

1. $S = 5 \text{ m}^2$, $d = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 1,4 \text{ W/m K}$, $T_0 = 22^\circ\text{C} = 295 \text{ K}$, $P_0 = 2 \text{ kW}$.

Toplotna črpalka deluje kot idealni toplotni stroj, kar pomeni, da ima (če bi delovala kot stroj) izkoristek

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_0 - T_s}{T_0},$$

kjer je A oddano delo in Q_1 vložena toplota pri višji temperaturi T_0 , stroj pa pri nižji temperaturi T_s (v nalogi je to temperatura površja stene na strani tistega, ki s toplotno črpalko "krade" toploto) oddaja tudi toploto $Q_2 = Q_1 - A$. Vse toplote in delo obravnavamo s pozitivnim znakom, gre torej za velikosti teh količin. Ko toplotni stroj deluje kot toplotna črpalka, se cikel obrne in pri višji temperaturi T_0 oddaja toploto Q_1 , ki je po velikosti enaka vsoti vložene delu A in sprejete toplote Q_2 pri nižji temperaturi T_s . Še vedno pa velja ista enačba za "izkoristek"

$$\frac{Q_1}{A} = \frac{T_0}{T_0 - T_s} = \frac{Q_1/\Delta t}{A/\Delta t} = \frac{P_q}{P_e},$$

kjer smo toploto in delo delili s poljubnim časovnim intervalom Δt , da smo dobili v ulomku zgoraj prejeti toplotni tok P_q in spodaj v toplotno črpalko vloženo električno moč P_e , ki jo v nalogi iščemo. Bilanca toplot oziroma toplotnih tokov nam pove

$$P_q = P_e + P_s \quad \text{kjer je} \quad P_s = \frac{Q_2}{\Delta t}$$

toplotni tok, ki teče skozi steno zaradi temperaturne razlike $\Delta T = T_0 - T_s$ in je po velikosti enak

$$P_s = \frac{\lambda S \Delta T}{d} = \frac{\lambda S (T_0 - T_s)}{d}.$$

Iz zveze med temperaturami in prejetim toplotnim tokom ter vloženim delom (izkoristek idealnega toplotnega stroja) izrazimo temperaturno razliko

$$(T_0 - T_s) = T_0 \frac{P_e}{P_q}$$

in jo nesemo v enačbo za toplotne tokove

$$P_q = P_e + \frac{\lambda S T_0}{d} \frac{P_e}{P_q},$$

da dobimo enačbo, ki povezuje P_q z P_e in vsebuje same znane količine. Ker želimo nadomestiti grelni moč P_0 s toplotnim tokom iz toplotne črpalke P_q , izenačimo $P_q = P_0$ in izrazimo iskano električno moč P_e . Dobimo

$$P_e = P_0 \frac{P_0}{P_0 + P'} = 176,6 \text{ W} \approx 177 \text{ W} \approx 180 \text{ W}.$$

S P' smo označili kvocient $P' = \lambda S T_0 / d = 20,65 \text{ kW}$, ki predstavlja toplotni tok, ki bi tekkel skozi S veliko površino stene, če bi bila na hladni strani temperatura 0 K .

Zanimivo je izračunati še temperaturno razliko med obema mejnima površinama stene

$$\Delta T = T_0 - T_s = T_0 \frac{P_e}{P_0} = 26 \text{ K},$$

Kar pomeni, da ima površina stene na strani toplotne črpalke temperaturo $T_s = T_0 - \Delta T = -4^\circ\text{C}$.

2. $a_0 = 25$ cm, $D = -5$, $f_0 = D^{-1}$ [m] = -20 cm, $d = 20$ mm.

a)

Naj bo dolžina normalnega očesa d_0 in goriščna razdalja normalnega očesa, ko je akomodirano za gledanje na daleč (torej na neskončno) f_∞ . Za normalno oko tedaj velja

$$\frac{1}{f_\infty} = \frac{1}{\infty} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{d_0} \quad \Rightarrow \quad f_\infty = d_0.$$

