

1. $r = 10 \text{ cm}$, $l = 50 \text{ cm}$, $M = 1 \text{ kg}$.

a) Višino težišča palice izrazimo s kotom φ kot $z = \frac{1}{2}l(1 - \cos \varphi)$, višino uteži pa kot $h = -r\varphi$. Če potencialno energijo štejemo od lege pri $\varphi = 0$, lahko zapišemo:

$$W_{\text{pot}} = -mgr\varphi + \frac{1}{2}Mgl(1 - \cos \varphi),$$

od koder sledi

$$p = \frac{Ml}{2mr}.$$

b) Za podane vrednosti je $p = 2$, graf je pri d).

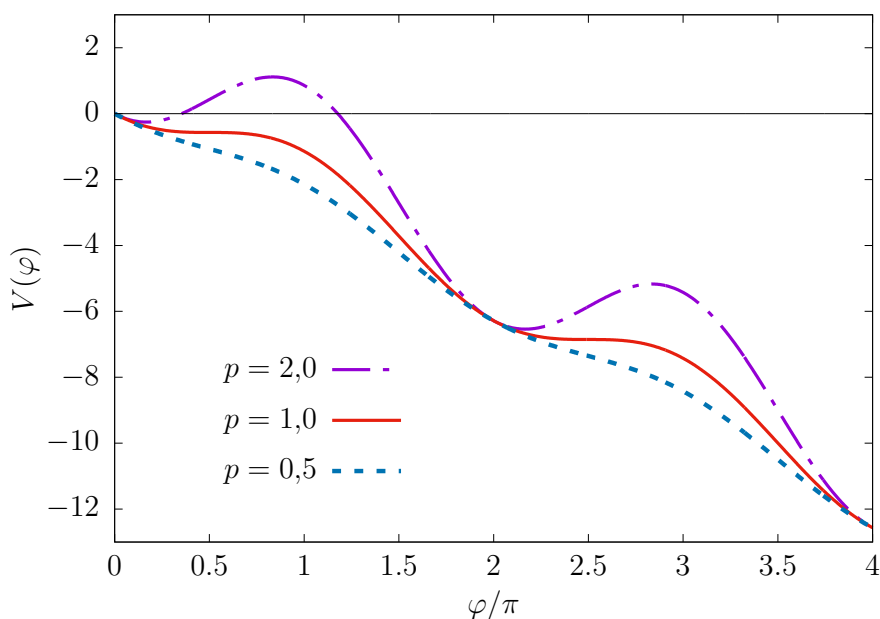
c) V ravnovesnem stanju je odvod potenciala enak 0. Z odvajanjem funkcije $-x + p(1 - \cos x)$, $x \equiv \varphi$, sledi

$$-1 + p \sin \varphi = 0, \quad \sin \varphi = \frac{1}{p}, \quad p \geq 1,$$

saj sinus kota ne more biti večji od 1. Mejni lega pri $p = 1$ ustrezajo koti

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{5\pi}{2} \dots = 90^\circ, 450^\circ \dots$$

d) Poleg $p = 1$ izberemo na primer $p = \frac{1}{2}$. Graf:



e) Za navor na vreteno v ravnovesju velja

$$-mgr + \frac{1}{2}Mgl \sin \varphi_0 = 0,$$

če s φ_0 označimo kot v ravnovesju. Če kot malo povečamo na vrednost $\varphi_0 + \Delta\varphi$, na vreteno deluje navor

$$M = \frac{1}{2}Mgl (\sin(\varphi_0 + \Delta\varphi) - \sin \varphi_0),$$

saj se navor uteži ne spremeni. Uporabimo adicijski izrek:

$$M = \frac{1}{2}Mgl [\sin(\varphi_0)(\cos \Delta\varphi - 1) + \sin \Delta\varphi \cos \varphi_0].$$

Za majhne kote je kosinus kar 1, sinus pa enak kotu vadianih:

$$M = \frac{1}{2}Mgl \cos \varphi_0 \Delta\varphi.$$

Za $\cos \varphi_0 > 0$ je lega stabilna, saj navor palice suče vreteno proti ravnovesni legi, za $\cos \varphi_0 < 0$ pa je lega labilna, saj navor palice suče vreteno iz mirovne lege. V prvem primeru imamo opravka s fizičnim nihalom, $\omega_0 = \sqrt{D/J}$, pri čemer je $D = M/\Delta\varphi = \frac{1}{2}Mgl \cos \varphi_0$ in vztrajnostni moment sistema $J = mr^2 + \frac{1}{3}Ml^2$. Sistem torej niha s frekvenco

$$\nu = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3Mgl \cos \varphi_0}{6mr^2 + 2Ml^2}}.$$

f) Spremembo potencialne energije lahko za majhen odmik iz ravnovesne lege zapišemo

