

Gravitacija in gravitacijsko valovanje

Bojan Golli

Pedagoška fakulteta, UL

predavanje

13. oktober 2022

- Sile na daljavo: elektromagnetna in gravitacijska.
- Gravitacijska sila, teža, breztežnost
- Gravitacijsko polje v splošni teoriji relativnosti
- Gibanje v ukrivljenem prostoru, breztežnost
- Gravitacijsko valovanje
- Moč in gostota energijskega toka
- Izviri in detekcija gravitacijskih valov
- Projekt LIGO
- Analiza prve zaznave gravitacijskih valov
- Kaj si lahko od odkritja obetamo za nadaljnje raziskovanje vesolja?

Literatura

- Golli, B *Gravitacijski valovi*, Fizika v šoli XXII, 2, 2017, <http://www.pef.uni-lj.si/bojang/GV.pdf>
- Tjaša Matičič, *Od gravitacije do črne luknje*, magistrsko delo, PeF 2017, <http://pefprints.pef.uni-lj.si/4640/>.
- Aleš Mohorčič in Andrej Čadež, *Gravitacijski valovi*, Obzor. Mat. Fiz. 63 (2016) 53–63.
- Aleš Mohorčič in Andrej Čadež, *Detekcija gravitacijskih valov*, Obzor. Mat. Fiz. 64 (2017) 91–103.
- B. Golli, Osnove moderne fizike, poglavje 4.
- B.P.Abbot et al., Phys. Rev. Lett. **116**, 061102 (2016).

Sile na daljavo: vsakdanja izkušnja

● Teža:

- povezana z „naravnim“ gibanjem proti tlom;
- breztežno stanje je „nenavadno“.

● Magnetna sila:

- prva neposredna izkušnja medsebojnega delovanja dveh teles na daljavo
- kaj je posrednik sile?
- teorija: magnetno (in električno) polje — a kaj je to?
- EM valovanje: isti posrednik
- zgodovinsko: eter napolnjuje prostor
- kvantna fizika: silo posredujejo fotoni

Newtonov gravitacijski zakon

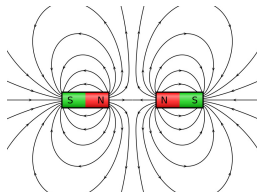
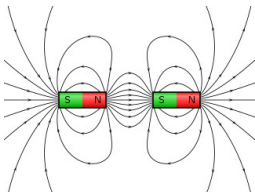


We went into the garden, & drank thea under the shade of some appletrees, only he, & myself. Amidst other discourse, he told me, he was just in the same situation, as when formerly, the notion of gravitation came into his mind.

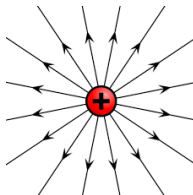
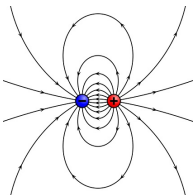
Why should that apple always descend perpendicularly to the ground, thought he to him self: occasion'd by the fall of an apple, as he sat in a comtemplative mood: why should it not go sideways, or upwards? but constantly to the earths centre? Assuredly, the reason is, that the earth draws it. There must be a drawing power in matter. The sum of the drawing power in the matter of the earth must be in the earths center, not in any side of the earth. Therefore does this apple fall perpendicularly, or toward the center. If matter thus draws matter; it must be in proportion of its quantity. Therefore the apple draws the earth, as well as the earth draws the apple.

Pojem in ponazoritev polja

Magnetno polje



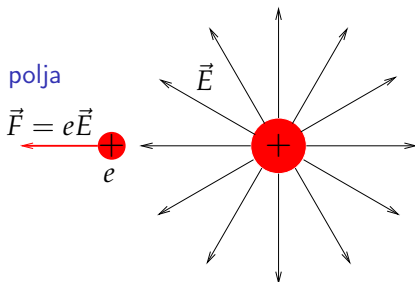
Električno polje



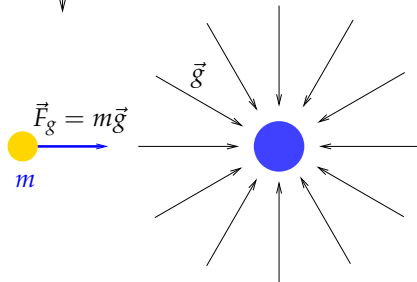
Gravitacijsko polje: podobno električnemu (le privlačno)

