

1. $C = 0,7 \text{ N s}^2/\text{m}^2$, $v = 150 \text{ km/h} = 41,67 \text{ m/s}$, $d = 1,8 \text{ m}$, $l = 2,5 \text{ m}$, $k = 0,1$, $m = 1400 \text{ kg}$, $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

a)

Silo upora uravnovešajo sile lepenja F_1 med kolesi in cesto.

$$Cv^2 = 4F_1 \quad \Rightarrow \quad F_1 = \frac{Cv^2}{4} = 303,82 \text{ N} \approx 304 \text{ N}.$$

[2 t.]

b)

Sila lepenja lahko uravnovesi silo upora, dokler ta ne preseže mejne vrednosti v_0 , ko je presežena maksimalna sila lepenja na enem kolesu $F'_1 \leq gmk/4 = F_0 = 343 \text{ N}$.

$$Cv_0^2 = 4F'_1 \leq 4F_0 = gmk \quad \Rightarrow \quad v_0 \leq \sqrt{\frac{gmk}{C}} = 44,27 \text{ m/s} \approx 44 \text{ m/s} \approx 160 \text{ km/h}.$$

[1 t.]

c)

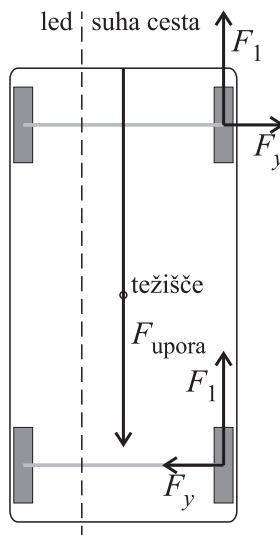
Sila lepenja, ki nasprotuje sili upora, deluje samo pod desnimi kolesi, zato se bo avtomobil začel, če se bo, vrteti okoli navpične osi skozi Silo lepenja v prvotni smeri gibanja sta enaki F_1 (naj bo to os x , vzporedna robu ceste), kot pravi besedilo naloge, in povzročata okoli težišča navor M_+ ; ročica vsake od sil je $d/2$, zato je

$$M_+ = 2F_1 \frac{d}{2} = F_1 d.$$

Navor sile upora okoli težišča je nič zaradi simetrije, saj prijemlje sila upora na sredini prednjega dela avtomobila in je ročica te sile glede na težišče nič.

Zaradi navora M_+ bi se avto vrtel in se na stiku vsakega desnega kolesa s cesto pojavi še pravokotna (v smeri osi y) komponenta sile lepenja F_y , ki deluje z navorom v nasprotni smeri kot M_+ .

Ker v besedilu piše, da se avtomobil zavrti, bosta sili F_y na obeh desnih kolesih po velikosti maksimalni in usmerjeni tako, da je navor vsake od njiju okoli težišča usmerjen nasprotno od M_+ .



Sila lepenja F_L je po eni strani vektorska vsota $\vec{F}_1$ in $\vec{F}_y$: $\vec{F}_L = \vec{F}_1 + \vec{F}_y$ in po drugi strani manjša ali enaka od F_0 in zaradi vrtenja na meji, kar nam da

$$F_1^2 + F_y^2 = F_0^2 \quad \implies \quad F_y = \sqrt{F_0^2 - F_1^2} = 159,2 \text{ N} \approx 160 \text{ N}.$$

Sili F_y imata gled en atežišče ročico $l/2$ tako da je njun navor po velikosti enak

$$M_- = 2F_y \frac{l}{2} = F_y l.$$

Iskani navor je

$$M = M_+ - M_- = F_1 d - F_y l = 148,9 \text{ Nm} \approx 150 \text{ Nm}.$$

[2 t.]

d)

V smeri gibanja se 2. Newtonov zakon za avtomobil zapiše kot

$$ma = -Cv^2 + 2F_1 = -\frac{Cv^2}{2} \quad \implies \quad a = -\frac{Cv^2}{2m} = 0,434 \text{ m/s}^2 \approx 0,43 \text{ m/s}^2,$$

kjer je a iskani pospešek avtomobila v smeri gibanja.

[1 t.]

e)

Pri mejni hitrosti avtomobila v_m sta sili vzdolž x , F'_1 , in vzdolž y , F'_y , enaki po vrsti

$$F'_1 = \frac{Cv_m^2}{4} \quad \text{in} \quad F'_y = \sqrt{F_0^2 - F_1'^2}.$$

Hkrati mora biti vsota navorov M'_+ in $-M'_-$ enaka nič, kar nam da

$$F'_1 d = F'_y l$$

oziroma

$$\frac{Cv_m^2}{4} d = \sqrt{F_0^2 - \left(\frac{Cv_m^2}{4}\right)^2}$$

in končno

$$v_m = \sqrt{\frac{klmg}{C\sqrt{l^2 + d^2}}} = v_0 \sqrt{\frac{l}{\sqrt{l^2 + d^2}}} = 39,9 \text{ m/s} \approx 144 \text{ km/h}.$$

[4 t.]

