

## Integracija enačb gibanja

$$F = F(v)$$

1. Čoln poženemo po mirni vodi z začetno hitrostjo  $v_0$ . Kako se ustavlja, če velja kvadratni zakon upora,  $F_u = kv^2$ ? *Rešitev:*  $v = v_0/(1 + kv_0t/m)$ ,  $x = (m/k) \ln(1 + kv_0t/m)$
2. Čolniček poženemo po viskozni tekočini z začetno hitrostjo  $v_0$ . Kako se ustavlja, če velja linearni zakon upora,  $F_u = kv$ ? *Rešitev:*  $v = v_0e^{-kt/m}$ ,  $x = (mv_0/k)(1 - e^{-kt/m})$
3. Telo z maso 1 kg poženemo po vodoravni podlagi z začetno hitrostjo 1 m/s. Ustavlja se pod vplivom sile, ki je sorazmerna s korenom iz hitrosti:  $F_u = -A\sqrt{v}$ ,  $A = 1 \text{ kgm}^{\frac{1}{2}}\text{s}^{-\frac{3}{2}}$ . V kolikšnem času pade hitrost na 0? Kolikšno razdaljo pri tem prepotuje?
4. Kroglico iz jekla z gostoto  $7,6 \text{ g/cm}^3$  in radijem 0,4 cm spustimo v tekočino z viskoznostjo  $0,1 \text{ kg/ms}$  in gostoto  $1 \text{ g/cm}^3$ . a) Zapiši enačbo za gibanje kroglice in izračunaj hitrost, ki jo doseže kroglica po dolgem času. (Upoštevaj linearni zakon upora  $F_u = 6\pi r\eta v$ ) b) V kolikšnem času doseže 90% končne hitrosti, če je na začetku mirovala? c) Kolikšno pot naredi v tem času? *Rešitev:* a)  $v_0 = 2r^2(\rho - \rho')g/9\eta = 2,30 \text{ m/s}$ ; b)  $\tau = 2r^2\rho/9\eta = 0,270 \text{ s}$ ,  $t = -\tau \ln((v_0 - v)/v_0) = 0,62 \text{ s}$ ; c)  $s = v_0t - v(t)\tau = 0,875 \text{ m}$ .
5. Reši nalogi 4.b) in 4.c) v primeru, ko ima kroglica tik pod gladino začetno hitrost, ki je večja od končne (na primer dvakratno končno hitrost).
6. Padalec s padalom tehta 100 kg. Njegova končna hitrost je 5 m/s. Kakšno je gibanje, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 90% končne hitrosti, če na začetku miruje (z odprtim padalom)? \*Kolikšno pot naredi v tem času? *Rešitev:*  $v = v_\infty(e^{2gt/v_\infty} - 1)/(e^{2gt/v_\infty} + 1) = v_\infty \text{th}(gt/v_\infty)$ ,  $t = 0,74 \text{ s}$ ,  $*s = (v_\infty^2/g) \ln \text{ch}(gt/v_\infty) = 2,07 \text{ m}$ .
7. Pri skoku padalec najprej prosto pada s hitrostjo 20 m/s. Izračunaj, kako se s časom spreminja hitrost padalca od trenutka, ko odpre padalo, če je upor sorazmeren s kvadratom hitrosti? Po kolikšnem času doseže padalec 1,1 končne hitrosti? Končna hitrost padalca je 5 m/s, za težni pospešek vzemi  $10 \text{ m/s}^2$ . *Rešitev:*  $t = -(v_\infty/2g) \ln\left(\frac{(v-v_\infty)(v_0+v_\infty)}{(v+v_\infty)(v_0-v_\infty)}\right) = 0,63 \text{ s}$ ,  $v_0 = 20 \text{ m/s}$ ,  $v_\infty = 5 \text{ m/s}$ ,  $v = 1,1v_\infty$ .
8. Kolesar s skupno maso 80 kg vozi po vodoravni cesti in ko doseže hitrost 24 km/h, preneha poganjati. a) V kolikšnem času pade njegova hitrost na polovico začetne, če ga ustavlja le zračni upor (trenja ne upoštevamo)? Kolikšno pot napravi v tem času? Prečni presek kolesarja je  $0,5 \text{ m}^2$ , koeficient upora  $c_u = 1$  in gostota zraka  $1,25 \text{ kg/m}^3$ . (Upor zraka je  $F_u = \frac{1}{2}c_u\rho Sv^2$ .) b) Za koliko se skrajša čas, če upoštevamo še trenje,  $k_{tr} = 0,005$ ? c) Pri rezultatu b) razišči obe limiti, ko je ena od zaviralnih sil znatno večja od druge. *Rešitev:* a)  $k = c_u S \rho / 2m$ ,  $t = (1/v - 1/v_0)/k = 38,4 \text{ s}$ ,  $s = \ln(1 + kv_0t)/k = 177 \text{ m}$ ; b)  $a_0 = k_{tr}g$ ,  $t = (\arctg v_0\sqrt{k/a_0} - \arctg v\sqrt{k/a_0}) / \sqrt{ka_0} = 23,5 \text{ s}$ ,  $\Delta t = 14,9 \text{ s}$ .