Jakost polja

Jakost električnega polja

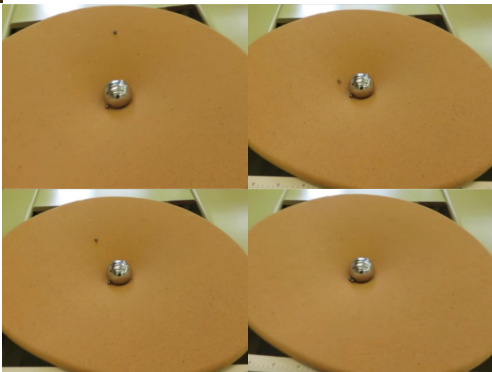


Jakost gravitacijskega polja? $F_g = mg$



Jakosti $\vec{E}$ pri gravitaciji ustreza $\vec{g}$.

Ponazoritev polja z opno (ponjavo)

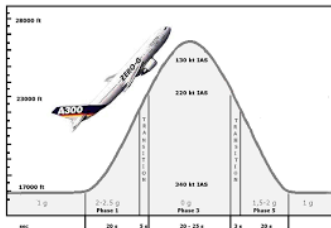


Gravitacija in teža

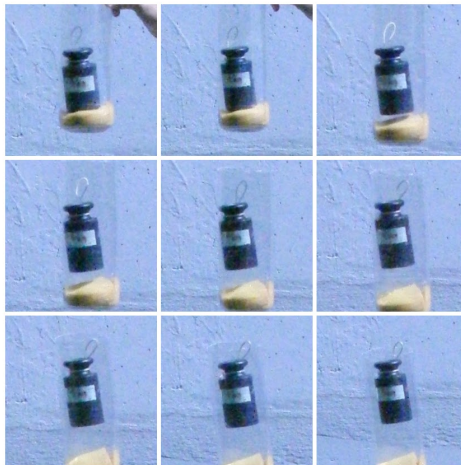
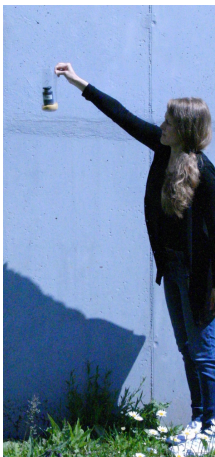
- Teža $\equiv$ gravitacijska sila na telo
- Breztežni prostor: ali na vesoljsko postajo deluje gravitacija?



Breztežnost v letalu na paraboli



Breztežnost pri prostem padu



Alternativna definicija: Teža je sila, s katero telo deluje na podlago in jo lahko neposredno merimo.

Gravitacija v splošni relativnosti: metrični tenzor

Štirirazsežni prostor — prostor-čas $\underline{r} = (ct, x, y, z)$

Invarianta v ravnem prostoru

$$s^2 = \underline{r} \cdot \underline{r} = -c^2 t^2 + x^2 + y^2 + z^2 = \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

V prisotnosti mase/energije:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 + h_{00}(\vec{r}, t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_{11}(\vec{r}, t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 + h_{11}(\vec{r}, t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 + h_{11}(\vec{r}, t) \end{bmatrix}$$

splošno: $s^2 = \sum_{\mu=0}^3 \sum_{\nu=0}^3 x_{\mu} \eta_{\mu\nu} x_{\nu}, \quad \eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(\vec{r}, t)$

$h_{\mu\nu}$ meri odmik od tenzorja ravnega prostora $\rightarrow$ **gravitacijski potencial**

I. „Newtonov zakon“ v splošni teoriji relativnosti

- **Raven prostor:**

če na telo ne deluje **nobena sila**, telo miruje ali se giblje premo enakomerno

- **Ukrivljen prostor:**

če na telo ne deluje **nobena sila**, se telo giblje po geodezijki:

- **prosto pada**
- **giblje se po paraboli**
- **kroži okoli planeta, sonca**
- **giblje se po hiperboli**

Enačba gibanja v ukrivljenem prostoru

Razdalja med točkama (dogodkoma) v 4D prostoru:

$$\begin{aligned}\sqrt{-\Delta s^2} &= \int_A^B \sqrt{g_{00}(cdt)^2 - g_{11}(dx)^2 - g_{22}(dy)^2 - g_{33}(dz)^2} \\ &= \int_A^B \sqrt{g_{00}c^2 - g_{11}v_x^2 - g_{22}v_y^2 - g_{33}v_z^2 + \dots} dt = c\Delta\tau\end{aligned}$$

$\Delta\tau$... čas potovanja v sistem, ki se giblje skupaj s telesom (letalom, vesoljsko ladjo ...), $v'_x = v'_y = v'_z = 0$.

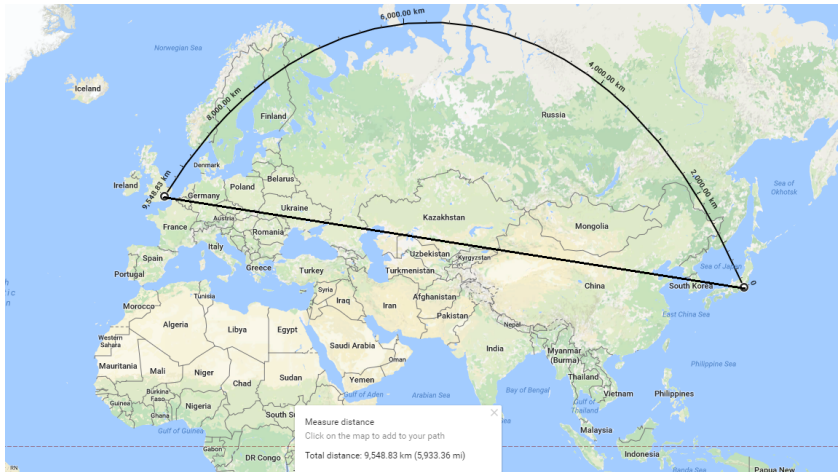
Enačba gibanja

$$\Delta\tau = \textit{minimum}$$

Majhne hitrosti ($v_x \ll c$, $v_y \ll c$, $v_z \ll c$)

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{(1 - h_{00}) - \frac{1}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dt = \textit{minimum}$$

Gibanje po Zemljinem površju



Primer: premo gibanje

$v_x = v_y = 0$, **nastavek** $h_{00} = kz$ (k konstanta):

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{(1 - kz) - \frac{v_z^2}{c^2}} dt = \int_A^B \mathcal{L}(z, v_z, t) dt = \textit{minimalno}.$$

Rešujemo Euler-Lagrangeovo enačbo: $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = 0.$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left((1 - kz) - \frac{v_z^2}{c^2} \right)^{-1/2} (-k) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} k \approx \frac{1}{2} k,$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L}^{-1} \frac{2v_z}{c^2} \right) \approx -\frac{d}{dt} \frac{v_z}{c^2} = -\frac{a_z}{c^2} \quad \text{torej} \quad a_z = -\frac{c^2 k}{2}$$

enakomerno pospešeno gibanje v navpični smeri, $a_z = -g$ **torej** $k = 2g/c^2$ in

$$h_{00} = kz = -\frac{2gz}{c^2} = -\frac{2mgz}{mc^2} = -\frac{2W_{\text{pot}}}{W_{\text{mirovna}}}$$

h_{00} je premo sorazmeren s potencialno energijo — **gravitacijski potencial**

Matrični tenzor v sferičnem gravitacijskem polju

$$W_{\text{pot}} = -\frac{GmM}{r}, \quad h_{00}(r) = \frac{2GmM}{r mc^2} = \frac{2GM}{c^2 r} = \frac{2gR_{\odot}}{c^2} \frac{R_{\odot}}{r}$$

Splošna oblika metrike v primeru sferično simetrične mase:

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Primer

$$g_{00} = 0, \quad 1 - \frac{2GM}{c^2 r} = 0, \quad r \equiv r_S = \frac{2GM}{c^2}$$

ustreza *horizontu* (radiju) črne luknje.