Recimo, da ima kratkovidno oko enako obliko kot normalno oko, le očesna leča je drugačna: ko je akomodirano za gledanje na daljavo, naj ima goriščno razdaljo f'_∞ . Ker je kontaktna leča v stiku z očesno, je skupna dioptrija sistema kontaktna leča-oklo kar vsota obeh dioptrij. Ker oko z vstavljenjo kontaktno lečo vidi enako kot normalno oko, mora veljati

$$\frac{1}{f_\infty} = \frac{1}{f_0} + \frac{1}{f'_\infty} = \frac{1}{d_0},$$

kjer je f_0 goriščna razdalja kontaktne leče. Ko kratkovidno oko gleda brez kontaktne leče, vidi ostro predmete na največji razdalji $a_{\max}$, ki zadošča enačbi

$$\frac{1}{a_{\max}} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f'_\infty} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_0} \quad \Rightarrow \quad a_{\max} = -f_0 = -\frac{1}{D} [\text{m}] = 20 \text{ cm}.$$

b)

V normalnem očesu se pri gledanju na največjo mogočo bližino očesna leča prilagodi in ima goriščno razdaljo f_b . Velja

$$\frac{1}{a_0} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f_b}.$$

Kratkovidno oko naj ima, ko je akomodirano za gledanje najbolj na blizu, goriščno razdaljo f'_b . Ko je v očesu kontaktna leča, vidi kratkovidno oko enako kot normalno oko, torej velja

$$\frac{1}{f_0} + \frac{1}{f'_b} = \frac{1}{f_b}.$$

Brez kontaktne leče vidi kratkovidno oko ostro predmete, ki so največ na razdalji a'_0 , da velja

$$\frac{1}{a'_0} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f'_b} = \frac{1}{f_b} - \frac{1}{f_0} = \frac{1}{a_0} + \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{a'_0} = \frac{1}{a_0} - \frac{1}{f_0}$$

oziroma

$$a'_0 = a_0 \frac{f_0}{f_0 - a_0} = -f_0 \frac{a_0}{a_0 - f_0} = a_{\max} \frac{a_0}{a_0 - f_0} = a_{\max} \frac{a_0 [\text{m}] D}{a_0 [\text{m}] D - 1},$$

kar da numeričen rezultat

$$a'_0 = a_{\max} \frac{-1,25}{-1,25 - 1} = \frac{5}{9} a_{\max} = 11,1 \text{ cm} \approx 11 \text{ cm}.$$

c)

Oko z očali obravnavamo kot sistem dveh leč na isti optični osi na medsebojni razdalji d . Ker gledamo oddaljene predmete, je goriščna razdalja očesne leče f'_∞ . Goriščno razdaljo leče v očalih in njeno dioptrijo označimo kot $D' = 1/f'_\infty$, kjer f'_0 izrazimo v metrih. Ko gre svetloba z oddaljenih točkastih predmetov preko leče v očalih, se (slika je navidezna, ker je leča razpršilna) zbere na razdalji $b = f'_0$ za lečo. To pomeni, da deluje slika oddaljenega predmeta po preslikavi skozi lečo v očalih kot predmet za očesno lečo, a na oddaljenosti $a' = d - b = d - f'_0$ pred očesno lečo. Zato velja

$$\frac{1}{d - f'_0} + \frac{1}{d_0} = \frac{1}{f'_\infty} = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{d - f'_0} = -\frac{1}{f_0} \quad \Leftrightarrow \quad f'_0 = f_0 + d,$$

kjer smo enakost, ki jo uporabimo pri zadnjem enačaju v prvi enačbi, izpeljali v a) delu naloge. Iščemo dioptrijo $D' = 1/f'_0$ leče v očalih

$$D' = \frac{1}{f'_0} = \frac{1}{f_0 + d} = \frac{1}{f_0} \frac{f_0}{f_0 + d} = D \frac{1}{1 + Dd[\text{m}]} = D \frac{1}{1 - 0,1} = \frac{10}{9} D = -5,55 \approx -5,5.$$

V očala moramo vgraditi lečo z dioptrijo $-5,5$.

Komentar: Kratkovidno oko lahko obravnavamo tudi kot oko, ki ima enako lečo kot normalno oko, a je "predolgo" – kar je medicinsko gledano verjetno ustrežnejši model. V tem primeru v izpeljavah uporabljamo dolžino kratkovidnega očesa d'_0 , pri čemer velja $d'_0 > d_0$. Računi so malenkost drugačni, a vsi rezultati pri a), b) in c) ostanejo natančno enaki.

