Napoved preizkusa znanja

Preizkus znanja v 2a iz vektorjev (skalarni produkt), eksponentne funkcije in iz logaritmov **5. 6. 2012** (vse naloge so enakovredne - 4 točke)
Navedene so strani iz **Planuma,** kjer boste našli ustrezne naloge, vendar poglejte še v zbirki **Omega2, Skalarni produkt in Vektorji v pravokotnem koordinatnem sistemu, stran 36** in **Omega2, Eksponentna in logaritemska funkcija, stran 69** in še kam (posebej tam, kjer je v Planumu nalog zelo malo, npr. naloga tipa5).

1. **Skalarni produkt** Z uporabo skalarnega produkta in kosinusnega izreka računamo dolžine ali kote med vektorji, oziroma daljicami **(P strani 56 do 59);** podobne naloge, kjer so vektorji ali točke podani s komponentami ali koordinatami **(P strani 60 do 64).**
2. **Eksponentna enačba** Eksponentna enačba, kjer prevedemo člene, kjer je neznanka v eksponentu na isto osnovo in z izpostavljanjem poenostavimo enačbo, ali enačba, ki jo rešujemo z uvedbo nove neznanke, ali pa enačba, kjer moramo vključiti tudi logaritmiranje obeh strani **(P186 - 188/primeri in 664 - 670).**
3. **Graf eksponentne in logaritemske funkcije** Risanje grafa, kjer je potrebno osnovne eksponentne ali logaritemske funkcije premakniti, raztegniti, zrcaliti ali vključiti še absolutno vrednost **(P stran185, P stran198);** grafično reševanje enačbe ali neenačbe, ki vsebuje poleg eksponentne ali logaritemske funkcije tudi druge funkcije **(P od naloge 671 do 681 in primeri, P nalogi 725 in 726).**
4. **Logaritemska enačba** Različne logaritemske enačbe, kjer upoštevamo pravila za logaritmiranje **(P nalogi 698 in 699, P strani 200 in 201).**
5. **Prehod na drugo logaritemsko osnovo** Logaritemske enačbe, ki vključujejo logaritme z različnimi osnovami **(P stran 203).**
6. **Modeli rasti** Dani sta dve točki. Med njima vzpostavimo različne modele rasti: linearno rast, eksponentno rast in logaritemsko rast in predvidimo različne rezultate v bodočnosti **(dva primera sta navedena v nadaljevanju tega lista).**

Dva modela rasti **(linearna in eksponentna rast)** med dvema točkama in napovedovanje

Naloga : V času 2 smo izmerili neko količino in dobili 300, v času 8 pa smo dobili 700. Koliko bomo dobili v času 10, če predvidevamo, da je rast :

* linearna
* eksponentna

Za oba primera poiščite tudi splošno enačbo oziroma obrazec.

Reševanje :

Imamo točki $T_1(2, 300)$ in $T_2(8, 700)$.

* Predvidevamo linearno rast $y = kx + n \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{matrix} 300 = 2k + n \\ 700 = 8k + n \end{matrix} \xrightarrow[\text{odštejemo}]{\text{enačbi}} 400 = 6k \Rightarrow k = 66{,}67 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}} 300 = 133{,}34 + n \Rightarrow n = 166{,}66 \qquad \underline{y = 66{,}67x + 166{,}66}$$

