

Osnove moderne fizike

B. Golli, PeF

3. januar 2022

Kazalo

Predgovor	6
1 Osnove moderne fizike – uvod	7
1.1 Klasična in moderna fizika	7
1.2 Opis narave po nadstropjih	7
Narava je zgrajena iz nadstropij	7
Zakaj je smiselno govoriti o nadstropjih?	8
Pregled gradnikov, sil in zakonov po nadstropjih	8
Osnovne sile	9
1.3 Zakoni moderne fizike	9
2 Osnove posebne teorije relativnosti	10
2.1 Osnovne predpostavke	10
Opazovalni sistemi.	10
Galilejeve transformacije.	11
Michelson-Morleyjev poskus.	11
2.2 Podaljšanje časa	14
Miselni poskus.	14
Paradoks dvojčkov.	15
2.3 Skrajšanje dolžin	16
Miselni poskus.	16
Skrajšanje dolžin v primeru potovanja dvojčkov.	17
Eksperimentalne potrditve.	17
2.4 Relativistični Dopplerjev pojav	18
Klasični Dopplerjev pojav.	18
Dopplerjev pojav pri elektromagnetnem valovanju.	18
Hubblev zakon.	19
2.5 Lorentzeve transformacije	20

	Izpeljava transformacij.	20
	Lorentzeve transformacije in podaljšanje časa.	22
	Lorentzeve transformacije in skrajšanje dolžin.	22
2.6	Transformacija hitrosti	23
2.7	Štirirazsežni prostor	24
2.8	Dogodki in vzročnost	25
	Zgled.	25
	Prihodnost, preteklost, sedanost.	27
	Sile in kavzalnost.	27
	Smer toka časa.	28
2.9	Četverec gibalne količine	28
	Četverec hitrosti.	29
	Težka in vztrajnostna masa.	30
2.10	$E = mc^2$	31
	Zveza med energijo in maso.	33
	Zveza med energijo in gibalno količino.	33
2.11	Gibanje nabitega delca v električnem in magnetnem polju	34
	Konstantno električno polje.	34
	Krajevno spremenljivo električno polje.	35
	Konstantno magnetno polje.	35
3	Delčne lastnosti valovanja	36
3.1	Fotoefekt	36
3.2	Ohranitev četverca gibalne količine.	39
3.3	Comptonov pojav	39
3.4	Lorentzeve transformacije za foton	41
3.5	Rentgenski žarki	42
	Nastanek rentgenske svetlobe.	42
	Sipanje rentgenske svetlobe na kristalih.	43
3.6	Tvorba parov	44
3.7	Anihilacija delcev	46
3.8	Razpoložljiva energija	46
	Razpoložljiva energija v težiščnem sistemu.	47
	Razpoložljiva energija v laboratorijskem sistemu.	47
	*Težiščni sistem delcev.	49
4	Gravitacija	50
4.1	Uklon svetlobe v gravitacijskem polju	50
4.2	Sprememba valovne dolžine svetlobe v gravitacijskem polju	51
4.3	Podaljšanje časa	52
4.4	Črne luknje	53
4.5	Osnove splošne teorije relativnosti	54

4.6	Metrični tenzor v gravitacijskem polju	55
4.7	Geodetske krivulje v limiti majhnih hitrosti in šibkega polja	57
	Raven prostor.	57
	Statično gravitacijsko polje.	57
	Krogelno simetrično gravitacijsko polje.	58
	*Izpeljava iz Euler-Lagrangeevih enačb.	59
4.8	*Metrični tenzor za črno luknjo	59
4.9	*Gravitacijsko valovanje	61
	Opis ravnega gravitacijskega valovanja.	61
	Izsevani energijski tok v primeru dveh krožečih teles.	62
	Detekcija gravitacijskih valov.	63
4.10	*Veliki pok, temna snov, temna energija	63
	Temna snov.	63
	Veliki pok.	64
	Temna energija.	64
5	Delci kot valovanje	66
5.1	De Brogliejeva valovna dolžina delca	66
	Sipanje elektronov na kristalu.	66
5.2	Opis valovanja delcev	67
	Ravni val.	67
	Superpozicija valov.	68
	Hitrost delca.	70
5.3	Načelo nedoločenosti	73
	Nedoločenost lege v valovnem paketu.	73
	Sipanje delcev na reži.	74
	Nedoločenost energije in časa.	75
	Nedoločenost energije pri razpadih delcev.	76
	Posledice načela nedoločenosti.	77
5.4	Interferenčni poskusi z delci	78
6	Modeli atoma	81
6.1	Thomsonov model	81
6.2	Rutherfordov model	82
6.3	Bohrov model	83
	Postulati.	83
	Bohrov model in de Brogliejeva valovna dolžina.	84
6.4	Vodikov spekter	84
6.5	Vzbujanje atomov	85
6.6	Kvantna slika	87
6.7	Gibanje protona	90
	Opis v težiščnem sistemu protona in elektrona.	90
	Načelo nedoločenosti za lego in gibalno količino protona.	90

7	Schrödingerjeva enačba	91
7.1	Časovno odvisna valovna enačba	91
	Enačba v eni razsežnosti.	91
	Enačba v treh razsežnostih.	92
7.2	Stacionarna Schrödingerjeva enačba.	92
7.3	Neskončna ravna jama: stacionarna stanja	93
	*Ortogonalnost lastnih funkcij.	95
7.4	Pričakovane vrednosti fizikalnih količin	96
	Operatorji.	97
7.5	Nestacionarna stanja v neskončni ravni jami	98
	Energija nestacionarnega stanja.	98
	Verjetnostna gostota nestacionarnega stanja.	99
7.6	Potencialni skok	100
	* Operator gostote verjetnostnega toka.	102
7.7	Delec v klasično prepovedanem območju	103
7.8	Valovna funkcija delca v končni ravni jami	104
7.9	Tunelski pojav	106
	Vrstični tunelski mikroskop.	107
7.10	Harmonski oscilator	109
	Klasični harmonski oscilator.	109
	Kvantni opis: brezdimenzijska oblika.	109
	Osnovno stanje.	110
	Vzbujena stanja.	111
	Spekter harmonskega oscilatorja.	113
8	Schrödingerjeva enačba v treh razsežnostih	114
8.1	Stacionarno stanje	114
8.2	Harmonski oscilator v treh razsežnostih	115
8.3	Vzbujena stanja harmonskega oscilatorja	116
8.4	Trirazsežna neskončna jama	118
8.5	Separacija spremenljivk v primeru krogelno simetričnega potenciala	119
8.6	Vrtilna količina	121
8.7	Rešitve kotnega dela valovne funkcije	123
8.8	*Trirazsežni harmonski oscilator v krogelni bazi	124
8.9	Rotator	127
9	Sistemi nerazločljivih delcev	128
9.1	Fermioni in bozoni	128
	Valovna funkcija dveh delcev.	128
	Nerazločljivi delci.	128
	Izključitveno načelo.	128
	Sipanje nerazločljivih delcev.	130

	Verjetnosti v primeru treh ali več bozonov.	131
	Stimulirana emisija in laserji.	131
	Kvantna prepletenost in paradoks EPR.	133
9.2	*Osnove kvantnega računalništva	134
	Kubit.	134
	Kubitni nizi.	134
	Procesiranje.	135
	Kvantna logična vrata.	135
	Uporaba.	135
	Kvantna teleportacija.	136
10	Osnove statistične fizike	138
10.1	Sistemi delcev pri končni temperaturi	138
10.2	Število razpoložljivih stanj	139
	Molekule v zraku.	139
	Elektroni v kovini.	139
10.3	Klasični delci: Maxwell-Boltzmannova statistika	140
	Zasedbeno število za klasične delce.	140
	Maxwellova porazdelitev.	141
	Povprečja.	143
10.4	Zasedbeno število za bozone in fermione	144
	Zasedbeno število za fermione.	144
	Bozoni.	144
10.5	Sevanje črnega telesa	145
	Število stanj.	145
	Planckov zakon.	147
	Wienov zakon.	148
	Stefanov zakon.	149
	Sevanje svetil v vidnem območju.	149
	Spekter Sončeve svetlobe.	151
	Sevanje zvezd.	151
	Emisivnost.	151
	Toplogredni pojav.	152
10.6	Elektroni v kovini	154

Predgovor

Skripta sem napisal na podlagi svojih predavanj iz predmeta Osnove moderne fizike za študente PeF na vezavah s fiziko od šolskega leta 2011/12 dalje. Z namenom, da bi osnove moderne fizike, ki so nastajale v prvi polovici preteklega stoletja, povezal s sodobnimi dogajanjem v znanosti in tehnologiji, sem v poglavju Gravitacija sem dodal temo o gravitacijskem valovanju, v poglavju Sistemi nerazločljivih delcev pa temo o kvantnem računalništvu; o obeh temah sem sicer predaval v okviru predmeta Fizika snovi z didaktiko na drugi stopnji. Temi ne spadata med izpitno snov; ta je določena z Izpitnimi vprašanji, ki niso vključena v pričujoča skripta.

Rad bi se zahvalil profesorju Simonu Širci, ki je skrbno prebral rokopis in me opozoril na številne strokovne in tudi jezikovne nedoslednosti.

Bojan Golli

1 Osnove moderne fizike – uvod

1.1 Klasična in moderna fizika

Pri fizikalnih predmetih v prvem in drugem letniku smo spoznavali tako imenovano *klasično fiziko*, s katero lahko pojasnimo pojave v naši okolici in razumemo načela delovanja številnih naprav, ki jih srečujemo v vsakdanjem življenju. Klasična fizika je osnova številnim tehničnim in drugim naravoslovnim disciplinam. Temelji na fizikalnih zakonih, ki imajo trdno aksiomatsko strukturo: trije Newtonovi zakoni v mehaniki, trije zakoni termodinamike in štiri Maxwellove enačbe v elektromagnetizmu.

Če želimo s temi zakoni opisati pojave v mikroskopskem svetu, torej v svetu molekul, atomov in atomskih jeder, se hitro izkaže, da klasična fizika odpove. Podobno velja za pojave pri velikih hitrostih, na velikih razdaljah v vesolju ali v močnih gravitacijskih poljih. Na vseh teh področjih potrebujemo nove zakone, pa tudi nove koncepte. Fiziko, temelječo na novih zakonih, imenujemo s skupnim izrazom *moderna fizika*. Obsega različne teorije, za katere je značilno, da v limiti majhne hitrosti delca in njegove dovolj velike razsežnosti preidejo v zakone klasične fizike.

Raziskave v fiziki dandanes potekajo predvsem na področjih, ki jih pokriva moderna fizika. Poznavanje osnov moderne fizike je pomembno, če želimo razumeti ozadje novih odkritij v fiziki. Prav tako je poznavanje moderne fizike ključno za razumevanje večine raziskovalnih metod in naprav na vseh področjih naravoslovja, tehnike in medicine.

V naslednjem poglavju si bomo nekoliko podrobneje ogledali, kako fizik pristopi k opisu dogajanj v naravi od vesolja kot celote do dogajanja med subatomske delci. Pri tem je pomembno, da lahko naravo obravnavamo po nadstropjih. Nadstropje določajo gradniki, sile med njimi in zakoni, ki vladajo med gradniki.

1.2 Opis narave po nadstropjih

Narava je zgrajena iz nadstropij

- V najvišjem nadstropju so jate galaksij; značilne razdalje v tem nadstropju so 10^{22} m do 10^{24} m.
- Nadstropje nižje so galaksije, ozvezdja in planetni sistemi; značilne razdalje so v razponu med 10^{11} m in 10^{21} m.
- Naslednje nadstropje je naš vsakdanji svet; to je nadstropje makroskopskih teles.
- Pod njim so nadstropja mikroskopskih delcev; najprej pride na vrsto nadstropje molekul z značilnimi velikostmi 10^{-9} m.
- Sledi nadstropje atomov, velikosti tu so 10^{-10} m.
- Še nižje je nadstropje atomskih jeder z velikostmi nekaj 10^{-15} m.
- V najnižjem nadstropju pa so nukleoni (protoni in nevtroni) in številni delci, ki jih odkrivajo v velikih pospeševalnikih; značilne velikosti so 10^{-15} m in manj.

Zakaj je smiselno govoriti o nadstropjih? Razlog je v tem, da lahko večino pojavov zadovoljivo opišemo v okviru ustreznega nadstropja; to pomeni, da lahko zanemarimo dogajanja v višjih in nižjih nadstropjih, na primer:

- Kemijske lastnosti snovi so enake na Zemlji, Luni ali v medzvezdnem prostoru.
- Na vožnjo avtomobila ne vpliva gibanje planetov okoli Sonca.
- Na gibanje planetov ne vplivajo dogajanja na Zemlji.
- Lastnosti protonov in nevtronov so neodvisne od tega vrste jedra, v katero so vezani.

V posameznem nadstropju nas zanimajo gradniki, ki ga sestavljajo, sile in interakcije med gradniki in zakoni, ki opisujejo dogajanja znotraj nadstropja.

Pregled gradnikov, sil in zakonov po nadstropjih

NADSTROPJE	GRADNIKI	SILE	ZAKONI
jate galaksij	galaksije	gravitacija	splošna teorija relativnosti
galaksije, planetni sistemi	zvezde, planeti	gravitacija	klasična mehanika
makroskopski svet	molekule, kristali	gravitacija, EM sila	klasična fizika
molekule	atomi	EM sila	kvantna mehanika
atomi	atomska jedra, elektroni	EM sila	kvantna mehanika
atomska jedra	nukleoni	močna sila, EM sila	relativistična kvantna mehanika
nukleoni	kvarki	močna sila	kvantna kromodinamika

Osnovne sile

- **Gravitacijska** sila deluje med vsemi telesi z maso in je vedno *privlačna*. Pojema obratno sorazmerno s kvadratom razdalje med telesoma.
- **Elektromagnetna** sila deluje med nabitimi telesi; lahko je *privlačna* (med nasprotno nabitimi) ali *odbojna* (med enako nabitimi) telesi. Tako kot gravitacijska pojem s kvadratom razdalje med telesoma oziroma delcema.
- **Šibka** interakcija pri trkih in razpadih spremeni *identiteto* delca. Primer je radioaktivni razpad beta, pri katerem iz nevtrona nastanejo proton in še dva delca: $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}$. Kadar se tak razpad dogodi znotraj jedra, se atomu spremenijo kemijske lastnosti (spremeni se vrstno število). Sila ima izjemno kratek doseg: ta je velikostnega reda 10^{-15} m.
- **Močna** sila veže gradnike atomskih jeder in poskrbi, da so jedra stabilna. Kot bomo spoznali kasneje, se ta sila z razdaljo spreminja zelo nenavadno.

1.3 Zakoni moderne fizike

Na podlagi naše razpredelnice lahko zaključimo, da klasična fizika pokriva le majhen del narave: makroskopski svet okoli nas in bližnje vesolje. Brž ko so hitrosti teles dovolj velike, klasična mehanika odpove in gibanje moramo opisovati v okviru *posebne teorije relativnosti*. V močnem gravitacijskem polju ali v primeru, ko obravnavamo vesolje kot celoto, ugotovimo, da imata prostor in čas bolj zapleteno strukturo in pojave opisujemo s *splošno teorijo relativnosti*. Prostor je *ukrivljen*; kaj to pomeni, si lahko do neke mere ponazorimo z ukrivljenostjo zemeljskega površja: dokler opazujemo premike, majhne v primerjavi s polmerom Zemlje, lahko površje obravnavamo kot ravno ploščo, ko to ne velja več, pa moramo površje Zemlje obravnavati kot krogelno lupino. Še bolj nenavadno obnašanje delcev srečamo v mikroskopskem svetu. Tu se delci obnašajo bodisi kot delci bodisi kot valovanje; hkrati pa se tudi elektromagnetno valovanje pri nekaterih pojavih obnaša kot curek delcev – fotonov. Govorimo o *valovni* ali *kvantni* mehaniki. Odpovedati se moramo konceptu, da lahko delec opišemo s tremi krajevnimi koordinatami in vektorjem hitrosti. Če poznamo natančno lego delca, ne moremo hkrati natančno poznati njegove hitrosti. Ta nenatančnost ni posledica nenatančnosti merilne naprave, temveč je načelne narave. Nezmožnost hkratne določitve točne lege in hitrosti telesa je izražena z *načelom nedoločenosti*, ki je eno temeljnih načel narave. Narava je zato *nedeterministična*: na podlagi obnašanje opazovanega sistema v preteklosti *načelno* ni mogoče napovedati obnašanje sistema v prihodnosti – navedemo lahko le verjetnosti za posamezne možne izide.

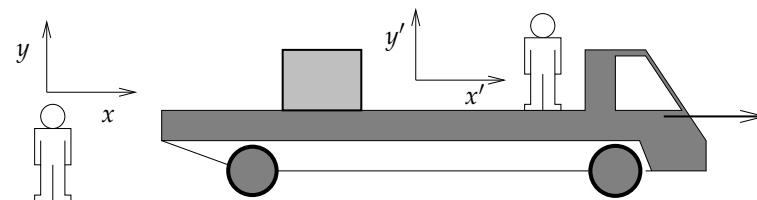
2 Osnove posebne teorije relativnosti

2.1 Osnovne predpostavke

Opazovalni sistemi. Opazovalec opisuje pojav v okviru *opazovalnega sistema*. Opazovalni sistem sestavljata koordinatni sistem (običajno kartezični) za merjenje lege delca in ura za merjenje časa. Isti pojav lahko opazujemo iz različnih opazovalnih sistemov, zato je pomembno, da znamo količine, ki jih izmerimo ali izračunamo v enem opazovalnem sistemu, zapisati tudi v drugem. Ločimo dve vrsti koordinatnih sistemov:

- nepospešene ali inercialne koordinatne sisteme;
- pospešene ali neinercialne koordinatne sisteme.

Razliko med enim in drugim prikažimo kar na enostavnem zgledu. Prvi opazovalec stoji na tleh, drugi se pelje na tovornjaku. Ko začne tovornjak pospeševati, prične zaboj na gladki podlagi drseti proti zadnjemu delu tovornjaka. Ker ni trenja, je vsota vseh sil, ki deluje na zaboj, enaka nič. (V navpični smeri sila podlage uravnovesi težo.) Za opazovalca na tleh zaboj miruje, giblje se le tovornjak. Ugotovi, da za zaboj velja prvi Newtonov zakon. Opazovalec na tovornjaku pa vidi, da se zaboj od njega oddaljuje pospešeno s pospeškom, ki je nasprotno enak pospešku tovornjaka. Zanj Newtonov zakon ne velja, saj se telo giblje pospešeno, kljub temu da je rezultanta zunanjih sil enaka nič. Neskladje lahko popravi tako, da vpelje dodatno silo – *sistemska sila* –, ki ne izvira iz okolice, temveč je vezana na njegov opazovalni sistem. Opazovalca torej isti pojav opišeta različno.



Slika 1: Pospešeni in nepospešeni opazovalec.

Denimo, da tovornjak vozi s konstantno hitrostjo v_0 . V tem primeru sta oba opazovalca inercialna. Merita sicer različne hitrosti; če opazujeta drugo vozilo, ki se giblje v isti smeri kot tovornjak s hitrostjo v' za opazovalca na tovornjaku, izmeri mirujoči opazovalec hitrost $v = v' + v_0$. Če se drugo vozilo za gibajočega se opazovalca giblje pospešeno s pospeškom $a' = dv'/dt$, izmeri mirujoči opazovalec pospešek

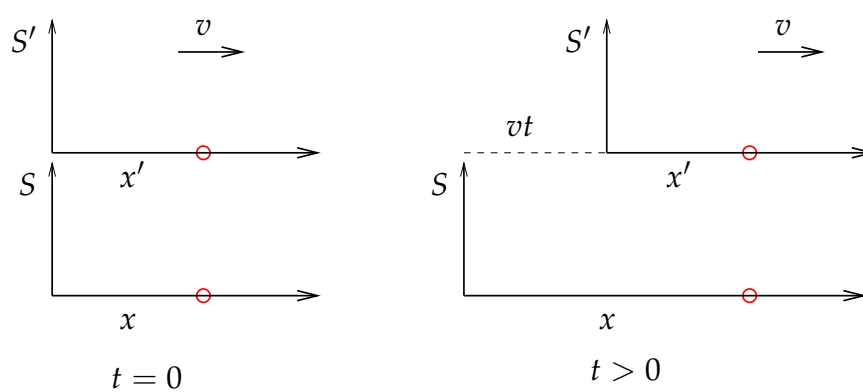
$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d(v' + v_0)}{dt} = a',$$

saj je časovni odvod v_0 enak nič: torej izmeri enak pospešek kot opazovalec na tovornjaku. Ker so zunanje sile neodvisne od opazovalcev, ima Newtonov zakon enako obliko v obeh opazovalnih sistemih. Enako velja za druge fizikalne zakone, tako da lahko ugotovitev strnemo v *načelo*:

Fizikalni zakoni imajo v vseh inercialnih sistemih enako obliko.

Galilejeve transformacije. Pogosto je pojav pripravneje opisati v opazovalnem sistemu S' , ki se giblje s konstantno hitrostjo glede na okolico, in nato rezultate prenesti v sistem S , ki miruje glede na okolico. Kot smo ugotovili v prejšnjem razdelku, so pospeški in sile enaki v obeh sistemih, lege teles in njihove hitrosti pa se lahko razlikujejo.

