3d, 8.11.11

Preizkus znanja: polinomi, racionalna funkcija, krožnica
Vsaka naloga je vredna 8 točk.

1. Polinom $p(x)=x^2+bx+c$ daje pri deljenju s polinomom $q(x)=x+2$ ostanek 3, pri deljenju s polinomom $h(x)=x+1$ pa ostanek 1. Poiščite b in c.

Rešitev: Ker sta polinoma $q(x)$ in $h(x)$ linearna, lahko delimo po Hornerju.

Horner za -2:

	1	b	c
-2		-2	$4-2b$
	1	$-2+b$	$\boxed{4-2b+c=3}$

Horner za -1:

	1	b	c
-1		-1	$1-b$
	1	$-1+b$	$\boxed{1-b+c=1}$

$\Rightarrow \begin{array}{l} -2b+c=-1 \\ -b+c=0 \Rightarrow b=c \end{array} \xrightarrow{\text{vstavimo}}$

$-2c+c=-1 \Rightarrow c=1, b=1$ $\quad \boldsymbol{p(x)=x^2+x+1}$

2. Zapišite polinom tretje stopnje z realnimi koeficienti, ki ima ničli 2 in $1-i$ ter v točki -1 vrednost 15.

Rešitev: Ker ima polinom kompleksno ničlo $1-i$, ima tudi konjugirano kompleksno ničlo $1+i$. Uporabimo faktorizirani (ničelni zapis):

$p(x)=a(x-2)(x-(1-i))(x-(1+i))=a(x-2)(x-1+i)(x-1-i)=a(x-2)\left((x-1)^2-i^2\right)=$
$=a(x-2)(x^2-2x+2)=a(x^3-2x^2+2x-2x^2+4x-4)=a(x^3-4x^2+6x-4)$

Velja $\quad p(-1)=15 \Rightarrow a\left((-1)^3-4(-1)^2+6(-1)-4\right)=15 \Rightarrow a(-1-4-6-4)=15 \Rightarrow -15a=15 \Rightarrow$
$a=-1 \Rightarrow p(x)=-x^3+4x^2-6x+4$

3. Zapišite definicijsko območje funkcije $f(x)=\sqrt{-3x^3-11x^2-5x+3}$

Rešitev: Funkcija je definirana pri tistih x, pri katerih je izraz po korenom nenegativen. Za rešitev neenačbe $-3x^3-11x^2-5x+3\geq 0$ potrebujemo ničle polinoma, ki jih dobimo s preizkušanjem: 1 ni ničla, -1 pa je (razlika med lihimi in sodimi koeficienti je 0).

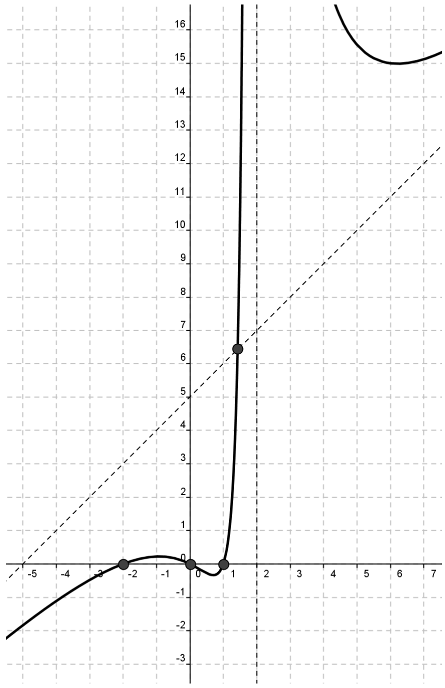
Horner za -1:

	-3	-11	-5	3
-1		3	8	-3
	-3	-8	3	$\boxed{0}$

Nadaljujemo z iskanjem ničle polinoma $-3x^2-8x+3 \xrightarrow{\text{po Vietovem}}$
$-3x^2-9x+x+3=-3x(x+3)+(x+3)=(x+3)(-3x+1)$
Imamo tri ničle: $x_1=-3, x_2=-1$ in $x_3=\frac{1}{3}$. Pri vsaki spremeni polinom svojo vrednost, saj so ničle prve stopnje. Začetna vrednost polinoma $-3x^3-11x^2-5x+3$ je 3, torej je pozitiven med ničlama -1 in $\frac{1}{3}$ in zato pozitiven tudi na levo od ničle -3.