$$F = F(x)$$

9. Navzdol poveznjeno epruveto, v kateri je nekaj zraka, potopimo v vodo (kartezijski plavač). Če plavač spustimo iz ravnovesne lege, deluje nanj pri dovolj majhnih odmikih  $x$  rezultanta sil, ki je sorazmerna z odklikom od ravnovesne lege:  $F = kx$  in kaže **v smeri gibanja**. Masa plavača je 10 g, konstanta  $k = 5 \cdot 10^{-3} \text{ N/m}$ . a) Kolikšno hitrost doseže plavač, ko prepotuje 10 cm, če je bil na začetku v ravnovesni legi in miroval. (Ravnovesje je labilno, zato že poljubno majhen odklik iz ravnovesne lege povzroči gibanje plavača proč od ravnovesne lege.) b) Koliko časa potrebuje plavač za zadnjo polovico poti? [ $v = 7 \text{ cm/s}$ ,  $t = 1 \text{ s}$ ]
10. Denimo, da skozi središče Zemlje izvrtamo tunel. Kako bi se gibalo telo v takšnem tunelu, če vemo, da se spreminja težni pospešek linearno z oddaljenostjo od središča Zemlje? V kolikšnem času bi doseglo južno poloblo? Za radij Zemlje vzemi 6400 km.
11. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila, ki je sorazmerna s korenem razdalje od začetne lege:  $F = A\sqrt{s}$ ,  $A = 3 \text{ N/m}^{1/2}$  in ima konstantno smer. Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo  $s = 1 \text{ m}$ ? Koliko časa potrebuje za to? [ $v = 2\sqrt{A/3m} s^{3/4} = 2 \text{ m/s}$ ,  $t = 2\sqrt{3m/A} s^{1/4} = 2 \text{ s}$ ]
12. Telo z maso 1 kg se giblje premo po gladki, rahlo valoviti podlagi. V okolici izhodišča se sila na telo spreminja s koordinato  $x$  kot  $F = bx^2$ , pri čemer je  $b = 1 \text{ N/m}^2$ . a) Kolikšno hitrost doseže pri gibanju v smeri osi  $x$ , ko prepotuje razdaljo  $s = 20 \text{ cm}$ , če na začetku v izhodišču miruje? b) Koliko časa porabi za zadnjo polovico poti? [ $v = \sqrt{2bs^3/3m}$ ,  $t = \sqrt{6m/2bs}(\sqrt{2} - 1)$ ]
13. Na mirujoče telo z maso 1 kg prične delovati sila  $F = kx^{2/3}$ ,  $k = 3 \text{ kgm}^{1/3}\text{s}^{-2}$ , pri čemer je  $x$  razdalja od začetne lege, in ima konstantno smer. a) Kolikšno hitrost doseže telo, ko prepotuje razdaljo  $s = 1 \text{ m}$ ? b) Koliko časa potrebuje za to? [ $v = \sqrt{6k/5m} s^{5/6}$ ,  $t = \sqrt{30m/k} s^{1/6}$ ]
14. Veliko težji delec privlači lažjega z maso  $3 \cdot 10^{-28} \text{ kg}$  s silo  $F = -Ke^{-r/a}$ ,  $K = 100 \text{ N}$ ,  $a = 1 \text{ fm}$  ( $= 10^{-15} \text{ m}$ , 1 femtometer). Lažji na začetku miruje daleč proč od težjega. a) Kolikšno hitrost doseže lažji delec, ko se približa težjemu na razdaljo  $r = 1 \text{ fm}$ ? b) Kolikšen čas potrebuje za zadnji femtometer poti? [ $v = \sqrt{2Ka/m} e^{-r/2a}$ ,  $t = \sqrt{2am/K}(e^{r/a} - e^{r/2a})$ ]