Zaradi preprostosti naj bosta koordinatni osi x in x' sistemov S in S' vzporedni in naj se sistem S' giblje s hitrostjo v_0 v smeri osi x . Dogovorimo se, da začneta opazovalca meriti čas istočasno v trenutku, ko izhodišči obeh sistemov sovpadata, torej $x = x' = 0$, ko $t = t' = 0$. Tedaj je koordinata x , ki jo meri opazovalec v sistemu S ob kasnejšem času t , večja od koordinate x' , ki jo meri opazovalec v S' , za razdaljo $v_0 t$, ki jo v tem času prepotuje koordinatno izhodišče sistema S' (glej sliko 2). Ugotovitve zberemo v tabeli zvez med koordinatami telesa, ki jih imenujemo *Galilejeve transformacije*.



Slika 2: Galilejeva transformacija lege

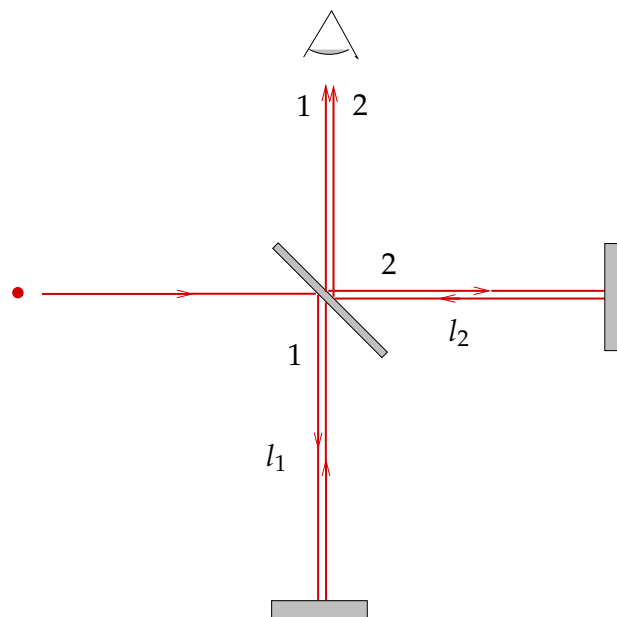
Tabela 1: Galilejeve transformacije.

S	S'
$x = x' + v_0 t$	$x' = x - v_0 t$
$y = y'$	$y' = y$
$z = z'$	$z' = z$
$v_x = v'_x + v_0$	$v'_x = v_x - v_0$
$a = a'$	$a' = a$

Michelson-Morleyjev poskus. Razvoj moderne fizike je zaznamovalo nekaj ključnih poskusov, ki jih ni bilo mogoče konsistentno razložiti v okviru klasične fizike. Eden takšnih je poskus, ki sta ga izvedla Michelson in Morley leta 1887, z njim pa sta nameravala z veliko natančnostjo meriti hitrost svetlobe.

Pri obravnavi valovanj je hitrost valovanja podana za opazovalca, ki miruje glede na sredstvo, v katerem se valovanje širi. Če opazovalec potuje v smeri širjenja valovanja, se zanj valovi gibljejo s hitrostjo $c' = c - v$, če se giblje v nasprotni smeri, pa s $c'' = c + v$. Ali lahko govorimo o sredstvu tudi v primeru elektromagnetnega valovanja, saj za to valovanje velja, da lahko potuje tudi skozi prazen prostor? Pred letom 1900 je veljalo, da obstaja tudi sredstvo, v katerem se širi svetloba. Sredstvo so imenovali *eter* – še dandanes radi rečemo, da gre radijska oddaja *v eter*.

Ob tem se je pojavilo vprašanje, v katerem opazovalnem sistemu eter miruje. Ker se svetloba širi po vsem vesolju, je bila smiselna predpostavka, da eter napolnjuje vse vesolje. Ker so tedaj verjeli, da so zvezde nepremične, je bila naravna predpostavka, da eter miruje glede na zvezde. To bi pomenilo, da se Zemlja pri vrtenju okoli Sonca giblje glede na eter. Hitrost svetlobe, ki bi se s svetila na Zemlji širila v smeri gibanja Zemlje, bi bila zato večja kot hitrost v nasprotni smeri. Temu so nasprotovali nekateri fiziki, ki so menili, da eter v okolici Zemlje potuje skupaj z Zemljo in da razlike hitrosti ne bi smeli opaziti.



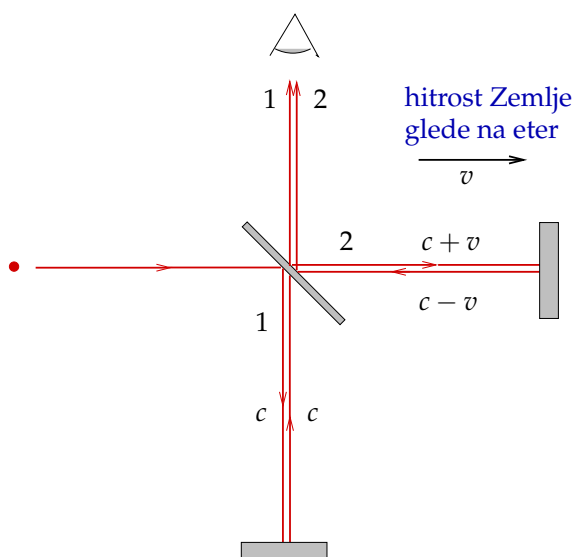
Slika 3: Michelsonov interferometer: Svetlobni žarek iz izvira enobarvne svetlobe (laser) na levi vpada na polprepustno zrcalo (na sredini slike), kjer se razcepi na dva delna žarka. Prvi (1) se odbije na zrcalu in nadaljuje pot do zrcala spodaj, se od zrcala odbije, preide skozi polprepustno zrcalo in pride do opazovalca (zaslona ali detektorja). Drugi delni žarek (2) gre skozi polprepustno zrcalo in se odbije od zrcala na desni. Odbiti žarek pride skupaj s prvim delnim žarkom do opazovalca. Oba delna žarka na koncu interferirata. Do ojačenja pride, če je razlika (optičnih) poti enaka večkratniku valovne dolžine.

Michelson in Morley sta za merjenje hitrosti Zemlje glede na hipotetični eter uporabila interferometer. Kot smo omenili na začetku, bi bila hitrost svetlobe, ki potuje v isti smeri kot Zemlja, večja, v nasprotni smeri pa manjša od hitrosti svetlobe, ki jo oddaja izvir, mirujoč glede na eter. Denimo, da je interferometer na sliki 3 naravnan tako, da je imata oba kraka natanko enako dolžino, $l_1 = l_2 = l$. Če so hitrosti vseh žarkov enake,

pride v tem primeru do ojačitve. Če se interferometer giblje v vodoravni smeri s hitrostjo v v desno, bi bila hitrost drugega delnega žarka pri potovanju v desno enaka $c + v$, v levo pa $c - v$. Čas potovanja prvega delnega žarka od polprepustnega zrcala in nazaj bi bil enak $t_1 = 2l/c$, čas drugega žarka po enaki poti pa $t_2 = l/(c + v) + l/(c - v)$. Razlika časov bi merila

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{l}{c - v} + \frac{l}{c + v} - \frac{2l}{c} = \frac{2lv^2}{c(c^2 - v^2)} \approx \frac{2lv^2}{c^3}. \quad (2.1)$$

V zadnjem koraku smo zanemarili v^2 v primerjavi c^2 . Žarka se na izhodu ojačita, če je



Slika 4: Hitrosti žarkov glede na hipotetični eter.

časovni zaostanek enak večkratniku nihajnega časa t_0 . V splošnem je *fazni zamik* med delnima žarkoma enak

$$\delta = 2\pi \frac{\Delta t}{t_0} = 2\pi v \Delta t = 2\pi \frac{c}{\lambda} \Delta t = 4\pi \frac{l}{\lambda} \frac{v^2}{c^2}, \quad (2.2)$$

pri čemer smo nihajni čas svetlobe izrazili s frekvenco in nato z valovno dolžino. Ocenimo fazni premik za značilne podatke: za hitrost v lahko vzamemo hitrost Zemlje pri kroženju okoli Sonca, $v = 30$ km/s, za valovno dolžino svetlobe pa $\lambda = 500$ nm. Pri teh podatkih je fazni premik opazljiv, če l meri nekaj metrov. Michelson in Morley sta uporabila napravo z $l = 11$ m, tako da bi fazni premik pri naših podatkih meril $\delta = 0,88\pi$, torej skoraj π , kar pomeni, da bi namesto ojačenja dobili oslabitev.

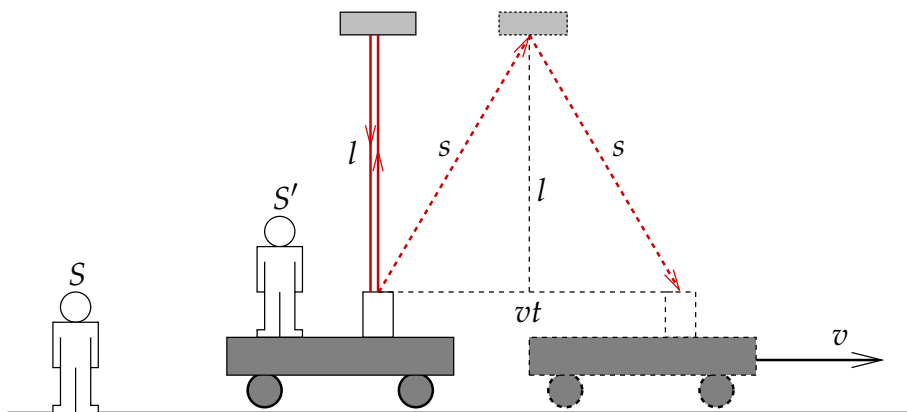
Michelson in Morley sta interferometer postavljala v različne smeri, a izid poskusa je bil v vseh primerih enak; fazne razlike med delnima žarkoma nista opazila. Zgovorniki hipoteze, da se eter giblje skupaj z Zemljo, so slavili zmago kljub temu, da je bila njihova hipoteza v nasprotju z nekaterimi drugimi poskusi. Negativni izid poskusa je bilo pomembno izhodišče pri snovanju *posebne teorije relativnosti*. Einstein je predpostavil, da etra ni, da se svetloba torej širi skozi prazen prostor, in postuliral:

Hitrost svetlobe je enaka za vse opazovalce.

2.2 Podaljšanje časa

Postulat, da je hitrost svetlobe enaka za vse opazovalce, ima daljnosežne posledice. S stališča klasične kinematike se hitrost svetlobe za mirujočega opazovalca poveča, če se izvir giblje v smeri žarka, $c' = c + v$, saj žarek opravi v določenem času za toliko daljšo pot, za kolikor se je izvir premaknil. Z upoštevanjem postulata o svetlobni hitrosti, $c' = c$, pa sledi protislovna enačba $c = c + v$. Protislovje lahko odpravimo edino tako, da predpostavimo, da čas za mirujočega opazovalca teče drugače kot za opazovalca, ki se giblje skupaj z izvirom.

Miselni poskus. Zvezo med merjenima časoma v enem in drugem sistemu izpeljemo z naslednjim miselnim poskusom. Opazovalec S' na vozičku, ki se giblje s hitrostjo v glede na okolico, posveti z laserjem v prečni smeri glede na smer gibanja, tako da se žarek po odboju od zrcala vrne do izvira. Za pot porabi čas $t' = 2l/c$. Poskus opazuje opazovalec S , ki miruje glede na okolico. Zanj se žarek po odboju ne vrne na isto mesto, saj se izvir medtem premakne (glej sliko 5). Če čas potovanja, ki ga izmeri S , označimo s t , je premik vozička enak vt . Iz slike razberemo, da za čas t velja:



Slika 5: Pot žarka za opazovalca S' (polna črta) in za opazovalca S (črtkano).

$$t = \frac{2s}{c} = \frac{2\sqrt{l^2 + \left(\frac{1}{2}vt\right)^2}}{c}.$$

(Ne pozabimo, da je hitrost svetlobe za oba opazovalca enaka.) Enačbo pomnožimo s c in kvadriramo:

$$c^2 t^2 = 4l^2 + v^2 t^2 = c^2 t'^2 + v^2 t^2,$$

pri čemer smo dolžino l izrazili s časom potovanja, ki ga izmeri S' . Iz enačbe izrazimo t :

$$t^2(c^2 - v^2) = c^2 t'^2, \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma t', \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.3)$$

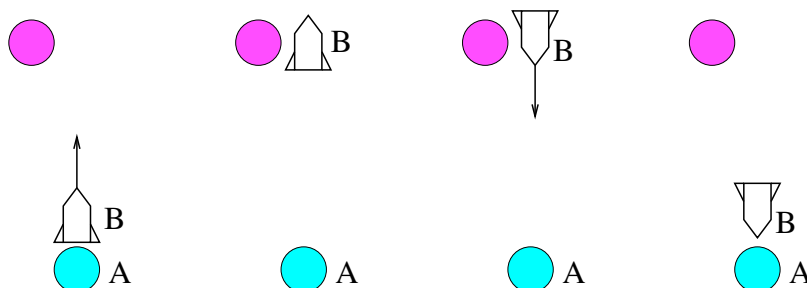
Mirujoči opazovalec torej nameri daljši čas, saj velja $\gamma \geq 1$.

Po čem se opazovalca pravzaprav razlikujeta, saj so po prvem načelu vsi opazovalci enakovredni? Za opazovalca S' se začetek in konec poskusa dogodi *na istem mestu*, za vse druge opazovalce pa na različnih mestih. Čas, ki ga meri opazovalec v sistemu, v katerem izmeri začetni in končni čas poskusa na istem mestu, vpeljemo kot *lastni čas*.

Denimo, da bi imel opazovalec na vozičku veliko uro, tako da bi lahko mirujoči opazovalec gledal na na njegovo uro in odčitani čas primerjal s svojo uro. Videti bi, da teče čas opazovalcu na vozičku počasneje kot njemu. A enako bi lahko sklepal opazovalec na vozičku, ko bi opazoval uro opazovalca, ki miruje glede na okolico. Zdi se, da smo naleteli na protislovje. Če bi želeli protislovje razrešiti, bi morali natančno opredeliti postopek, kako oba časa primerjamo. Ko letita opazovalca drug mimo drugega, lahko naravnata uri; ni pa jasno, kako lahko uri primerjata ob poznejših časih, saj poleg različnih časov merita tudi različne razdalje. K temu problemu se bomo vrnili pri obravnavi Lorentzovih transformacij.

Paradoks dvojčkov. Ko se pojavi nova (fizikalna) teorija, skušajo številni teorijo preveriti ali pa pokazati, da je napačna. Eden od načinov je seveda eksperiment; notranjo konsistentnost pa lahko preverjamo z miselnimi poskusi. Če so rezultati protislovni, pomeni, da teorija ni konsistentna; govorimo o *paradoksu*. Eden najbolj znanih primerov takšnega (navideznega) paradoksa, ki je povezan z merjenjem časa, je *paradoks dvojčkov*.

Eden od dvojčkov, imenujmo ga kar B, se odpravi na pot do zvezde, oddaljene 20 svetlobnih let¹, drugi, A, ostane na Zemlji. Dvojček B potuje z raketo s hitrostjo $0,8c$



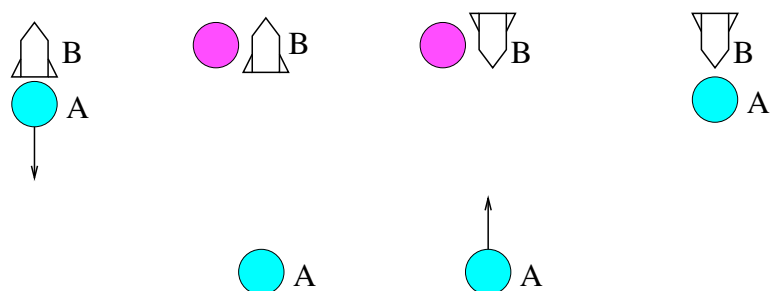
Slika 6: Potovanje B-ja, kot ga vidi A.

in doseže zvezdo v 25 letih, merjeno za opazovalca na Zemlji; nato se obrne in se vrne na Zemljo. Za celotno pot porabil $t_A = 50$ let. Ker pa v raketi za opazovalca na Zemlji teče čas počasneje, porabi dvojček B za celotno pot le

$$t_B = \frac{t_A}{\gamma} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} t_A = 0,6 t_A = 30 \text{ let.} \quad (2.4)$$

Če je sklepanje pravilno, se B vrne 20 let mlajši od svojega brata, ki je ostal na Zemlji. Ampak — enako lahko sklepa dvojček B. Zanj se Zemlja oddaljuje s hitrostjo $0,8c$, zato sklepa, da na Zemlji teče čas počasneje. Domneva, da bo po povratku njegov brat, ki je ostal na Zemlji, mlajši za 20 let. Očitno smo prišli do protislovja, saj smo

¹svetlobno leto (sv. leto) je razdalja, ki jo svetloba prepotuje v enem letu.



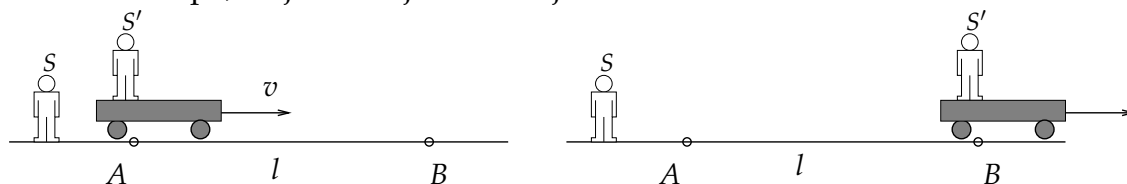
Slika 7: Potovanje A-ja, kot ga vidi B.

s stališča dveh opazovalcev, ki naj bi bila enakovredna, dobili različne rezultate. Pa sta res enakovredna? Ko je B prišel do zvezde, se je moral ustaviti, nazaj grede pa pospeševati, da je dosegel zaželeno hitrost. Torej se je vsaj del časa gibal pospešeno in ni bil v inercialnem sistemu. Zato oba opazovalca nista enakovredna in pravilen opis je opis opazovalca A, ki je bil ves čas poskusa inercialen.

2.3 Skrajšanje dolžin

Opazovalca v sistemih, ki se gibljejo drug glede na drugega, ne merita enakega časa in tudi ne enakih dolžin.

Miselni poskus. Zamislimo si poskus, pri katerem vozilo vozi s hitrostjo v od kraja A do kraja B po ravni cesti. Razdaljo med krajema označimo z l . Prvi opazovalec naj miruje glede na cesto. Za trajanje potovanja izmeri čas t in velja $l = vt$. Drugi opazovalec naj se giblje skupaj z vozilom. Uro sproži, ko gre izhodišče njegovega koordinatnega sistema mimo kraja A in ustavi v trenutku, ko gre njegovo izhodišče mimo kraja B. Izmeril je *lastni čas* potovanja, t' , saj se je začetek in konec dogodil v isti točki v njegovem koordinatnem sistemu. V sistemu, ki miruje glede na cesto, pa se začetek in konec potovanja dogodita v različnih točkah. Velja $t = \gamma t'$. Gibajoči se opazovalec sklepa, da je razdalja med krajema A in B enaka



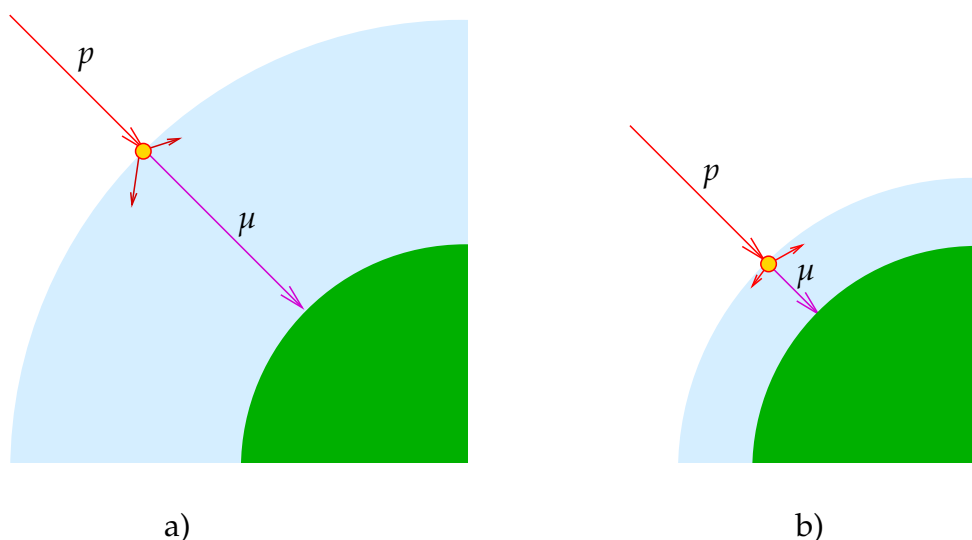
Slika 8: Mirujoči opazovalec in opazovalec, ki se giblje skupaj z vozilom.

$$l' = vt' = \frac{vt}{\gamma} = \frac{l}{\gamma}. \quad (2.5)$$

Opazovalec, ki se glede na objekt giblje, torej izmeri *krajšo* dolžino ceste. Dolžino objekta (ceste, telesa, ...) v sistemu, v katerem objekt miruje, imenujemo *lastna dolžina*.

Skrajšanje dolžin v primeru potovanja dvojčkov. Izid poskusa, povezanega s paradoksom dvojčkov, lahko pojasnimo tudi tako, da A in B merita različne razdalje potovanja. Opazovalec na Zemlji miruje glede na zvezdo, torej izmeri *lastno* oddaljenost do zvezde. Opazovalec v B pa se giblje in izmeri *krajšo* pot, $l' = l/\gamma = 0,6l = 12$ svetlobni let. Za tolikšno pot pa pri hitrosti v porabi $t' = l'/v = 15$ let, kolikor tudi pokaže njegova ura.

