

1 Krogli, rešitev:

Podatki: $k_l = 0,3$.

a) Dokler krogla ne spodrsava velja $a^* = r\alpha$ in

$$F_d r = J\alpha, \quad J = \frac{7}{5}mr^2.$$

Iz obojega dobimo za pospešek težišča

$$a^* = \frac{5}{7}g \sin \varphi.$$

Iz II. Newtonovega zakona sledi

$$F_d - F_l = ma^*,$$

kjer je $F_d = mg \sin \varphi$ in $F_l = k_l mg \cos \varphi$. Ko vstavimo v enačbo prej izraženi pospešek težišča, končno dobimo

$$\tan \varphi = \frac{7}{2}k_l \Rightarrow \varphi = 46^\circ.$$

b) Kot v delu a) sta enaka izraza za pospešek težišča $a^* = \frac{5}{7}g \sin \varphi$ in II. Newtonov zakon $F_d - F_l = ma^*$. Razlika nastopi v sili lepenja, kjer je sila podlage zaradi kroženja enaka

$$mg \cos \varphi - F_p = \frac{mv^2}{r'} \Rightarrow F_p = mg \cos \varphi - \frac{mv^2}{r'},$$

kjer je r' razdalja med središčema obeh krogel. Iz II. Newtonovega zakona sledi

$$mg \sin \varphi - F_p k_l = ma^*.$$

Vstavimo izraza za F_p in a^* in dobimo

$$mg \sin \varphi - k_l \left(mg \cos \varphi - \frac{mv^2}{r'} \right) = m \frac{5}{7}g \sin \varphi.$$

Hitrost izrazimo iz izreka o ohranitvi energije

$$mgh = \frac{1}{2}J\omega^2,$$

kjer je

$$h = r'(1 - \cos \varphi), \quad J = \frac{7}{5}mr^2, \quad v = \omega r.$$

Ko to vstavimo v izrek, dobimo $v^2 = \frac{10}{7}gr'(1 - \cos \varphi)$, in s tem iz Newtonovega zakona po preureditvi

$$2 \sin \varphi - 17k_l \cos \varphi + 10k_l = 0.$$

Po vstavitvi podatka za k_l dobimo $\sin \varphi + 1,5 = 2,55 \cos \varphi$. Enačbo lahko rešimo s poskušanjem in pridemo do rešitve $\varphi = 35^\circ$.

Lahko pa enačbo preuredimo v obliko $\sin \varphi + a = b \cos \varphi$, kjer je $a = 1,5$ in $b = 2,55$, in vstavimo $\cos \varphi = \sqrt{1 - \sin^2 \varphi}$. Po preureditvi dobimo kvadratno enačbo

$$(1 + b^2) \sin^2 \varphi + 2a \sin \varphi + a^2 - b^2 = 0$$

s smiselno rešitvijo

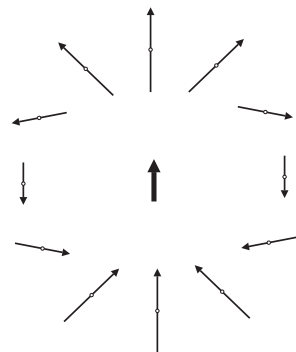
$$\sin \varphi = \frac{b\sqrt{1 + b^2 - a^2} - a}{1 + b^2} \Rightarrow \varphi = 35,4^\circ.$$

2 Magnetni dipoli, rešitev:

a) Uporabimo enačbo za magnetno polje točkastega dipola

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})\vec{r} - r^2\vec{p}}{r^5},$$

kjer upoštevamo, da je dipol usmerjen vzdolž osi z : $\vec{p} = (0, 0, p)$ in os x izberemo tako, da je ravnina lista hkrati ravnina zx . Radij vektor od dipola do opazovane točke na skici je enak $\vec{r} = r(\cos \varphi, 0, \sin \varphi)$, kjer je r za vse točke enak, φ pa merimo od vodoravne osi x in zavzame vrednosti $0, \pi/6, 2\pi/6 = \pi/3, 3\pi/6 = \pi/2, \dots$. Zaradi simetrije je dovolj izračunati $\vec{B}$ le pri teh štirih kotih, v ostalih točkah uporabimo simetrijo. Za splošni kot φ dobimo iz enačbe za polje rešitev