Odgovor: $\quad D_f=(-\infty,-3]\cup\left[-1,\frac{1}{3}\right]$

4. *Za dano funkcijo zapišite ničle in pole, asimptoto, presečišče grafa z ordinatno osjo in z asimptoto ter narišite njen graf :* $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+4}$.



Rešitev: $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-2x}{x^2-4x+4}=\dfrac{x(x^2+x-2)}{(x-2)^2}=\dfrac{x(x+2)(x-1)}{(x-2)^2}$

Začetna vrednost $\underline{f(0)=0}$. Ničle so $\underline{-2, 0 \text{ in } 1}$. Pol je pri $\underline{2_{2x}}$.

Asimptoto in presečišče z njo dobimo z deljenjem.

$$\begin{array}{l}
(x^3+x^2-2x):(x^2-4x+4)=x+5 \xrightarrow{\text{asimptota}} \underline{\underline{y=x+5}} \\
\underline{\pm x^3 \mp 4x^2 \pm 4x} \\
\quad 5x^2-6x \\
\quad \underline{\pm 5x^2 \mp 20x \pm 20} \\
\qquad 14x-20=0 \xrightarrow{\text{presečišče}} \underline{x=\frac{20}{14}=\frac{10}{7}}
\end{array}$$

5. *Napišite enačbo krožnice, ki gre skozi točki $A(2,3)$ in $B(5,2)$ njeno središče pa leži na abscisni osi.*

Rešitev: Enačba krožnice s središčem na abscisni osi ($q=0$) se glasi $(x-p)^2+y^2=r^2$.

Če vstavimo vanjo obe točki, bomo dobili sistem enačb z dvema neznankama p in r.

$(2-p)^2+9=r^2$ Obe enačbi odštejemo in dobimo $(2-p)^2-(5-p)^2+9-4=0 \Rightarrow$

$(5-p)^2+4=r^2$ $\Rightarrow 4-4p+p^2-25+10p-p^2+5=0 \Rightarrow 6p=16 \Rightarrow \underline{p=\frac{8}{3}}$

Za izračun polmera vstavimo p v eno od enačb $(5-\frac{8}{3})^2+4=r^2 \Rightarrow r^2=(\frac{15}{3}-\frac{8}{3})^2+4=\frac{49}{9}+4 \Rightarrow \underline{r^2=\frac{85}{9}}$

$\underline{\underline{K:\ (x-\frac{8}{3})^2+y^2=\frac{85}{9}}}$

6. *Določite konstanto c tako, da bo premica $y=-x+c$ tangenta krožnice $x^2+y^2+4x-10y-7=0$.*

Rešitev: Poiščemo presečišča premice in krožnice. y vstavimo v enačbo krožnice. Dobljena kvadratna enačba mora imeti eno samo rešitev, ker gre za tangento, diskriminante enačbe mora biti enaka 0.

$y=-x+c \xrightarrow{\text{vstavimo}} x^2+(-x+c)^2+4x-10(-x+c)-7=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2+x^2-2cx+c^2+4x+10x-10c-7=0 \Rightarrow 2x^2+(14-2c)x+(c^2-10c-7)=0 \xrightarrow{\text{diskriminanta je 0}}$

$D=(14-2c)^2-8(c^2-10c-7)=0 \Rightarrow 196-56c+4c^2-8c^2+80c+56=0 \Rightarrow -4c^2+24c+252=0$

$\xrightarrow{\text{delimo z }-4} c^2-6c-63=0 \Rightarrow c_{1,2}=\dfrac{6\pm\sqrt{36+252}}{2}=\dfrac{6\pm\sqrt{288}}{2}=3\pm\sqrt{72}=3\pm 6\sqrt{2}$

Dobili smo dve premici $\underline{\underline{y=-x+3+6\sqrt{2} \text{ in } y=-x+3-6\sqrt{2}}}$.