

IZBIRNO TEKMOVANJE ZA OLIMPIJSKO EKIPO

Ljubljana, 21. 4. 2017

Rešitve

1. a) Drugi atom ne vpliva; vsak kisik niha z enako frekvenco, kot če bi bilo drugo krajšice pritrjeno:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m_O}} = 2,53 \cdot 10^{14} \text{ Hz}, \quad \nu_1 = \frac{\omega_1}{2\pi} = 4,0 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

- b) Velja

$$2m_O s_O + m_C s_C = 0, \quad s_C = -\frac{2m_O}{m_C} s_O, \quad s_{C0} = \frac{8}{3} s_{O0}.$$

- c) Raztezek

$$s = s_O - s_C = \left(1 - \frac{s_C}{s_O}\right) s_O = \frac{2m_O + m_C}{m_C} s_O = \frac{11}{3} s_O.$$

- d)

$$F = -ks, \quad a_O = -\omega_2^2 s_O, \quad m_O a_O = -m_O \omega_2^2 s_O = -ks = -k \frac{2m_O + m_C}{m_C} s_O$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k(2m_O + m_C)}{m_O m_C}} = \omega_1 \sqrt{\frac{2m_O + m_C}{m_C}} = \omega_1 \sqrt{\frac{11}{3}},$$

$$\nu_2 = \nu_1 \sqrt{\frac{11}{3}} = 7,7 \cdot 10^{13} \text{ Hz}.$$

- e)

$$\lambda_{\text{maks}} = \frac{k_W}{T} = 10,3 \text{ } \mu\text{m}, \quad \lambda_1 = \frac{c}{\nu_1} = 7,5 \text{ } \mu\text{m}, \quad \lambda_2 = \frac{c}{\nu_2} = 3,9 \text{ } \mu\text{m}.$$

Sevanje z Zemlje vzbudi z večjo verjetnostjo prvi način nihanja.

- f) $s = s_0 \cos \omega t$, $v_{O,1} = -\omega_1 s_0 \sin \omega_1 t$, $v_{O,2} = -\omega_2 s_{O0} \sin \omega_2 t$, $v_{C,2} = \omega_2 s_{C0} \sin \omega_2 t$.

$$\begin{aligned} W_{\text{pr}} &= \frac{1}{2} k s^2 = k s_0^2 \cos^2 \omega t. \\ W_{\text{kin1}} &= \frac{1}{2} m_O v_O^2 = m_O \omega_1^2 s_0^2 \sin^2 \omega_1 t = k s_0^2 \sin^2 \omega_1 t. \\ W_{\text{kin2}} &= \frac{1}{2} m_O v_O^2 + \frac{1}{2} m_C v_C^2 \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 (2m_O s_{O0}^2 \sin^2 \omega_2 t + m_C s_{C0}^2 \sin^2 \omega_2 t) \\ &= \frac{1}{2} \frac{k(2m_O + m_C)}{m_O m_C} \left(2m_O + \frac{4m_O^2}{m_C}\right) s_{O0}^2 \sin^2 \omega_2 t \\ &= k \left(\frac{2m_O + m_C}{m_C}\right)^2 s_{O0}^2 \sin^2 \omega_2 t \\ &= k s_0^2 \sin^2 \omega_2 t. \end{aligned}$$

$$W_{\text{pr}} + W_{\text{kin}} = k s_0^2 = \text{konstanta}.$$

- g)

$$h\nu_2 = k \left(\frac{2m_O + m_C}{m_C}\right)^2 s_{O0}^2,$$

$$s_{O0} = \left(\frac{m_C}{2m_O + m_C}\right) \sqrt{\frac{h\nu_2}{k}} = 1,5 \cdot 10^{-12} \text{ m}.$$