V času 10 napovedujemo vrednost pri linearni rasti $\underline{y(10) = 833}$

* Predvidevamo eksponentno rast $y = ba^x \Rightarrow$

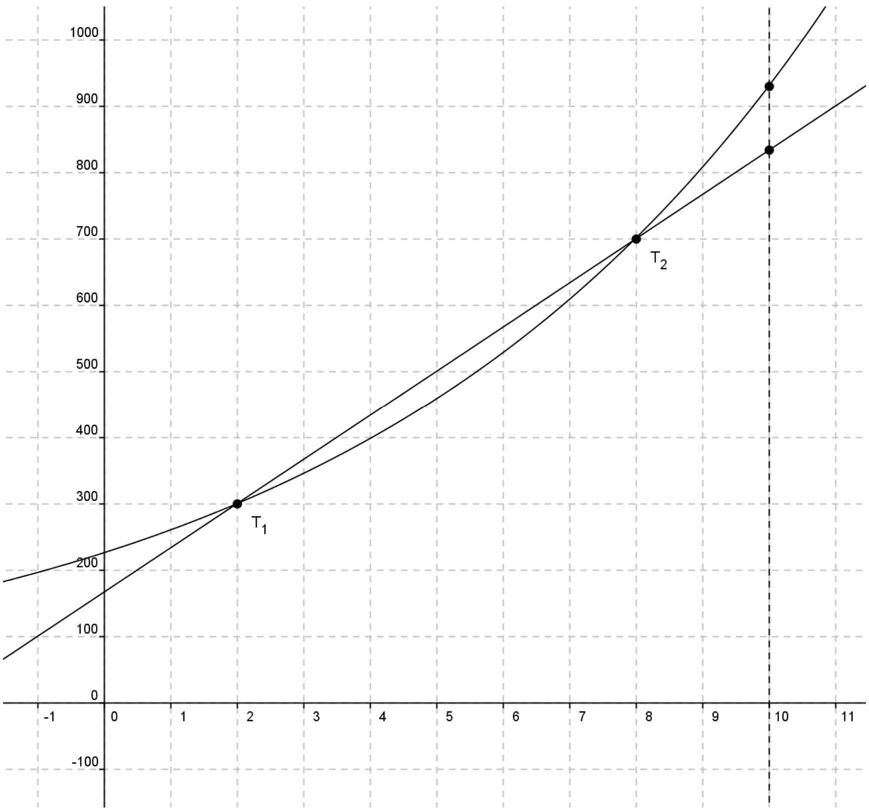
$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{matrix} 300 = ba^2 \\ 700 = ba^8 \end{matrix} \xrightarrow[\text{delimo}]{\text{enačbi}} \frac{700}{300} = a^{8-2} \Rightarrow$$

$$a^6 = 2{,}333 \Rightarrow a = \sqrt[6]{2{,}333} = 2{,}333^{\frac{1}{6}} = 1{,}152$$

$$\xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}} 300 = b \cdot 1{,}152^2 \Rightarrow$$

$$b = 226{,}06 \qquad \underline{y = 226{,}06 \cdot 1{,}152^x}$$

V času 10 napovedujemo vrednost pri eksponentni rasti $\underline{y(10) = 931}$



Dva modela rasti **(linearna in logaritemska rast)** med dvema točkama in napovedovanje

Naloga: Vrednost 300 smo ocenili z oceno 2, vrednost 700 pa z oceno 8. Kakšno oceno bi morali dati vrednosti 1000, če naj bi bilo spreminjanje:

* linearno
* logaritemsko

Za oba primera poiščite tudi splošno enačbo oziroma obrazec.

Reševanje:

Imamo točki $T_1(300,\ 2)$ in $T_2(700,\ 8)$.

* Predvidevamo linearno rast $y = kx + n \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{aligned} 2 &= 300k + n \\ 8 &= 700k + n \end{aligned} \xrightarrow[\text{odštejemo}]{\text{enačbi}} 6 = 400k \Rightarrow k = 0{,}015 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}} 2 = 4{,}5 + n \Rightarrow n = -2{,}5 \quad \underline{\underline{y = 0{,}015x - 2{,}5}}$$

Pri linearni rasti bi morali vrednost 1000 oceniti z $\underline{\underline{y(1000) = 12{,}5}}$

* Predvidevamo logaritemsko rast

$y = \log_a x + b \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{aligned} 2 &= \log_a 300 + b \\ 8 &= \log_a 700 + b \end{aligned} \xrightarrow[\text{odštejemo}]{\text{enačbi}}$$

