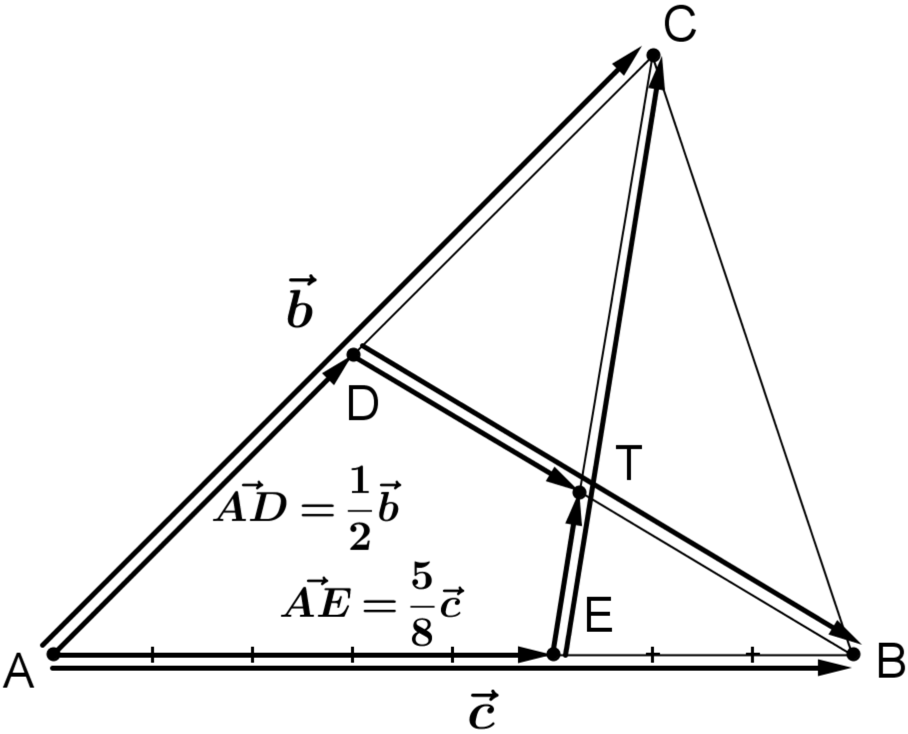
GimVič

Vektorji

Gvic 10 ***V trikotniku ABC leži točka E na stranici AB tako, da je*** $|AE| : |EB| = 5 : 3$.
Daljica CE in težiščnica na stranico b se sekata v točki T. Izračunaj razmerje $|CE| : |CT|$.



Reševanje:

$\overrightarrow{ET} = m\overrightarrow{EC}$ Zanima nas razmerje m. Izberemo si bazo $\overrightarrow{AB} = \vec{\mathbf{c}}$ in $\overrightarrow{AC} = \vec{\mathbf{b}}$ in izrazimo vektor $\overrightarrow{ET}$ v tej bazi na dva načina. Nato oba načina izenačimo.

① $\overrightarrow{ET} = m\overrightarrow{EC}$ $\quad \overrightarrow{EC} = -\frac{5}{8}\vec{\mathbf{c}} + \vec{\mathbf{b}} \Rightarrow \overrightarrow{ET} = m\left(\vec{\mathbf{b}} - \frac{5}{8}\vec{\mathbf{c}}\right)$ $\quad \boxed{\overrightarrow{ET} = m\vec{\mathbf{b}} - \frac{5}{8}m\vec{\mathbf{c}}}$ ①

② $\overrightarrow{ET} = -\frac{5}{8}\vec{\mathbf{c}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} + \overrightarrow{DT}$ $\quad \overrightarrow{DT} = n\overrightarrow{DB}$ $\quad \overrightarrow{DB} = -\frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}} \Rightarrow \overrightarrow{DT} = n\left(-\frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} + \vec{\mathbf{c}}\right) = -\frac{1}{2}n\vec{\mathbf{b}} + n\vec{\mathbf{c}}$

$\overrightarrow{ET} = -\frac{5}{8}\vec{\mathbf{c}} + \frac{1}{2}\vec{\mathbf{b}} - \frac{1}{2}n\vec{\mathbf{b}} + n\vec{\mathbf{c}}$ $\quad \boxed{\overrightarrow{ET} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}n\right)\vec{\mathbf{b}} + \left(n - \frac{5}{8}\right)\vec{\mathbf{c}}}$ ②

Izenačimo koeficiente pri obeh zapisih:
$$m = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}n \,/\cdot 2 \Rightarrow 2m = 1 - n \Rightarrow 2m + n = 1$$
$$-\tfrac{5}{8}m = n - \tfrac{5}{8} \,/\cdot 8 \Rightarrow -5m = 8n - 5 \Rightarrow 5m + 8n = 5$$

V drugo enačbo vstavimo $n = 1 - 2m \Rightarrow 5m + 8 - 16m = 5 \Rightarrow 11m = 3 \Rightarrow m = \frac{3}{11}_{|ET|:|EC| = 3:11}$

$|CE| : |CT| = 11 : 8$

Gvic11 Dolžina vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je 2 cm, kot med vektorjema pa 120°. Izračunaj skalarni produkt vektorjev $3\vec{a}-\vec{b}$ in $2\vec{b}-\vec{a}$, njuni dolžini in kot med njima.

Rešitev: Najprej izračunamo skalarni produkt obeh vektorjev (računamo kot z običajnimi dvočleniki. $\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)=6\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}^{\,2}-2\vec{b}^{\,2}+\vec{a}\cdot\vec{b}=7\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}^{\,2}-2\vec{b}^{\,2}$

Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je po definiciji enak

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 120°=2\cdot 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\underline{-2}$

$\vec{a}^{\,2}=\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\cos 0°=a^2=\underline{4}\qquad \vec{b}^{\,2}=b^2=\underline{4}$

$7\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}^{\,2}-2\vec{b}^{\,2}=-14-12-8=-34\Rightarrow \underline{\underline{\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)=-34}}$

Dolžino vektorja najlaže izračunamo po obrazcu $\underline{|\vec{a}|=a=\sqrt{\vec{a}^{\,2}}\ _{\text{izpeljano iz zgornjega obrazca}}}$

$\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|=\sqrt{\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)^2}=\sqrt{9\vec{a}^{\,2}-6\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^{\,2}}=\sqrt{36+12+4}=\sqrt{52}=\underline{\underline{2\sqrt{13}}}$

$\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|=\sqrt{\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)^2}=\sqrt{4\vec{b}^{\,2}-4\vec{a}\vec{b}+\vec{a}^{\,2}}=\sqrt{16+8+4}=\sqrt{28}=\underline{\underline{2\sqrt{7}}}$

Kot med vektorjema dobimo iz definicije skalarnega produkta $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi\Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ V našem primeru: $\cos\varphi=\dfrac{\left(3\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\left(2\vec{b}-\vec{a}\right)}{\left|3\vec{a}-\vec{b}\right|\cdot\left|2\vec{b}-\vec{a}\right|}=\dfrac{-34}{2\sqrt{13}\cdot 2\sqrt{7}}=-0{,}891042$

$\underline{\underline{\varphi=153°_{\text{s kalkulatorjem}}}}$