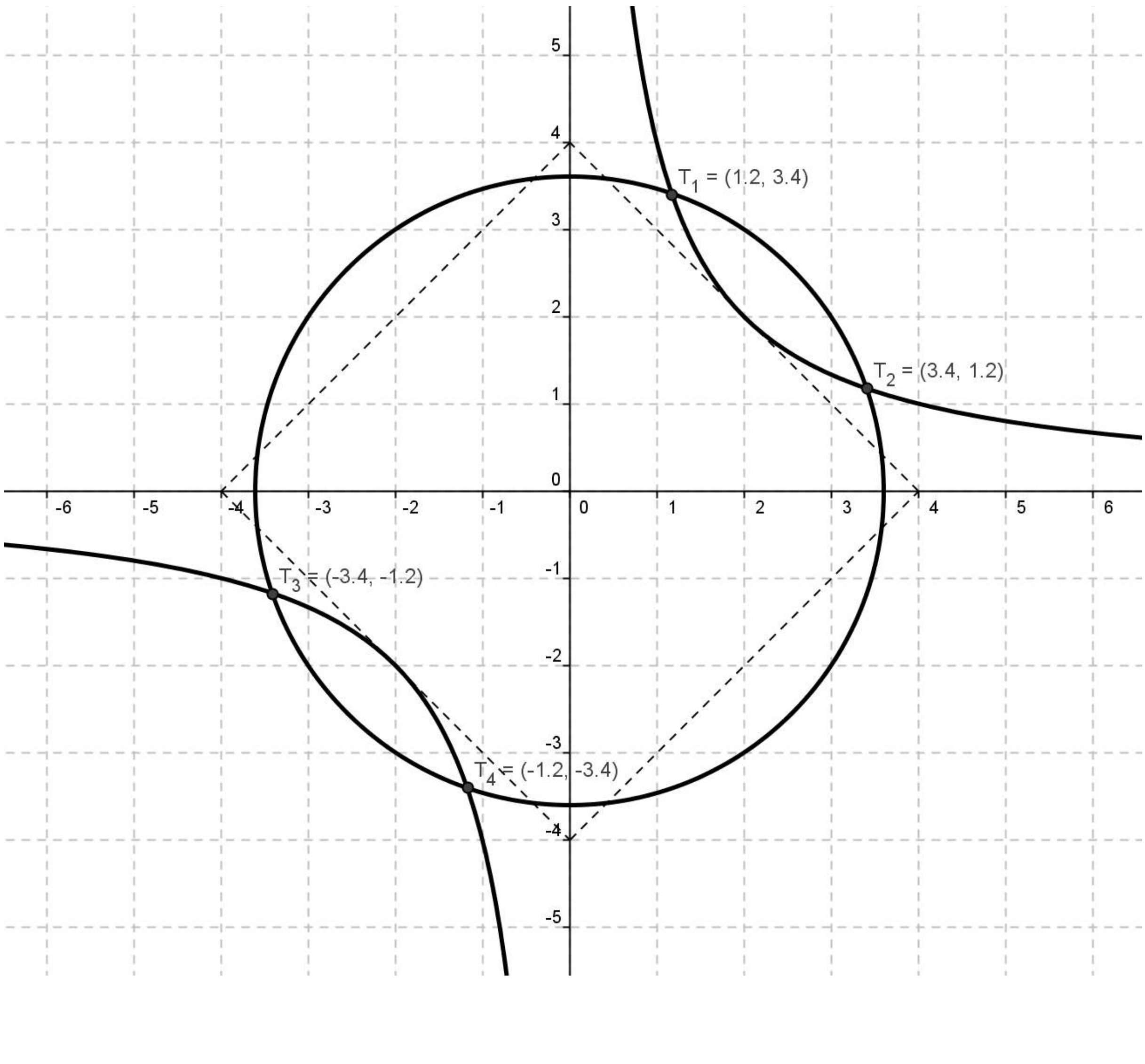
$xy = 4, \quad x^2 + y^2 = 13$ da bi se lepo izšla presečišča, bi moral biti podatek 17

Rešitev: Prva krivulja je enakoosa hiperbola, zavrtena za 45° $[S(0,0),\ a = b = 2\sqrt{2}]$, druga pa je krožnica s središčem $S(0,\ 0)$ in polmerom $r = \sqrt{13}$.

Presečišča: $x = \dfrac{4}{y}$ vstavimo v $x^2 + y^2 = 13 \Rightarrow \dfrac{16}{y^2} + y^2 = 13 \,/\cdot y^2 \Rightarrow 16 + y^4 = 13y^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y^4 - 13y^2 + 16 = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 64}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{105}}{2} \Rightarrow y_{1,2,3,4} = \pm\sqrt{\frac{13 \pm \sqrt{105}}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{array}{ll} y_1 = 3{,}4 \text{ in } x_1 = \frac{4}{y_1} = 1{,}2 & y_2 = 1{,}2 \text{ in } x_2 = \frac{4}{y_2} = 3{,}4 \\ y_3 = -3{,}4 \text{ in } x_3 = \frac{4}{y_3} = -1{,}2 & y_4 = -1{,}2 \text{ in } x_4 = \frac{4}{y_4} = -3{,}4 \end{array}$$



6. Grafično rešite enačbo $\left|2^{x-1}-3\right| = x+1$.

Rešitev: Graf funkcije na levi strani enačbe narišemo tako, da premaknemo graf funkcije 2^x za eno na desno in za tri navzdol in nato preslikamo del grafa pod x osjo čez x os. Dobljeni graf$_{\text{modra črtkana}}$ presekamo s premico $x+1_{\text{rdeča črtkana}}$ in odčitamo abscisi obeh presečišč.

Dobljeni rešitvi $x_1 = 1$ in $x_2 = 4$ še preizkusimo:

$\underline{\underline{x_1 = 1}}$ $\quad L = \left|2^{1-1}-3\right| = \left|-2\right| = 2 = D = 1+1$

$\underline{\underline{x_4 = 4}}$ $\quad L = \left|2^{4-1}-3\right| = \left|8-3\right| = 5 = D = 4+1$