Eksperimentalne potrditve. Rezultati, do katerih smo prišli, so v nasprotju z našo intuicijo, zato je pomembno, da jih je mogoče preveriti tudi eksperimentalno. Eden prvih poskusov je bil *poskus z mioni*. Mioni imajo enake lastnosti kot elektroni, le njihova masa je 207 krat večja. Niso obstojni in po času $\tau = 2,20 \mu\text{s}$ razpadejo v elektron in dva nevtrina. Nastajajo v vrhnjih plasteh atmosfere nekako 10 km nad tlemi pri trkih kozmičnih protonov, ki priletijo iz vesolja, z jedri atomov zraka. Protoni imajo lahko tolikšno energijo, da nastali mioni odletijo s hitrostjo, ki je zelo blizu svetlobne hitrosti. V času od nastanka do razpada preletijo razdaljo $l' = v\tau \approx c\tau = 660$ m. Detektor na tleh jih torej ne bi mogel zaznati, saj bi že veliko prej razpadli. A pri tem zaključku nismo upoštevali relativističnega podaljšanja časa in skrajšanja dolžin. Debelina atmosfere 10 km je lastna dolžina za opazovalca na tleh, saj atmosfera glede na tla miruje. Za gibajočega se opazovalca, ki bi se gibal skupaj z mionom, pa bi se ta dolžina skrajšala za relativistični faktor γ . Če za hitrost miona vzamemo realistično vrednost 0,998 c , izračunamo $\gamma = 1/\sqrt{1 - 0,998^2} = 16$. V tem primeru je za mion atmosfera debela le $10 \text{ km}/16 \approx 630$ m, kar pomeni, da ravno še doseže zemeljsko površje in ga detektor lahko zazna.



Slika 9: Potovanje miona skozi atmosfero, kot ga vidi opazovalec na Zemlji (a) in opazovalec, ki bi se gibal skupaj z mionon (b).

Razpadni čas τ je pravzaprav povprečni čas, v katerem mion razpade. Število mionov v vzorcu pojema eksponentno s karakterističnim časom τ , merjeno v sistemu, v katerem mioni mirujejo. Za gibajoče se mione pa se karakteristični čas poveča za faktor γ . Število mionov v curku, ki potuje proti površju Zemlje, zato eksponentno pojema

s prepotovano potjo. Prvi poskus z merjenjem mionov sta leta 1940 izvedla Hall in Rossi, tako da sta merila tok mionov pri dveh nadmorskih višinah, 3240 m in 1616 m. Ker sta merila energijo mionov in s tem njihovo hitrost, sta lahko potrdila napovedi teorije relativnosti.

V velikih pospeševalnikih dandanes opazujemo različne neobstoje delce, ki zelo hitro razpadajo. Zaradi podaljšanja časa se v sistemu laboratorija ta čas znatno poveča, saj so hitrosti nastalih delcev zelo blizu svetlobne hitrosti. Relativistične efekte lahko pri teh poskusih zelo natančno preverimo.

Zanimivi so poskusi, pri katerih med sabo trkajo težki ioni z izjemno velikimi kinetičnimi energijami. V pospeševalnikih dosežejo jedra zlata hitrosti, ki merijo $0,99995\,c$. V smeri gibanja jedra se polmer kroglice skrči na vsega $r' = r/\gamma = r\sqrt{1 - 0,99995^2} = 0,01\,r$. Jedro, ki je v mirovanju okroglo, je za mirujočega opazovalca videti kot tanka ploščica, saj v prečni smeri ohrani svojo velikost.

2.4 Relativistični Dopplerjev pojav

Klasični Dopplerjev pojav. Opazovalec, ki se približuje izviru valovanja, izmeri večjo frekvenco valovanja, kot opazovalec, ki miruje glede na izvir. Če se oddaljuje, pa manjšo. V klasični fiziki je pomembna hitrost, s katero se izvir giblje glede na sredstvo, v katerem se širi valovanje. Če izvir miruje glede na sredstvo in se opazovalec s hitrostjo v giblje glede na izvir, velja

$$\nu = \nu_0 \left(1 \pm \frac{v}{c}\right).$$

Pri tem je ν_0 frekvenca izvira in ν frekvenca, ki jo zazna opazovalec; predznak $+$ ustreza približevanju, $-$ pa oddaljevanju. Če opazovalec miruje glede na sredstvo in se giblje izvir, velja

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 \mp \frac{v}{c}}. \quad (2.6)$$

Predznak $-$ sedaj ustreza za približevanju, $+$ pa oddaljevanju izvira od opazovalca.

Dopplerjev pojav pri elektromagnetnem valovanju. V relativistični obravnavi se elektromagnetno valovanje (svetloba) širi skozi prazen prostor in zato ne obstaja privilegiran opazovalni sistem, kot pri valovanjih, ki za širjenje potrebujejo sredstvo. Vsak opazovalec miruje v svojem opazovalnem sistemu, giblje se izvir. Pri relativistični obravnavi moramo tudi upoštevati, da teče čas za opazovalca, ki se giblje skupaj z izvirom, drugače kot za opazovalca, za katerega se izvir giblje. Za drugega opazovalca teče ura v gibajočem se sistemu počasneje, zato se zanj spremeni frekvenca izvira ne glede na to, v katero smer se izvir giblje. Izvir v lastnem sistemu niha z nihajnim časom $t_0 = 1/\nu_0$. Opazovalec izmeri daljši čas $t'_0 = \gamma t_0$ in manjšo frekvenco nihanja izvira:

$$\nu' = \frac{1}{t'_0} = \frac{1}{\gamma t_0} = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.7)$$

pri čemer še nismo upoštevali, da se izvir približuje ali oddaljuje. Do spremembe frekvence torej pride tudi v primeru, ko se izvir giblje v prečni smeri (v smeri pravokotno na zveznico med izvirom in opazovalcem). Govorimo o *prečnem Dopplerjevem pojavu*. Opazimo ga na primer pri satelitu, ko leti v zenitu, in oddaja signal sprejemniku na Zemlji. Pri zvoku prečnega pojava ni; frekvenca ki jo zazna poslušalec, je enaka frekvenci zvočila.

Če se izvir približuje s hitrostjo v , moramo upoštevati, da se valovi zgostijo, tako kot pri drugih valovanjih (glej (2.6)) in frekvenca se poveča:

$$\nu = \frac{\nu'}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} . \quad (2.8)$$

Podoben rezultat sledi v primeru, ko se izvir oddaljuje, le da se v tem primeru frekvenca zmanjša:

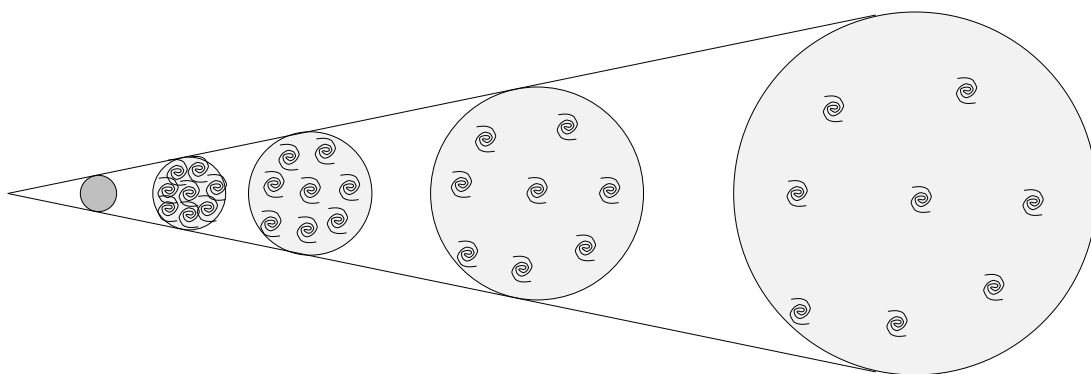
$$\nu = \frac{\nu'}{1 + \frac{v}{c}} = \nu_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v}{c}} = \nu_0 \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} . \quad (2.9)$$

Hubblev zakon. Segreti plini sevajo črtast spekter svetlobe. Z merjenjem značilnih valovnih dolžin, ki se pojavijo v spektru plina, lahko ugotovimo, kateri plin seva. V vesolju je največ vodika, ki oddaja vidno svetlobo pri valovnih dolžinah 656,3 nm, 486,1 nm, 434,0 nm, 410,2 nm. Pri opazovanju oddaljenih galaksij so opazili, da značilne črte vodika in tudi drugih elementov niso pri običajnih vrednostih, pač pa so premaknjene proti večjim valovnim dolžinam (frekvence pa k manjšim frekvencam). Tako lahko namesto značilne modrozeleno črte pri 486,1 nm opazimo črto pri večji valovni dolžini, ki je sedaj lahko rdeča. Pojavu zato pravimo *rdeči premik* spektralnih črt. Hubble je pojav pojasnil z Dopplerjevim pojavom in hipotezo, da se oddaljene galaksije od nas odmikajo. Z merjenjem rdečega premika je določil hitrost tega odmikanja. Ker so za galaksije, ki so dovolj blizu Zemlje, poznali hitrosti, je Hubble lahko ugotovil, da je hitrost odmikanja *premo sorazmerna* z oddaljenostjo galaksije od Zemlje:

$$v = H_0 d, \quad H_0 = 70 \text{ km/s/Mpc} = 2,3 \cdot 10^{-18} \text{ s}^{-1} = 7,2 \cdot 10^{-11} \text{ let}^{-1} . \quad (2.10)$$

Hitrost se torej poveča za 70 km/s, ko se oddaljenost poveča za en megaparsek (Mpc)². Na prvi pogled se zdi, kot bi bila Zemlja oz. naša galaksija v središču vesolja, saj se vse druge galaksije odmikajo od nas. A ker hitrost narašča linearno z razdaljo, velja za vsako galaksijo, da se druge odmikajo od nje. Mislimo si, da na balonu narišemo pike, ki predstavljajo galaksije. Ko balon napihujemo, se razdalja med poljubnima pikama povečuje. Za nobeno piko ne moremo reči, da je središče (površja) balona. Če se torej galaksije oddaljujejo druga od druge, pomeni, da so morale biti nekoč skupaj (glej sliko 10). Govorimo o *velikem poku*, ki pomeni začetek vesolja in začetek oddaljevanja galaksij. Kdaj je se veliki pok pričel? Če za d vzamemo razdajo do izbrane galaksijama,

²Parsek je astronomska enota za merjenje velikih razdalj; to je razdalja, s katere vidimo premer Zemljine orbite pod kotom ene ločne sekunde. Enak je 3,26 svetlobnih let.



Slika 10: **Širjenje vesolja:** razdalja med poljubnima galaksijama se enakomerno povečuje.

se razdalja premo enakomerno povečuje, $d = vt$, pri čemer čas t merimo od trenutka, ko je bila razdalja enaka nič, torej od začetka vesolja. Po drugi strani iz (2.10) sledi $d = vH_0^{-1}$. Od tod sklepamo, da je starost vesolja

$$t_0 = H_0^{-1} = 14 \cdot 10^9 \text{ let.} \quad (2.11)$$

Natančnejši računi upoštevajo, da se vesolje ni vedno enakomerno širilo, in za starost vesolja dobijo $13,8 \pm 0,4$ milijard let.

2.5 Lorentzeve transformacije

Relativistične transformacije, ki nadomestijo Galilejeve transformacije (glej tabelo 1), je prvi zapisal Hendrik Lorentz za transformacije elektromagnetnega polja, še preden je Einstein izdelal svojo posebno teorijo relativnosti.

Izpeljava transformacij. Pri izpeljavi transformacij za čas in koordinate se omejimo na poseben primer transformacij, ko se drugi opazovalec giblje vzdolž med seboj vzporednih osi x in x' , podobno kot smo to storili pri zapisu Galilejevih transformacij. Pri izpeljavi predpostavimo:

- (a) V limiti $v/c \rightarrow 0$ sledijo Galilejeve transformacije.
- (b) Vsi inercialni opazovalni sistemi so enakovredni; obratna transformacija se razlikuje le po predznaku hitrosti v .
- (c) Transformira se tudi čas.
- (d) Hitrost svetlobe je v vseh sistemih enaka.

Iz zahteve (a) pričakujemo, da bo imela transformacija iz sistema S v sistem S' , ki se giblje s hitrostjo v vzdolž koordinatne osi x , obliko

$$x' = k(x - vt), \quad k(v \rightarrow 0) = 1. \quad (2.12)$$

Iz (b) sledi, da mora imeti obratna transformacija obliko

$$x = k(x' + vt') . \quad (2.13)$$

Povezavo med časoma, merjenima v prvem in drugem opazovalnem sistemu, izpeljemo tako, da x iz druge enačbe vstavimo v prvo:

$$x' = k(k(x' + vt') - vt) = k^2 x' + k^2 vt' - kvt . \quad (2.14)$$

Člen kvt prenesemo na levo in enačbo delimo s $k v$:

$$t = kt' + \frac{k^2 - 1}{kv} x' = k \left(t' + \frac{k^2 - 1}{k^2 v} x' \right) . \quad (2.15)$$

Kot smo pričakovali, transformacija za čas preplete časovno in krajevno koordinato. Izraz za koeficient k izpeljemo iz predpostavke (d). Opazovalca pričneta meriti vsak svoj čas v trenutku, ko izhodišči koordinatnih sistemov sovpadata. V tem trenutku opazovalec v S posveti z laserskim žarkom v smeri osi x ; čelo curka se giblje premo enakomerno s svetlobno hitrostjo c : $x = ct$. Enako zapiše gibajoči se opazovalec: $x' = ct'$. Upoštevamo (2.13) in (2.15) in izračunamo

$$c = \frac{x}{t} = \frac{k(x' + vt')}{k \left(t' + \frac{k^2 - 1}{k^2 v} x' \right)} . \quad (2.16)$$

Upoštevamo še $x' = ct'$, izpostavimo t' v števcu in imenovalcu, okrajšamo t' in k , in sledi:

$$c = \frac{c + v}{1 + \frac{(k^2 - 1)c}{k^2 v}} . \quad (2.17)$$

Sledi

$$c + \frac{(k^2 - 1)c^2}{k^2 v} = c + v , \quad \text{torej} \quad \frac{k^2 - 1}{k^2} = \frac{v^2}{c^2} . \quad (2.18)$$

Od tod izluščimo

$$k^2 = \frac{c^2}{c^2 - v^2} \quad \text{in} \quad k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \equiv \gamma . \quad (2.19)$$

Transformacija iz S' v S ima torej obliko

$$t = \gamma \left(t' + \frac{v}{c^2} x' \right) , \quad (2.20)$$

$$x = \gamma (x' + vt') , \quad (2.21)$$

pri čemer smo izraz $(k^2 - 1)/k^2 v$ v (2.15) poenostavili s pomočjo druge enakosti v (2.18). Transformacijo iz S v S' končno zapišemo kot

$$\begin{aligned} t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) , \\ x' &= \gamma (x - vt) , \\ y' &= y , \\ z' &= z . \end{aligned} \quad (2.22)$$

Dodali smo še zvezi med drugima dvema koordinatama, ki se v našem primeru ob prehodu iz enega koordinatnega sistema v drugega ne spremenita.

Lorentzeve transformacije in podaljšanje časa. Kot zgled za uporabo Lorentzevih transformacij se vrnimo na pojav podaljšanja časa. Pojav obravnavamo kot zaporedje dogodkov. Dogodek je določen tako, da povemo, kje v koordinatnem sistemu se je dogodil in kdaj. Pri pojavih, ki jih bomo obravnavali, zadostuje le ena koordinata, x . V tem primeru je dogodek določen z dvojico podatkov (t, x) . Ko gremo v drug opazovalni sistem, se dvojica podatkov transformira tako, kot to narekujejo Lorentzeve transformacije.

Opazujemo najprej pojav, ki se zgodi v koordinatnem sistemu S' na istem mestu. Zaradi preprostosti izberimo kar $x' = 0$. Začetek pojava naj bo ob času 0, konec ob t' . Začetku in koncu priredimo dogodka $A = (t'_A, x'_A) = (0, 0)$ in $B = (t'_B, x'_B) = (t', 0)$. V koordinatnem sistemu S , ki se giblje s hitrostjo v glede na S' , sledi za časa in legi dogodkov

$$\begin{aligned}x_A &= \gamma(x'_A + vt'_A) = 0, & t_A &= \gamma\left(t'_A + \frac{v}{c^2}x'_A\right) = 0, \\x_B &= \gamma(x'_B + vt'_B) = \gamma vt', & t_B &= \gamma\left(t'_B + \frac{v}{c^2}x'_B\right) = \gamma t'.\end{aligned}$$

V sistemu S traja dogodek $t = t_B - t_A = \gamma t'$, kar je v skladu z enačbo za podaljšanje časa, ki smo izpeljali v poglavju 2.2.

Lorentzeve transformacije in skrajšanje dolžin. Na podoben način preverimo, če lahko izpeljemo znani rezultat tudi za relativistično skrajšanje dolžin. V sistemu S sedaj izberimo dogodka, ki se zgodita ob istem času $t_A = t_B = 0$, a pri različnih legah, $x_A = 0$ in $x_B = l$, na primer v dveh krajiščih palice. V sistemu S' velja

$$x'_A = 0, \quad t'_A = 0, \quad x'_B = \gamma l, \quad t'_B = \gamma \frac{vl}{c^2}.$$

Za razdaljo med dogodkoma sledi $l' = x'_B - x'_A = \gamma l$. Pomeni, da se razdalja *podaljša* in ne skrajša, kot bi pričakovali na podlagi rezultata v poglavju 2.3. Kateri rezultat je pravilen? Opazimo, da dogodka v sistemu S' nista bila sočasna tako kot v sistemu S . Pomeni, da smo lego drugega krajišča izmerili kasneje kot lego prvega. Med tem časom pa se je palica v sistemu S' premaknila, zato nismo izmerili samo dolžino palice, temveč vsoto dolžine in premika. Pri merjenju dolžine moramo zahtevati, da obe krajišči izmerimo hkrati, torej $t'_B = t'_A$, v našem primeru ob $t'_B = 0$. To pa lahko zagotovimo le v primeru, da dogodka nista sočasna v sistemu S . Iz transformacije za čas sledi

$$t'_B = \gamma\left(t_B + \frac{v}{c^2}x_B\right) = 0, \quad t_B = -\frac{vx_B}{c^2} = -\frac{vl}{c^2}.$$

Če vrednost t_B sedaj vstavimo v enačbo za x'_B , sledi

$$x'_B = \gamma(x_B - vt_B) = \gamma\left(l - \frac{v^2 l}{c^2}\right) = \gamma \frac{1}{\gamma^2} l = \frac{l}{\gamma}.$$

Dobili smo pričakovani rezultat $l' = x'_B - x'_A = l/\gamma$. Vsak opazovalec, ki meri dolžino objekta, mora zagotoviti, da izmeri obe krajni točki *sočasno*. Pri tem ni pomembno, če za druge opazovalce njegovo merjenje ni bilo sočasno.

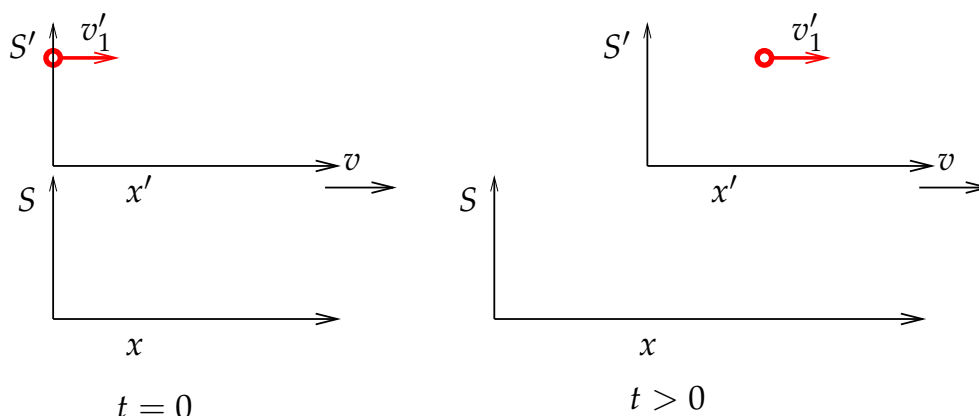
Pri tem zgledu smo spoznali, da sočasnost dveh dogodkov v enem sistemu ne implicira sočasnosti v drugem opazovalnem sistemu. Več o tem bomo povedali v poglavju 2.8.

2.6 Transformacija hitrosti

Iz transformacije (2.22) lahko hitro izpeljemo pravilo za transformacijo hitrosti iz enega sistema v drugega. Zaradi enostavnosti obravnavamo le primer, ko se telo v koordinatnem sistemu S giblje v smeri osi x , torej v isti smeri, kot se giblje drugi opazovalec S' . Opazujemo primer, ko se v sistemu S telo giblje premo enakomerno s hitrostjo v_1 , tako da je bilo ob času $t = 0$ v izhodišču. Velja $x = v_1 t$. V sistemu S' izberemo pričetek merjenja časa v trenutku, ko izhodišči obeh sistemov sovpadata. Potem za gibanje telesa v sistemu S' prav tako velja $x' = v'_1 t'$. Po Galileju seveda velja $v'_1 = v_1 - v$, v relativističnem primeru pa do zveze pridemo tako, da drugo enačbo v (2.22) delimo s prvo in vstavimo $x = v_1 t$:

$$v'_1 = \frac{x'}{t'} = \frac{\gamma(x - vt)}{\gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)} = \frac{v_1 t - vt}{t - \frac{v}{c^2}v_1 t} = \frac{v_1 - v}{1 - \frac{vv_1}{c^2}}. \quad (2.23)$$

Če se sistem S' giblje v nasprotni smeri, spremenimo predznak v v števcu in imenovalcu.