$$6 = \log_a 700 - \log_a 300 \Rightarrow \log_a 2{,}333 = 6 \Rightarrow$$

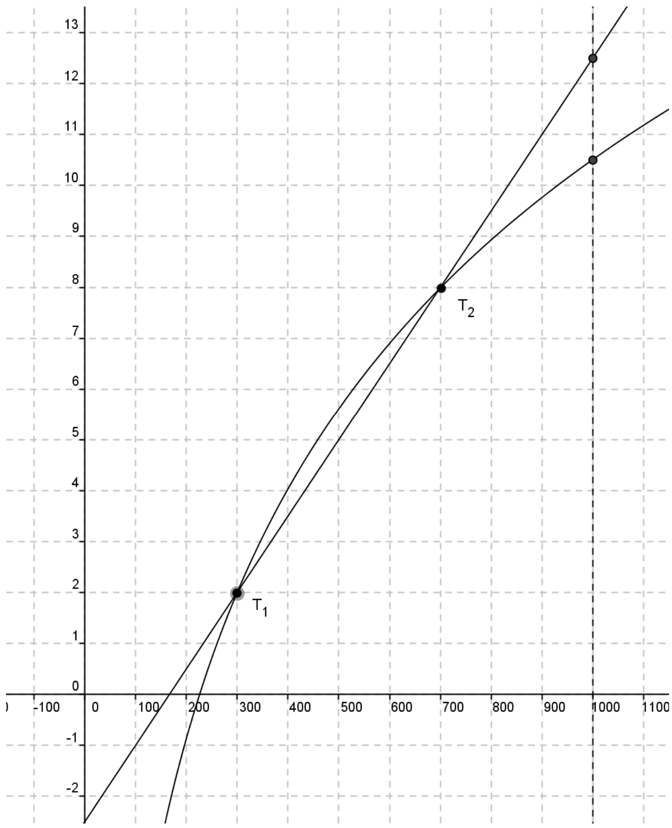
$$a^6 = 2{,}333 \Rightarrow a = \sqrt[6]{2{,}333} = 1{,}152 \xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}}$$

$$2 = \log_{1,152} 300 + b \Rightarrow b = -38{,}31$$

$$\underline{y = \log_{1,152} x - 38{,}31} \xrightarrow[\text{običajno uporabljamo to osnovo}]{\text{pretvorimo na osnovo 10, ker}}$$

$$y = \frac{1}{\log 1{,}152} \log x - 38{,}31 \Rightarrow \underline{\underline{y = 16{,}27 \log x - 38{,}31}}$$

Pri logaritemski rasti bi morali vrednost 1000 oceniti z $\underline{\underline{y(1000) = 10{,}5}}$



Preizkus znanja v 2a iz vektorjev (skalarni produkt), eksponentne funkcije in logaritmov (naloge so enakovredne - 4 točke; ena naloga oz. dve podnalogi sta dodatno) kriterij : 50% - zad, 62,5% - db, 75% - pdb, 87,5% - odl

1. Določite število y tako,

   a) da bosta vektorja $\vec{a} = (-16, 11, 8)$ in $\vec{b} = (20, y, -4)$ enako dolga

   b) da bo kot med vektorjema $\vec{a} = (7, y, 0)$ in $\vec{b} = (8, -6, 10)$ enak $60°$

2. Rešite enačbo

   $8^{2x-1} - 7 \cdot 49^{3x-3} + 2 \cdot 64^{x-1} = 7^{6x-5} - 4^{3x-2}$

3. Grafično rešite enačbo $\left|2^{x-2} - 1\right| = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$ in rešitev računsko preizkusite. Za enoti na obeh oseh vzemite dva kvadratka.

4. Rešite enačbi

   a) $\log_2(x+1) + \log_2 x = 1$

   b) $x^{\log 100x} = 100x^3$

5. Rešite enačbi

   a) $\log_9 x + \log_{27} x = \dfrac{5}{12}$

   b) $\log_2(x-1) + 2\log_4(x-2) = 1.$

6. Tretji dan smo izmerili neko količino in namerili 500 enot, dvanajsti dan smo izmerili 800 enot. Koliko bomo izmerili dvajseti dan,

   a) če je rast količine linearna in koliko,

   b) če je rast eksponentna.

   Napišite tudi obe enačbi, s katerima lahko to računamo.

1. Določite število y tako,

a) da bosta vektorja $\vec{a}=(-16,11,8)$ in $\vec{b}=(20,\ y,-4)$ enako dolga

$$a=\sqrt{(-16)^2+11^2+8^2}=b=\sqrt{20^2+y^2+(-4)^2}\Rightarrow 256+121+64=400+y^2+16\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y^2=25\Rightarrow \underline{\underline{y=\pm 5}}$$

b) da bo kot med vektorjema $\vec{a}=(7,\ y,\ 0)$ in $\vec{b}=(8,-6,10)$ enak $60°$

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{a\cdot b}\Rightarrow \cos 60°=\frac{1}{2}=\frac{56-6y+0}{\sqrt{49+y^2+0}\cdot\sqrt{64+36+100}}\Rightarrow \frac{\cancel{2}(28-3y)}{\sqrt{49+y^2}\cdot\cancel{2}\sqrt{50}}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 56-6y=\sqrt{2450+50y^2}\ /^2\Rightarrow 3136-672y+36y^2=2450+50y^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 14y^2-672y-686=0/:14\Rightarrow y^2-48y-49=0\Rightarrow (y-49)(y+1)=0\Rightarrow \underline{\underline{y_1=49\text{ in }y_2=-1}}$$

