str/nal	*Linea - naloge z deljivostjo*
L	Matematično dokažite, da je produkt treh zaporednih naravnih števil deljiv s 6. --- Produkt treh zaporednih naravnih števil: $n(n+1)(n+2)$ Vsa naravna števila lahko zapišemo kot $6m,\ 6m+1,\ 6m+2,\ 6m+3,\ 6m+4$, ali $6m+5$. Vstavimo $6m:\quad 3\cdot 6m(3\cdot 6m+1)(3\cdot 6m+2)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktor 6. Vstavimo $6m+1:\quad (6m+1)((6m+1)+1)((6m+1)+2)=(6m+1)(6m+2)(6m+3)=$ $=(6m+1)2(3m+1)3(2m+1)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktorja 2 in 3. Vstavimo $6m+2:\quad (6m+2)((6m+2)+1)((6m+2)+2)=(6m+2)(6m+3)(6m+4)=$ $=2(3m+1)3(2m+1)2(3m+2)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktorja 2 in 3. Vstavimo $6m+3:\quad (6m+3)((6m+3)+1)((6m+3)+2)=(6m+3)(6m+4)(6m+5)=$ $=3(2m+1)2(3m+2)(6m+5)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktorja 3 in 2. Vstavimo $6m+4:\quad (6m+4)((6m+4)+1)((6m+4)+2)=(6m+4)(6m+5)(6m+6)=$ $=2(3m+2)(6m+5)6(m+1)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktor 6. Vstavimo $6m+5:\quad (6m+5)((6m+5)+1)((6m+5)+2)=(6m+5)(6m+6)(6m+7)=$ $=(6m+5)6(m+1)(6m+7)$ je deljivo s 6, ker produkt vsebuje faktor 6.
L 36/146	Poiščite vsa dvomestna števila z lastnostjo: če med njuni števki vrinemo ničlo, dobimo trimestno število, ki je devetkratnik prvotnega dvomestnega števila. --- $\overline{ab}_{\text{ dvomestno število}} \xrightarrow{\text{vrinemo ničlo}} \overline{a0b}_{\text{ tromestno število}} \xrightarrow{\text{velja}} \overline{a0b}=9\cdot\overline{ab}$ Zapis, da bomo lahko računali: $100a+10\cdot 0+b=9\,(10a+b)\Rightarrow 100a+b=90a+9b\Rightarrow$ $\Rightarrow 10a=8b/:2\Rightarrow 5a=4b\Rightarrow b$ je deljiv s 5, in ker je $0\leqslant b\leqslant 9\Rightarrow b=5\Rightarrow a=4$ $\boxed{\text{Iskano število je 45.}}$
L 36/150	Poiščite 6-mestno število $\overline{abcdef}$, za katero velja $6\cdot\overline{abcdef}=\overline{defabc}$. --- Da bi dobili občutek za nalogo, bomo na slepo poskusili število 132675, če ustreza: $6\cdot 132675=796050\neq 675132$ - ne ustreza. Število $\overline{abcdef}$ bi lahko zapisali $100000a+10000b+1000c+100d+10f+g$, toda ker se po tri števke ponavljajo, ga bomo zapisali bolj preprosto: $\overline{abc}=x,\overline{efg}=y$, torej $\overline{abcdefg}=1000x+y$. Velja enačba: $6\,(1000x+y)=1000y+x\Rightarrow 6000x+6y=1000y+x\Rightarrow 5999x=994y\xrightarrow[\text{da bomo preverili deljivost}]{\text{števila razstavimo na praštevila,}}$ $7\cdot 957\cdot x=2\cdot 497\cdot y\xrightarrow[\text{497 pa je deljivo še s 7}]{\text{957 je praštevilo,}}7\cdot 957\cdot x=2\cdot 7\cdot 71\cdot y\xrightarrow[\text{delimo s 7}]{\text{obe strani enačbe}}957\cdot x=2\cdot 71\cdot y$ Desna stran enačbe je deljiva z 957, torej je y večkratnik 957. Ker pa je y lahko največ 999, velja $y=957$ in nato $x=2\cdot 71=142$. $\boxed{\text{Iskano število je 142957.}}$
L 36/156	Za katero najmanjše liho naravno število n je izraz n^3+n^2 popoln kvadrat? --- $n^3+n^2=n^2(n+1)$ Da bo na desni popoln kvadrat, mora biti tudi število $n+1$ kvadrat, torej po vrsti 4, 9, 16, 25 itd.. Najmanjše liho naravno število je torej 3, $(3+1=4)$, naslednje je na primer 15 $(15+1=4)$.

