

IZBIRNO TEKMOVANJE ZA OLIMPIJSKO EKIPO

Ljubljana, 23. 4. 2015

Na listu so 3 naloge, čas reševanja nalog je 120 minut.

1. V nalogi raziskujemo gravitacijsko polje okoli Zemlje, gibanje Lune okoli Zemlje in medsebojni gravitacijski vpliv obeh teles. V nalogi bomo Luno ves čas obravnavali kot točkasto telo. Najprej si oglejmo splošni opis, ki je posebej uporaben pri obravnavi medsebojnega gravitacijskega vpliva med telesi.

Na opazovano točkasto telo z maso m_0 v bližini drugega razsežnega telesa z maso m deluje gravitacijska sila, ki jo lahko izračunamo tako, da seštejemo sile vseh delčkov dm drugega telesa na opazovano telo z maso m_0 . Tako seštevanje (integriranje) je matematično zahtevno, saj moramo seštevati sile, ki so vektorji. Zato silo pogosto računamo drugače. In sicer s pomočjo potencialne energije oziroma z vpeljavo koncepta gravitacijskega potenciala. Spomnimo se, da je sprememba potencialne energije definirana kot negativno delo sile teže

$$\Delta W_p = -A = -\vec{F}_g \cdot \Delta \vec{r}, \quad (1)$$

kjer je $\Delta \vec{r}$ majhen premik opazovanega telesa, torej sprememba lege tega telesa. Z vpeljavo gravitacijskega potenciala U_g lahko enostavno zapišemo potencialno energijo opazovanega telesa z maso m_0 v bližini drugega telesa z maso m : $W_p(\vec{r}) = m_0 U(\vec{r})$, kjer je $\vec{r}$ krajevni vektor lege opazovanega telesa in $U(\vec{r})$ gravitacijski potencial drugega telesa na mestu $\vec{r}$.

Ker delamo vse račune za majhne premike, ohranimo v vseh računih le člene do prve potence v Δr oziroma upoštevamo, da je $\Delta r/r \ll 1$. V tem primeru lahko uporabimo naslednje matematične poenostavitve: za $x \ll 1$ velja $(1+x)^n = 1+nx$, $\cos(x) = 1$ in $\sin(x) = x$, kjer je kot x merjen v radianih.

Uporabnost koncepta potenciala preverimo pri izračunu gravitacijske sile na telo v bližini homogene krogle z maso m in s polmerom R .

- a) Koordinatno izhodišče postavimo v središče krogle. Izven krogle ($r > R$) je zaradi simetrije potencial $U(\vec{r})$ lahko odvisen le od razdalje r od središča krogle, torej $U(\vec{r}) = U(r)$. Izkaže se, da velja $U(r) = -\frac{mG}{r}$, kjer je $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ gravitacijska konstanta. Uporabi ta potencial in izrazi spremembo potencialne energije točkastega telesa z maso m_0 kot funkcijo Δr , ko ga premaknemo v radialni smeri z oddaljenosti r od središča krogle na razdaljo $r + \Delta r$. Ob tem velja, da je velikost premika Δr mnogo manjša od r : $\Delta r \ll r$. [1 točka]
- b) S pomočjo rezultata pri vprašanju (a) izrazi gravitacijsko silo na telo z maso m_0 , ko je na razdalji r od središča krogle in velja $r > R$. [1 točka]

Smer sile določimo iz enačbe (1) posredno. Izračunana sila pri danem premiku $\Delta \vec{r}$ je zaradi skalarne produkta v (1) pravzaprav komponenta sile $\vec{F}_i$ v smeri premika $\Delta \vec{r}$, torej

$$\vec{F}_i = F_i \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r} = -\frac{\Delta W_p(\Delta \vec{r})}{\Delta r} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta r}, \quad (2)$$

kjer je Δr velikost vektorja premika $\Delta \vec{r}$. Tu je velikost komponente $\vec{F}_i$ označena z F_i in jo izračunamo kot $F_i = -\Delta W_p/\Delta r$, torej je lahko pozitivna ali negativna, odvisno od predznaka spremembe potencialne energije ΔW_p pri premiku telesa za $\Delta \vec{r}$.