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{pot}} &= -mgr\Delta\varphi + \frac{1}{2}Mgl[\cos \varphi_0 - \cos(\varphi_0 + \Delta\varphi)] \\ &= -mgr\Delta\varphi + \frac{1}{2}Mgl[\cos \varphi_0(1 - \cos(\Delta\varphi)) + \sin \varphi_0 \sin(\Delta\varphi)] \\ &\approx -mgr\Delta\varphi + \frac{1}{2}Mgl[\cos \varphi_0(1 - 1 + \frac{1}{2}(\Delta\varphi)^2) + \sin \varphi_0 \Delta\varphi] \\ &= [-mgr + \frac{1}{2}Mgl \sin \varphi_0] \Delta\varphi + \frac{Mgl \cos \varphi_0}{4} (\Delta\varphi)^2. \end{aligned}$$

Prvi člen je 0, saj izraz v oglatem oklepaju ustreza navoru v ravnovesni legi (glej e)). V primeru stabilnega ravnovesja ($\cos \varphi_0 > 0$) potencialna energija narašča z odklikom od ravnovesne lege, v primeru labilnega ravnovesja ($\cos \varphi_0 < 0$) pa pada. V drugem primeru narašča kinetična energija, $W_{\text{kin}} = \frac{1}{2}J\omega^2$. Če je je začetna kinetična energija 0, lahko zapišemo

$$\frac{1}{2}J\omega^2 + \frac{Mgl \cos \varphi_0}{4} (\Delta\varphi)^2 = 0, \quad \cos \varphi_0 < 0.$$

Izraz za J smo že izpeljali, za ω pa velja

$$\omega = \sqrt{\frac{3Mgl |\cos \varphi_0|}{6mr^2 + 2Ml^2}} \Delta\varphi = \omega_0 \Delta\varphi.$$

Kotna hitrost torej narašča premo sorazmerno z odklikom od ravnovesne lege. Rešitev enačbe je res eksponentna funkcija, saj je odvod eksponentne funkcije tudi eksponentna funkcija. Hitro se lahko prepričamo, da je rešitev enačbe:

$$\Delta\varphi = Ae^{\omega_0 t}, \quad \omega \equiv \frac{d\Delta\varphi}{dt} = A\omega_0 e^{\omega_0 t} = \omega_0 \Delta\varphi.$$

2. $\lambda = 275 \text{ nm}$, $A_i = 3,7 \text{ eV}$, $S = 100 \text{ cm}^2$, $d = 6 \text{ cm}$, $\alpha = 60^\circ$, $\eta = 10^{-5}$.

a) Največja energija elektronov, ki izstopajo iz plošče, je enaka

$$W_{\text{el}} = h\nu - A_i = 0,8 \text{ eV}.$$

Na nasprotni plošči se nabira negativni naboj, plošča, ki jo osvetljujemo, pa izgublja elektrone in postaja pozitivna. Izbiti elektroni ne morejo več doseči druge plošče, ko je njihova energija manjša ali enaka razliki potencialnih energij med ploščama, $e_0 U$, kjer je U napetost med ploščama. V mejnem primeru je

$$U = \frac{W_{\text{el}}}{e_0} = 0,8 \text{ V}.$$

Tedaj je na ploščah naboj

$$e = CU = \frac{\varepsilon_0 S U}{d} = 1,2 \cdot 10^{-12} \text{ As}.$$

b) Moč svetlobe, ki vpada na ploščo, je

$$P = S j \cos \alpha = 5 \text{ mW}.$$

Število fotonov, ki na enoto časa vpadejo na ploščo, je

$$\frac{N_\gamma}{t} = \frac{P}{h\nu} = 7 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}.$$

Število elektronov v časovni enoti, ki zapustijo ploščo, pa je manjše za faktor η :

$$\frac{N_{\text{el}}}{t} = \eta \frac{N_\gamma}{t} = 7 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}.$$

To ustreza začetnemu električnemu toku

$$I = e_0 \frac{N_{\text{el}}}{t} = 11 \text{ nA}.$$

3. Parametri v nalogi so: dolžina vsake tuljave l , število ovojev vsake tuljave N , prečni presek prve tuljave S_1 in druge tuljave S_2 , kjer velja $S_2 < S_1$, razdalja med središči tuljav je x , po obeh tuljavah teče tok I .

Polje v dolgi tuljavi z dolžino a in n ovoji, po kateri teče tok I je $B = \mu_0 I n / a$.

a) Vsaka od tuljav ima sama zase v notranjosti gostoto magnetnega polja $B = \mu_0 I N / l$. V predelu, kjer se nahaja v prvi (večji) tuljavi druga (manjša) tuljava, se polji obeh tuljav seštejeta. V tem delu je zato znotraj manjše tuljave gostota magnetnega polja $2B$, medtem ko ostaja zunaj druge tuljave v tem delu gostota magnetnega polja B .