Slika 11: Legi koordinatnih sistemov ob času $t = 0$ in ob kasnejšem času pri opazovanju telesa, ki se v sistemu S' giblje s hitrostjo v'_1 .

Namesto telesa vzemimo kar svetlobni žarek, $v_1 = c$. Hitrost žarka v S' je potemtaka

$$v'_1 = \frac{c - v}{1 - \frac{vc}{c^2}} = \frac{c\left(1 - \frac{vc}{c^2}\right)}{1 - \frac{vc}{c^2}} = c, \quad (2.24)$$

kot smo pričakovali, saj mora biti hitrost svetlobe v vseh sistemih enaka.

2.7 Štirirazsežni prostor

Transformacijo (2.22) lahko prepišemo v nekoliko bolj simetrično obliko, če čas pomnožimo s svetlobno hitrostjo:

$$ct' = \gamma \left(ct - \frac{v}{c} x \right), \quad (2.25)$$

$$x' = \gamma \left(x - \frac{v}{c} ct \right). \quad (2.26)$$

Produkt ct ima enoto dolžine in se obnaša kot dodatna, četrta koordinata. Vpeljemo štirirazsežni prostor, v katerem je četrta koordinata čas, pomnožen s svetlobno hitrostjo. Točka v tem prostoru je določena s četverico koordinat. Ustrezni vektor – *vektor četverec* – zapišemo kot

$$\underline{r} \equiv (ct, x, y, z) \equiv (r_0, r_1, r_2, r_3). \quad (2.27)$$

Časovno koordinato običajno pišemo na prvem mestu z indeksom 0 („ničta“ koordinata). Če vektorje zapišemo v obliki stolpcev, lahko transformacijo (2.22) prepišemo v matrično obliko:

$$\begin{bmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & -\frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ -\frac{v}{c}\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

ali kompaktno

$$\underline{r}' = \underline{L} \underline{r}. \quad (2.29)$$

Namesto o točkah v trirazsežnem prostoru, določenih s tremi koordinatami, govorimo sedaj o *dogodkih*, določenih s štirimi koordinatami. Dogodek je določen tako, da navedemo njegovo *lego* (točko v trirazsežnem prostoru) in *čas*, ko se je zgodil.

Invarianta je količina, ki se pri prehodu iz enega koordinatnega sistema v drugega ne spremeni. V nerelativistični fiziki so invariante na primer čas, masa in velikost razdalje med dvema točkama. V teoriji relativnosti čas in razdalja nista več invariantna, saj se za gibajočega se opazovalca čas podaljša, razdalja pa skrajša.

Razdaljo med dvema točkama, $|\Delta \vec{r}| = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, definiramo z

$$|\Delta \vec{r}|^2 = \Delta \vec{r} \cdot \Delta \vec{r} = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \quad (2.30)$$

če je $\Delta x = x_2 - x_1, \dots$. Podobno poskusimo vpeljati razmik med dogodkoma v štirirazsežnem prostoru:

$$|\Delta \underline{r}|^2 = (c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (2.31)$$

V sistemu, ki se giblje v smeri osi x s hitrostjo v , velja $c\Delta t' = \gamma (c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta x)$, $\Delta x' = \gamma (\Delta x - \frac{v}{c} c\Delta t)$, in razmik bi imel obliko

$$\begin{aligned} |\Delta \underline{r}'|^2 &= (c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2 \\ &= \gamma^2 \left[c\Delta t - \frac{v}{c} \Delta x \right]^2 + \gamma^2 \left[\Delta x - \frac{v}{c} c\Delta t \right]^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= \gamma^2 \left[\left(1 + \frac{v^2}{c^2} \right) \left((c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \right) - 4v\Delta t \Delta x \right] + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Izraz bi bil enak (2.31), če bi spremenili predznak člena $\frac{v^2}{c^2}$ in ne bi bilo tretjega člena v oglatem oklepaju. Če spremenimo predznak časovnega člena v (2.31):

$$|\Delta \underline{r}|^2 \equiv (\Delta s)^2 \equiv -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \quad (2.33)$$

pa se lahko hitro prepričamo, da se račun izide:

$$|\Delta \underline{r}'|^2 = |\Delta \underline{r}|^2. \quad (2.34)$$

Količina $(\Delta s)^2$ je enaka v vseh inercialnih sistemih; govorimo o (kvadratu) *razmika* med dogodkoma. Po analogiji z (2.30) vpeljemo *skalarni produkt* dveh vektorjev četvercev $\underline{a} = (a_0, a_1, a_2, a_3)$ in $\underline{b} = (b_0, b_1, b_2, b_3)$ v *prostoru Minkowskega*:

$$\begin{aligned} \underline{a} \cdot \underline{b} &\equiv \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \\ &= -a_0 b_0 + a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = \sum_{\alpha=0}^3 \sum_{\beta=0}^3 a_\alpha \eta_{\alpha\beta} b_\beta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Vpeljali smo *metrični tenzor* z elementi:

$$\eta_{00} = -1, \quad \eta_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, 3, \quad \eta_{\alpha\beta} = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (2.36)$$

Na prvi pogled se zdi vse skupaj odvečna komplikacija zaradi enega samega predznaka, a zavedati se moramo, da postane v *splošni teoriji relativnosti* metrični tenzor ena od ključnih količin. Ob prisotnosti mase (energije) v prostoru se metrični tenzor spremeni in matrični elementi postanejo odvisni od porazdelitve mase v prostoru.

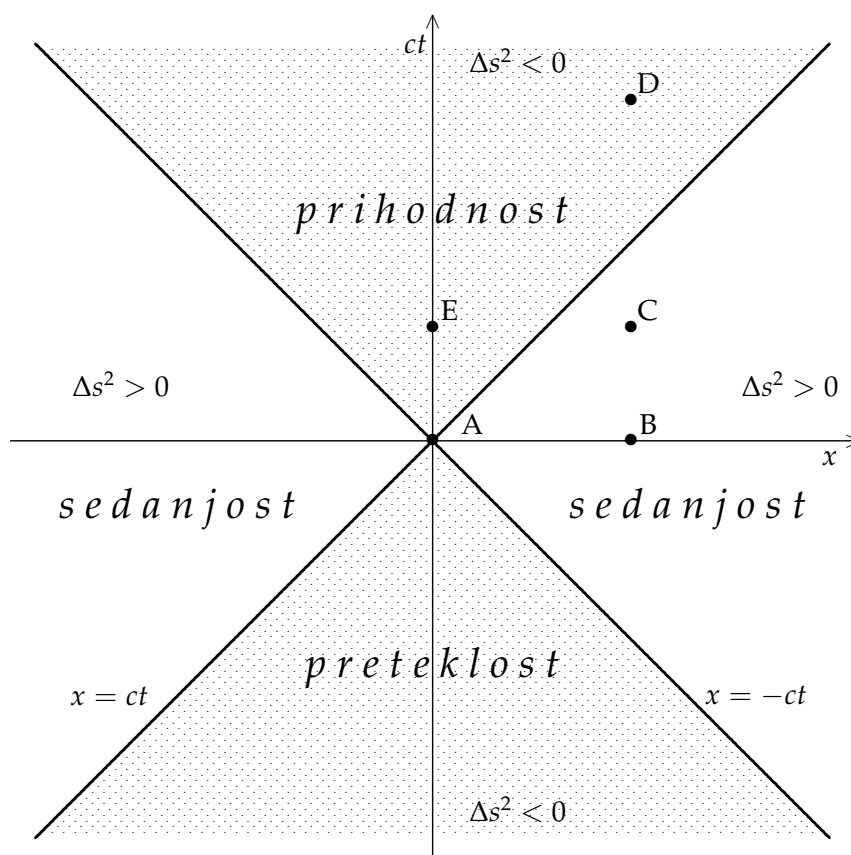
2.8 Dogodki in vzročnost

Razmik med dogodkoma je lahko

- **krajevnega tipa**, tedaj je $(\Delta s)^2 > 0$: v tem primeru obstaja inercialni sistem, v katerem se dogodka dogodita na različnih krajih, a ob istem času; dogodka *ne moreta biti v vzročni zvezi*;
- **časovnega tipa**, tedaj je $(\Delta s)^2 < 0$: obstaja inercialni sistem, v katere se dogodka dogodita na istem mestu, a ob različnih časih; dogodka *sta lahko v vzročni zvezi*;
- **svetlobnega tipa**, tedaj je $(\Delta s)^2 = 0$.

Zgled. Če predpostavimo, da se opazovalci in telesa gibljejo le vzdolž osi x , lahko dogodke predstavimo na preseku *svetlobnega stožca*, kot je prikazano na sliki. (Če bi vključili še koordinato y , bi imelo osenčeno področje na sliki obliko stožcev, ki bi se dotikala v izhodišču.)

Denimo, da se je dogodek A, na sliki prikazan v izhodišču, zgodil ob času $t_A = 0$, zato ustrezni četverec zapišemo kot $\underline{r}_A = (0, 0)$. (Koordinat y in z , ki sta enaki 0



Slika 12: Svetlobni stožec

za vse dogodke, ki jih bomo obravnavali v nadaljevanju, ne bomo eksplicitno pisali.) Dogodek B se je prav tako zgodil ob času 0, a na drugem mestu, recimo na planetu, oddaljenem dve svetlobni leti: $\underline{r}_B = (0, 2 \text{ sl})$. Razmik med dogodkoma je

$$(\Delta s)_{AB}^2 = -(ct_B - ct_A)^2 + (x_B - x_A)^2 = 4 \text{ sl}^2.$$

Razmik je torej *krajevnega tipa* — seveda, saj se dogodka razlikujeta le po kraju. Dogodek E pa se je zgodil prav tako pri $x = 0$, a ob kasnejšem času, recimo po enem letu, torej $ct_E = 1 \text{ sl}$. Za razmik med dogodkoma A in E sledi $(\Delta s)_{AE}^2 = -1 \text{ sl}^2$. Razmik je *časovnega tipa*: dogodka se razlikujeta le po času.

Denimo, da dogodka A in C predstavljata izstrelitev rakete (dogodek A) in pristanek rakete po enem letu na planetu, oddaljenem dve svetlobni leti (dogodek C, $\underline{r}_C = (1 \text{ sl}, 2 \text{ sl})$). Razmik med dogodkoma je

$$(\Delta s)_{AC}^2 = -(1 \text{ sl} - 0)^2 + (2 \text{ sl} - 0)^2 = 3 \text{ sl}^2.$$

Sta lahko dogodka med seboj vzročno povezana? Če bi šlo za isto raketo, bi to pomenilo, da je raketa potovala do planeta z dvakratno svetlobno hitrostjo; dogodka torej ne moreta biti povezana. To je v skladu z našo drugo trditvijo, da dogodka krajevnega tipa ne moreta biti vzročno povezana. Preverimo še prvi del trditve in poiščimo inercialni sistem, v katerem se dogodka zgodita ob istem času. Dogovorimo se, da opazovalec v

iskanem inercialnem sistemu prične šteti svoj čas v trenutku, ko izhodišči obeh inercialnih sistemov sovpadata, torej $t'_A = 0$ in $x'_A = 0$. Iz zahteve po istočasnosti dogodkov A in C v drugem inercialnem sistemu sledi

$$t'_C = \gamma \left(t_C - \frac{vx_C}{c^2} \right) = t'_A = 0.$$

Od tod izluščimo $c^2 t_C = vx_C$ in $v = (ct_C/x_C) c = \frac{1}{2}c$. Za opazovalca, ki se giblje s hitrostjo $v = \frac{1}{2}c$, se dogodka A in C dogodita hkrati. Hitro se lahko prepričamo, da se za opazovalce, ki se gibljejo hitreje kot $\frac{1}{2}c$, dogodi dogodek C *pred* dogodkom D.

Kaj pa, če raketa pristane na planetu po preteku treh let (dogodek D, $r_D = (3 \text{ sl}, 2 \text{ sl})$)? Vsaj načelno je možno, da gre za isto raketo in sta torej dogodka A in D povezana. Razmik med dogodkoma je

$$(\Delta s)_{AD}^2 = -(3 \text{ sl} - 0)^2 + (2 \text{ sl} - 0)^2 = -5 \text{ sl}^2.$$

Dogodka sta časovnega tipa; v skladu z našo tretjo trditvijo sta dogodka lahko vzročno povezana. Poiščimo še opazovalni sistem, v katerem se oba dogodka dogodita na istem mestu. Podobno kot v prejšnjem primeru sedaj zahtevamo

$$x'_D = \gamma(x_D - vt_D) = x'_A = 0.$$

Od tod sledi $v = x_D/t_D = (x_D/ct_D) c = \frac{2}{3}c$ — seveda gre za opazovalca, ki potuje skupaj z raketo.

Prihodnost, preteklost, sedanjost. Dogodki, za katere je razmik glede na dogodek A negativen, $(\Delta s)^2 < 0$, se za vse inercialne opazovalce dogodijo bodisi pred ali po dogodku A. Dogodke lahko (glede na dogodek A) postavimo v *preteklost* ali v *prihodnost*. V prvem primeru je dogodek A lahko posledica dogodka v preteklosti, v drugem pa vzrok dogodka v prihodnosti. Takšna vzročna povezava pa ne obstaja za dogodke, pri katerih je razmik glede na dogodek A pozitiven. Isti dogodek se za nekatere inercialne opazovalce dogodi pred dogodkom A, za druge pa po njem; vedno pa lahko najdemo inercialni sistem, v katerem sta oba dogodka istočasna. Pravimo, da vsi takšni dogodki pripadajo *sedanjosti*.

Sile in kavzalnost. Telo vpliva na drugo telo s silo. Če se, recimo, prvo telo premakne ali se mu spremeni naboj, to zazna drugo telo preko delovanja sile. Sprememba pri prvem telesu je vzrok za spremembo pri drugem telesu. Ker sta obe spremembi vzročno povezani, mora biti (kvadrat) razmika med dogodkoma negativen: $-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 \leq 0$; pri tem je Δx razdalja med telesoma in Δt čas, v katerem se drugo telo odzove na spremembo v stanju prvega telesa. Velja

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \leq c.$$

Hitrost širjenja motnje torej ne more biti večja od hitrosti svetlobe. Sile med telesi ne delujejo trenutno, temveč se njihovo delovanje z enega telesa na drugega prenaša s

končno hitrostjo, manjšo ali kvečjemu enako svetlobni hitrosti. Če ne bi bilo tako, bi lahko vedno našli inercialni sistem, v katerem bi se posledica pojavila pred svojim vzrokom.

Ugotovitev sledi iz *načela kavzalnosti (vzročnosti)*, enega od temeljnih načel fizike, ki zahteva, da se za vse opazovalce vzrok dogodi pred njegovo posledico.

Smer toka časa. V štirirazsežnem prostoru se časovna koordinata bistveno razlikuje od krajevnih koordinat: časovna koordinata se le povečuje, medtem ko se druge tri koordinate lahko spreminjajo v pozitivni ali negativni smeri. Kaj določa smer, v katero teče čas? Na podlagi ugotovitev v prejšnjih razdelkih lahko rečemo, da časovno urejenost dogodkov in s tem tudi smer toka časa določa načelo kavzalnosti: naprej se dogodi vzrok, nato njegova posledica. Pa lahko res pri vseh pojavih nedvoumno razlikujemo med vzrokom in posledico? Če na primer opazujemo elastični trk, prav lahko zamenjamo začetek in konec (posnetek poskusa zavrtima nazaj) in dobimo fizikalno mogoč pojav. Pri takšnem pojavu torej ne moremo ločiti vzroka in posledice. Drugače je pri neelastičnem trku, pri katerem se na primer dve kepi ilovice sprimeta; v tem primeru pa lahko nedvoumno ločimo med vzrokom in posledico. (Če posnetek zavrtimo nazaj, dobimo nemogoč pojav.) V okviru termodinamike v primeru elastičnega trka govorimo o *reverzibilnih* pojavih, v primeru neelastičnega pa o *ireverzibilnih*. Če so pojavi izolirani od okolice, se pri prvih *entropija* ne spreminja, pri drugih pa se povečuje; zmanjševati se ne more. Sedaj lahko že slutimo, kaj določa smer časa: vzročnost določa časovno zaporedje dogodkov, a o vzročnosti je mogoče govoriti le pri ireverzibilnih pojavih, pri katerih se entropija povečuje.

Smer toka časa torej povežemo z entropijo: čas teče v smeri *naraščanja entropije (nereda)*.

2.9 Četverec gibalne količine

V klasični dinamiki v enačbah gibanja nastopata gibalna količina in energija telesa oz. sistema teles. Poglejmo, kako je s tem v relativistični fiziki.

Vektorju gibalne količine priredimo *četverec gibalne količine*, tako da krajevni delu dodamo časovno komponento: $\underline{p} = (p_0, p_x, p_y, p_z)$. (Ponavadi gibalno količino v relativistični fiziki in kasneje v kvantni fiziki označujemo s črko p in ne z G .) Pri tem je smiselno predpostaviti, da

- (i) tri prostorske komponente vektorja četverca, p_x, p_y, p_z , v limiti majhnih hitrosti ustrezajo običajnemu vektorju gibalne količine, npr. $p_x = mv_x = m dx/dt$.

Čemu ustreza časovna komponenta, p_0 , pa še ne vemo. Poskusimo to ugotoviti tako, da predpostavimo, da se

- (ii) vektor četverec gibalne količine pri prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega transformira kot vektor četverec dogodka, torej kot to narekujejo Lorentzeve transformacije (2.22).

Sistem S' naj se giblje v smeri osi x s hitrostjo v glede na sistem S . Iz predpostavke (ii) sledi, da imajo v tem primeru Lorentzeva transformacija obliko:

$$\begin{aligned} p_0 &= \gamma \left(p'_0 + \frac{v}{c} p'_x \right), \\ p_x &= \gamma \left(p'_x + \frac{v}{c} p'_0 \right), \\ p_y &= p'_y, \\ p_z &= p'_z. \end{aligned}$$

Denimo, da telo miruje v sistemu S' ; glede na sistem S se torej giblje s hitrostjo v v smeri osi x . Po predpostavki (i) vzamemo $p'_x = p'_y = p'_z = 0$. Dobimo

$$p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{v}{c} p'_0 \right) = \frac{\gamma p'_0}{c} v. \quad (2.37)$$

Če bi hoteli dobiti klasični rezultat, mv , bi morali za časovno komponento gibalne količine v mirujočem sistemu vzeti $p'_0 = mc/\gamma$. To seveda ni smiselno, saj bi bila v tem primeru časovna komponenta v sistemu, v katerem telo miruje, odvisna od hitrosti nekega drugega opazovalnega sistema. Edina smiselna izbira je torej $p'_0 = mc$, od koder sledi

$$p_x = \gamma mv, \quad (2.38)$$

iz transformacije za časovno komponento pa še

$$p_0 = \gamma mc. \quad (2.39)$$

Prva enačba nakazuje, da se masa telesa spremeni, če se telo giblje:

$$m(v) = \gamma m(0) = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.40)$$

Pri tem je $m_0 = m(v = 0)$ masa telesa, kot jo izmeri opazovalec v sistemu, ki se giblje skupaj s telesom. Imenujemo jo *mirovna masa* telesa. Povejmo še, da enačbe veljajo tudi v primeru, ko se telo ne giblje premo enakomerno; če se hitrost telesa spreminja, izberemo opazovalca, ki se v določenem trenutku giblje z enako hitrostjo kot telo, v naslednjem trenutku, ko se hitrost spremeni, pa je to drug (inercialni) opazovalec.

Izračunajmo še invarianto, ki ustreza četvercu gibalne količine:

$$\underline{p} \cdot \underline{p} \equiv -p_0^2 + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -\gamma^2 m_0^2 c^2 + \gamma^2 m_0^2 v^2 = -\gamma^2 m_0^2 c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = -m_0^2 c^2. \quad (2.41)$$

Ker že vemo, da je svetlobna hitrost invariantna, dobljeni rezultat pomeni, da je mirovna masa tudi invariantna, torej enaka v vseh inercialnih opazovalnih sistemih.