- c) Določi vektor gravitacijske sile v vprašanju (b) in pokaži, da je rezultat neodvisen od predznaka premika v radialni smeri, ko računamo spremembo potencialne energije in od tu gravitacijsko silo. [1 točka]

Tudi gravitacijski potencial okoli Zemlje z maso $m_Z = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg je podoben potencialu homogene kroglice $U = U_0 = -m_Z G/r$, a ima zaradi nehomogene porazdelitve mase znotraj Zemlje, zaradi elipsoidne oblike Zemlje in zaradi vrtenja Zemlje dodane člene v tako imenovanem multipolnem razvoju, ki ima do n -tega člena obliko $U = U_0(r) + U_2(\vec{r}) + U_3(\vec{r}) + \dots + U_n(\vec{r})$. Masa v Zemlji se, če ima na voljo dovolj časa, porazdeli tako, da je vrednost potenciala U na površju Zemlje konstantna, kar dejansko določa obliko Zemlje. Matematično definiramo "površje" Zemlje kot množico točk z nadmorsko višino nič. Razdaljo tako definirane površja Zemlje od središča Zemlje, kamor postavimo koordinatno izhodišče, določa ravno gravitacijski potencial Zemlje - površje je bolj ali manj oddaljeno od središča zato, da je potencialna energija povsod na površju enaka, da je površje Zemlje torej ekvipotencialna ploskev $U = \text{konstanta}$. Tako definirano površje Zemlje dobro sovпада s površjem oceanov, medtem ko je na kopnem zaradi trdnosti kamnin površje lahko višje ali nižje od hipotetične morske gladine na opazovanem mestu. Voda se pač mnogo hitreje kot kamnine prilagaja gravitacijskemu potencialu Zemlje.

Izkaže se, da odstopanje oblike Zemlje od idealne kroglice lahko sestavimo kot vsoto prispevkov zaradi posameznih členov v multipolnem razvoju. Površje se na izbranem mestu premakne (dvigne ali spusti) od idealne kroglice ($r = R$) zaradi multipolnega prispevka U_k za h_k , kjer je h_k povezan s posameznim členom multipolnega razvoja ($U_k \neq U_0$)

$$h_k = -\frac{U_k}{g_0}, \quad (3)$$

kjer je $g_0 = m_Z G/R^2 = 9,81 \text{ m/s}^2$ težni pospešek na površju idealno okroglice Zemlje. Celoten premik (dvig ali spust) površja h je vsota vseh prispevkov $h = \sum_{k \neq 0} h_k$, oddaljenost površja Zemlje od središča Zemlje je $r = R + h$.

Zaradi Lune se na površju Zemlje pojavi dodatni, tako imenovani *plimski potencial*, ki ima na površju Zemlje obliko

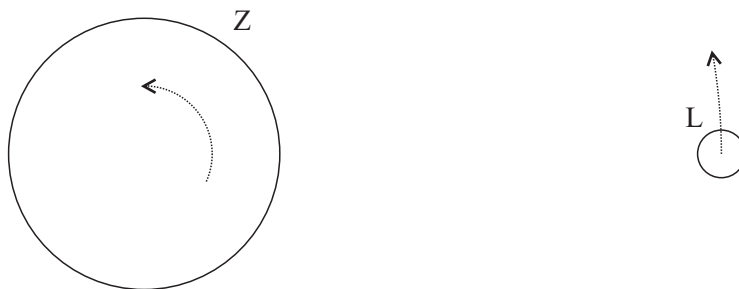
$$U_P = -\frac{m_L G}{r_0} \left(\frac{R}{r_0}\right)^2 \frac{(3 \cos^2 \gamma - 1)}{2}, \quad (4)$$

kjer je R polmer Zemlje, $r_0 = 384\,400 \text{ km}$ razdalja med središčema Zemlje in Lune, $m_L = m_Z/81,3$ masa Lune ter γ kot med zveznico središč Zemlja-Luna in krajevnim vektorjem točke na površju Zemlje (to je zveznica med središčem Zemlje in opazovano točko na površju Zemlje). Posledica potenciala U_P je pojav plime in oseke, saj se plimski potencial glede na površje Zemlje premika, kot se po nebu navidezno premika Luna. Kjer je Luna v zenitu (navpično nad opazovalcem), velja $\gamma = 0$. Ko opazovalec vidi Luno tik nad obzorjem, velja $\gamma = \pi/2 (= 90^\circ)$. Ko je $\gamma = \pi (= 180^\circ)$, je Luna natančno na nasprotni strani Zemlje od opazovalca.

V modelu bomo privzeli, da se Zemlja in Luna vrtita in krožita okoli osi, ki so vse med seboj vzporedne. To pomeni, da kroži Luna okoli Zemlje v ravnini, ki seka Zemljo po ekvatorju. V vprašanjih od (d) do (i) privzemimo, da se lahko površje Zemlje zelo hitro prilagaja spremembam plimskega potenciala.