2. $m, k, l_0, s_1, \Delta l = 2,1 \text{ cm}, n_1 = 4, n_2 = 3$.

V vzdolžni smeri (x) je krožna frekvenca nihanja ω_L neodvisna od začetnega raztezka vzmeti. Enačba gibanja v vzdolžni smeri je

$$m\ddot{x} = -2kx,$$

kar nam da krožno frekvenco

$$\omega_{L1} = \omega_{L2} = \omega_L = \sqrt{\frac{2k}{m}}.$$

V prečni smeri (y) vrača utež pri odmiku y proti ravnovesni legi ustrezna komponenta oziroma komponenti sile, s katero je napeta vsaka vzmet. Ker so odmiki y majhni, se sila, s katero je napeta vzmet v mirovni legi, ne spremeni oziroma je to popravek višjega reda. Za velikost komponente sile v y smeri F_y dobimo

$$F_y = F \tan \varphi \approx F \frac{y}{l},$$

kjer je $F = ks$ sila, s katero je napeta vsaka vzmet, in $l = l_0 + s$ celotna dolžina napete vzmeti. Uporabili smo še oznaki s za raztezek vzmeti in l_0 za dolžino neraztegnjene vzmeti. Gibalna enačba v prečni smeri je torej

$$m\ddot{y} = -2F_y,$$

kar nam da

$$\ddot{y} + \frac{2ks}{ml}y = 0$$

oziroma

$$\omega_{Ti} = \sqrt{\frac{2k}{m} \frac{s_i}{l_i}} = \omega_L \sqrt{\frac{s_i}{l_0 + s_i}},$$

kjer je $i = 1$ oziroma 2 in sta raztezka s_i po vrsti s_1 in $s_2 = s_1 + \Delta l$.

Opaženo razmerje nihajnih časov je

$$n_i \equiv \frac{t_{Ti}}{t_{Li}} = \sqrt{\frac{\omega_{Li}^2}{\omega_{Ti}^2}} = \sqrt{\frac{l_0 + s_i}{s_i}}.$$

Imamo dve meritvi in dobimo dve enačbi z dvema neznankama

$$n_1^2 = \frac{l_0 + s_1}{s_1} \quad \text{in} \quad n_2^2 = \frac{l_0 + s_2}{s_2} = \frac{l_0 + s_1 + \Delta l}{s_1 + \Delta l}.$$

Z nekaj aritmetike dobimo

$$s_1 = \Delta l \frac{n_2^2 - 1}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{8}{7} \Delta l = 2,4 \text{ cm}$$

in

$$l_0 = s_1(n_1^2 - 1) = \Delta l \frac{(n_2^2 - 1)(n_1^2 - 1)}{n_1^2 - n_2^2} = \frac{8 \cdot 15}{7} \Delta l = 36 \text{ cm}.$$

[5 t.]

3. a)

Ko ploščica pada s hitrostjo v , se med levo in desno stranico inducira napetost $U_i = lvB$, ki požene tok I v takšni smeri, da magnetna sila $F_m = IlB$ zavira padanje. Na sliki pri besedilu teče tok v reži v desno, v ostalem delu ploščice pa v levo, tako da ostanejo tokovnice sklenjene. Če je višina reže a dovolj majhna v primerjavi z višino ploščice h , je presek, skozi katerega teče tok v desno, veliko manjši od preseka, skozi katerega teče tok v levo. V približku lahko zato pri računanju toka upoštevamo le upor vodnika z dolžino l in prečnim presekom ad :

$$R = \frac{\zeta l}{ad}, \quad I = \frac{U_i}{R} = \frac{vB ad}{\zeta}, \quad F_m = IlB = \frac{vlB^2 ad}{\zeta}, \quad a \ll h.$$

Ploščica doseže končno hitrost v_0 , ko magnetna sila uravnovesi težo:

$$F_m = F_g, \quad \frac{v_0 l B^2 ad}{\zeta} = \rho l h d g, \quad v_0 = \frac{g \rho \zeta}{B^2} \frac{h}{a}.$$

[3 t.]

b)

Na začetku ploščica pada s težnim pospeškom g . Značilni čas τ ocenimo s časom, v katerem bi pri prostem padu dosegla končno hitrost v_0 (glej graf $v(t)$ na desni):

$$\tau = \frac{v_0}{g} = \frac{\rho \zeta}{B^2} \frac{h}{a}.$$

*V resnici se hitrost eksponentno približuje končni hitrosti in je tako izračunani čas enak karakterističnemu času τ v enačbi

$$v(t) = v_0(1 - e^{-t/\tau}).$$

[3 t.]

c)