Johna Michell 1783, Pierre-Simon de Laplace 1798: ubežna hitrost $v_u = c$

$$\frac{mv_u^2}{2} = \frac{GmM}{R}, \quad R = \frac{2GM}{v_u^2} = \frac{2GM}{c^2}.$$

Sonce: $r_S = 3 \text{ km}$

Ponazoritev polja na opni



EM in gravitacijsko valovanje: izviri

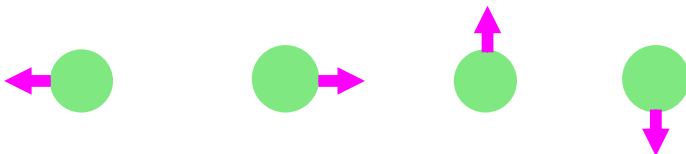
EM valovanje:

nihajoči dipol, na primer elektron v atomu.

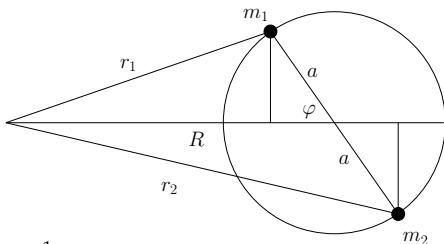


Gravitacijsko valovanje:

nihanje dveh masivnih teles drugega proti drugemu,
kroženje dveh masivnih teles okoli skupnega težišča.



Polje dveh krožečih teles



$$R \gg a, \quad \varphi = \omega t, \quad a = \frac{1}{2}r, \quad m_1 = m_2 \equiv m$$

$$V(R, t) = \frac{Gm}{r_1} + \frac{Gm}{r_2}, \quad r_{1,2} = \sqrt{(R \pm a \cos \varphi)^2 + a^2 \sin^2 \varphi} \approx \sqrt{R^2 \pm Rr \cos \varphi}.$$

$$V(R, t) = \frac{Gm}{R\sqrt{1 - \frac{r}{R} \cos \varphi}} + \frac{Gm}{R\sqrt{1 + \frac{r}{R} \cos \varphi}} \approx \frac{2Gm}{R} + \frac{3Gmr^2}{8R^3} + \frac{3Gmr^2}{8R^3} \cos 2\omega t.$$

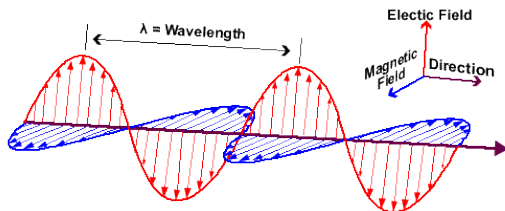
$$m_1 \rightarrow e, \quad m_2 \rightarrow -e : \quad V_{\text{el}}(R, t) = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_1} - \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r_2} = \frac{er}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cos \omega t.$$

Kaj valuje pri EM valovanju?

$$E_r(R, t) = -\frac{d}{dR} V_{\text{el}}(R, t) = \frac{ea}{4\pi\epsilon_0 R^3}$$

To NI EM valovanje, saj amplituda jakosti pojema kot R^{-3} in ne kot R^{-1} .

EM valovanje:



hitrost valovanja: svetlobna hitrost

Električno polje je izvir magnetnemu in magnetno izvir električnemu.

Kaj valuje pri gravitacijskem valovanju?

G valovanje: gravitacijsko polje? — gravitacijski tenzor $g_{\mu\nu}$:

Če usmerimo os z v smer širjenja valovanja, ima matrični tenzor v (sicer) ravnem prostoru obliko

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_+ = A_+ \cos(kz - \omega t), \quad h_\times = A_\times \cos(kz - \omega t).$$

Velja $\omega = ck$ in $k = 2\pi/\lambda$; hitrost valovanja je svetlobna hitrost.