2. a) Hitrost žoge na začetku naj bo $v_0 = 4 \text{ m/s}$. Sunek sile trenja v navpični smeri je $\int F dt = mv_y$ in spremeni gibalno količino žoge, da ima hitrost v navpični smeri v_y . Po drugi strani navor sile trenja ustavlja vrtenje žoge $R \int F dt = J(\omega_0 - \omega_y)$, kjer je $v_0 = R\omega_0$ in $v_y \leq R\omega_y$, saj bo trenje delovalo na žogo le, dokler žoga "podrsava" ob steni. Žoga podrsava, dokler "koplje" oziroma dokler je kotna hitrost vrtenja večja od navpične komponente hitrosti težišča žoge. V mejnem primeru bo v neenačbi veljal enačaja, torej je pogoj za maksimalno hitrost navzgor $v_y = R\omega_y$. Upoštevamo zadnjo enačbo, se iz prejšnjih dveh znebimo sunka sile trenja in dobimo

$$v_y = \frac{\beta}{1 + \beta} v_0 = \frac{2}{5} v_0 = 1,6 \text{ m/s}.$$

- b) Kotna hitrost žoge je $\omega_y = v_y/R = 10 \text{ s}^{-1}$.

- c) Delo trenja je

$$\begin{aligned} A_t &= \int F ds = \int F(R d\varphi - dy) = \int F(R\omega(t) - v_y(t)) dt = \\ &= R \frac{\omega_0 + \omega_y}{2} \int F dt - \frac{v_y}{2} \int F dt = \frac{v_0 + v_y}{2} mv_y - \frac{v_y}{2} mv_y = \\ &= \frac{1}{2} mv_0 v_y = 1,92 \text{ J}. \end{aligned}$$

- d) Iz energijskega izreka $W_{\text{koncna}} = W_{\text{zacetna}} - A_t$ dobimo

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv_y^2(1 + \beta) = \frac{1}{2}mv_0^2(1 + \beta) - \frac{1}{2}mv_0v_y$$

in od tu $v^2 = v_0^2$ in $v = 4 \text{ m/s}$.

Končno dobimo $\tan \theta = v_y/v$ in od tu kot $\theta = 21,8^\circ = 22^\circ$.

3. S sferičnimi koordinatami r, ϑ in φ je krajevni vektor do kraja na površju Zemlje $\vec{r} = R\hat{r}$, kjer je $\hat{r}$ enotski vektor v navpični (radialni) smeri $\hat{r} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$. Analogno je enotski vektor v smeri severa v poljubnem kraju na Zemlji $\hat{S} = -\hat{\vartheta} = (-\cos \vartheta \cos \varphi, -\cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)$ in enotski vektor v smeri proti vzhodu $\hat{V} = \hat{\varphi} = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)$.

Na severni polobli ustreza zemljepisna širina $\lambda = 45^\circ$ kotu $\vartheta = 45^\circ$.

Magnetni dipol je $\vec{p}_m = p_m \hat{p}$, kjer je enotski vektor $\hat{p} = (\sin \gamma, 0, -\cos \gamma)$, ker je dipol obrnjen "navzdol". Posamezno komponento vektorja $\vec{B}$ dobimo z ustrezno projekcijo. Navpična komponenta polja je tako $B_\perp = \vec{B} \cdot \hat{r}$, komponenta polja v smeri severa je $B_S = \vec{B} \cdot \hat{S}$ in komponenta polja v smeri proti vzhodu $B_V = \vec{B} \cdot \hat{V}$. To, da so enotski vektorji $\hat{r}, \hat{S}$ in $\hat{V}$ med seboj pravokotni in da je dipol v središču Zemlje, poenostavi izračune.