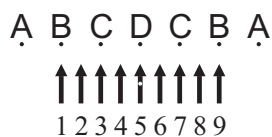
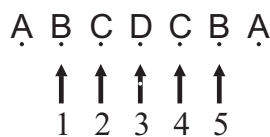
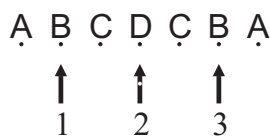


$$\vec{B} = B_0(3 \sin \varphi \cos \varphi, 0, 3 \sin^2 \varphi - 1),$$

kjer je $B_0 = (\mu_0 p)/(4\pi r^3)$.

Za vrednosti kotov $0, \pi/6, \pi/3, \pi/2$ po vrsti dobimo rešitve $B_0(0, 0, -1), B_0(3\sqrt{3}/4, 0, -1/4), B_0(3\sqrt{3}/4, 0, 5/4), B_0(0, 0, 1/4)$, kar da za rešitev sliko na desni.

b) Glede na skico za vsako postavitev označimo opazovane točke od leve proti desni kot A, B, ... pri čemer že upoštevamo simetrijo in z isto črko označimo točke, v katerih je navpična komponenta magnetnega polja B_z enaka. Poleg tega iz skice in besedila vidimo, da lahko radij vektor od j -tega dipola do opazovane točke sistematično zapišemo kot $\vec{r}_{ji} = (nx, 0, z_0) = z_0(nk, 0, 1)$, kjer je n celo število za levo in srednjo postavitev in polcelo število za desno postavitev. Ker nam gre za kvalitativno oceno slike magnetnega polja, si račune zelo poenostavimo in nič vsebinskega ne izgubimo, če za dolžino radij vektorja $\vec{r}_{ji}$ postavimo v primeru, da $n \neq 0$, kar vrednost $r_{ji} = nkz_0$, v primeru $n = 0$ pa upoštevamo $r_0 = z_0$. Navpična komponenta magnetnega polja se v tem približku poenostavi v $B_z = 2B_1$ za $n = 0$ in v $B_z = -B_1|kn|^{-3}$ za $n \neq 0$, kjer definiramo B_1 kot $B_1 = (\mu_0 p)/(4\pi z_0^3)$. Zdaj se lahko lotimo posameznih postavitv dipolov.



Za primer na levi so radij vektorji od treh dipolov do točke A po vrsti $\vec{r}_{1A} = z_0(-k, 0, 1)$, $\vec{r}_{2A} = z_0(-3k, 0, 1)$ in $\vec{r}_{3A} = z_0(-5k, 0, 1)$. V točki A je vrednost B_z enaka:

$$B_z(A) = -\frac{1}{k^3} B_1 \left(1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} \right) = -0,039 B_1.$$

Podobno so so radij vektorji od treh dipolov do točke B po vrsti $\vec{r}_{1B} = z_0(0, 0, 1)$, $\vec{r}_{2B} = z_0(-2k, 0, 1)$ in $\vec{r}_{3B} = z_0(-4k, 0, 1)$. V točki B je vrednost B_z enaka:

$$B_z(B) = 2B_1 - \frac{1}{k^3} B_1 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} \right) = (2 - 0,005) B_1.$$

Tako nadaljujemo tudi za točki C in D

$$B_z(C) = -\frac{1}{k^3} B_1 \left(1 + 1 + \frac{1}{3^3} \right) = -0,075 B_1$$

in

$$B_z(D) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) = (2 - 0,009)B_1 .$$