Da lahko izmerimo končno hitrost, mora biti hitrost konstantna na dovolj dolgi poti. Pogoji je izpolnjen, če v času pospeševanja ploščica naredi dovolj kratko pot v primerjavi s celotno potjo h :

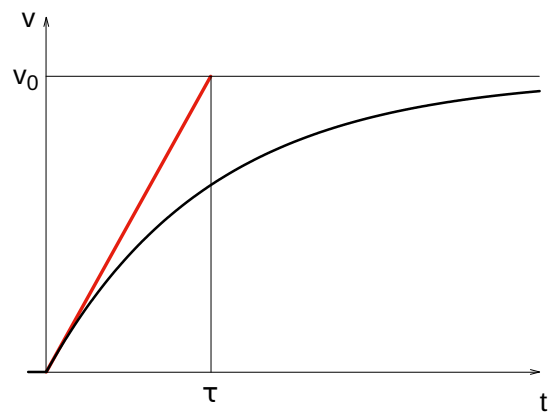
$$v_0 \tau \ll h, \quad \frac{g \rho^2 \zeta^2}{B^4} \frac{h^2}{a^2} \ll h, \quad B \gg \sqrt[4]{\frac{g \rho^2 \zeta^2 h}{a^2}}$$

Za približno oceno vzemimo $h = 20$ cm in $a = 2$ cm:

$$B \gg 0,07 \text{ T}.$$

Ker je odvisnost v četrtem korenu, je ocena precej neodvisna od izbire h in a ; prav tako je že pri polju, ki je dva krat večje od kritičnega, pogoj za meritev zadovoljivo izpolnjen.

[2 t.]



4. $r = 240 \text{ cm}$, $m_S = 900 \text{ kg}$, $m_{\text{Pu}} = 10 \text{ kg}$, $p = 0,568 \text{ W/g}$, $j^* = 1400 \text{ W/m}^2$, $a = 0,40$, $t_{1/2} = 87,7 \text{ let}$, $P(t)/P(0) = 0,80$.

a)

Gostota energijskega toka iz plutonijeva izvira na površju satelita je enaka

$$j_P = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{m_{\text{Pu}} p}{4\pi r^2} = 78,5 \text{ W/m}^2.$$

Energijski tok s Sonca vпада na satelit v obliki valjastega snopa s polmerom r , $P^* = j^* \pi r^2$. V ravnovesju je izsevani tok enak prejetemu:

$$4\pi r^2 \sigma T^4 = P + P^* = 4\pi r^2 j_P + \pi r^2 j^*, \quad T = \sqrt[4]{\frac{j^* + 4j_P}{4\sigma}} = 295 \text{ K} = 22 \text{ }^\circ\text{C}.$$

[2 t.]

b)

Zunanje površje lupine izseva ves energijski tok, ki nastaja v satelitu, in absorbirani tok s Sonca. Če temperaturo površja označimo s T_1 , velja:

$$(1 - a)4\pi r^2 T_1^4 = P + (1 - a)\pi r^2 j^* = 4\pi r^2 j_P + (1 - a)\pi r^2 j^*.$$

Sledi

$$T_1 = \sqrt[4]{\frac{4j_P + (1 - a)j^*}{4(1 - a)\sigma}} = 303 \text{ K} = 30 \text{ }^\circ\text{C}.$$

[2 t.]

Satelit prejema energijski tok, ki ga seva lupina, tok, ki nastaja v satelitu, in sevanje s svojega površja, ki se odbija od lupine. Če temperaturo površja označimo s T_0 , velja:

$$\begin{aligned} 4\pi r^2 T_0^4 &= (1 - a)4\pi r^2 T_1^4 + P + a4\pi r^2 T_0^4 = 2P + (1 - a)\pi r^2 j^* + a4\pi r^2 T_0^4 \\ &= 8\pi r^2 j_P + (1 - a)\pi r^2 j^* + a4\pi r^2 T_0^4. \end{aligned}$$

Sledi

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{8j_P + (1 - a)j^*}{4(1 - a)\sigma}} = 322 \text{ K} = 49 \text{ }^\circ\text{C}.$$

[2 t.]

*Za bilanco lupine tudi velja: izsevani tok s spodnje in zgornje ploskve je enak vsoti toka s Sonca in absorbiranega toka s satelita:

$$2(1 - a)4\pi r^2 T_1^4 = (1 - a)\pi r^2 j^* + (1 - a)4\pi r^2 T_0^4,$$

kar vodi do enakega rezultata kot zgoraj.

c)

Velja

$$P(t) = P(0) 2^{-t/t_{1/2}}, \quad \ln P(t) = \ln P(0) - t/t_{1/2} \ln 2.$$

Za čas, v katerem pade tok na 80 % začetnega, sledi

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{P(0)}{P(t)} = 28,2 \text{ let.}$$

[1 t.]