

IZBIRNO TEKMOVANJE ZA OLIMPIJSKO EKIPO

Ljubljana, 23. 4. 2015

Na listu so 3 naloge, čas reševanja nalog je 120 minut.

1. Luna in Zemlja, rešitev:

Zadoščala bo gradacija na 1/4 točke, predvsem zaradi vprašanj od e) do g).

a) Gremo z r na $r + \Delta r$:

$$\Delta W_p = W_p(r + \Delta r) - W_p(r) = -\frac{mm_0G}{r + \Delta r} + \frac{mm_0G}{r} =$$

$$\frac{mm_0G}{r} \left(1 - \left(1 + \frac{\Delta r}{r} \right)^{-1} \right) = \frac{mm_0G\Delta r}{r^2}.$$

Eno točko dobi, če pride do konca prve vrstice, za razvoj in končni rezultat še eno točko.

b)

$$F_g = -\frac{\Delta W_p(\Delta r)}{\Delta r} = -\frac{mm_0G}{r^2}$$

Točko dobi tudi, če spregleda predznak $-$, ker gledamo predvsem velikost sile.

c)

$$\vec{F}_i = -\frac{\Delta W_p(\Delta r)}{\Delta r} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = -\frac{mm_0G}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Če gre r v $r - \Delta r$, potem se spremeni predznak spremembe potencialne energije in predznak vektorja premika: $\Delta \vec{r}$ gre v $-\Delta \vec{r}$, torej

$$\vec{F}_i = -\frac{\Delta W_p(\Delta r)}{\Delta r} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = +\frac{mm_0G}{r^2} \cdot \left(-\frac{\vec{r}}{r} \right) = -\frac{mm_0G}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$

Pol točke bi dal za prvi del - določitev smeri, pol točke za utemeljitev, da je sila enaka, če računamo s premikom v nasprotni smeri.

d) Vstavimo g_0 in U_P v (3)

$$h = \frac{m_L G}{r_0} \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \gamma - 1)}{2} \frac{R^2}{m_Z G} = \frac{3 \cos^2 \gamma - 1}{2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 \frac{m_L}{m_Z} R$$

Tudi če ni tako lepo poenostavljeno, lahko dobi točko.

e) Luna mora biti v zenitu ($\gamma = 0$) ali anti-zenitu ($\gamma = \pi$).

$$h_p = \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 \frac{m_L}{m_Z} R = 0,357 \text{ m}$$

Pol točke bi dal za oba kota (vsak 1/4 točke) in pol za izračun.

f) Luna mora biti tik nad obzorjem ($\gamma = \pi/2$).

$$h_o = -\frac{1}{2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 \frac{m_L}{m_Z} R = 0,179 \text{ m}$$

Pol točke bi dal za kot in pol za izračun.

- g) Na sliki mora biti preko Zemlje narisana elipsa, ki ima daljšo os v smeri Zemlja-Luna. Glede na e) in f) bi morala biti krajša (pokončna) os za nek Δy manjša od polmera Zemlje, pri tem bi morala biti daljša os elipse za $\Delta x = 2\Delta y$ daljša od polmera Zemlje.

Dal bi pol točke za pravilno obliko in orientacijo elipse in še pol točke za približno pravo razmerje med Δx in Δy na skici.

- h) En pomembnejših delov naloge.

Vrtita se tako Zemlja kot Luna, plima na Zemlji je za fiksni kot δ zavrnjena glede na zveznico Zemlja-Luna. Do pravega rezultata pridemo v nekaj korakih. Ker je $\omega_0 > \omega_L$, plimska deformacija v zunanjem opazovalnem sistemu prehiteva Lunin zenit oziroma je plimska deformacija zavrnjena na sliki g) za pozitiven kot (kontra urinim kazalcem) glede na zveznico Zemlja-Luna. Ker se Zemlja vrti proti vzhodu, se Luna po nebu navidez premika proti zahodu. Ker je plimska deformacija vzhodno od Lune, se na nekem mestu na Zemlji najprej pojavi Luna v zenitu in čez $\Delta t = 12$ minut še največja plima. Za opazovalca na Zemlji torej prehiteva Luna. Kot δ izračunamo takole.

Recimo, da je v nekem trenutku Luna v zenitu. Čez čas Δt bo na istem mestu na Zemlji največja plima. V tem času se je Zemlja zavrtela za kot $\phi_Z = \omega_0 \Delta t$, Luna pa se je tudi premaknila na svojem obhodu okoli Zemlje v isti smeri za kot $\phi_L = \omega_L \Delta t$. Kot med največjo plimo in zveznico Zemlja-Luna je

$$\delta = \phi_Z - \phi_L = (\omega_0 - \omega_L) \Delta t = 2\pi \Delta t \left(\frac{1}{t_0} - \frac{1}{t_L} \right) = 2,9^\circ .$$

Eno točko bi dal za razmislek o prehitevanju (ni nujno enak mojemu, a mora biti pravilen in smiseln. Drugo točko bi dal za razmislek o vplivu obeh gibanj (vrtenja Zemlje in kroženja Lune) in izračun kota.