str/nal	***Linea - naloge z deljivostjo***
L 36/163	Naj bosta m in n ($m > n$) naravni števili, ki se razlikujeta za 2. Pokažite, da je razlika kvadratov teh dveh števil deljiva s 4. --- Za primer vzemimo števili 7 in 5. Razlika njunih kvadratov ($49 - 25 = 24$) je res deljiva s 4. Imamo $m = n+2$. Razlika kvadratov je $m^2 - n^2 = (n+2)^2 - n^2 = n^2 + 4n + 4 - n^2 = 4n + 4 = 4(n+1)$. Razlika je deljiva s 4.
L 36/164	Pokažite, da je število $n^3 - 3n^2 + 2n$ deljivo s 6 za $n > 3$. --- $n^3 - 3n^2 + 2n = n\left(n^2 - 3n + 2\right) = n\left(n-1\right)\left(n-2\right)$ Vidimo, da gre za množenje treh zaporednih naravnih števil, če je $n \geqslant 3$, od katerih je eno gotovo deljivo z 2 in eno gotovo deljivo s 3. Sledi, da je produkt deljiv s 6.
L 36/165	Če je vsota treh zaporednih naravnih števil liho število, pokažite, da je produkt teh treh števil deljiv s 24. --- Med tremi zaporednimi naravnimi števili je gotovo eno deljivo s 3. Da bi bila vsota treh zaporednih naravnih števil liho število, moramo imeti med njimi dve sodi števili in ne le enega. Med dvemi zaporednimi sodimi števili pa je eno gotovo deljivo s 4, drugo pa, seveda, z 2. Celoten produkt je torej deljiv s 24.
L 36/166	Pokažite, da je razlika dveh dvomestnih števil, ki imata zamenjan vrstni red števk, deljiva z 9. --- Imamo števili $\overline{ab}$ in $\overline{ba}$, v zapisu, primernem za računanje: $10a + b$ in $10b + a$. Razlika med njima je $(10a + b) - (10b + a) = 9a - 9b = 9(a - b)$. Vidimo, da je rezultat deljiv z 9.
L 36/169	Pokažite, da je za poljubni celi števili x in y vrednost izraza $(2x - y)^3 - 3x(x^2 - 2y) + (y - x)(5x^2 + y^2) + xy(y + x)$ večkratnik števila 6. --- Za primer poskusimo z vrednostima $x = 1$ in $y = 1$: $(2-1)^3 - 3(1-2) + (1-1)(5+1) + 1(1+1) =$ $= 1 + 3 + 0 + 2 = 6$. $(2x - y)^3 - 3x(x^2 - 2y) + (y - x)(5x^2 + y^2) + xy(y + x) =$ $= 8x^3 - 12x^2y + 6xy^2 - y^3 - 3x^3 + 6xy + 5x^2y + y^3 - 5x^3 - xy^2 + xy^2 + x^2y =$ $= -6x^2y + 6xy + 6xy^2 = -6xy\left(x - 1 - y\right)$ Rezultat je očitno večkratnik števila 6.
L 39/171	Pokažite, da je za poljubno naravno število n vrednost izraza $\left(1+n\right)^3 + \left(3n+5\right)\left(n+1\right)$ deljiva s 6. --- $\left(1+n\right)^3 + \left(3n+5\right)\left(n+1\right) \xrightarrow{\text{izpostavimo } n+1} \left(n+1\right)\left[\left(1+n\right)^2 + 3n + 5\right] =$ $= \left(n+1\right)\left(1 + 2n + n^2 + 3n + 5\right) = \left(n+1\right)\left(n^2 + 5n + 6\right) = \left(n+1\right)\left(n+2\right)\left(n+3\right)$ Vidimo, da gre za množenje treh zaporednih naravnih števil, od katerih je eno gotovo deljivo z 2 in eno gotovo deljivo s 3. Sledi, da je produkt deljiv s 6.