Izvir gravitacijskega polja je **energija**; gravitacijsko valovanje nosi energijo in je zato samemu sebi izvir.

Gostota energijskega toka

EM valovanje v vakuumu

$$j_{EM} = \frac{1}{2} c \left[\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right] .$$

Gravitacijsko valovanje

$$j_{GV} = \mathcal{K} c^{\alpha} G^{\beta} v^{\gamma} \left[A_+^2 + A_{\times}^2 \right] .$$

Dimenzijska analiza ($[j] = \text{J/s} / \text{m}^2 = \text{kg m}^2/\text{s}^2/\text{s} / \text{m}^2$)

$$\text{kg s}^{-3} = \text{m}^{\alpha} \text{s}^{-\alpha} \text{kg}^{-\beta} \text{m}^{3\beta} \text{s}^{-2\beta} \text{s}^{-\gamma}, \quad \beta = -1, \gamma = 2, \alpha = 3.$$

$$j_{GV} = \mathcal{K} \frac{c^3 v^2}{G} \left[A_+^2 + A_{\times}^2 \right], \quad \frac{c^3}{G} = 4 \cdot 10^{35} \text{ W/m}^2, \quad \mathcal{K} = \frac{\pi}{8}.$$

Energijski tok dveh krožečih teles

$$P = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5} = \frac{32}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2}{r^2} \omega^2,$$

Sistem Zemlja–Sonce

$m_1 = m_Z = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $m_2 = M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r = 150 \cdot 10^6$ km,
 $\nu = 1/\text{leto}$.

$\lambda = c/\nu = 1$ svetlobno leto,

$$P = 200 \text{ W}.$$

Sistem dveh črnih lukenj

$m_1 = m_2 = 30 M_\odot$, $r_S = 80$ km, $\nu = \frac{1}{2}\nu_{\text{val}} = 20$ Hz.

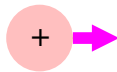
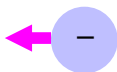
$$m\omega^2 \frac{r}{2} = \frac{Gm^2}{r^2}, \quad r = \sqrt[3]{\frac{2Gm}{4\pi^2\nu^2}} = 800 \text{ km}.$$

$$P = \frac{64G^4 m^5}{5c^5 r^5} = 2,5 \cdot 10^{47} \text{ W}.$$

Sprejemniki valovanja

EM valovanje:

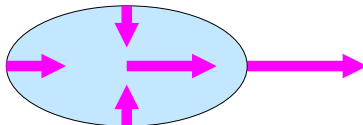
dipolna antena



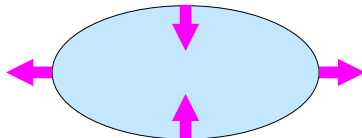
= dipolna deformacija

G valovanje:

plimske sile v nehomogenem polju

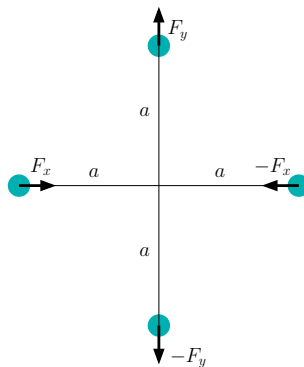
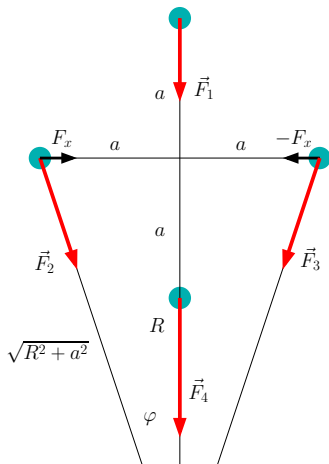


neto učinek:



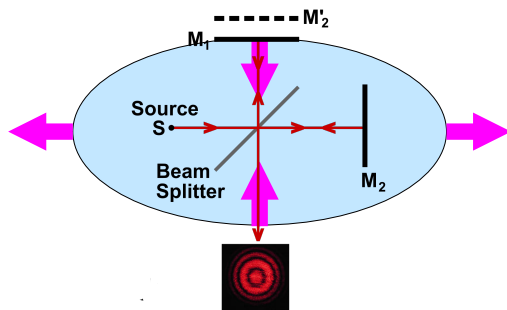
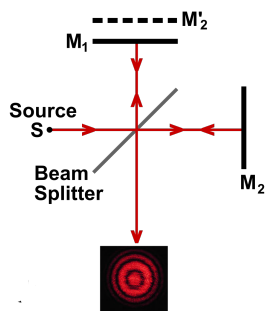
= kvadrupolna def.