- a) Z vpeljavo velikosti $B_0 = \mu_0 p_m / 4\pi R^3 = 30,936 \mu\text{T}$ dobimo

$$B_\perp = 2B_0 \hat{p} \cdot \hat{r}, \quad B_S = -B_0 \hat{p} \cdot \hat{S}, \quad B_V = -B_0 \hat{p} \cdot \hat{V}.$$

Kar se poenostavi v

$$B_\perp = 2B_0(\sin \vartheta \cos \varphi \sin \gamma - \cos \vartheta \cos \gamma),$$

$$B_S = B_0(\cos \vartheta \cos \varphi \sin \gamma + \sin \vartheta \cos \gamma),$$

$$B_V = B_0 \sin \gamma \sin \varphi.$$

Od tu zlahka dobimo vse odgovore pri vprašanju a), postavimo le $\gamma = 0$. Dijaki lahko nalogo seveda rešujejo le za konkretne tri točke in le za te poiščejo vektorja $\hat{r}$ in $\hat{S}$, saj iz simetrije vedo, da je $B_V = 0$ in zato tudi $D = 0$.

- $\lambda = 0$ Sledi $\vartheta = 90^\circ$, zato $B_\perp = 0$ in $B_S = B = B_0$ ter $I = 0$.

Alternativno: $\hat{r} = (1, 0, 0)$ in $\hat{S} = (0, 0, 1)$ in sledi enak rezultat.

- $\lambda = 45^\circ$ Sledi $\vartheta = 45^\circ$, zato $B_\perp = -B_0\sqrt{2}$ in $B_S = B_0\sqrt{2}/2$ ter $\text{tg} I = -B_\perp/B_S = 2$. Dobimo $B_\perp = -43,75 \mu\text{T}$, $B_S = 21,88 \mu\text{T}$, $B = 48,91 \mu\text{T}$ in $I = 63,4^\circ$.

Alternativno: $\hat{r} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ in $\hat{S} = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ in sledi enak rezultat.

- $\lambda = 90^\circ$ Sledi $\vartheta = 0$, zato $B_\perp = -2B_0$ in $B_S = 0$. Dobimo $B_\perp = -61,87 \mu\text{T}$, $B_S = 0$, $B = 61,87 \mu\text{T}$ in $I = 90^\circ$.

Alternativno: $\hat{r} = (0, 0, 1)$ in $\hat{S} = (-1, 0, 0)$, če smo vsaj infinitezimalno oddaljeni od severnega pola, na polu $\hat{S}$ ni definiran. Dobimo enak rezultat.

- b) Iz podatkov razberemo, da je magnetni dipol nagnjen v ravnini $\varphi = 0^\circ$ in $\varphi = 180^\circ$, ker je v omenjenih dveh točkah $D = 0$. Primerjava točk z zemljepisnima dolžinama $\varphi = 0^\circ$ in $\varphi = 180^\circ$ nam da

$$\varepsilon \equiv \frac{B_2}{B_1} = \frac{\sin(\vartheta + \gamma)}{\sin(\vartheta - \gamma)}.$$

Od tu

$$\text{tg} \gamma = \text{tg} \vartheta \left(\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1} \right) \implies \gamma = 10,8^\circ.$$

Če dijak na začetku γ definira drugače, lahko dobi drug predznak kota. Prav zato je potrebno, da opiše smer $\vec{p}_m$ še opisno: dipol je usmerjen proti jugu in proti $\varphi = 0^\circ$.

- c) Z znanim γ in ϑ izračunamo B_0

$$B_0 = \frac{B_2}{\sin(\vartheta + \gamma)} = \frac{B_1}{\sin(\vartheta - \gamma)} = 30,2 \mu\text{T}$$

in od tu velikost magnetnega momenta

$$p_m = \frac{4\pi R^3 B_0}{\mu_0} = 7,8 \cdot 10^{22} \text{ Am}^2.$$

- d) Iz $\varphi = 90^\circ$ in $\vartheta = 45^\circ$ dobimo izraza za komponenti polja proti severu $B_S = B_0 \sin \vartheta \cos \gamma$ in proti vzhodu $B_V = B_0 \sin \gamma$. Njuno razmerje je

$$\text{tg} D = \frac{B_V}{B_S} = \frac{\text{tg} \gamma}{\sin \vartheta} \implies D = +15,1^\circ.$$