- i) Glavni del naloge.

Iz premika od r na $r + \Delta r$ pri fiksni kotu φ in ustrezne spremembe potencialne energije dobimo radialno komponento sile

$$\begin{aligned} \vec{F}_r = & -k \frac{m_L^2 G}{r_0^2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} \left(\frac{R^3}{(r_0 + \Delta r)^3} - \frac{R^3}{r_0^3} \right) \frac{1}{\Delta r} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = \\ & -3k \frac{m_L^2 G}{r_0^2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^5 \frac{3 \cos^2 \varphi - 1}{2} \frac{\vec{r}_0}{r_0} \end{aligned}$$

Iz premika od φ na $\varphi + \Delta \varphi$ pri fiksni oddaljenosti $r = r_0$ in ustrezne spremembe potencialne energije dobimo tangencialno komponento sile

$$\vec{F}_t = -k \frac{m_L^2 G}{r_0} \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \left(\frac{R}{r_0} \right)^3 \frac{3}{2} (\cos^2(\varphi + \Delta \varphi) - \cos^2 \varphi) \frac{1}{r_0 \Delta \varphi} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} ,$$

kjer je premik $\Delta r = r_0 \Delta \varphi$. Razliko $\cos^2$ poenostavimo s pomočjo adicijskega izreka in dobimo v oklepaju $-2 \cos \varphi \sin \varphi \Delta \varphi$, kar nam na koncu da

$$\vec{F}_t = -3k \frac{m_L^2 G}{r_0^2} \left(\frac{R}{r_0} \right)^5 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} ,$$

kjer kaže enotski vektor $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}$ v smeri pravokotno na krajevni vektor $\vec{r}_0$ stran od smeri, kjer je kot φ enak 0. Predznak $-$ v rešitvi za $\vec{F}_t$ torej pomeni, da vleče telo, ki je v legi $\varphi \neq 0$ nazaj proti legi $\varphi = 0$, ki je očitno ravnovesna lega. Sila kaže tako, da bi zmanjšala kot δ

med smerjo Luninega zenita in smerjo največje plime.

Točke bi razdelil tako, da gresta po dve za vsako silo, od tega po ena vsakič za zapis in izračun spremembe potencilane energije. Druga točka naj gre vsakič za pravilno interpretacijo predznakov oziroma pravilni izraz za vektor vsake od sil s pojasnilom, kam sila kaže (proti ali stran od Zemlje oziroma proti ali stran od orientacije $\delta = 0$). Številsko vrednost obeh sil dobimo tako, da postavimo $\varphi = -\delta$, saj Luna zaostaja za plimsko deformacijo, ko sistem opazujemo od zunaj. Pri tem se spremni tudi predznak enotskega vektorja $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}$, tako da ima sila smer proti kotu največje plime, kot smo ugotovili zgoraj. $F_t = 1,13 \cdot 10^8$ N.

- j) Navor je sila krat ročica, ki je pravokotna na silo. V našem primeru je pravokotna ročica sile $\vec{F}_t$ kar $\vec{r}_0$ torej je velikost navora Zemlje na Luno

$$M_L = 3k \frac{m_L^2 G}{r_0} \left(\frac{R}{r_0} \right)^5 \cos \varphi \sin \varphi = 4,346 \cdot 10^{16} \text{ Nm}.$$

Iz razmisleka o smeri sile v vprašanju i) je očitno, da Luno vleče proti največji plimi, ki se vrti proti vzhodu in je pred Luno. To pomeni, da plimska deformacija na Zemlji kroženje Lune pospešuje. Luna zaradi tega povečuje orbitalno vrtilno količino. Pol točke bi dal za izračun velikost navora, pol pa za pravilno ugotovljeno in argumentirano smer delovanja navora na Luno.

- k) Ker se mora v sistemu Zemlja-Luna skupna vrtilna količina ohranjati, se mora vrtilna količina Zemlje na račun povečevanja orbitalne vrtilne količine Lune manjšati. To vidimo tudi iz predznaka navora na Zemljo, ki je nasprotno enak navoru Zemlje na Luno. Posledično se rotacija Zemlje okoli lastne osi ustavlja, kar pomeni, da se dolžina dneva na Zemlji veča, istočasno se zmanjšuje število dni v letu.

Dodatna razlaga za popravljavce: Efekt je opazen, a majhen - trenutno se v sto letih dan podaljša za 2,4 ms.

Pol točke bi dal za opazko o ohranitvi celotne vrtilne količine ali za argumentacijo ustavljanja na podlagi nasprotnega navora Lune na Zemljo. Pol točke naj gre za pravilno ugotovitev, da se rotacija Zemlje ustavlja.

Pri vseh vprašanjih v zadnjem delu je potrebno paziti na propagacijo napake - če se kdo zmoti glede katerega od predznakov in potem pravilno argumentira dogajanje z Luno in Zemljo na podlagi tega napačnega predznaka, naj bi za ta podvprašanja dobil vse točke.