- d) Iz plimskega potenciala (4) s pomočjo enačbe (3) izrazi lokalni premik površja za poljubno točko na Zemlji, v odvisnosti od kota γ . [1 točka]
- e) Kje mora biti Luna glede na opazovalca (kolikšen je kot γ), da bo dvig površja največji, da bo torej tam najvišja plima? Kolikšna je najvišja plima h_p ? [1 točka]
- f) Kje mora biti Luna glede na opazovalca (kolikšen je kot γ), da bo spust površja največji, da bo torej tam največja oseka? Kolikšna je najnižja oseka h_o ? [1 točka]

- g) Skiciraj spremembo oblike površja Zemlje zaradi plimskega potenciala Lune. Za osnovo nariši skico, podobno spodnji sliki, ki je narisana v "tlorisu", torej gledano na Zemljo (Z) in Luno (L) s severa, vzporedno z osjo vrtenja Zemlje¹. Črtkana puščica v Zemlji označuje kotno hitrost vrtenja Zemlje ω_0 , črtkana puščica na desni označuje kroženje Lune okoli skupnega težišča sistema Zemlja-Luna s kotno hitrostjo ω_L . [1 točka]



- h) Kolikšen je v tem modelu največji možni premik gladine morja? Na kateri zemljepisni širini (ekvator ima širino 0° , severni pol ima širino 90° in južni pol ima širino -90°) je razlika med plimo in oseko največja? Ali obstaja na Zemlji kraj, kjer se v tem modelu gladina morja ne spreminja, torej kjer ni razlike med plimo in oseko? [1 točka]
- i) Kolikšna je v tem modelu oseka in kolikšna plima na naši zemljepisni širini 45° ? Kolikšna je razlika med plimo in oseko? [1 točka]

Preden nadaljujemo, pogledajmo podrobneje kroženje Lune okoli Zemlje oziroma kroženje obeh teles okoli skupnega težišča, ki se nahaja na zveznici med Zemljo in Luno. Obhodni čas Lune je $t_L = 659,05$ ure, Zemlja pa se okoli svoje osi zavrti v $t_0 = 23,934$ urah.

- j) Z razmerjem mas Lune in Zemlje in z razdaljo r_0 med središčema Zemlje in Lune izrazi razdaljo b njunega težišča od središča Zemlje. Ob predpostavki, da Luna kroži okoli skupnega težišča Zemlja-Luna zaradi gravitacijske sile Zemlje na Luno, iz obhodnega časa Lune izračunaj razdalji r_0 ter b . Radialno komponento gravitacijske sile na Luno lahko pri opisu tega gibanja izraziš z uporabo enačb (1) in (2), pri čemer od gravitacijskega potenciala Zemlje upoštevaš le največji člen U_0 , ker so ostali prispevki v multipolnem razvoju potenciala Zemlje tam, kjer je Luna, zanemarljivo majhni. [1 točka]

Ker se Zemlja vrti okoli svoje osi hitreje, kot kroži Luna okoli Zemlje, in ker se masa v Zemlji in s tem dvig ali spust gladine morja ne more neskončno hitro prilagajati plimskemu potencialu, se zgodi dvoje. Amplitudi plime in oseke sta manjši, prav tako se največja plima ne pojavi v točki, kjer je Luna v zenitu. Vzpostavi se tako imenovano stacionarno stanje, ko je trenutno mesto največje plime na površju Zemlje ves čas enako zamaknjeno glede na trenutno mesto na površju Zemlje, kjer je Luna v zenitu. Ker se Luna giblje okoli Zemlje v ekvatorialni ravnini, sta tudi ti dve mesti ves čas na ekvatorju. Izmerjena časovna razlika med največjo plimo in Luno v zenitu je 12 minut.

- k) Iz zgornje časovne razlike izračunaj kot δ med krajevnim vektorjem do točke na Zemlji z največjim plimskim potencialom in krajevnim vektorjem do točke na Zemlji z najvišjo plimo. Ali imajo na poljubni točki na ekvatorju najprej najvišjo plimo in nato Luno v zenitu (prehiteva plima) ali imajo najprej Luno v zenitu in nato najvišjo plimo (prehiteva Luna)? Svoj odgovor utemelji z upoštevanjem končne hitrosti prerazporejanja mase na Zemlji in razliko rotacijske hitrosti Zemlje in krožilne hitrosti Lune. [1 točka]

¹Ker je plimski potencial osno simetričen glede na os Zemlja-Luna, bi bila slika spremembe oblike površja Zemlje v prerezu "s strani", torej pravokotno na osi vrtenja oziroma "z zahoda", ker se Zemlja vrti proti vzhodu, enaka.