2. Rešite enačbo

$$8^{2x-1}-7\cdot 49^{3x-3}+2\cdot 64^{x-1}=7^{6x-5}-4^{3x-2}$$

$$2^{6x-3}-7^{6x-6+1}+2^{6x-6+1}=7^{6x-5}-2^{6x-4}\Rightarrow 2^{6x-3}+2^{6x-5}+2^{6x-4}=7^{6x-5}+7^{6x-5}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2^{6x-5}\left(2^2+1+2\right)=2\cdot 7^{6x-5}\Rightarrow 7\cdot 2^{6x-5}=2\cdot 7^{6x-5}\Rightarrow 2^{6x-5-1}=7^{6x-5-1}\Rightarrow 6x-6=0\Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$$

Neobvezni preizkus: $L=8-7\cdot 49^0+2\cdot 64^0=8-7+2=3\quad D=7-4=3$

3. Grafično rešite enačbo $\left|2^{x-2}-1\right|=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}$ in rešitev računsko preizkusite. Za enoti na obeh oseh vzemite dva kvadratka.

Rešitev in računski preizkus

$\underline{\underline{x_1=1}}$

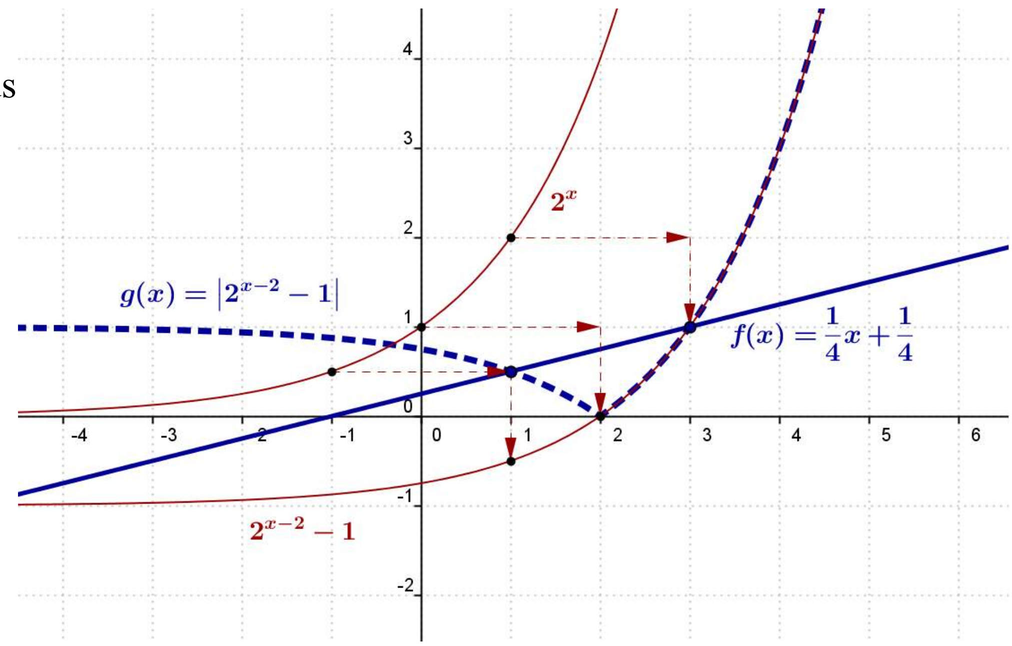
$L=\left|2^{1-2}-1\right|=\left|\frac{1}{2}-1\right|=\frac{1}{2}$

$D=\frac{1}{4}\cdot 1+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=L$

$\underline{\underline{x_2=3}}$

$L=\left|2^{3-2}-1\right|=\left|2-1\right|=1$

$D=\frac{1}{4}\cdot 3+\frac{1}{4}=1=L$



4. Rešite enačbi

a) $\log_2(x+1)+\log_2 x=1$

$\log_2(x^2+x)=\log_2 2 \Rightarrow x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \underline{x_1=-2,\ x_2=1}$