Na skici mora biti razvidno, da je polje nad dipoli (točke BDB) približno enako veliko ($2B_1$) in obrnejo navzgor, ob in med dipoli (točke ACCA) pa mnogo manjše in obrnjeni navzdol. Podobno nadaljujemo za primer na sredini, kjer radij vektorje zapišemo na tem mestu le za točki A in B. Za točko A so, izraženo z zaporedno številko j , po vrsti $\vec{r}_{jA} = z_0(-jk, 0, 1)$. Za točko B dobimo izraze malenkost drugačne $\vec{r}_{1B} = z_0(0, 0, 1)$ in $\vec{r}_{jB} = z_0(-(j-1)k, 0, 1)$, za $j > 1$. Za navpično komponento magnetnega polja v posameznih točkah dobimo

$$B_z(A) = -\frac{1}{k^3}B_1 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{5^3} \right) = -0,044B_1 ,$$

$$B_z(B) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} \right) = (2 - 0,044)B_1 ,$$

$$B_z(C) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(1 + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} \right) = (2 - 0,080)B_1$$

in

$$B_z(D) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(1 + 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^3} \right) = (2 - 0,083)B_1 .$$

Na skici mora biti razvidno, da je polje v točkah A majhno in obrnjeno navzdol, v točkah BCDCB pa večje in obrnjeno navzgor. Na skici tega, da polje od točke B proti točki D rahlo pada, ni nujno nakazati, ker so razlike majhne. Če to je razvidno iz skice, toliko bolje.

Na enak način se lotimo desne skice, kjer imamo devet dipolov in so, recimo, radij vektorji od j -tega dipola do točke A po vrsti $\vec{r}_{jA} = z_0(-k(1+j)/2, 0, 1)$. Pod vsako od ostalih točk (B ali C ali D) je dipol, zato je v naboru tudi radij vektor $\vec{r} = z_0(0, 0, 1)$, ki prispeva k navpični komponenti magnetnega polja $+2B_1$. Polje v posameznih točkah je po vrsti

$$B_z(A) = -\frac{1}{k^3}B_1 \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{9}\right)^3 + \left(\frac{2}{10}\right)^3 \right) = -0,059B_1 ,$$

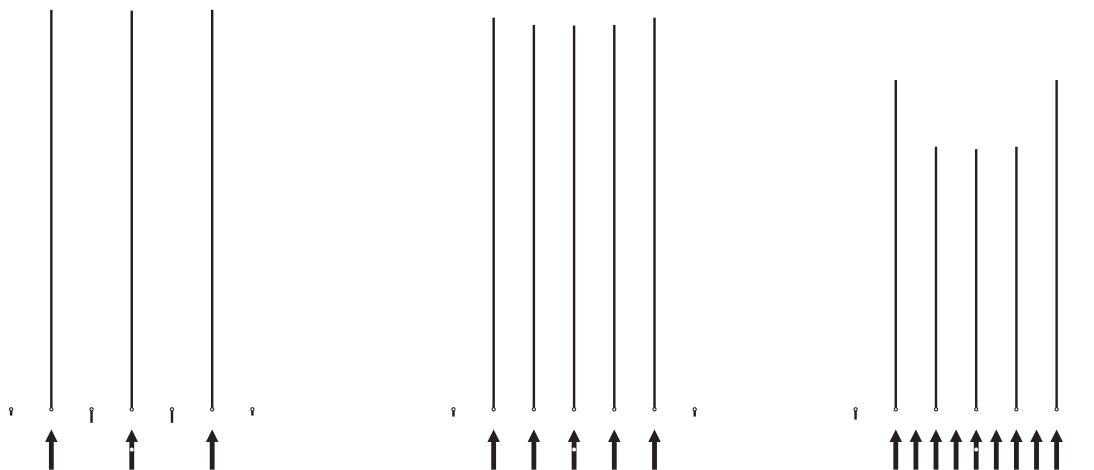
$$B_z(B) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(2^3 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \dots + \left(\frac{2}{7}\right)^3 + \left(\frac{2}{8}\right)^3 \right) = (2 - 0,354)B_1 ,$$

$$B_z(C) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(2^3 + 2^3 + 1 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{5}\right)^3 + \left(\frac{2}{6}\right)^3 \right) = (2 - 0,686)B_1$$

in

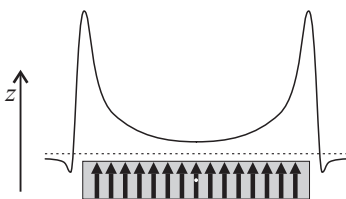
$$B_z(D) = 2B_1 - \frac{1}{k^3}B_1 \left(2^3 + 2^3 + 1 + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 + \left(\frac{2}{4}\right)^3 \right) = (2 - 0,698)B_1 .$$