Kvadrupolna deformacija v nehomogenem polju



Detektor LIGO: Michelsonov interferometer

Princip delovanja:



Postavitev

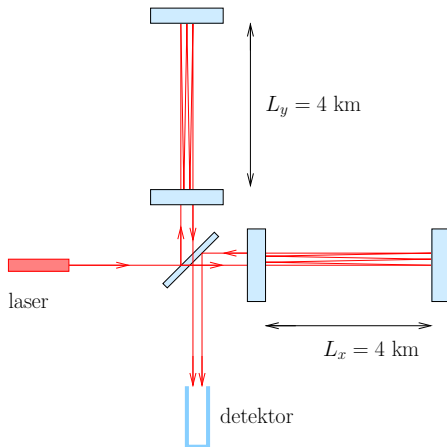
Livingston



Hanford



Pisa



Uvod
00

Sile na daljavo
00000000

Gravitacija v splošni relativnosti
00000000

Gravitacijsko valovanje
00000000

LIGO
00●00

Analiza prve meritve
0000

Perspektive
00

animacija

Podatki interferometra

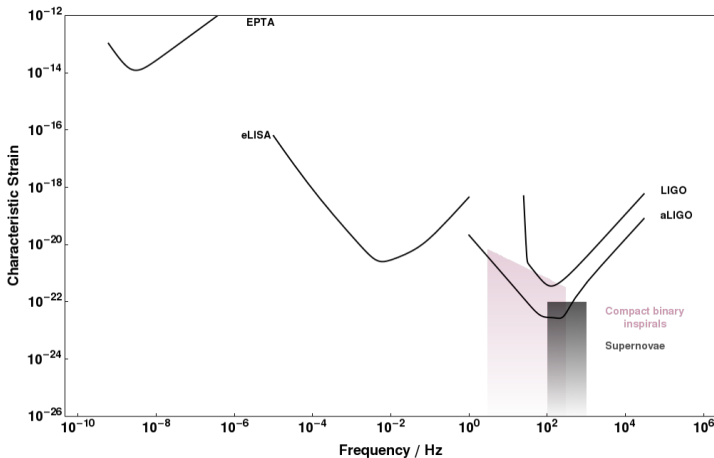
$$L = 4 \text{ km} * \sim 280 \text{ odbojev} = 1100 \text{ km.}$$

Valovna dolžina laserske svetlobe $\lambda = 1064 \text{ nm}$

Občutljivost pri 100 Hz:

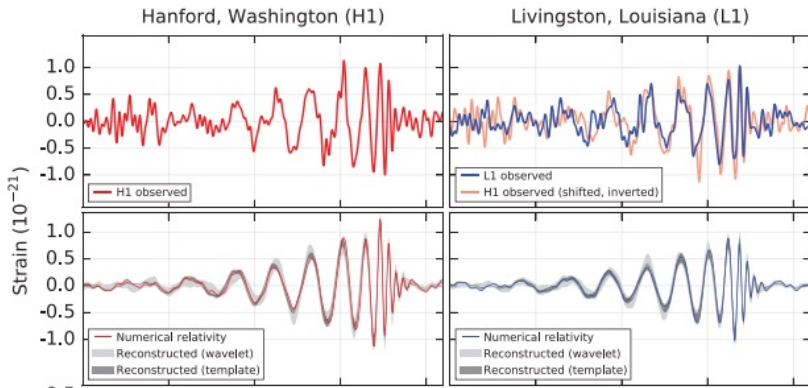
$$10^{-21} \approx \frac{1}{1000} \cdot \frac{r_{\text{proton}}}{L}$$