Četverec hitrosti. Hitrost telesa v klasični fiziki vpeljemo kot časovni odvod lege telesa, $\vec{v} = d\vec{r}/dt$. Če želimo definicijo posplošiti na četverec hitrosti, naletimo na težavo, saj bi odvajanje po času pomenilo, da četverec odvajamo po eni od koordinat, ne pa po

neodvisnem parametru, ki bi bil enak za vse opazovalce (kot je čas v nerelativistični fiziki). Količina, ki bi jo tako dobili, se pri prehodu iz enega inercialnega sistema v drugega ne bi transformirala kot četverec. Odvajati moramo torej po parametru – invariantni –, je enak za vse opazovalce. Tak parameter je lahko kvadrat razmika med dogodkoma. Zaradi praktičnih razlogov raje obrnemo predznak in izraz delimo s c . Vpeljemo invariantni ali *lastni čas*:

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{-(\Delta s)^2}}{c} = \frac{1}{c} \sqrt{(c\Delta t)^2 - (\Delta x)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \left(\frac{\Delta x}{c\Delta t}\right)^2} = \Delta t \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{\Delta t}{\gamma}, \quad (2.42)$$

pri čemer je $v = v_x = \Delta x / \Delta t$ hitrost opazovalnega sistema, ki se giblje skupaj z gibajočim se telesom. Definicija se ujema z lastnim časom, kot smo ga vpeljali v poglavju 2.2. Četverec hitrosti sedaj vpeljemo kot

$$\underline{u} = \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \gamma(c, v_x, v_y, v_z), \quad v_x = \frac{dx}{dt}, \dots \quad (2.43)$$

Če četverec hitrosti pomnožimo z invariantno količino, invariantno ali lastno maso m_0 , dobimo zopet četverec:

$$m_0 \underline{u} = (m_0 \gamma c, m_0 \gamma v_x, m_0 \gamma v_y, m_0 \gamma v_z) = \underline{p}, \quad (2.44)$$

torej četverec gibalne količine. Tako smo do četverca gibalne količine prišli še po drugi poti. Povejmo, da komponente četverca, $u_x = \gamma v_x, \dots$, nimajo kakšne nazorne predstave, saj opazovalec vedno meri le hitrost v_x ; poleg tega gre vrednost u_x preko vseh meja, ko se hitrost delca približuje svetlobni.

Težka in vztrajnostna masa. Trditev, da se masa telesa s hitrostjo spreminja, nasprotuje naši intuitivni predstavi, da je masa mera za množino snovi, za katero velja ohranitveni zakon. Vendar v fiziki mase ne vpeljemo kot mero za množino snovi, za katero imamo celo drugo osnovno enoto, *mol*, temveč na dva, konceptualno različna načina:

- *Vztrajnostna ali inercialna masa* pove, kako se telo „upira“ spremembi gibanja (hitrosti oz. gibalni količini). Astronavt v breztežnem stanju izmeri svojo maso prek sile in pospeška, ki ga sila povzroča:

$$m = \frac{F}{a}.$$

- *Težka ali gravitacijska masa* nastopa v enačbi za gravitacijsko silo med telesoma:

$$F_g = G \frac{m_1 m_2}{r^2}.$$

Po analogiji s podobno zvezo v elektrostatiki bi lahko rekli, da je ta masa *gravitacijski naboj* telesa. Ko primerjamo maso telesa z masno enoto, primerjamo njuni teži, torej sili, s katerima Zemlja deluje na telesi. Prek primerjave z masno enoto torej merimo težko ali gravitacijsko maso telesa.

V klasični fiziki privzamemo, da sta obe masi enaki in za obe uporabljamo isto enoto. Če to ne bi bilo res, bi različna telesa padala z različnim pospeškom. V Newtonovem zakonu za prosti pad:

$$m_V a = F_g = m_G g, \quad a = \frac{m_G}{m_V} g,$$

na levi strani prve enačbe nastopa vztrajnostna masa in na desni težka ali gravitacijska masa. Če torej za neko telo, recimo za pariški prakilogram, predpostavimo, da sta obe masi enaki, ni nujno, da bi to veljalo tudi za druga telesa. Zelo natančne poskuse, ki bi potrdili predpostavko o ekvivalentnosti težke in vztrajnostne mase, je izvajal madžarski fizik Loránd Eötvös. Danes ugotavljajo ekvivalenco z relativno natančnostjo, boljšo od 10^{-12} .

V izrazu za gibalno količino nastopa vztrajnostna masa, ki se v skladu z enačbo (2.40) povečuje s hitrostjo telesa. Ali to velja tudi za težko maso? O tem bomo govorili v naslednjem poglavju. Še prej pa bomo v naslednjem podpoglavju izpeljali tesno povezavo med maso in energijo.

2.10 $E = mc^2$

Kako vpeljemo energijo, na primer s kinetično energijo delca, v teoriji relativnosti? Najprej ponovimo, kako izpeljemo kinetično energijo v klasični fiziki. Omejili se bomo na premo gibanje. V Newtonovem zakonu $ma = F$ zapišemo pospešek kot $a = dv/dt$ in upoštevamo $v = ds/dt$. Iz druge enačbe izrazimo diferencial časa kot $dt = ds/v$ in vstavimo v izraz za pospešek: $a = v dv/ds$. Dobimo $m v dv/ds = F$. Enačbo pomnožimo z ds in na obeh straneh integriramo:

$$\text{nerelativistično:} \quad \int_{v'}^v m v dv = \int F ds, \quad \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v'^2 = A. \quad (2.45)$$

Količino $\frac{1}{2} m v^2$ vpeljemo kot *kinetično energijo* telesa in A kot delo sile. Mirujoče telo ima kinetično energijo enako nič; sprememba kinetične energije je enaka delu, ki ga telo prejme.

Pri izpeljavi v okviru relativistične fizike moramo biti previdni, saj masa ni več konstantna. Newtonov zakon za premo gibanje zapišimo v obliki

$$\frac{dp_x}{dt} = \frac{d(\gamma m_0 v)}{dt} = F_x. \quad (2.46)$$

O silah (tj. o vektorju četvercu sile) v relativistični fiziki nismo še ničesar povedali; omenimo le, da je enačba veljavna v primeru elektromagnetne sile $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$. Tako kot prej upoštevamo $dt = dx/v$:

$$\frac{v d(\gamma m_0 v)}{dx} = F_x, \quad m_0 v d(\gamma v) = F_x dx. \quad (2.47)$$

Najprej izvednotimo diferencial

$$\begin{aligned} d(\gamma v) &= v d\gamma + \gamma dv = v d \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-1/2} + \gamma dv \\ &= v \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right)^{-3/2} \frac{v dv}{c^2} + \gamma dv = \frac{v^2}{c^2} \gamma^3 dv + \gamma dv = \left(\frac{v^2}{c^2} + \gamma^{-2} \right) \gamma^3 dv = \gamma^3 dv, \end{aligned}$$

saj je $\gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}$. Izračunati moramo integral od začetne hitrosti 0 do končne hitrosti v :

$$m_0 \int_0^v \gamma^3 v dv.$$

Vpeljimo novo spremenljivko

$$u^2 = \gamma^{-2} = 1 - \frac{v^2}{c^2}, \quad u du = -\frac{1}{c^2} v dv$$

in sledi

$$m_0 \int_0^v \gamma^3 v dv = -m_0 c^2 \int_{v=0}^v u^{-3} u du = m_0 c^2 u^{-1} \Big|_{v=0}^v = m_0 c^2 \gamma \Big|_{v=0}^v = m_0 c^2 \gamma - m_0 c^2, \quad (2.48)$$

saj je $\gamma = 1$ za $v = 0$. Podobno kot v nerelativističnem primeru se na levi strani energijskega izreka pojavi razlika energij — a je v relativističnem primeru energija različna od nič tudi tedaj, ko telo miruje. Energijo v mirovanju

$$W_0 = m_0 c^2 \quad (2.49)$$

proglasimo za *mirovno energijo* telesa; energijo v gibanju

$$W = \gamma W_0 = m_0 \gamma c^2 = m c^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.50)$$

pa za *polno energijo* telesa. Energijski izrek sedaj lahko izrazimo kot

Dovedeno delo je enako spremembi polne energije.

Kinetično energijo vpeljemo kot razliko med polno in mirovno energijo

$$W_{\text{kin}} = W - W_0 = m_0 c^2 (\gamma - 1) = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - 1 \right). \quad (2.51)$$

Preverimo, če se izraz v limiti $v \ll c$ res ujema z znano vrednostjo $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Upoštevamo, da za majhne $x = \frac{v}{c}$, $x \ll 1$, velja $(1 - x)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \dots$. Sledi

$$W_{\text{kin}} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} + \dots - 1 \right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} + \dots \right). \quad (2.52)$$

V primeru $v \ll c$ res sledi klasični izraz; za $v = c/10$ je razlika med relativističnim in nerelativističnim izrazom manjša kot 1 %.

Ko se hitrost približuje svetlobni hitrosti, kinetična energija narašča preko vsake meje. Telo s končno mirovno maso ne more doseči svetlobne hitrosti, saj bi mu morali za to dovesti neskončno delo (energijo). Telo se lahko giblje s svetlobno hitrostjo edino v primeru, ko bi bila njegova mirovna masa enaka 0. Pravzaprav ima takšno telo lahko od nič različno energijo edino v primeru, če se giblje s hitrostjo svetlobe, saj je limita izraza (2.50), ko gre $m_0 \rightarrow 0$, različna od nič le v primeru $v \rightarrow c$.

Zveza med energijo in maso. Zvezi (2.49) in (2.50) enolično povežeta maso in energijo, saj se obe količini razlikujeta le za kvadrat konstante, ki je določena z dogovorom (izbiro enote za dolžino). V vseh enačbah gibanja lahko maso nadomestimo z energijo in prav tako v izrazu za gravitacijsko silo med telesoma. O ohranitvi mase zato v moderni fiziki ne govorimo več; ohranitveni zakon sedaj velja za polno energijo, ki se v zaključenem sistemu ohranja, za mirovno energijo oz. mirovno maso – tj. količino, ki ustreza „klasični masi“ –, pa ohranitveni zakon ne velja. Kot bomo videli kasneje, se pri nekaterih pojavih mirovna energija pretvarja v kinetično energijo in obratno.

Zveza med energijo in gibalno količino. Z upoštevanje izraza za polno energijo, $W = m_0 c^2 \gamma$, lahko četverec gibalne količine zapišemo kot

$$\underline{p} = \left(\frac{W}{c}, \vec{p} \right), \quad \vec{p} = m_0 \gamma \vec{v} = m_0 \gamma (v_x, v_y, v_z). \quad (2.53)$$

Invarianto (2.41) sedaj lahko prepišemo v obliko

$$-\frac{W^2}{c^2} + p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = -\frac{W_0^2}{c^2}.$$

Pomnožimo s c^2 in preuredimo:

$$W^2 = W_0^2 + c^2 \vec{p}^2. \quad (2.54)$$

Dobili smo pomembno zvezo med polno energijo, mirovno energijo in velikostjo gibalne količine.

2.11 Gibanje nabitega delca v električnem in magnetnem polju

Konstantno električno polje. V tem primeru os x usmerimo v smer električnega polja z jakostjo E in iz prve enačbe v (2.46) sledi

$$d(m_0\gamma v) = F_x dt = eEdt. \quad (2.55)$$

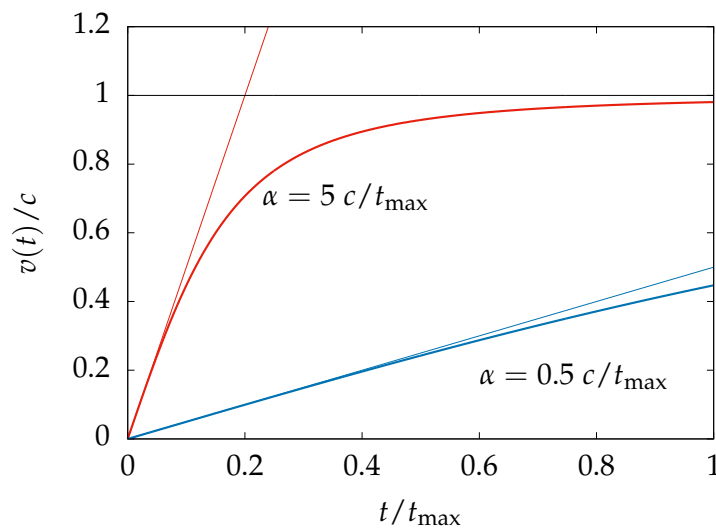
Vzemimo, da je imelo telo ob času $t = 0$ hitrost $v = 0$. Enačbo integriramo:

$$m_0\gamma v = eEt \quad \text{ali} \quad \frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{eE}{m_0} t \equiv \alpha t.$$

Tu ima α pomen nerelativističnega pospeška. Enačbo kvadriramo in izrazimo v :

$$v = c \frac{\alpha t}{\sqrt{c^2 + \alpha^2 t^2}} = \begin{cases} \alpha t, & \alpha t \ll c \\ c, & \alpha t \gg c \end{cases}. \quad (2.56)$$

Za dovolj majhne čase pospeševanja je gibanje enakomerno pospešeno; pri dovolj močnem polju in velikih časih pa se hitrost telesa približuje svetlobni hitrosti, a je nikoli ne doseže.



Slika 13: Časovno spreminjanje hitrosti pri majhnih in velikih pospeških.

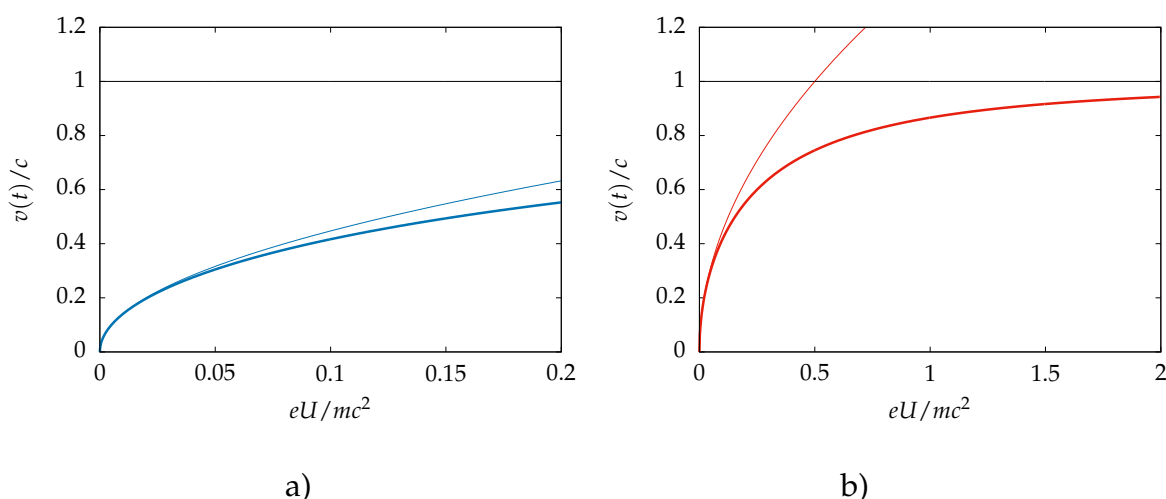
Krajevno spremenljivo električno polje. V tem primeru lahko izhajamo iz energijskega zakona. Delo lahko zapišemo kot $A = e \int E ds = eU$, pri čemer je U napetost med začetno in končno točko (zveza velja tudi v primeru, če pot ni ravna). Sledi

$$m_0 c^2 (\gamma - 1) = eU, \quad \gamma = \frac{eU + m_0 c^2}{m_0 c^2}, \quad \frac{v^2}{c^2} = 1 - \frac{m_0^2 c^4}{(eU + m_0 c^2)^2}, \quad (2.57)$$

in končno

$$v = c \sqrt{\frac{eU(eU + 2m_0 c^2)}{(eU + m_0 c^2)^2}} = \begin{cases} \sqrt{\frac{2eU}{m_0}}, & eU \ll m_0 c^2 \\ c, & eU \gg m_0 c^2 \end{cases}. \quad (2.58)$$

Za dovolj majhne napetosti je rezultat enak kot pri nerelativističnem računu, pri velikih napetostih in majhni masi telesa pa se hitrost telesa približuje svetlobni hitrosti.



Slika 14: Časovno spreminjanje hitrosti pri majhnih (a) in velikih napetostih (b).

Konstantno magnetno polje. Sila v magnetnem polju, $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$, je pravokotna na hitrost delca, zato se velikost hitrosti in s tem tudi γ ne spremenita; spremeni se le smer hitrosti:

$$m_0 \gamma \frac{d\vec{v}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}. \quad (2.59)$$

Enačba je podobna enačbi v nerelativističnem primeru, razlika je le v konstantnem faktorju γ , s katerim je pomnožena mirovna masa. Telo se giblje po krožnici. Odvod hitrosti je enak radialnemu pospešku v^2/r , pri čemer je r radij krožnice. V primeru, ko je hitrost delca pravokotna glede na smer magnetnega polja, sledi

$$m_0 \gamma \frac{v^2}{r} = evB, \quad r = \frac{m_0 \gamma v}{eB} = \frac{p}{eB}. \quad (2.60)$$

Rezultat je enak kot pri nerelativističnem računu, razlika je le v relativističnem faktorju γ v izrazu za gibalno količino.

3 Delčne lastnosti valovanja

Kot smo spoznali v prejšnjem poglavju, igra svetloba prav posebno vlogo v teoriji relativnosti. Eden ključnih postulatov pri izpeljavi teorije je predpostavka, da je hitrost svetlobe enaka za vse opazovalce. Hitrost svetlobe je tudi največja možna hitrost, ki jo lahko dosežejo delci, hkrati je to tudi največja možna hitrost, s katero se širi informacija med dvema vzročno povezanimi pojavoma.

V klasični teoriji je svetloba elektromagnetno valovanje. Nihata električno in magnetno polje. Ker polje lahko obstaja tudi v vakuumu, pomeni, da se svetloba lahko širi tudi v praznem prostoru. Kot vsako valovanje tudi svetloba nosi energijo; gostoto energijskega toka v vakuumu zapišemo kot

$$j = \frac{dP}{dS} = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2} c \frac{B_0^2}{\mu_0}, \quad (3.1)$$

pri čemer sta E_0 in B_0 amplitudi električnega in magnetnega polja.

V zgodovini sta obstajali dve hipotezi o naravi svetlobe. Descartes in za njim še nekateri drugi fiziki so zagovarjali hipotezo, da je svetloba valovanje, analogno zvočnemu valovanju, s čimer so uspeli pojasniti lom valovanja. Newton in za njim nekateri drugi fiziki pa so vztrajali na stališču, da je svetloba sestavljena iz majhnih delcev. Po tej hipotezi lahko odboj svetlobe razložimo z elastičnim odbojem delcev od ravne podlage. Z delci lahko pojasnimo tudi lom, če predpostavimo, da se delci gibljejo hitreje v gostejšem sredstvu kot v redkejšem. (To seveda ni res, a tedaj še niso mogli dovolj natančno meriti hitrosti svetlobe.) Kasneje so s številnimi poskusi pokazali, da je svetloba valovanje, saj lahko le z valovanjem razložimo interferenčne pojave pri svetlobi. Uspeli so tudi pojasniti barve, tako da so jim pripisali različne valovne dolžine.

Konec 19. stoletja se je zdelo, da znamo z Maxwellovo teorijo razložiti vse pojave, povezane s svetlobo. A je Hertz leta 1887 opazil pojav, *fotoefekt*, ki ga ni bilo mogoče pojasniti z obstoječimi teorijami. In zopet je bil Einstein tisti, ki je uspel pojav pojasniti, za kar je leta 1921 tudi prejel Nobelovo nagrado.

3.1 Fotoefekt

Pri obravnavi električnega toka v kovinah smo spoznali, da tok prenašajo elektroni. V kovinah nekateri elektroni – tako imenovani valenčni elektroni – niso vezani na atome kot v izolatorjih, temveč se lahko prosto gibljejo po kovini. Atomi kovine, ki so izgubili elektron, postanejo pozitivno nabiti ioni in preprečujejo elektronom, da bi zapustili kovino. Da lahko elektron zapusti kovino, mora premagati privlačni električni potencial, ki ga ustvarijo pozitivno nabiti ioni. Elektronom lahko potrebno energijo dovedemo s segrevanjem, tako kot to počnemo na primer v katodnih ceveh, lahko pa tudi s svetlobo.

Pri poskusu posvetimo na cinkovo ploščico, povezano z elektroskopom. Ploščico na začetku nabijemo z negativnim nabojem, tako da elektroskop kaže določen odklon. Če svetloba izbija elektrone, bo na ploščici vedno manj negativnega naboja in odklon elektroskopa se bo manjšal. Pri obsevanju z različnimi svetili ugotovimo, da je pojav

odvisen od barve svetlobe, ki jo oddaja svetilo. Pri vidni svetlobi je rezultat negativen, elektroskop se ne razelektri. Poskus uspe, če uporabimo svetilo, ki oddaja tudi ultravijolično svetlobo. Pomeni, da je pojav odvisen od valovne dolžine svetlobe: poskus uspe le s svetlobo z dovolj kratko valovno dolžino. To je presenetljivo, saj izraz za energijski tok (3.1) sploh ne vsebuje valovne dolžine oziroma frekvence svetlobe. V okviru klasične teorije bi pričakovali, da je pojav odvisen od *jakosti* svetlobe, ne pa od njene valovne dolžine.