$\mathrm{P}_{x=-2}: L=\log_2(-1)_{\text{ni def.}} \quad \mathrm{P}_{x=1}: L=\log_2 2+\log_2 1=1+0=D_{\text{OK}} \Rightarrow \underline{\underline{x=1}}$

b) $x^{\log 100x}=100x^3$

$x^{\log 100x}=100x^3 \big/_{\log} = \log x^{\log 100x}=\log 100x^3 \Rightarrow \log 100x \cdot \log x = 2+3\log x \Rightarrow$

$\Rightarrow (2+\log x)\log x = 2+3\log x \xrightarrow{y=\log x} (2+y)y=2+3y \Rightarrow 2y+y^2-2-3y=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2-y-2=0 \Rightarrow (y-2)(y+1)=0 \Rightarrow \log x=2 \vee \log x=-1 \Rightarrow \underline{\underline{x_1=100,\ x_2=\tfrac{1}{10}}}$

Preizkus: $x_1=100 \quad L=100^{\log 10000}=10^{2\cdot 4}=10^8 \quad D=100\cdot 100^3=10^{2+6}=10^8$

$x_2=\tfrac{1}{10} \quad \left(\tfrac{1}{10}\right)^{\log 100\cdot\frac{1}{10}}=\tfrac{1}{10}^{\log 10}=\tfrac{1}{10} \quad D=100\cdot$

5. Rešite enačbi

a) $\log_9 x+\log_{27} x=\dfrac{5}{12}$

$\dfrac{\log_3 x}{\log_3 9}+\dfrac{\log_3 x}{\log_3 27}=\dfrac{5}{12} \Rightarrow \dfrac{\log_3 x}{2}+\dfrac{\log_3 x}{3}=\dfrac{5}{12}\Big/_{\cdot 12} \Rightarrow 6\log_3 x+4\log_3 x=5 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10\log_3 x=5 \Rightarrow \log_3 x=\tfrac{1}{2} \Rightarrow x=\sqrt{3}$

P: $\mathrm{L}=\log_9\sqrt{3}+\log_{27}\sqrt{3}=\dfrac{\log_3\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\log_3\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{3}{12}+\dfrac{2}{12}=\dfrac{5}{12}=D$

b) $\log_2(x-1)+2\log_4(x-2)=1.$

$\log_2(x-1)+2\dfrac{\log_2(x-2)}{\log_2 4}=1 \Rightarrow \log_2(x-1)(x+2)=\log_2 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-3x+2=2 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow x_1=0 \text{ in } x_2=3$

$P_{x=0}: \log_2(0-1)\ldots_{\text{ni def.}} \quad P_{x=3}: \log_2 2+2\log_4 1=1+0=1=D$

6. Tretji dan smo izmerili neko količino in namerili 500 enot, dvanajsti dan smo izmerili 800 enot. Koliko bomo izmerili dvajseti dan,
   a) če je rast količine linearna in koliko,
   b) če je rast eksponentna.
   Napišite tudi obe enačbi, s katerima lahko to izračunamo.

a) Imamo točki $T_1(3, 500)$ in $T_2(12, 800)$.

* Predvidevamo linearno rast $y = kx + n \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{matrix} 500 = 3k + n \\ 800 = 12k + n \end{matrix} \xrightarrow[\text{odštejemo}]{\text{enačbi}} 300 = 9k \Rightarrow k = 33{,}33 \Rightarrow$$

$$\xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}} 500 = 100 + n \Rightarrow n = 400 \qquad \underline{y = 33{,}33x + 400}$$

Za dvajseti dan napovedujemo vrednost pri linearni rasti $\underline{y(20) = 1067}$

b) * Predvidevamo eksponentno rast $y = ba^x \Rightarrow$

$$\xrightarrow[\text{koordinate točk}]{\text{vstavimo}} \begin{matrix} 500 = ba^3 \\ 800 = ba^{12} \end{matrix} \xrightarrow[\text{delimo}]{\text{enačbi}} \frac{800}{500} = a^{12-3} \Rightarrow a^9 = 1{,}6 \Rightarrow a = \sqrt[9]{1{,}6} = 1{,}6^{\frac{1}{9}} = 1{,}0536$$

$$\xrightarrow[\text{eno od enačb}]{\text{vstavimo v}} 500 = b \cdot 1{,}0536^3 \Rightarrow b = 427{,}506 \qquad \underline{y = 427{,}506 \cdot 1{,}0536^x}$$

Za dvajseti dan napovedujemo vrednost pri eksponentni rasti $\underline{y(20) = 1215}$