Občutljivost detektorja



By Christopher Moore, Robert Cole and Christopher Berry

Meritve



100 Hz izvir gravitacijskih valov

Klasičen račun:

Dve masivni telesi z masama enakima masi Sonca krožita okoli skupnega težišča s frekvenco 100 Hz:

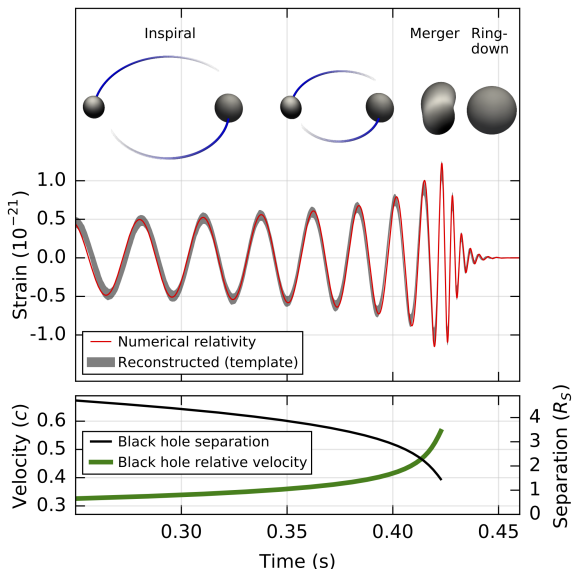
$$M_{\odot} \omega^2 r_* = \frac{GM_{\odot}^2}{(2r_*)^2}$$
$$r_* = \sqrt[3]{\frac{GM_{\odot}}{16\pi^2 \nu^2}} = 50 \text{ km}.$$

Telesi morata imeti polmer manjši od 50 km, kar pomeni da sta lahko le nevtronski zvezdi ali črni luknji.

Obodna hitrost

$$v = \omega r_* = 0,1 c.$$

Primerjava s teoretično napovedjo



Podatki izvira

mase:

$$M_1 = 36 M_{\odot}, \quad M_2 = 29 M_{\odot}, \quad M_{1+2} = 62 M_{\odot},$$

Schwarzschildovi radiji:

$$R_S^1 = 110 \text{ km}, \quad R_S^2 = 90 \text{ km}, \quad R_S(1+2) = 210 \text{ km},$$

sproščena energija: $Q = (M_1 + M_2 - M_{1+2})c^2 = 3M_{\odot}c^2 = 5 \cdot 10^{47} \text{ J}$

največja moč: $P_{\max} = 3,6 \cdot 10^{49} \text{ W}$

oddaljenost: $r = 410 \text{ Mpc} = 1,3 \cdot 10^9 \text{ sv. let.}$

jakost na Zemlji: $j = \frac{P}{4\pi r^2} = 0,2 \text{ W/m}^2.$

Nadaljnja raziskovanja

- Novi detektorji na Zemlji in v vesolju, občutljivi za različne valovne dolžine
- Največji izziv je opazovanje dogajanj pri prapoku

Nekateri opazovani dogodki

datum llll-mm-dd	razdalja Mpc	Izsev $M_{\odot}c^2$	m_1 $M_{\odot}$	m_2 $M_{\odot}$	vrsta
2015-09-14	430	3,1	36	31	črni luknji
2015-10-12	1060	1,5	23	14	črni luknji
2017-01-04	960	2,2	31	20	črni luknji
2017-07-29	2750	4,8	51	34	črni luknji
2017-08-09	990	2,7	35	24	črni luknji
2017-08-17	40	0,04	1,5	1,3	nevtronski zvezdi
2017-08-23	1850	3,3	40	29	črni luknji
2019-04-12	730		30	8	črni luknji
2019-04-25	159		1,8	1,6	nevtronski zvezdi
2019-05-21	5300	7,6	85	66	črni luknji
2020-01-15	300		5,7	1,5	črna l. + nevtronska z.

1Mpc = 3,26 milijona svetlobnih let, $M_{\odot}c^2 = 1,8 \cdot 10^{47}$ J