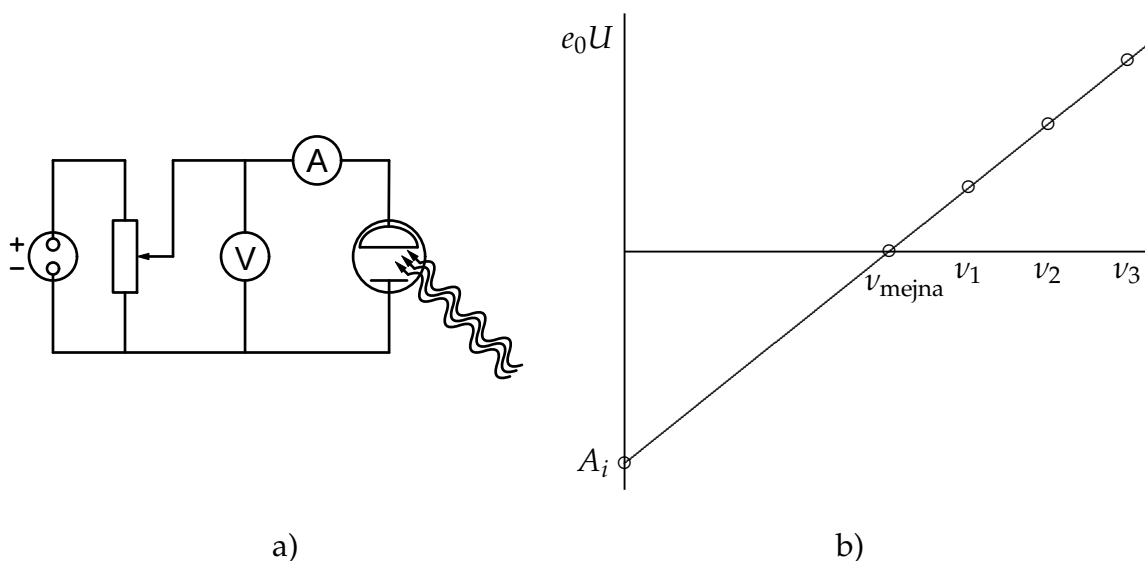
Pojav je razložil Einstein leta 1905. Predpostavil je, da svetloba nosi energijo v energijskih paketih oziroma *kvantih*. Kvante imenujemo *fotoni*. Energija je *kvantizirana*, foton ima energijo, ki je premo sorazmerna s *frekvenco* pripadajoče svetlobe: $W = h\nu$, pri tem je h Planckova konstanta, $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js. V kovini foton trči z elektronom in mu pri tem preda svojo energijo. Pri poskusu s cinkom le foton UV svetlobe preda elektronu dovolj energije, da elektron po trku premaga privlačni potencial, ki ga veže v kovino, in kovino zapusti. To pa ni možno pri svetlobi z večjo valovno dolžino, saj foton tedaj nima dovolj energije.

V splošnem lahko energijsko bilanco pri fotoefektu zapišemo z enačbo

$$h\nu = A_i + W_{\text{kin}}, \quad \nu = \frac{c}{\lambda}, \quad (3.2)$$

pri čemer je $h\nu$ energija fotona, A_i je *izstopno delo*, W_{kin} pa kinetična energija elektrona, potem ko zapusti kovino. Izstopno delo je delo, ki ga opravi elektron proti elektrostatiki sili, ki ga veže v kovino.

Enačbo lahko preverimo s poskusom, pri katerem tudi izluščimo vrednost Planckove konstante. Izberemo kovino, ki ima čim manjše izstopno delo, na primer cezij. V tem primeru elektrone izbija že zelena svetloba. Uporabimo napravo (fotocelico), prikazano na sliki 15a). S svetlobo različnih valovnih dolžin svetimo na katodo, iz katere



Slika 15: Shema vezave fotocelice pri merjenju fotoefekta (leva slika), odvisnost zaporne potencialne energije e_0U od frekvence (desna slika).

pri dovolj majhni valovni dolžini izhajajo elektroni, ki zadenejo anodo na drugi strani.

Ampermeter pokaže tok. Med katodo in anodo vežemo napetostni vir preko potenciometra, s katerim lahko uravnavamo napetost. Izvir vežemo v *zaporni smeri*, tako da je anoda na negativnem potencialu, katoda pa na pozitivnem. Elektron, ki zapusti katodo, mora premagati razliko potencialnih energij med elektrodama, e_0U , pri čemer je U napetost, ki jo uravnavamo s potenciometrom. Ko povečujemo napetost, se tok v vezju zmanjšuje, saj vedno manj elektronov uspe priti do anode. V mejnem primeru, tik preden tok preneha teči, imajo elektroni največjo kinetično energijo, ki jo izluščimo iz enačbe (3.2):

$$W_{\text{kin}} = e_0U = h\nu - A_i = h\nu - h\nu_{\text{mejna}}. \quad (3.3)$$

Mejno napetost imenujemo *zaporna napetost*. Poskus ponovimo s svetili z različnimi valovnimi dolžinami. Pri vsaki valovni dolžini vnesemo v graf ustrezno frekvenco svetlobe in zaporno napetost, pomnoženo z osnovnim nabojem (glej sliko 15b)). Iz (3.3) sledi, da morajo točke ležati na premici z naklonom, ki je enak Planckovi konstanti h , presečišče z ordinato pa je določeno z (negativnim) izstopnim delom.

Pri računih v mikroskopskem svetu uporabljamo za energijo enoto eV; to je energija, ki jo dobi elektron, ko ga pospeši napetost 1 V. Velja $1 \text{ eV} = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Tudi konstanto h je smiselno zapisati s to enoto — pravzaprav h pomnožen s svetlobno hitrostjo:

$$hc = 1240 \text{ eV nm}. \quad (3.4)$$

Je torej svetloba valovanje ali tok delcev, kot je trdil Newton? Svetloba (pri tem imamo v mislih vsa elektromagnetna valovanja) ima pravzaprav tako značaj valovanja kot značaj delcev. Pri večini pojavov v makroskopskem svetu se obnaša kot valovanje, pri določenih pojavih, kot je fotoefekt in še nekateri drugi pojavi, ki jih bomo obravnavali v nadaljnjih poglavjih, pa prevlada delčni značaj valovanja. Ti pojavi so povezani predvsem s svetlobo z dovolj kratko valovno dolžino. Matematično povežemo valovanje in delec (foton) z valovnim paketom. To je nekakšen samotni val, sestavljen iz valovanj z različnimi valovnimi dolžinami v intervalu okoli valovne dolžine, ki jo pripišemo delcu.

Zanimivo je oceniti, kolikšen je tok fotonov v svetlobi, ki jo naše oko še lahko zazna. Jakost najmanjšega toka zelene svetlobe, za katero je oko najbolj občutljivo, je enaka 10^{-12} W/m^2 . V času 1 s prejme oko s premerom povsem odprte zenice $2r = 6 \text{ mm}$ energijo

$$W = Pt = j\pi r^2 t = 2,7 \cdot 10^{-17} \text{ J}.$$

Število fotonov, ki v tem času vpade v oko, izračunamo tako, da energijo delimo z energijo enega fotona, $W_1 = h\nu = hc/\lambda$:

$$N = \frac{W}{W_1} = \frac{j\pi r^2 t \lambda}{hc} = 70,$$

pri čemer smo za λ vzeli 500 nm. Posameznega fotona torej oko ne zazna. Pač pa lahko občutljive fotografske kamere, namenjene snemanju zelo oddaljenih nebesnih teles, zaznavajo posamezne fotone. Slika je sestavljena iz pik – sledi posameznih fotonov – in šele pri daljšem času osvetlitve postane slika objekta jasna.

3.2 Ohranitev četverca gibalne količine.

Klasično se pri elastičnem trku dveh delcev ohranjata skupna kinetična energija in skupna gibalna količina. Relativistično pripišemo delcu četverec gibalne količine. Krajevni del četverca je vektor gibalne količine $\vec{p} = m_0\gamma\vec{v}$, časovni pa polna energija, deljena s c : W/c . Četverec sistema dveh (ali več) delcev je kar vsota četvercev za posamezne delce:

$$\underline{P} = \left(\frac{W}{c}, \vec{P} \right) = \left(\frac{W_1 + W_2}{c}, \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \right). \quad (3.5)$$

Za krajevni del velja

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \quad \text{in od tod} \quad \vec{P}' - \vec{P} = \int \vec{F} dt, \quad (3.6)$$

pri čemer je $\vec{F}$ vsota vseh *zunanjih* sil, ki delujejo na sistem teles. Če je sunek zunanjih sil enak 0, se ohranja krajevni del skupnega četverca gibalne količine – tako kot v Newtonovi mehaniki. Energijski izrek smo zapisali v obliki

$$W' - W = \int \vec{F} \cdot d\vec{s} = A. \quad (3.7)$$

V nasprotju z Newtonovo mehaniko v izreku ne nastopajo kinetične energije, temveč *polne energije*, tj. vsote kinetične in mirovne energije. Če je delo sil enako nič, se v sistemu ohranja skupna polna energija, ne pa posebej kinetična in mirovna energija – razen v trivialnem primeru, ko je v sistemu en sam delec. Za elastični trk dveh delcev torej velja

$$\vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 \quad \text{in} \quad W'_1 + W'_2 = W_1 + W_2. \quad (3.8)$$

3.3 Comptonov pojav

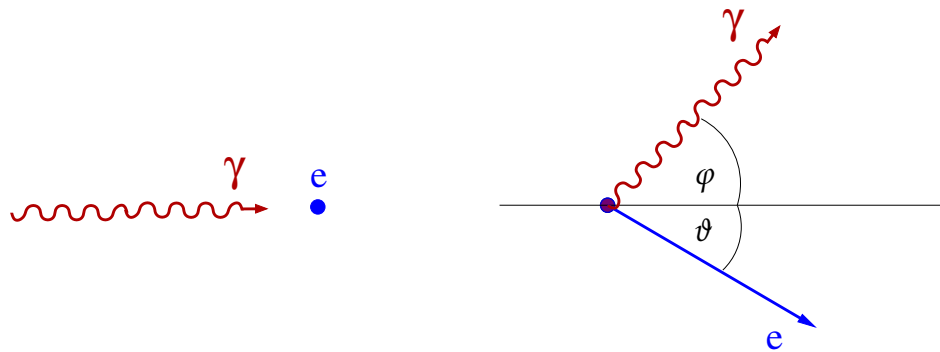
Če je valovna dolžina fotona zelo kratka, je energija fotona $h\nu = hc/\lambda$ v enačbi (3.2) mnogo večja od izstopnega dela, in izstopno delo lahko zanemarimo v primerjavi s kinetično energijo elektrona po trku. V tem primeru se elektron obnaša kot prost delec, katerega hitrost pred trkom je praktično enaka nič. Pojav lahko opišemo kot elastični trk fotona in mirujočega elektrona. Govorimo o *Comptonovem sipanju*, po Arthurju Hollyju Comptonu, ki je pojav prvi opazoval leta 1923 in za odkritje leta 1927 prejel Nobelovo nagrado za fiziko.

Obravnavamo elastično sipanje fotona na mirujočem elektronu. Izpeljava sicer velja za sipanje na poljubnem nabitem delcu. Na sliki (16) sta prikazani začetno in končno stanje, v katerem foton odleti pod kotom φ , elektron pa pod kotom ϑ glede na smer vpadnega fotona. Frekvenco vpadnega fotona označimo z ν , sipanega pa z ν' . Četverec gibalne količine delcev se ohrani. Pomeni, da se ohrani skupna polna energija obeh delcev:

$$h\nu + W_0 = h\nu' + W_e,$$

pri čemer je $W_0 = m_0c^2$ mirovna energija elektrona, W_e pa njegova polna energija po trku. Ohrani se tudi komponenta gibalne količine v smeri vpadnega fotona:

$$\frac{h\nu}{c} = \frac{h\nu'}{c} \cos \varphi + p \cos \vartheta, \quad (3.9)$$



Slika 16: Elastično sipanje fotona na mirujočem elektronu; na levi sliki je začetno stanje, na desno pa končno.

če je p velikost končne gibalne količine elektrona. V pravokotni smeri velja

$$0 = \frac{h\nu'}{c} \sin \varphi - p \sin \vartheta. \quad (3.10)$$

Upoštevamo zvezo med polno in mirovno energijo elektrona ter velikostjo njegove gibalne količine

$$W_e = \sqrt{W_0^2 + c^2 p^2}, \quad (3.11)$$

in zapišemo ohranitev polne energije v obliki

$$h\nu + W_0 = h\nu' + \sqrt{W_0^2 + c^2 p^2}. \quad (3.12)$$

Izraz $h\nu'$ prenesemo na levo in dobljeno enačbo kvadriramo:

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 + W_0^2 - 2h^2\nu\nu' + 2W_0h(\nu - \nu') = W_0^2 + c^2 p^2. \quad (3.13)$$

Enačbi (3.9) in (3.10) pomnožimo s c , tako da odpravimo c v imenovalcih, prenesemo prva člena z desne na levo in enačbi kvadriramo:

$$\begin{aligned} (h\nu)^2 + (h\nu')^2 \cos^2 \varphi - 2h^2\nu\nu' \cos \varphi &= c^2 p^2 \cos^2 \vartheta, \\ (h\nu')^2 \sin^2 \varphi &= c^2 p^2 \sin^2 \vartheta. \end{aligned}$$

Enačbi seštejemo:

$$(h\nu)^2 + (h\nu')^2 - 2h^2\nu\nu' \cos \varphi = c^2 p^2. \quad (3.14)$$

Dobljeni izraz za $c^2 p^2$ vstavimo v (3.13), okrajšamo $(h\nu)^2$, $(h\nu')^2$ in W_0^2 . Sledi:

$$2W_0h(\nu - \nu') = 2h^2\nu\nu'(1 - \cos \varphi).$$

Upoštevamo $\nu = c/\lambda$:

$$2W_0h \left(\frac{c}{\lambda} - \frac{c}{\lambda'} \right) = 2h^2 \frac{c^2}{\lambda\lambda'} (1 - \cos \varphi).$$

Enačbo pomnožimo z $\lambda\lambda'$ in delimo z $2W_0hc$ in pridemo do končnega rezultata

$$\lambda' - \lambda = \frac{hc}{W_0} (1 - \cos \varphi) \equiv \lambda_C (1 - \cos \varphi). \quad (3.15)$$

Pri tem smo vpeljali *Comptonovo valovno dolžino* delca z mirovno energijo $W_0 = m_0c^2$:

$$\lambda_C = \frac{hc}{W_0}.$$

Za elektron z mirovno energijo $W_0 = 511 \text{ keV}$ velja

$$\lambda_C = \frac{1240 \text{ eV nm}}{511 \cdot 10^3 \text{ eV}} = 0,00243 \text{ nm}.$$

Oglejmo si tri značilne primere:

- $\varphi = 0^\circ$, $\lambda' = \lambda$, elektron obmiruje tudi po trku,
- $\varphi = 90^\circ$, $\lambda' = \lambda + \lambda_C$; gibalno količino elektrona izluščimo iz enačb (3.9) in (3.10) in polno energijo iz (3.11);
- $\varphi = 180^\circ$, $\lambda' = \lambda + 2\lambda_C$, elektron odleti v smeri vpadnega fotona; gibalno količino takoj izluščimo iz (3.9).

3.4 Lorentzeve transformacije za foton

Četverec gibalne količine za foton, ki potuje vzdolž osi x , zapišemo kot

$$\underline{p} = \left(\frac{W}{c}, p_x, p_y, p_z \right) = \left(\frac{h\nu}{c}, \frac{h\nu}{c}, 0, 0 \right).$$

Zapišimo vektor četverec v drugem opazovalnem sistemu S' , ki se giblje v smeri osi x s hitrostjo v . Za časovno komponento velja:

$$\frac{h\nu'}{c} = \gamma \left(\frac{h\nu}{c} - \frac{v}{c} \frac{h\nu}{c} \right).$$

Transformacija za p_x seveda vodi do identične enačbe kot transformacija za časovno koordinato. Enačbo delimo s h in pomnožimo s c :

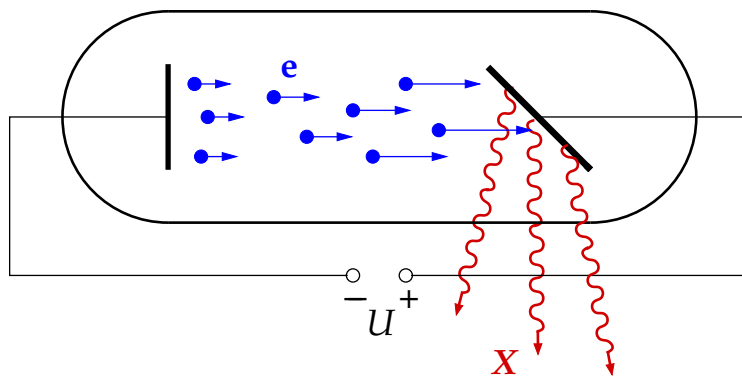
$$\nu' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\nu - \frac{v}{c} \nu \right) = \nu \frac{1 - \frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \nu \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}}.$$

Izpeljali smo Dopplerjevo zvezo za primer, ko se izvir svetlobe oddaljuje s hitrostjo v glede na zveznico med izvirom in opazovalcem. Pri približevanju se le zamenja predznak pri hitrosti opazovalnega sistema.

3.5 Rentgenski žarki

Nastanek rentgenske svetlobe. V prejšnjih razdelkih smo spoznali, da lahko izbijanje elektronov iz kovine obravnavamo kot trk fotona z elektronom, pri katerem foton preda del ali celo vso svojo energijo elektronu. Je možen tudi obratni pojav? Ko se elektron ustavlja, se giblje s (negativnim) pospeškom in zato seva. Energijo torej oddaja v obliki izsevane svetlobe. Lahko z analizo nastale svetlobe ugotovimo, če se tudi pri tem pojavu manifestira delčna narava svetlobe?

Poskus naredimo s katodno cevjo, kjer pospešimo elektrone do velikih hitrosti; nastali elektroni udarjajo v anodo, se pri tem naglo ustavljajo in močno sevajo (slika 17). Pojav, ko elektroni pri zaviranju sevajo, imenujemo *zavorno sevanje*. Prvi je takšne poskuse delal Wilhelm Conrad Röntgen leta 1895, za kar je leta 1901 dobil Nobelovo nagrado. Nastale žarke je imenoval *žarki X* in jih je lahko posredno opazoval, ko so zadevali fluorescenčno ploščo. Po njem se cev imenuje *rentgenska cev*, sevanje pa *rentgenski žarki* ali *rentgenska svetloba*.



Slika 17: Rentgenska cev

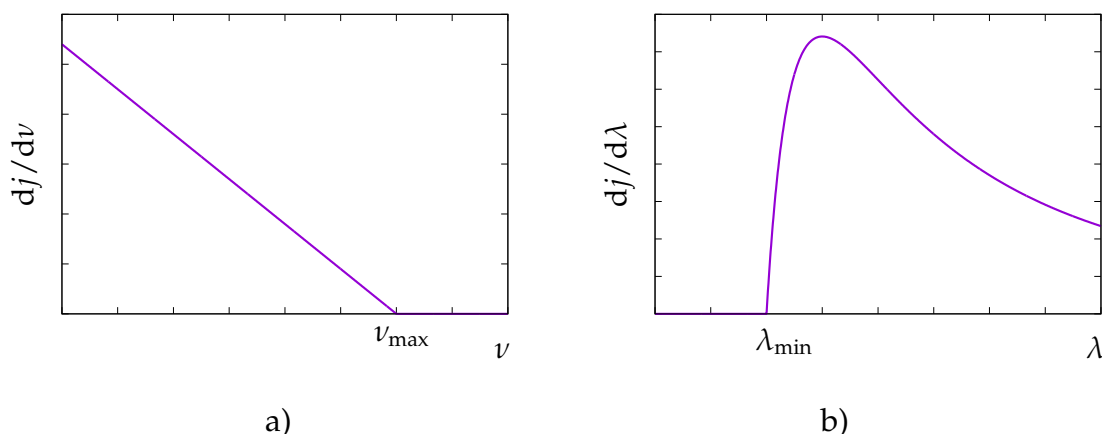
Na sliki 18 je prikazan spekter rentgenske svetlobe. Spekter se konča pri neki največji frekvenci $\nu_{\max}$, ki je odvisna od pospeševalne napetosti. S stališča klasične fizike je to presenetljivo, saj bi morale biti v spektru zastopane vse frekvence. Pojav znova lahko razložimo z delčno naravo svetlobe. Pri zaviranju elektronov nastajajo fotoni, ki prevzamejo del ali vso energijo elektrona. V mejnem primeru, ko foton prevzame vso kinetično energijo elektrona, velja

$$W_{\text{kin}} = e_0 U = h\nu_{\max}.$$

Pri tem smo upoštevali, da je kinetična energija elektrona enaka pospeševalni napetosti U , pomnoženi z nabojem elektrona — zveza, ki velja tudi za relativistične elektrone. V spektru po valovnih dolžinah se zato pojavi najkrajša možna valovna dolžina, tako imenovana *kratkovalovna meja*:

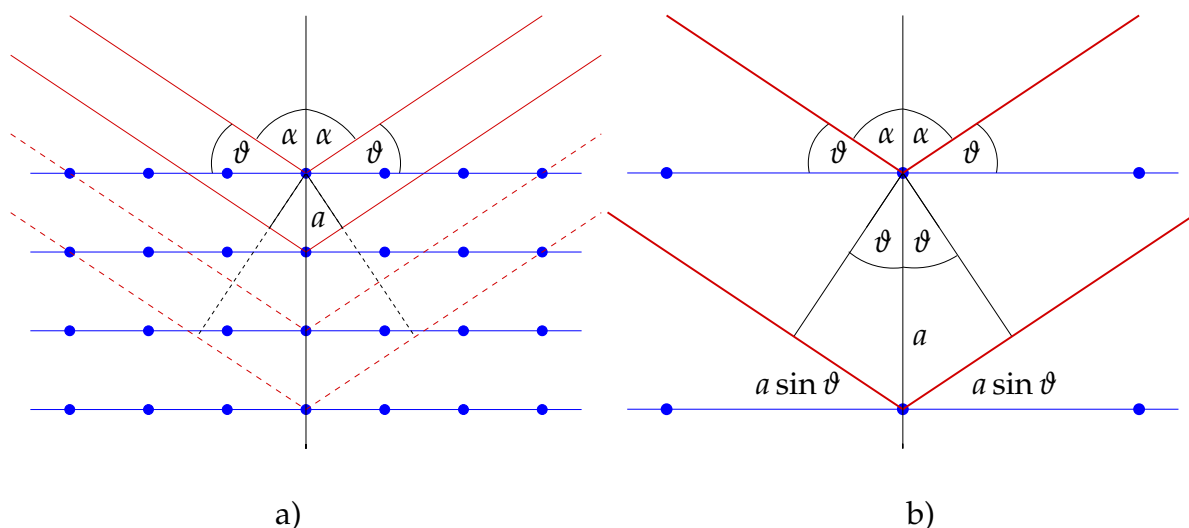
$$\lambda_{\min} = \frac{c}{\nu_{\max}} = \frac{hc}{e_0 U}.$$

Pri napetosti $U = 1 \text{ kV}$ je $\lambda_{\min} = 1240 \text{ eV nm} / 1000 \text{ eV} = 1,24 \text{ nm}$. Običajno je napetost na rentgenski cevi več kilovoltov, in značilne valovne dolžine rentgenske svetlobe merijo nekaj desetink ali nekaj stotink nanometra.