str/nal	***Linea - naloge z deljivostjo***
L 42/184	Pokažite, da je za vsako naravno število $n > 2$ izraz $3n^3 + 3n^2 - 18n$ sestavljeno število, in zapišite vse njegove delitelje. --- $3n^3 + 3n^2 - 18n = 3n(n^2 + n - 6) = 3n(n-2)(n+3) = 3(n-2)n(n+3)_{\text{faktorji so napisani po vrsti}}$ Iz razstavljenega števila se vidi, da je število pri vsakem $n > 2$ sestavljeno. Delitelji (16): $\{1,\ 3,\ n-2,\ n,\ n+3,\ 3n-6,\ 3n,\ 3n+9,\ n^2-2n,\ n^2+n-6,\ n^2+3n,$ $3(n-2)n = 3n^2-6n,\ 3(n-2)(n+3) = 3n^2+3n-18,\ 3n(n+3) = 3n^2+9n,$ $n-2)n(n+3) = n^3+n^2-6n,\ 3(n-2)n(n+3) = 3n^3+3n^2-18n\}$ Pri različnih n je število vseh deliteljev različno in ni enako 16, lahko je večje, lahko je manjše: $n = 3\ (8)\colon\ 3\cdot1\cdot3\cdot6;\ n = 4\ (16)\colon\ 3\cdot2\cdot4\cdot7;\ n = 5\ (24)\colon\ 3\cdot3\cdot5\cdot8;$ Pri $n = 3$ se nekateri delitelji večkrat ponavljajo, npr. 3, 6, 18, nekaterih pa ne boste našli, npr. 2. Pri $n = 5$ med zgoraj naštetimi delitelji ne boste našli deliteljev: $4, 6, 10$ itd.
L 42/186	Dan je izraz $(2n-1)^2 - (3-n)(2n+4) - 1$. a) Pokažite, da je za poljubno število $n \in \mathbb{N}$ vrednost izraza večkratnik števila 6. b) Za katera naravna števila n je vrednost izraza sestavljeno število? c) Za $n = 100$ izračunajte, koliko deliteljev ima vrednost izraza. --- $(2n-1)^2 - (3-n)(2n+4) - 1 = 4n^2 - 4n + 1 - 6n - 12 + 2n^2 + 4n - 1 = 6n^2 - 6n - 12 =$ $6(n^2 - n - 2) = 6(n-2)(n+1)$ a) Izraz je večkratnik števila 6, saj vsebuje faktor 6. b) Izraz bi bil lahko vedno sestavljeno število, saj je večkratnik števila 6, vendar se pri tem omejimo le na naravna števila (že pri 0 bi se zapletlo). Zato je odgovor $n > 2$. c) Izračunajmo vrednost izraza pri $n = 100$ in rezultat razstavimo: $6(100-2)(100+1) = 2\cdot3\cdot98\cdot101 = 2\cdot3\cdot2\cdot49\cdot101 = 2^2\cdot3\cdot7^2\cdot101 = 59388$ 101 je praštevilo, saj ni deljivo z nobenim od praštevil: $2, 3, 5, 7$. Z večjimi ne poskušamo, ker je dovolj poskusiti s tistimi, ki so manjša od $\sqrt{101}$. Po obrazcu na strani 48 (Linea) izračunamo število deliteljev: $\boxed{\tau(59388) = 3\cdot2\cdot3\cdot2 = 36.}$
L 42/188	Katere ostanke lahko dobimo pri deljenju naravnega števila n s številom 4? --- Pri deljenju naravnega števila n s številom 4 dobimo ostanke 0 ($4\|n$), 1, 2, in 3.
L 42/189	Spodnji stavek zapišite po osnovnem izreku o deljenju in iskano število tudi izračunajte. Če število n delimo s 6, dobimo kvocient 4 in ostanek 3. --- Osnovni izrek o deljenju: $n = 4\cdot6 + 3$. $\boxed{n = 27}$
L 42/190	Zapišite prvih 5 naravnih števil, ki dajo pri deljenju s 7 ostanek 4. --- Števila, ki dajejo pri deljenju s 7 ostanek 4 zapišemo po osnovnem izreku o deljenju tako: $n = 7k + 4\ (n \geq 7,\ k \in \mathbb{N})$ $\boxed{\text{Prvih pet števil je: } 11,\ 18,\ 25,\ 32,\ 39}$
L 45/198	Če vsoto kvadratov dveh zaporednih števil delimo s 4, dobimo ostanek 1. Pokažite, da velja trditev za vsa naravna števila. --- $n^2 + (n+1)^2 = n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2n^2 + 2n + 1 = 2n(n+1) + 1$ Ker sta n in $n+1$ zaporedni števili, je eno od njiju gotovo deljivo z 2, $2n(n+1)$ pa s 4. Velja torej $2n(n+1) = 4k$ in $n^2 + (n+1)^2 = 4k + 1$. Oblika števila $4k+1$, kaže na ostanek 1 pri deljenju s 4.