Na skici mora biti razvidno, da je polje v točki A obrnjeno navzdol in majhno, v točkah BCDCB je obrnjeno navzgor in znatno večje, pri tem je tudi velikost v točkah CDC opazno manjša od velikosti B_z v točki B.



- c) Na podlagi izkušenj iz nalog a) in b) skiciramo funkcijo, ki je malo levo in desno od magneta negativna, ima maksimum nekje nad obema krajiščema magneta in na sredini magneta minimum. Vsaka skica, kvalitativno podobna temu opisu, je sprejeta kot pravilna.

Podrobnejša analiza bi pokazala, da v osrednjem delu magnetno polje pade celo povsem na nič, kar lahko pojasnimo tudi z analogijo s ploščatim kondenzatorjem: naboji na ploščah bi tvorili množico dipolov kakor imamo magnetizacijo v trajnem magnetu. Iz elektrostatike vemo, da električnega polja zunaj plošč kondenzatorja ni, le ob robovih obeh plošč "uhaja" iz kondenzatorja.



3 Bohrov model, rešitev:

- a) Napišemo 2. Newtonov zakon za kroženje elektrona:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

in upoštevamo pogoj

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv}, \quad v = \frac{nh}{2\pi mr}.$$

Hitrost vstavimo v prvo enačbo in dobimo

$$m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^3} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Izrazimo r in dokažemo iskano zvezo.

- b) Kinetično energijo zapišmo kot

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 r^2} = \frac{1}{2}m \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m^2 n^4 r_B} \frac{1}{r_B}.$$

Za recipročno vrednost Bohrovega radija v zadnjem faktorju vstavimo izraz pri a) in dobimo

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 r_B}.$$

Prištejemo še potencialno energijo

$$W = \frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 n^2 r_B} - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 n^2 r_B} = -\frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} \frac{1}{n^2},$$

kar je ravno iskana zveza.

c) Po predpostavki je energija fotona enaka razliki energij med začetno orbitalo n_1 in končno n_2 ($n_1 > n_2$):

$$h\nu = W_1 \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right).$$

Za UV svetlobo velja:

$$h\nu = \frac{3}{4}|W_1|, \quad \lambda_{UV} = \frac{c}{\nu} = \frac{4hc}{3|W_1|}.$$

Za prehod med poljubnimi orbitalami pa velja

$$\lambda = \frac{hc}{|W_1| \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)} = \frac{3}{4} \lambda_{UV} \frac{1}{\left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)}$$

tako, da lahko iskane valovne dolžine izrazimo le s podano valovno dolžino.

Če obdržimo $n_2 = 1$, so za $n_1 = 3, 4, 5 \dots$ vse valovne dolžine krajše od λ_{UV} .

Za $n_2 = 2$ in $n_1 = 3, 4, 5 \dots$ pridemo v smiselno območje.

Za $n_2 = 3$ in $n_1 = 4, 5 \dots$ so vse λ znatno večje in pademo izven področja vidne svetlobe.

Podanim valovnim dolžinam torej ustreza prehod na orbitalo $n_2 = 2$: 656 nm (z orbitale z $n_1 = 3$), 486 nm ($n_1 = 4$), 434 nm ($n_1 = 5$), 410 nm ($n_1 = 6$), 397 nm ($n_1 = 7$).

d) Ohranja se gibalna količina:

$$0 = \frac{h\nu}{c} - (m + M)v.$$

Od tod

$$v = \frac{h}{\lambda_{UV}(m + M)} = 3,3 \text{ m/s}.$$