Slika 18: porazdelitev jakosti rentgenske svetlobe a) po frekvenci in b) po valovni dolžini

Sipanje rentgenske svetlobe na kristalih. Lahko v primeru rentgenske svetlobe še govorimo, da gre za valovanje? Najbolj značilen valovni pojav je interferenca. Za opazovanje interference bi potrebovali uklonsko mrežico z razdaljo med režami velikostnega reda valovne dolžine rentgenske svetlobe desetinke nanometra. To pa so značilne razdalje med atomi v kristalu. Zato kot mrežico uporabimo kar kristal. Najbolj enostaven je kubični kristal, prikazan na sliki 19 a). (Predstavljati si moramo, da je za vsako točko, ki predstavlja središče atoma, še cela vrsta atomov, ki vsi ležijo v isti vodoravni ravnini.) Rentgenska svetloba, ki vpada na kristalno ravnino, se odbija po odbojnem zakonu — kar seveda še ne dokazuje, da gre za valovanje, saj odbojni zakon velja tudi za elastični odboj delcev od toge stene. Žarki, ki se odbijajo od (vodoravnih) ravnin, interferirajo kot kaže slika 19 a). Pogoj za ojačenje izpeljemo za primer dveh



Slika 19: a) sipanje rentgenske svetlobe na kristalu, b) izpeljava Braggove enačbe

sosednjih ravnin na sliki 19 b). Če z a označimo razdaljo med sosednjima ravninama, naredi valovanje, ki se odbije od spodnje ravnine, za $2a \sin \vartheta$ daljšo pot kot valovanje, ki se odbije od zgornje ravnine. Do ojačenja pride pri kotih, za katere velja, da je razlika

poti večkratnik valovne dolžine, torej pri *Braggovem pogoju*:

$$2a \sin \vartheta = N\lambda, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (3.16)$$

Enak pogoj velja za interferenco na poljubnih dveh ravninah; če sta ravnini razmaknjeni za $2a$ ($3a$, $4a$, ...), je razlika poti dva (tri, štiri, ...) krat večja kot pri sosednjih ravninah in enaka $2N\lambda$ ($3N\lambda$, $4N\lambda$, ...). Če interferirata žarka, ki sta se odbila od sosednjih ravnin, interferirajo tudi žarki, ki se odbijajo na poljubnih ravninah. Interferirajo torej vsi možni pari žarkov, kar pomeni, da so interferenčni maksimumi zelo izraziti. Ker vsebuje svetloba, ki prihaja iz rentgenske cevi, različne valovne dolžine, lahko sipanje na kristalu izkoristimo kot filter, ki izbere svetlobo z določeno valovno dolžino.

3.6 Tvorba parov

Pri trkih delcev vedno velja zakon o ohranitvi skupnega četverca gibalne količine, torej o ohranitvi skupne polne energije in ohranitvi treh krajevnih komponent skupne gibalne količine. Zakon ničesar ne pove o ohranitvi mirovne energije delcev, niti ne o ohranitvi kinetične energije delcev. Zato je možno, da obstajajo procesi, pri katerih se kinetična energija ne ohranja, niti se ne ohranja mirovna masa delcev — seveda če proces ne krši katerega drugega ohranitvenega zakona, na primer zakona o ohranitvi skupnega električnega naboja. Primer za proces, kjer se kinetična energija ne ohranja in se pri pojavu spremeni v mirovno energijo, je *tvorba parov*. Pri tem se iz fotona rodi par delcev, na primer elektron in pozitron. Pozitron ima enako mirovno maso kot elektron, njegov naboj pa je nasprotno enak naboju elektrona, torej se pri procesu naboj ohranja: naboj fotona je enak nič, skupni naboj para elektrona in pozitrona pa prav tako.

Zapišimo ohranitev polne energije in komponent gibalne količine za ta primer. Os x naj kaže v smeri gibanja vpadnega fotona. Če z $\vec{v}_1 = (v_{1x}, v_{1y}, 0)$ in $\vec{v}_2 = (v_{2x}, v_{2y}, 0)$ označimo hitrosti delcev na koncu, z γ_1 in γ_2 pripadajoča Lorentzeva faktorja in z m_e mirovni masi obeh nastalih delcev, velja

$$h\nu = m_e c^2 \gamma_1 + m_e c^2 \gamma_2, \quad (3.17)$$

$$\frac{h\nu}{c} = m_e \gamma_1 v_{1x} + m_e \gamma_2 v_{2x}, \quad (3.18)$$

$$0 = m_e \gamma_1 v_{1y} + m_e \gamma_2 v_{2y}. \quad (3.19)$$

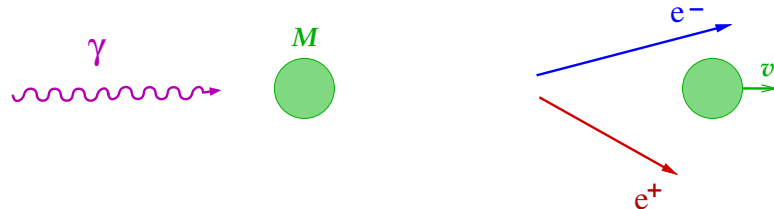
Če enačbo (3.18) pomnožimo s c , je izraz na levi enak izrazu na levi strani enačbe (3.17), desni strani obeh enačb pa sta enaki le v primeru, če velja $v_{1x} = v_{2x} = c$. Pomeni, da bi se morala delca na koncu gibati v smeri osi x svetlobno hitrostjo, kar pa ni smiselno, saj bi moral tedaj foton delcem dovesti neskončno veliko energijo. Proces, kot smo ga opisali, torej ni možen, saj ne moremo hkrati zagotoviti ohranitve polne energije in ohranitve (trirazsežne) gibalne količine.

Tvorba parov je vendarle možna v primeru, ko je prisoten še en delec, ki prevzame veliko gibalno količino vpadnega fotona. Zaradi enostavnosti predpostavimo, da je masa (M) tega delca zelo velika, tako da velja $Mc^2 \gg h\nu$. V začetnem stanju je foton z energijo $h\nu$ in delec z maso M , ki miruje, v končnem pa par elektron in pozitron ter

delec z maso M , ki se giblje s hitrostjo $\vec{v}$. Enačbo za ohranitev skupne polne energije sedaj zapišemo kot

$$h\nu + Mc^2 = m_e c^2 \gamma_1 + m_e c^2 \gamma_2 + Mc^2 + \frac{1}{2} M v^2,$$

pri čemer smo polno energijo težkega delca na koncu zapisali kot vsoto mirovne ener-



Slika 20: Tvorba parov v prisotnosti težkega delca.

gije in klasične kinetične energije, saj zaradi velike mase delca lahko predpostavimo, da je njegova hitrost mnogo manjša od c . Enačbo za ohranitev gibalne količine zapišimo v vektorski obliki s pomočjo enotskega vektorja v smeri osi x :

$$\frac{h\nu}{c} \vec{e}_x = m_e \gamma_1 \vec{v}_1 + m_e \gamma_2 \vec{v}_2 + M \vec{v}.$$

Od tod izrazimo

$$\vec{v} = \frac{\Delta \vec{p}}{M}, \quad \Delta \vec{p} = \frac{h\nu}{c} \vec{e}_x - m_e \gamma_1 \vec{v}_1 - m_e \gamma_2 \vec{v}_2.$$

Kinetično energijo težkega delca lahko sedaj zapišemo kot

$$\frac{1}{2} M v^2 = \frac{(\Delta \vec{p})^2}{2M} \approx \frac{(h\nu)^2}{2Mc^2} = \frac{h\nu}{2Mc^2} h\nu.$$

Pri tem smo velikost $\Delta \vec{p}$ ocenili kar z velikostjo prvega člena v izrazu za $\Delta \vec{p}$. Po predpostavki je $h\nu / Mc^2 \ll 1$, zato je kinetična energija težkega delca res veliko manjša od energije fotona in jo lahko v enačbi za ohranitev energije zanemarimo. Na obeh straneh se okrajšata še mirovni energiji težkega delca, in ostane naša prvotna enačba za ohranitev energije (3.17):

$$h\nu = m_e c^2 \gamma_1 + m_e c^2 \gamma_2. \quad (3.20)$$

K energijski bilanci torej težki delec nič ne prispeva, pač pa kompenzira veliko začetno gibalno količino fotona, tako da se ohranja gibalna količina sistema delcev.

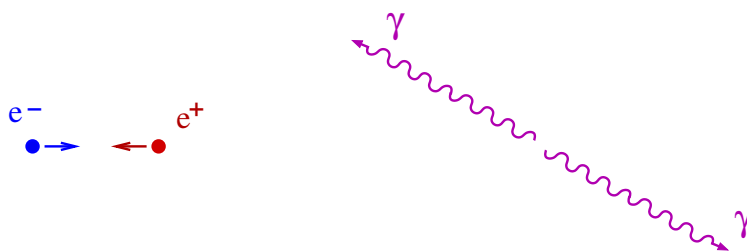
Iz enačbe (3.20) lahko takoj ugotovimo, kolikšna je najmanjša energija fotona, ki je potrebna za rojstvo para v prisotnosti težkega delca. V mejnem primeru nastala delca obmirujeta ($\gamma_1 = \gamma_2 = 1$), gibalno količino pa odnese težki delec. Velja

$$h\nu_{\min} = 2m_e c^2, \quad \lambda_{\max} = \frac{c}{\nu_{\min}} = \frac{hc}{2m_e c^2} = \frac{1}{2} \lambda_C,$$

pri čemer je λ_C Comptonova valovna dolžina elektrona, $\lambda_C = 0,00243$ nm. Za rojstvo para elektron'pozitron mora imeti svetloba valovno dolžino vsaj 0,00122 nm; za rojstvo parov težjih delcev pa mora biti valovna dolžina še krajša. Govorimo o *žarkih gama*.

3.7 Anihilacija delcev

Kaj se dogaja s pozitronom, ki nastane pri tvorbi parov? Ali lahko obstajajo v naravi tudi prosti pozitroni, tako kot elektroni, le da s pozitivnim nabojem? Pozitron je sicer obstojen, vendar se izniči takoj, ko sreča elektron. V splošnem govorimo o *anihilaciji* delca in antidelca. Delec se anihilira s svojim antidelcem v procesu, ki je obraten tvorbi parov. Vendar pri anihilaciji prostega delca in antidelca ne more nastati en sam foton, saj v tem primeru veljajo enake enačbe, kot smo jih zapisali za tvorbo parov, ko ni prisoten tretji delec (3.17)–(3.19). Pač pa je anihilacija dveh prostih delcev možna, če



Slika 21: Anihilacija elektrona in pozitrona v dva fotona.

pri tem nastaneta dva fotona. V tem primeru ni težav z ohranitvijo skupne gibalne količine, saj imata dva fotona, ki odletita v nasprotnih smereh, lahko poljubno majhno skupno gibalno količino. Najmanjša možna polna energija je v primeru, ko na začetku delec in antidelec mirujeta. Ker je skupna gibalna količina na začetku enaka nič, morata fotona odleteti v nasprotnih smereh z enakima velikostma gibalne količine, torej tudi z enakima energijama. Enačba za ohranitev skupne gibalne količine je v tem primeru preprosta, saj moramo zagotoviti le še ohranitev skupne polne energije:

$$2m_e c^2 = 2h\nu_{\min} = 2 \frac{hc}{\lambda_{\max}}, \quad \lambda_{\max} = \frac{hc}{m_e c^2} = \lambda_C.$$

Največja možna valovna dolžina posameznega fotona je kar enaka Comptonovi valovni dolžini delca, ki se anihilira s svojim antidelcem.

Anihilacija delcev je torej pojav, pri katerem se mirovna energija delcev pretvori v kinetično energijo.

3.8 Razpoložljiva energija

Tvorba parov je glavni mehanizem, s katerim ustvarjamo nove delce v velikih pospeševalnikih. Pri trkih dveh delcev ali delca s svojim antidelcem z ekstremno visokima energijama nastajajo žarki gama, ki naprej rojevajo pare delec-antidelec. Pri tem lahko nastane kateri koli delec, tudi delec z najbolj nenavadnimi lastnostmi, saj jih kompenzira njegov antidelec, ki ima nasprotno lastnosti.

Denimo, da želimo ustvariti par novih delcev z znano mirovno energijo. Energija, ki je na razpolago za nastanek para (ali več parov) novih delcev, imenujemo *razpoložljiva energija*. Zanima nas, kolikšna naj bo energija delcev, ki se trkajo v pospeševalniku, da bo nastalo zaželeno število parov novih delcev. V najugodnejšem primeru se

vsa polna energija sistema spremeni le v mirovno energijo. To je možno takrat, ko na koncu vsi delci mirujejo, ko je torej gibalna količina delcev enaka nič. Kar pa pomeni, da mora biti skupna gibalna količina delcev pred trkom enaka nič. Pred trkom se torej delca (ali delec in antidelec) gibljeta drug proti drugemu z nasprotno enakima gibalnima količinama. V primeru, da imata delca enaki mirovni masi, nosita tudi enaki polni in enaki kinetični energiji. Ker težišče delcev pred in po trku miruje, pravimo, da opazujemo trk v *težiščnem sistemu*.

Razpoložljiva energija v težiščnem sistemu. V težiščnem sistemu se v mejnem primeru vsa začetna energija spremeni v mirovno energijo delcev na koncu. Če sta v začetnem stanju dva enaka delca – običajno sta to dva protona – moramo na koncu upoštevati še mirovno energijo začetnih delcev, ki po nastanku novih delcev še vedno obstajata. Če pri trku delca s svojim antidelcem, recimo elektrona s pozitronom ali protona z antiprotonom, pa se tudi njuna mirovna energija porabi za nastanek novih delcev.

Račun si najprej oglejmo v primeru anihilacije elektrona in pozitrona, pri kateri nastane par delca X in njegovega antidelca z mirovnima masama po m_X . V težiščnem sistemu se elektron in pozitron gibljeta drug proti drugemu, tako da je skupna gibalna količina enaka nič. V mejnem primeru nastali par delcev miruje v težiščnem sistemu. Iz ohranitve polne energije sledi:

$$W_1 + W_2 = 2m_e\gamma c^2 = 2m_Xc^2. \quad (3.21)$$

Od tod lahko izračunamo najmanjšo kinetično energijo, potrebno za nastanek para in napetost, s katero moramo pospešiti vsakega od elektronov:

$$2W_{\text{kin}} = 2m_e c^2(\gamma - 1) = 2(m_X c^2 - m_e c^2), \quad e_0 U = W_{\text{kin}} = m_X c^2 - m_e c^2. \quad (3.22)$$

Oglejmo si še trk dveh protonov, pri katerem na koncu nastane N parov proton-antiproton. V mejnem primeru vsi delci na koncu mirujejo in ohranitev polne energije vodi do enačbe

$$2W_1 = 2m_p c^2 + 2Nm_p c^2 = 2m_p c^2(1 + N), \quad W_{\text{kin}} = 2(W_1 - m_p c^2) = 2Nm_p c^2, \quad (3.23)$$

pri čemer je W_1 polna energija protona pred trkom, $m_p c^2$ pa mirovna energija protona, – enaka mirovni energiji antiprotona. Skupna kinetična energija obeh protonov W_{kin} se torej spremeni v mirovno energijo novih delcev.

Razpoložljiva energija v laboratorijskem sistemu. Pogosto imamo opravka s poskusi, pri katerih se giblje le en delec, drugi delec pa v tarči miruje. Pravimo, da opazujemo trk v *laboratorijskem sistemu*, ki ne sovпада s težiščnim sistemom, v katerem smo računali v prejšnjem razdelku. V laboratorijskem sistemu je skupna gibalna količina delcev na začetku različna od nič in enako mora veljati na koncu; nastali delci se torej gibljejo. Najprej ugotovimo, kako naj se delci gibljejo, da bo potrebna energija za njihov nastanek najmanjša. V težiščnem sistemu je razmislek enostaven: na koncu morajo delci obmirovati. Zamislimo si torej inercialnega opazovalca, ki bi se glede na laboratorijski sistem gibal s hitrostjo težišča delcev. Opazovalec bi pojav videl tako, kot smo

opisali v prejšnjem razdelku: na koncu bi vsi delci obmirovali. Za opazovalca v laboratorijskem sistemu pa to pomeni, da se vsi delci na koncu gibljejo z enako hitrostjo, ki je enaka hitrosti težišča delcev pred trkom. Problem lahko torej rešimo tako, da rešitev, ki jo poznamo v težiščnem sistemu, transformiramo v laboratorijski sistem.

Obstaja enostavnejša pot. Omenili smo, da je produkt četverca s samim seboj *invariantna* količina, torej količina, ki je enaka v vseh inercialnih opazovalnih sistemih:

$$\underline{P} \cdot \underline{P} = -\frac{W_0^2}{c^2} + \vec{P}^2 = \text{invarianta},$$

pri čemer je W skupna polna energija delcev in $\vec{P}$ skupna (trirazsežna) gibalna količina. Invarianto, izračunano v težiščnem sistemu, izenačimo z invarianto, izračunano v laboratorijskem sistemu. Pri tem je vseeno, če izračunamo invarianto pred trkom ali po njem. Če nas zanima razpoložljiva energija v laboratorijskem sistemu, je smiselno izračunati invarianto v laboratorijskem sistemu *pred trkom* in jo izenačiti z invarianto, izračunano v težiščnem sistemu *po trku*.

Zapišimo invarianto v laboratorijskem sistemu pred trkom. Izpeljava velja za poljuben par enakih delcev z mirovno maso m_0 ; pri tem se prvi delec giblje s hitrostjo v (s pripadajočim γ), drugi pa miruje v tarči. Skupna polna energija je vsota polne energije prvega delca in mirovne energije drugega delca v tarči, skupna gibalna količina pa enaka gibalni količini prvega delca:

$$W = m_0\gamma c^2 + m_0c^2, \quad \vec{P} = m\gamma\vec{v}, \quad \underline{P}^{\text{lab}} \cdot \underline{P}^{\text{lab}} = -\frac{(m_0\gamma c^2 + m_0c^2)^2}{c^2} + (m_0\gamma v)^2.$$

Preuredimo desno stran:

$$\begin{aligned} \underline{P}^{\text{lab}} \cdot \underline{P}^{\text{lab}} &= -\frac{m_0^2 c^4 \gamma^2 + 2m_0^2 c^4 \gamma + m_0^2 c^4 - m_0^2 c^2 \gamma^2 v^2}{c^2} \\ &= -\left(m_0^2 c^2 \gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + 2m_0^2 c^2 \gamma + m_0^2 c^2\right) \\ &= -(2m_0^2 c^2 \gamma + 2m_0^2 c^2) = -2m_0^2 c^2 (\gamma + 1). \end{aligned} \quad (3.24)$$

V težiščnem sistemu je $\vec{P}^* = 0$ in po trku je invarianta odvisna le od vsote mirovnih energij delcev: $\underline{P}^* \cdot \underline{P}^* = -W_0^{*2}/c^2$.

V primeru nastanka para delcev X pri anihilaciji elektrona in pozitrona, ki smo ga obravnavali v prejšnjem razdelku, je invarianta $-W_0^{*2}/c^2 = -(2m_X c^2)^2/c^2$. Izenačimo jo z invarianto v laboratorijskem sistemu (3.24) (m_0 je v tem primeru enaka masi elektrona m_e):

$$-2m_e^2 c^2 (\gamma + 1) = -4m_X^2 c^2, \quad \gamma = \frac{2m_X^2}{m_0^2} - 1$$

in za kinetično energijo gibajočega se elektrona sledi:

$$W_{\text{kin}}^{\text{lab}} = m_e c^2 (\gamma - 1) = 2m_e c^2 \left(\frac{m_X^2}{m_0^2} - 1 \right).$$

V primeru trka dveh protonov, obravnavanega v prejšnjem razdelku, zapišemo invarianto v težiščnem sistemu kot

$$-\frac{W_0^{*2}}{c^2} = -\frac{(2m_p c^2 + 2Nm_p c^2)^2}{c^2} = -4m_p^2 c^2 (1 + 2N + N^2).$$

Izraz izenačimo z (3.24), kjer je $m_0 = m_p$, okrajšajmo $2m_p$ in za polno energijo in kinetično energijo vpadnega fotona sledi:

$$m_p c^2 \gamma = m_p c^2 (1 + 4N + 2N^2), \quad W_{\text{kin}}^{\text{lab}} = m_p c^2 (\gamma - 1) = m_p c^2 (4N + 2N^2). \quad (3.25)$$

V laboratorijskem sistemu je za rojstvo delcev potrebna precej večja energija kot v težiščnem sistemu (3.22) oziroma (3.23). To je razumljivo, saj se velik del energije porabi za kinetično energijo nastalih delcev.