3. $l = 25 \text{ cm}$, $S = 1,0 \text{ mm}^2$, $B = 1,0 \text{ T}$, $\rho = 2,7 \text{ g/cm}^3$, $\zeta = 2,8 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, $C = 0,5 \text{ F}$, $m_C = 2,0 \text{ g}$.

a)

Inducirana napetost $U = v l B$ v zgornji stranici požene tok v okviru $I = U/R$. Sila $F = I l B$ uravnovesi težo in okvir se giblje s konstantno hitrostjo v :

$$m_o g = I l B = \frac{U l B}{R} = \frac{l^2 B^2 v}{R}, \quad m_o = 4 l S \rho = 2,7 \text{ g}, \quad R = \frac{\zeta l}{S} = 0,028 \Omega.$$

Od tod sledi

$$v = \frac{m_o g R}{l^2 B^2} = 12 \text{ mm/s}^2.$$

[2 točki]

b)

Sila na okvir pojema od $m_o g$ na začetku do 0 na koncu. Predpostavimo, da med pospeševanjem na okvir deluje povprečna sila $\frac{1}{2} m_o g$ in je torej povprečni pospešek $a = \frac{1}{2} g$. S to predpostavko ocenimo čas, potreben, da se hitrost ustali, kot

$$t_v = \frac{v}{\frac{1}{2} g} = \frac{2v}{g} = 2,4 \text{ ms}.$$

[1 točka]

V resnici se hitrost eksponentno približuje končni hitrosti s karakterističnim časom

$$\tau = \frac{v}{g} = \frac{m_o R}{l^2 B^2} = 1,2 \text{ ms}.$$

V času 2τ doseže 85,5 % končne hitrosti, v času 3τ pa 95 %. Kot pravilni priznamo rezultat, ki ima enak velikostni red kot τ .

c)

Če je po predpostavki tok I konstanten, je tudi sila na okvir, $F = m g - I l B$ konstantna, in okvir se giblje enakomerno pospešeno, $v(t) = v_0 + at$, $v_0 = v(0)$.

Po času t se na kondenzatorju nabere naboj $e = It$. Napetost, ki požene tok v okviru, je enaka inducirani, zmanjšani za napetost na kondenzatorju: $U = l v B - e/C$, tok pa

$$I = \frac{U}{R} = \frac{v l B}{R} - \frac{e}{RC} = \frac{l B v_0}{R} + \frac{l B a t}{R} - \frac{I t}{RC}.$$

Če naj bo tok neodvisen od časa, se morata drugi in tretji člen okrajšati. Od tod sledi zveza med pospeškom in tokom

$$\frac{l B a t}{R} = \frac{I t}{RC}, \quad a = \frac{I}{l B C}.$$

Iz Newtonovega zakona za gibanje okvira pa sledi $ma = m g - I l B$, kjer je $m = m_o + m_C = 4,7 \text{ g}$. V enačbo gibanja vstavimo zgornji izraz za a in delimo z m :

$$\frac{I}{l B C} = g - \frac{I l B}{m}, \quad \frac{I l B}{m} \left(1 + \frac{m}{l^2 B^2 C}\right) = g, \quad I = \frac{m g l B C}{m + l^2 B^2 C} = \frac{m g}{l B \left(1 + \frac{\tau_v}{\tau_C}\right)}.$$

Vpeljali smo

$$\tau_v = \frac{m R}{l^2 B^2} = 2,1 \text{ ms}, \quad \tau_C = RC = 14 \text{ ms} \quad \text{in dobili} \quad I = 160 \text{ mA}.$$

[5 točk]

d)

Iz $U = lBv - e/C$ in zveze med pospeškom in tokom sledi izraz za začetno hitrost:

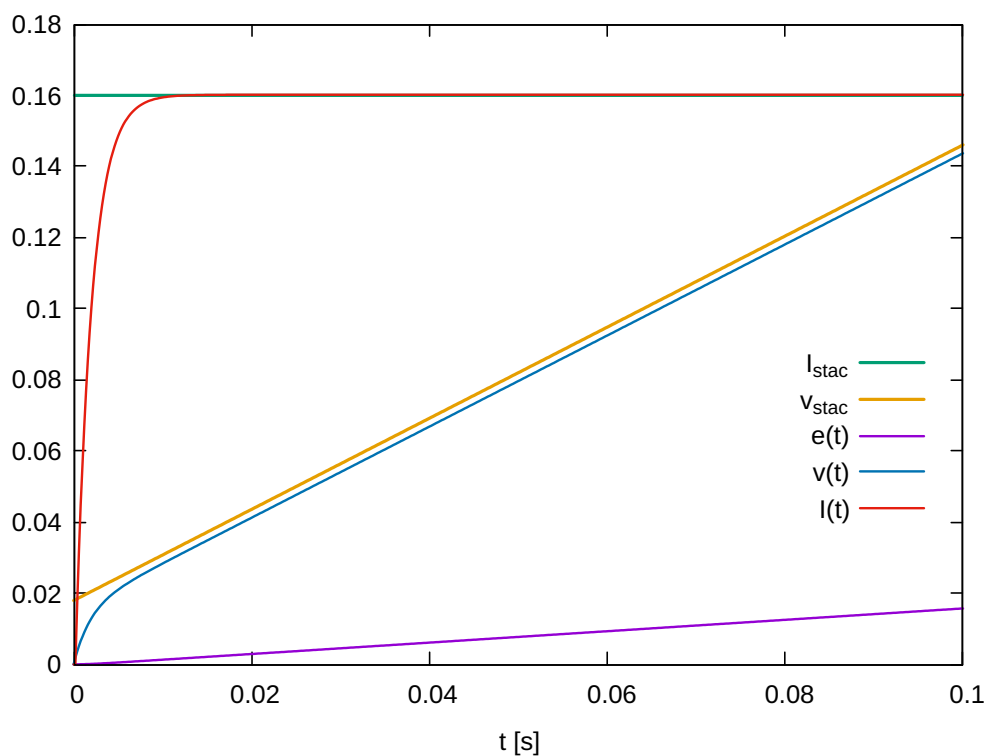
$$IR = lBv_0 + lBat - \frac{It}{C} = lBv_0, \quad v_0 = \frac{IR}{lB} = \frac{mgR}{l^2 B^2 \left(1 + \frac{\tau_v}{\tau_C}\right)} = \frac{g\tau_v}{\left(1 + \frac{\tau_v}{\tau_C}\right)} = 18 \text{ mm/s}.$$

Gibanje je enakomerno pospešeno s pospeškom

$$a = \frac{I}{lBC} = \frac{g\tau_v}{\tau_C + \tau_v} = 1,3 \text{ m/s}^2.$$

[2 točki]

Zanimivost: primerjava naše rešitve, pri kateri predpostavimo stacionaren tok I_{stac} , in določeno začetno hitrost, z numerično rešitvijo, pri kater predpostavimo začetno hitrost 0 ($e(t), v(t), I(t)$).



4. $m_\mu = 105,7 \text{ MeV}/c^2$, $m_p = 938,3 \text{ MeV}/c^2$, $m_e = 511,0 \text{ keV}/c^2$, $\lambda = 656 \text{ nm}$.

a)

V Bohrovi sliki mion in proton krožita okoli njunega težišča; za razdalji miona od težišča, r_μ , in protona, r_p , velja

$$r_\mu = \frac{m_p r}{m_\mu + m_p}, \quad r_p = \frac{m_\mu r}{m_\mu + m_p},$$

če je r razdalja med delcema. Skupna obema delcema je krožna frekvenca, ω , zato je smiselno dinamične količine izraziti z ω . Za vrtilno količino velja

$$\Gamma = J_\mu \omega + J_p \omega = m_\mu r_\mu^2 \omega + m_p r_p^2 \omega = \frac{(m_\mu m_p^2 + m_p m_\mu^2)}{(m_\mu + m_p)^2} r^2 \omega = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p} r^2 \omega = m_r r^2 \omega,$$

pri čemer smo vpeljali reducirano maso sistema:

$$m_r = \frac{m_\mu m_p}{m_\mu + m_p} = 95,0 \text{ MeV}/c^2 = 1,69 \cdot 10^{-28} \text{ kg}.$$

Do enakega rezultata pridemo, če vpeljemo relativno hitrost delcev; ker kažeta hitrosti v nasprotnih smereh, sledi

$$v = v_\mu + v_p = r_\mu \omega + r_p \omega = r \omega, \quad v_\mu = \frac{m_p v}{m_\mu + m_p}, \quad v_p = \frac{m_\mu v}{m_\mu + m_p}$$

in velja

$$\Gamma = m_r r v, \quad W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m_r v^2$$