str/nal	Linea - naloge z deljivostjo
L 45/199	Koliko je ostanek pri deljenju razlike kubov dveh zaporednih lihih števil s 24? --- Dve zaporedni lihi števili: $2n+1,\ 2n+3$ $(2n+3)^3-(2n+1)^3=8n^3+36n^2+54n+27-8n^3-12n^2-6n-1=24n^2+48n+26=$ $=24n^2+48n+24+2=24(n^2+2n+1)+2$ $\boxed{\text{Ostanek je 2.}}$ Še bolje bi bilo označiti jih z $2n-1$ in $2n+1$. Potem bi bila razlika kubov: $(2n+1)^3-(2n-1)^3=8n^3+12n^2+6n+1-8n^3+12n^2-6n+1=$ $=24n^2+2$. Ostanek 2 neposredno razberemo.
L 45/202	Dedka in babico so obiskali vnuki. Mednje bi rada razdelila bonbone. Če bi dala vsakemu vnuku štiri, bi jima pet bonbonov ostalo, če pa bi dala vsakemu vnuku po pet bonbonov, jima dva zmanjkata. Izračunajte, koliko vnukov imata dedek in babica na obisku in koliko bonbonov bi jima rada razdelila? --- Število vnukov v in število bonbonov b Prva delitev: $b=4v+5$ Druga delitev: $b=5v-2$ Sledi: $4v+5=5v-2\Rightarrow v=7\Rightarrow b=4\cdot7+5=33.$ $\boxed{\text{Vnukov je bilo 7, bonbonov pa 33.}}$
L 50/215	Vsota dveh števil je 60, njun največji skupni delitelj pa 12. Kateri števili sta to? --- Če je njun največji skupni delitelj 12, potem velja, da sta tako število a kot število b večkratnika števila 12: $a=12k$ in $b=12l$. Števili k in l sta tuji: $D(a,b)=1$. Če bi ne bili, bi imeli kak skupni delitelj. V tem primeru pa število 12 ne bi bilo največji skupni delitelj števil a in b. Vsota števil je 60. $\Rightarrow 12k+12l=60\Rightarrow k+l=5$. Možni rešitvi sta dve: $k,l=1,4$ ali $k,l=2,3$, in zato tudi: $a,b=12,48$ ali $a,b=24,36$.
L 50/216	Produkt dveh števil je 17280, njun najmanjši skupni večkratnik je 2160. Poiščite števili. --- Iz obrazca $D(a,b)\cdot v(a,b)=a\cdot b$ lahko izračunamo, koliko je največji skupni delitelj števil a in $b\Rightarrow D(a,b)=17280:2160=8$. Zaradi tega velja: $a=8k$ in $b=8l\Rightarrow a\cdot b=64kl=17280$ in $k\cdot l=17280:64=270=27\cdot10=2\cdot3^3\cdot5$ Ker sta števili k in l tuji, so možne le take kombinacije faktorjev iz produkta $2\cdot3^3\cdot5$, ki nimajo skupnega faktorja. Take kombinacije so štiri: prva: 1 in $2\cdot3^3\cdot5\Rightarrow a=8$ in $b=2160$, druga: 2 in $3^3\cdot5\Rightarrow a=16$ in $b=1080$, tretja: 3^3 in $2\cdot5\Rightarrow a=216$ in $b=80$ in četrta: 5 in $2\cdot3^3\Rightarrow a=40$ in $b=432$.
L 50/217	Pokažite, da velja naslednja trditev: Če je D največji skupni delitelj števil a in b in je $a=kD$ in $b=lD$, potem sta števili k in l tuji. --- Namesto trditve $A\Rightarrow B$ bomo raje dokazali njej ekvivalentno trditev $\neg B\Rightarrow\neg A$: Če števili k in l nista tuji, potem D ni največji skupni delitelj števil a in b. Dokaz: Števili k in l nista tuji. Potem imata skupni delitelj $d\neq1\Rightarrow k=dk_1, l=dl_1\Rightarrow$ $\Rightarrow a=Ddk_1, b=Ddl_1\Rightarrow Dd$ je skupni delitelj a in b. Ker je $dD>D$, saj $d\neq1$, D ni več največji skupni delitelj. (Konec dokaza) Dokažimo še naslednje: $k\cdot l=v(a,b):D(a,b)$. Iz obrazca $D(a,b)\cdot v(a,b)=a\cdot b$ sledi $D\cdot v=Dk\cdot Dl\Rightarrow v=Dkl\Rightarrow k\cdot l=v:D$