Do tega rezultata lahko pridemo tudi preko Amperovega zakona za dolgo tuljavo z dolžino $a = l - x$. Za predel zunaj manjše tuljave zanka, ki obkroža le vodnike večje tuljave, na razdalji a obkroži $N' = N(l - x)/l$ ovojev in je v tem delu gostota magnetnega polja $B' = \mu_0 I N' / a = \mu_0 I N (l - x) / (l(l - x)) = B$. V predelu znotraj manjše tuljave po Amperovem zakonu objamemo natanko dvakrat več ovojev, po katerih teče tok I , zato je tam polje $2B$.

b) V nalogi je podana gostota magnetne energije $w_m = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0}$, kjer naj bo B gostota magnetnega polja v posamezni tuljavi, ko sta ti vsaksebi. Celotno magnetno energijo dobimo tako, da seštejemo prispevke vseh delov obeh tuljav, ko sta središči med seboj razmaknjeni za x . Dolžina dela, kjer je mala tuljava v veliki, je $l - x$ (glej sliko). Dobimo

$$W_m = w_m [S_1 x + S_2 x + (l - x)(S_1 - S_2) + 4(l - x)S_2] = \frac{B^2}{2\mu_0} [lS_1 + (3l - 2x)S_2] .$$

c) Napetost v tuljavi se inducira, kadar se spreminja pretok skozi tuljavo. Pretok skozi tuljavo se za eno in za drugo tuljavo spreminja le v delu, kjer je krajišče druge tuljave. Poglejmo, recimo, manjšo tuljavo.

V času Δt se premakne za $\Delta x = v\Delta t$. To pomeni, da se je v tem času pretok skozi tuljavo spremenil za $\Delta N = Nv\Delta t/l$ ovojev. Ker malo tuljavo vlečemo ven, se je pretok skozi ΔN ovojev zmanjšal z $2B\Delta NS_2$ na $B\Delta NS_2$, saj je polje v mali tuljavi v delu, ki je v večji tuljavi, enako $2B$, zunaj prekrivajočega se dela pa le B . Inducirana napetost U_2 je zato

$$U_2 = -\frac{\Delta\Phi_m}{\Delta t} = -\frac{(B - 2B)S_2\Delta N}{\Delta t} = \frac{BS_2Nv\Delta t/l}{\Delta t} = \frac{BS_2Nv}{l} = \frac{\mu_0 I N^2 S_2 v}{l^2} .$$

Razmislek za prvo tuljavo je analogen, saj se pretok v prvi tuljavi ravno tako zmanjša v času Δt za povsem enako vrednost, ker je gostota magnetnega polja enaka $2B$ le znotraj manjše tuljave (ki je v večji), povsod drugod pa je gostota magnetnega polja enaka B . Dobimo

$$U_1 = U_2 = \frac{\mu_0 I N^2 S_2 v}{l^2} .$$

Pozitiven predznak obeh induciranih napetosti pomeni, da ženeta ti dve napetosti po tuljavah tok v isto smer, kot ga poganja vir. Do tega predzanak lahko pridemo tudi z Lenzovim pravilom: pretok skozi tuljavi se manjša, torej bo inducirana napetost gnala tok v tako smer, da bi se pretok povečal, torej v isto smer kot teče tok.

d) Razmislek o predznaku inducirane napetosti v delu c) nam pove, da medtem, ko manjšo tuljavo vlečemo iz večje, obe inducirani napetosti ženeta tok v isto smer kot tokovni vir. Tokovni vir zato v tem času oddaja za toliko manjšo moč oziroma zaradi inducirane napetosti prejema moč

$$P = (U_1 + U_2)I ,$$

saj je lastnot tokovnega vira, da ohranja tok konstanten. V času t prejme zato vir delo

$$A_{\text{vir}} = (U_1 + U_2)It = \frac{2\mu_0 I^2 N^2 S_2 vt}{l^2}.$$

e) Silo, s katero moramo vleči manjšo tuljavo iz večje, izračunamo preko energijske bilance za sistem dveh tuljav, priključenih na tokovni vir. Sila F je stalna in v času t opravi na sistemu delo $A_F = Fx = Fvt$. Sprememba magnetne energije ΔW_m sistema v času t je enaka vsoti dela sile F in dela vira na sistemu A_v

$$\Delta W_m = A_F + A_v.$$

Ker smo v d) pokazali, da vir delo prejema, je $A_v = -A_{\text{vir}}$ in dobimo v času t spremembo magnetne energije

$$\frac{B^2}{2\mu_0} [-2vtS_2] = Fvt - \frac{2\mu_0 I^2 N^2 S_2 vt}{l^2},$$

kjer je v oglatem oklepaju edini od x odvisen del magnetne energije iz a) dela naloge. Faktor vt se krajša pri vseh členih, vstavimo $B = \mu_0 IN/l$ in dobimo

$$-\frac{\mu_0 I^2 N^2 2S_2}{2l^2} = F - \frac{2\mu_0 I^2 N^2 S_2}{l^2}$$

oziroma

$$F = \frac{2\mu_0 I^2 N^2 S_2}{l^2} - \frac{\mu_0 I^2 N^2 S_2}{l^2} = \frac{\mu_0 I^2 N^2 S_2}{l^2} = \mu_0 S_2 \left(\frac{NI}{l} \right)^2.$$