Iz Bohrovega načela sledi

$$m_r r^2 \omega = n \frac{h}{2\pi}, \quad \omega = \frac{nh}{2\pi m_r r^2}, \quad \text{oziro} \quad v = \frac{nh}{2\pi m_r r}. \quad (1)$$

Zapišimo Newtonov zakon za kroženje miona in protona okoli težišča:

$$\begin{aligned} m_\mu a_r &= m_\mu r_\mu \omega^2 = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \\ m_p a_r &= m_p r_p \omega^2 = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}. \end{aligned}$$

Enačbi seštejemo

$$m_\mu r_\mu \omega^2 + m_p r_p \omega^2 = \frac{2m_\mu m_p}{m_\mu + m_p} r \omega^2 = \frac{2e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad m_r r \omega^2 = \frac{m_r v^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Končno vstavimo ω ali v iz (1) v Newtonov zakon:

$$\frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_r r^3} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r = \frac{\epsilon_0 n^2 h^2}{\pi m_r e_0^2} = n^2 r_B^\mu. \quad (2)$$

Bohrovemu radiju sedaj ustreza

$$r_B^\mu = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e_0^2} = 2,85 \cdot 10^{-4} \text{ nm}.$$

[6 točk]

b)

V tem primeru bi predpostavili, da mion kroži okoli mirujočega protona in vrtilno količino ter Newtonov zakon bi zapisali kot

$$\Gamma = m_\mu r v, \quad m_\mu \frac{v^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Dobili bi enak rezultat kot pri a), le da bi namesto reducirane mase nastopala masa mion. Napaka bi bila enaka

$$\eta = \frac{r_B^\mu - r_B^{\text{apoks}}}{r_B^\mu} = \frac{\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e_0^2} - \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_\mu e_0^2}}{\frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_r e_0^2}} = \frac{m_\mu - m_r}{m_\mu} = 10 \, \%. \quad [1 \text{ točka}]$$

c)

Energija stanja sistema je enaka vsoti kinetične in potencialne energije:

$$W = W_{\text{kin}} + W_{\text{pot}}.$$

Podobno kot smo izpeljali vrtilno količino za sistem miona in piona, izpeljemo izraz za kinetično energijo sistema

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} J_\mu \omega^2 + \frac{1}{2} J_p \omega^2 = \frac{1}{2} \frac{(m_\mu m_p^2 + m_p m_\mu^2)}{(m_\mu + m_p)^2} r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_r r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m_r v^2.$$

Vstavimo ω ali v iz (1) in r iz (2)

$$W_{\text{kin}} = \frac{n^2 h^2}{8\pi^2 m_r r^2} = \frac{m_r e_0^4}{8\epsilon_0^2 h^2 n^2}.$$

Za potencialno energijo velja

$$W_{\text{pot}} = -\frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_r e_0^4}{4\epsilon_0^2 h^2 n^2},$$

Vidimo, da je energija premo sorazmerna z reducirano maso. Enak rezultat bi dobili za vodikov atom, le da je tu za reducirano maso lahko vzamemo kar maso elektrona, saj razlika med reducirano maso sistema in maso elektrona zanemarljiva. Ker je valovna dolžina izsevane svetlobe obratno sorazmerna z energijsko razliko, je valovna dolžina pri mionskem vodikovem *manjša* za faktor $m_r/m_e = 186$, torej

$$\lambda^\mu = \frac{m_e}{m_r} \lambda = 3,5 \text{ nm}.$$

[3 točke]

Izpeljava v nadaljevanju *ni* zahtevana:

Celotna energija je enaka

$$W = -\frac{m_r e_0^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B^\mu} \frac{1}{n^2} = E_1^\mu \frac{1}{n^2},$$

$$E_1^\mu = -\frac{e_0}{8\pi\epsilon_0 r_B^\mu} e_0 = -2,53 \text{ kV } e_0 = -2,53 \text{ keV}.$$

Za valovno dolžino svetlobe, ki se izseva pri prehodu med stanjema z $n = 3$ in $n = 2$ velja:

$$\frac{hc}{\lambda^\mu} = \Delta W = E_1^\mu \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{4} \right) = 0,352 \text{ keV},$$

$$\lambda^\mu = \frac{hc}{\Delta W} = 3,52 \text{ nm}.$$