Ker se masa na Zemlji prerazporedi kot posledica Lunine gravitacijske sile, se zaradi povezave med prerazporeditvijo mase in potencialom po enačbi (3) okoli Zemlje pojavi dodatni potencial $U_d(r, \varphi)$, kjer je r ponovno oddaljenost od središča Zemlje, kot φ pa je kot med smerjo od središča Zemlje do točke na Zemlji z največjo plimo in krajevnim vektorjem opazovane $\vec{r}$ opazovane točke. Obliko U_d uganemo s premislekom. Na površju Zemlje mora imeti U_d enako obliko kot jo ima plimska deformacija, ta pa ima obliko določeno s plimskim potencialom Lune. Torej mora pri $r = R$ veljati $U_d(r = R, \varphi) = kU_P(r = R, \gamma = \varphi)$, kjer je konstanta k manjša od 1, saj se masa na Zemlji ne more popolnoma prilagoditi plimskemu potencialu Lune. Izmerjena vrednost konstante k je $k = 0,245$. Ko se oddaljujemo od Zemlje, mora iz razlogov, ki jih tu ne moremo v celoti pojasniti, U_d padati s tretjo potenco razdalje². Od tu dobimo

$$U_d(r, \varphi) = -k \frac{m_L G}{r_0} \left(\frac{R}{r_0} \right)^2 \frac{(3 \cos^2 \varphi - 1)}{2} \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (5)$$

kjer je r_0 razdalja med središči Zemlje in Lune, R polmer Zemlje in r oddaljenost opazovane točke od središča Zemlje ($r > R$).

Kot rečeno plimska deformacija ni poravnana s smerjo Zemlja-Luna, ampak je med smerema kot δ , ki si ga izračunal v vprašanju (k).

- l)* S kotom δ in z uporabo deformacijskega potenciala, ki ga podaja enačba (5), izrazi radialno in tangencialno komponento gravitacijske sile zaradi plimske deformacije Zemlje. [1 točka]
- m)* Radialna komponenta sile iz vprašanja (*l*) je zanemarljiva v primerjavi z gravitacijsko silo v radialni smeri iz vprašanja (*i*), zaradi katere Luna kroži okoli Zemlje. Tangencialna komponenta sile iz vprašanja (*l*) pa je edina v tangencialni smeri, zato na Luno deluje majhen, a stalen navor. Izračunaj velikost tega navora in povej, ali navor kroženje Lune okoli Zemlje pospešuje ali zavira. Svoj odgovor utemelji. [1 točka]

Zaradi navora Zemlje na Luno po 3. Newtonovem zakonu deluje na Zemljo nasprotno enak navor.

- n)* Na podlagi odgovora pri vprašanju (*m*) kvalitativno opiši, kaj se dogaja z vrtenjem Zemlje okoli svoje osi. Svoj odgovor utemelji. [1 točka]

²Plimska deformacija je kvadrupolna; monopolni potencial U_0 pada s prvo potenco r , dipolni bi padal z r^2 , kvadrupolni z r^3 , oktrupolni z r^4 in tako naprej.

2. V žepni uri s polmerom 3 cm minutni kazalec v osi ozemljimo. Minutni kazalec se dotika pozlačenega notranjega oboda ure. Med obod pri 12. uri in os priklopimo napetost +10 mV, med obod pri 6. uri in os pa −10 mV.

Specifični upor zlata je $2,44 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m}$, širina oboda je 2 mm, plast zlata pa je debela 1 μm . Upor kazalca je 1Ω . Urni kazalec pri nalogi ni pomemben.

- a) Kolikšen tok teče skozi kazalec ob polni uri?
 - b) Koliko minut kaže minutni kazalec, ko teče skozenj tok 5,7 mA?
3. Francoski fizik Louis de Broglie je leta 1924 predpostavil, da lahko curek delcev opišemo kot valovanje, katerega valovna dolžina je povezana z gibalno količino delca kot

$$\lambda = \frac{h}{mv},$$

pri čemer je h Planckova konstanta $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 4,1 \cdot 10^{-15} \text{ eVs}$.

- a) Elektroni, ki smo jih pospešili z napetostjo 24 V, vpadajo pravokotno na uklonsko mrežico. Interferenčno sliko opazujemo na 1 m oddaljenem zaslonu, ki je postavljen pravokotno na vpadni curek. Kolikšna naj bo razdalja med sosednjimi režami, da bomo na zaslonu opazili ojačitve v razmiku 1 mm.

Velikost naboja elektrona je $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ As}$, masa pa $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} = 0,511 \text{ MeV}/c^2$.

- b) Za koliko moramo spremeniti napetost, da se bosta na zaslonu s širino 20 cm pojavili dve novi ojačitvi? Je potrebno napetost povečati ali zmanjšati?
- c) Za poskus uporabimo termične nevtrone. Termični nevtroni imajo enako kinetično energijo kot atomi v plinu pri temperaturi okolice. Kolikšen bi bil razmik med ničto in prvo ojačitvijo za nevtrone, ki bi imeli povprečno energijo pri temperaturi 20 °C?

Masa nevtrona $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg} = 1,00866 \text{ u} = 939,6 \text{ MeV}/c^2$. Kinetična energija enoatomnega plina je $\frac{3}{2} kT$, pri čemer je Boltzmannova konstanta $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$.