***Težiščni sistem delcev.** Za težiščni sistem velja, da je skupna (trirazsežna) gibalna količina delcev enaka nič. Če z $\vec{v}_i$ označimo hitrosti delcev in z $\vec{v}^*$ hitrost težišča v laboratorijskem sistemu, potem lahko gibalno količino i -tega delca z Lorentzevo transformacijo transformiramo v težiščni sistem:

$$\vec{p}_i^* = \gamma^* \left(\vec{p}_i - \frac{\vec{v}^*}{c^2} W_i \right) = \gamma^* (m_{0i} \gamma_i \vec{v}_i - \vec{v}^* m_{0i} \gamma_i),$$

pri čemer je γ^* Lorentzev faktor, v katerem nastopa v^* . Zahtevamo, da je vsota gibalnih količin v težiščnem sistemu enaka nič:

$$\vec{P}^* = \sum_i \vec{p}_i^* = \gamma^* \left(\sum_i m_{0i} \gamma_i \vec{v}_i - \vec{v}^* \sum_i m_{0i} \gamma_i \right) = 0,$$

od koder sledi

$$\vec{v}^* = \frac{\sum_i m_{0i} \gamma_i \vec{v}_i}{\sum_i m_{0i} \gamma_i} = \frac{\sum_i m_i (v_i) \vec{v}_i}{\sum_i m_i (v_i)}.$$

Rezultat je enak kot v klasični mehaniki, le da namesto mirovnih mas nastopajo relativistične mase delcev.

Pri obravnavanem poskusu, ko se prvi delec giblje s hitrostjo v v smeri osi x in drugi miruje, ima hitrost težišča tudi smer osi x in meri

$$v^* = \frac{m_0 \gamma v}{m_0 \gamma + m_0} = \frac{\gamma}{\gamma + 1} v \quad \text{in velja} \quad \gamma^* = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^{*2}}{c^2}}} = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}}.$$

Energijo prvega delca v težiščnem sistemu izračunamo iz Lorentzeve transformacije za polno energijo:

$$\begin{aligned} W_1^* &= \gamma^* (W_1 - v^* m_0 \gamma v) = \gamma^* m_0 c^2 \left(\gamma - \frac{\gamma^2 v^2}{(\gamma + 1) c^2} \right) \\ &= \gamma^* m_0 c^2 \frac{\gamma^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) + \gamma}{(\gamma + 1)} = \gamma^* m_0 c^2 = \sqrt{\frac{\gamma + 1}{2}} m_0 c^2. \end{aligned}$$

Enak rezultat bi dobili hitreje, če bi v težiščni sistem transformirali polno energijo delca, ki miruje v laboratorijskem sistemu.

4 Gravitacija

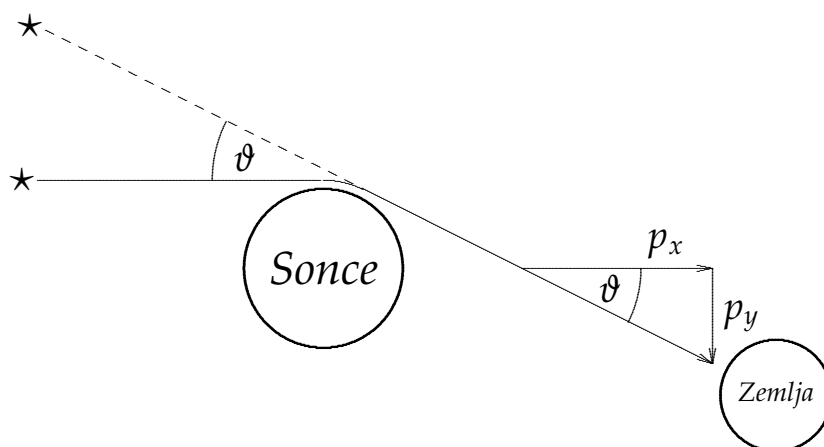
4.1 Uklon svetlobe v gravitacijskem polju

Pri fotoefektu in Comptonovem efektu smo ugotovili, da lahko svetlobi pripišemo delčne lastnosti. Foton svetlobe s frekvenco ν ima polno energijo $W = h\nu$, pri čemer je h Planckova konstanta. Iz zveze $W = mc^2$ lahko fotonu pripišemo od nič različno vztrajnostno maso $m = W/c^2 = h\nu/c^2$. Če predpostavimo ekvivalenco vztrajnostne in gravitacijske mase, lahko domnevamo, da na foton deluje gravitacijska sila in se torej žarek v gravitacijskem polju ukloni.

Domnevo je eksperimentalno potrdil že leta 1919 Arthur Eddington pri opazovanju Sončevega mrka. Mrk je omogočil opazovanje šibkih zvezd, ki so bile navidezno v bližini Sonca. Zaradi uklona svetlobe je bilo tedaj mogoče opaziti zvezdo, ki je bila v resnici za Soncem (glej sliko).

Velikost pojava lahko ocenimo z enačbami Newtonove fizike. Predpostavimo, da je uklonski kot majhen. Po naši domnevi na foton na razdalji r od središča Sonca deluje gravitacijska sila

$$F_g = \frac{GmM_\odot}{r^2} = \frac{Gh\nu M_\odot}{c^2 r^2}. \quad (4.1)$$



Slika 22: Uklon svetlobe v gravitacijskem polju

Os x usmerimo v smer potovanja svetlobe, preden vstopi v Sončevo gravitacijsko polje; svetloba naj potuje tik mimo površja, tako da je najkrajša razdalja do središča Sonca kar enaka polmeru Sonca $R_\odot$. Ko se svetloba (foton) najbolj približa površju, ima gravitacijska sila smer osi y in je po velikosti enaka $F_{g \max} = Gh\nu M_\odot / c^2 R_\odot^2$. Zaradi delovanja privlačne sile dobi foton gibalno količino tudi v smeri osi y , p_y . Po prehodu fotona mimo Sonca lahko komponento p_y ocenimo kar iz izreka o gibalni količini

$$p_y = \int F_{gy} dt \approx F_{g \max} \Delta t \approx F_{g \max} \frac{2R_\odot}{c}. \quad (4.2)$$

Pri tem smo ocenili, da znatna gravitacijska sila deluje le v času, ko se foton giblje mimo Sonca na poti, enaki Sončevemu premeru. Na začetku ima foton le gibalno količino v

smeri x , ki se pri prehodu (skoraj) ne spremeni, $p_x = hv/c$. Kot, za katerega se svetloba (foton) ukloni, dobimo iz razmerja obeh komponent gibalne količine (glej sliko):

$$\tan \vartheta \approx \vartheta = \frac{p_y}{p_x} \approx \frac{2F_{g \max} R_\odot}{cp_x} = \frac{2GM_\odot}{c^2 R_\odot}. \quad (4.3)$$

Rezultat je natanko za faktor dve manjši od točnega rezultata, dobljenega v okviru splošne teorije relativnosti. S podatki $M_\odot = 2 \cdot 10^{30}$ kg in $R_\odot = 7 \cdot 10^8$ m dobimo za točno vrednost odklona

$$\vartheta_{\text{točna}} = \frac{4GM_\odot}{c^2 R_\odot} = 5'', \quad (4.4)$$

torej pet ločnih sekund.

4.2 Sprememba valovne dolžine svetlobe v gravitacijskem polju

Pri navpičnem metu telesa s površja Zemlje se hitrost telesa in s tem njegova kinetična energija zmanjšujeta. Iz izreka o ohranitvi kinetične in potencialne energije sledi

$$\Delta W_{\text{kin}} = -\Delta W_{\text{pot}}. \quad (4.5)$$

Spremembo potencialne energije lahko izrazimo z višinsko razliko Δy kot $\Delta W_{\text{pot}} = mg\Delta y$, če je Δy majhen v primerjavi s polmerom Zemlje; v nasprotnem primeru za potencialno energijo vzamemo izraz $-GmM/r$, kjer je r razdalja do središča Zemlje.

Polna energija fotona je enaka kar njegovi kinetični energiji, saj je mirovna energija fotona enaka nič. Domnevamo, da se polna energija spreminja v gravitacijskem polju tako kot kinetična energija delca:

$$\Delta W = h(\nu - \nu') = -\Delta W_{\text{pot}} = -mg\Delta y = -\frac{gh\nu\Delta y}{c^2}, \quad (4.6)$$

pri čemer smo za maso fotona vzeli $m = W/c^2 = h\nu/c^2$ in predpostavili, da je sprememba višine dovolj majhna.

Robert Pound in Glen A. Rebka sta leta 1959 s poskusom res potrdila takšno domnevo. Pri poskusu se je foton spustil za višinsko razliko $\Delta y = 22,5$ m in pri tem se je frekvenca povečala v skladu z napovedjo. Relativno povečanje je merilo

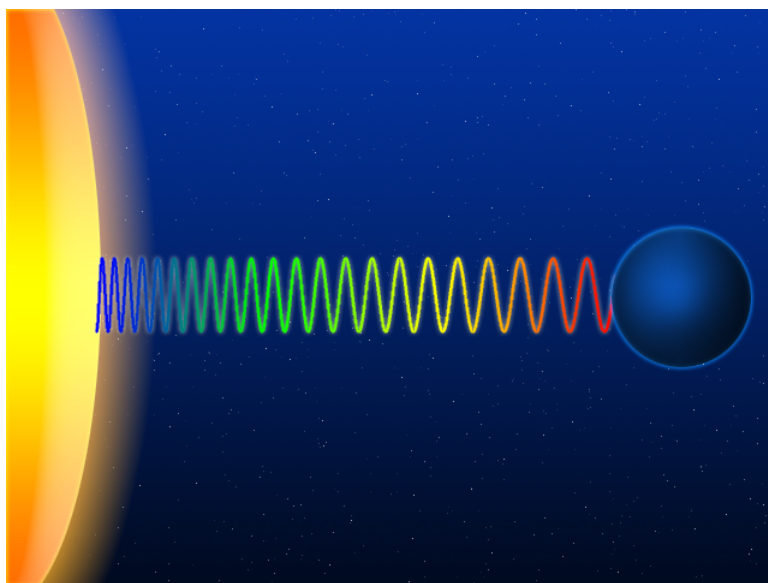
$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{g\Delta y}{c^2} = 2,5 \cdot 10^{-15}. \quad (4.7)$$

Tako majhno spremembo frekvence in z njo povezano spremembo energije lahko zaznamo le s fotoni z veliko energijo; pri poskusu sta eksperimentatorja uporabila žarke gama z energijo 14 keV.

Svetloba, ki pride s površja zvezde, se zaradi opisanega pojava premakne k večjim valovnim dolžinam, podobno kot pride do „rdečega premika“ pri zvezdi, ki se od nas oddaljuje. V tem primeru potencialno energijo zapišemo kot $-GmM/r$ in dobimo

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = -\frac{\Delta \lambda}{\lambda} = -\frac{GM_*}{c^2 r_*}, \quad (4.8)$$

kjer je M_* masa in r_* polmer zvezde. Za svetlobo s Sonca dobimo $\Delta\nu/\nu = 2 \cdot 10^{-6}$, kar je praktično nezaznavno. Učinek je znatno močnejši pri zvezdah, ki imajo veliko večjo gostoto kot Sonce in posledično manjši polmer. Ko zvezda z velikostjo Sonca ali manjšo potroši vse svoje gorivo, se prične pod vplivom gravitacije sesedati in gostota snovi doseže vrednost, ki je približno milijon krat večja od gostote vode (in tudi Sonca). Njen polmer je približno stokrat manjši od polmera Sonca, relativna sprememba pa sto krat večja, torej $2 \cdot 10^{-4}$. Premik je zaznal že leta 1925 Walter Sydney Adams, vendar je bila njegova meritev preveč nezanesljiva, da bi z njo lahko potrdili Einsteinovo domnevo.



Slika 23: Gravitacijski rdeči premik. http://en.wikipedia.org/wiki/File:Gravitational_red-shifting2.png

4.3 Podaljšanje časa

Opazovalec na Zemlji uporablja za merjenje časa standardno atomsko (cezijevo) uro, ki oddaja elektromagnetno valovanje s frekvenco 9 192 631 770 Hz. Opazovalec na veliki oddaljenosti od Zemlje primerja frekvenco s svojo atomsko uro in ugotovi, da ura na zemlji teče počasneje. Pojav je podoben podaljšanju časa pri gibanju dveh opazovalcev. Razlika pri merjenju časa (recimo enega nihaja) je enaka

$$\Delta t' = \frac{1}{\nu'} = \frac{1}{\nu \left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)} = \frac{\Delta t}{\left(1 - \frac{GM}{c^2 r}\right)} \approx \Delta t \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right), \quad (4.9)$$

kjer Δt ustreza lastnemu času.

Omenimo, da sistem za globalno pozicioniranje (GPS) zahteva izjemno precizno merjenje časov, tako da je potrebno pri določanju lege upoštevati oba učinka na podaljšanje časa, gravitacijski in zaradi gibanja.

4.4 Črne luknje

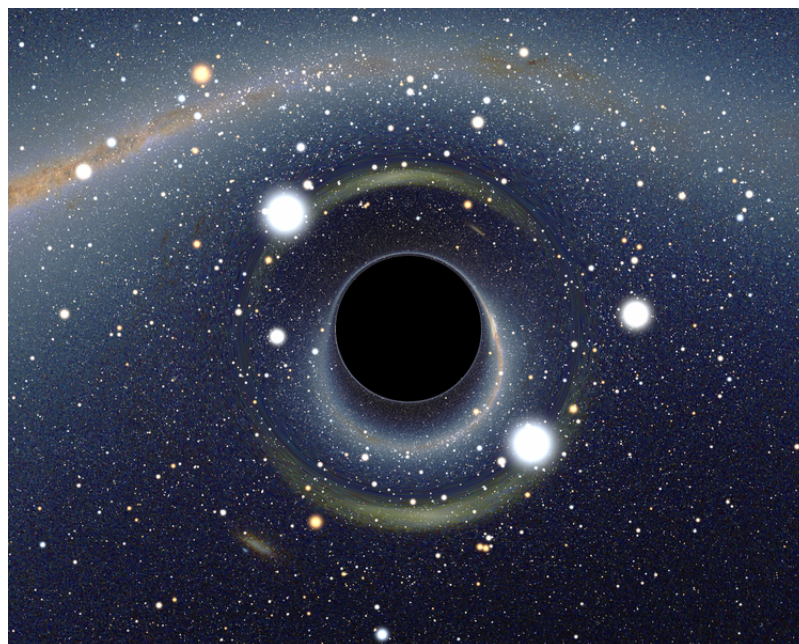
Črna luknja je nebesno telo s tako močnim gravitacijskim poljem, da niti svetloba ne more zapustiti njegovega površja. Domneva, da obstajajo takšna telesa, je že precej stara. Prvi jo je izrekel francoski matematik in astronom Pierre-Simon Laplace leta 1798. Domneval je, da v vesolju obstajajo telesa s tolikšno maso, da je ubežna hitrost na površju večja ali enaka svetlobni hitrosti. V mejnem primeru velja

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mc^2 = \frac{GmM}{r} \quad \text{in} \quad r = \frac{2GM}{c^2}. \quad (4.10)$$

Pri dani masi telesa mora biti polmer črne luknje manjši od kritičnega polmera. Kljub temu, da smo pri izpeljavi zagrešili nedopustno napako in uporabili klasični izraz za kinetično energijo, je dobljeni izraz enak izrazu, ki ga dobimo s točnim relativističnim računom. Za kritični polmer črne luknje, ki bi imela maso Sonca, dobimo

$$r_{\odot} = \frac{2GM_{\odot}}{c^2} \approx 3 \text{ km}, \quad (4.11)$$

povprečna gostota takšnega telesa pa bi merila neverjetnih $\rho = 3M_{\odot}/4\pi r_s^3 = 2 \cdot 10^{20} \text{ kg/m}^3$.



Slika 24: Simulacija črne luknje, kot bi jo videl opazovalec na oddaljenosti nekaj deset kilometrov. Zaradi močnega gravitacijskega polja se svetloba zvezd in meglic za črno luknjo močno uklanja, kar vidimo kot svetle obroče. Zaradi tega pojava se deformira slika (kraka) Rimske ceste nad črno luknjo. Dve izjemno svetli zvezdi sta pravzaprav sliki ene same zvezde, ki leži za črno luknjo; črna luknja v tem primeru deluje kot leča, ki močno poveča sliko (sliki) zvezde. (http://en.wikipedia.org/wiki/File:BH_LMC.png)

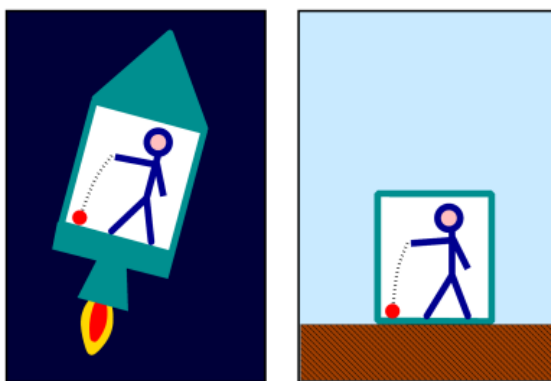
Črna luknja je končno stanje zvezd, ki imajo maso znatno večjo od mase Sonca. Ko takšna zvezda porabi vse jedrsko gorivo, v njeni sestavi prevladuje železo. Zvezda se

zaradi gravitacije prične krčiti in eksplodira kot supernova. Pri tem veliko snovi izvrže – iz te snovi so na primer nastali planeti našega osončja – v njenem jedru pa ostane nevtronska zvezda, ki ima gostoto še veliko večjo od bele pritlikavke, velikostnega reda 10^{18} kg/m^3 . Če je masa nevtronske zvezde večja od približno dveh Sončevih mas, se krčenje zvezde ne more več zaustaviti in iz nevtronske zvezde nastane črna luknja. Obstoj črnih lukenj so nedvoumno potrdili pri detekciji gravitacijskih valov 14. septembra 2015, ki so nastali pri spojitvi dveh masivnih črnih lukenj, pri čemer se je sprostil energija, enaka mirovni energiji treh Sonc.

4.5 Osnove splošne teorije relativnosti

Einstein je leta 1916 izdelal *Splošno teorijo relativnosti*, s katero je pojasnil delovanje gravitacijske sile preko spremembe *metričnih lastnosti* prostora. To pomeni, da se ob prisotnosti mase v prostoru spremenijo zveze med časom in krajevnimi koordinatami, kot jih podaja *posebna teorija relativnosti*. Pravimo, da se štirirazsežni prostor *ukrivi*. Prostor in čas nista več ozadje – *oder* –, na katerem poteka fizikalno dogajanje, temveč postaneta dinamični fizikalni količini – *igralca* –, odvisni od lastnosti teles in njihovega gibanja – *oder postane del igre in se spreminja v odvisnosti od dogajanja na odru*.

V *ravnem* prostoru, to je prostoru brez mas, se telo giblje premo enakomerno, če na telo ne deluje nobena sila. Če padamo v gravitacijskem polju Zemlje, pa tudi ne čutimo nobene sile, podobno kot če bi se gibal premo enakomerno v breztežnem prostoru. V zaprti vesoljski ladji ne bi mogli ugotoviti, ali se gibljemo v breztežnem prostoru, ali pa padamo v gravitacijskem polju nebesnega telesa. Podobno ne bi mogli ločiti med situacijo, ko vesoljska ladja miruje na površju Zemlje (ali katerega koli drugega nebesnega telesa), in situacijo, ko se vesoljska ladja giblje enakomerno pospešeno s pospeškom, enakim težnemu pospešku na Zemlji (nebesnemu telesu). Takšna razmišljanja je Einstein strnil v načelu *ekvivalence*. V splošni teoriji relativnosti zato gravitacijske sile ni; delovanje gravitacijske sile je izraženo s spremembo lastnosti prostora.



Slika 25: Načelo ekvivalence: padajoča žoga v raketi, ki se giblje pospešeno z $a = -g$, in padajoča žoga v sobi na Zemlji.

(http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Elevator_gravity2.png)



Slika 26: Breztežno stanje v letalu, ki se giblje po paraboli (<http://www.luxuo.com>)

Krivuljo, po kateri se telo giblje, ko nanj ne deluje nobena sila (med katere ne štejemo več gravitacije), imenujemo *geodetska krivulja* ali *geodetka*. V ravnem prostoru je to premica (daljica); v gravitacijskem polju pa to ni več res. Geodetska krivulja je lahko parabola na površju Zemlje ali krožnica (elipsa) pri gibanju telesa okoli Zemlje (glej sliko 26). Če stojimo na površju Zemlje, nismo na geodetski krivulji, saj na nas deluje sila podlage. Za astronave v vesoljski postaji, ki kroži okoli Zemlje, pravimo, da so v breztežnem stanju. To vsekakor ne pomeni, da na njihovi orbiti ni prisotno gravitacijsko polje Zemlje pa tudi Sonca. V resnici sil ne čutijo zato, ker se gibljejo po geodetski krivulji. V vesolju je pravi breztežni prostor – v splošni teoriji relativnosti bi temu rekli raven prostor – le na veliki oddaljenosti od vseh teles nekje v medgalaktičnem prostoru.

4.6 Metrični tenzor v gravitacijskem polju

Lastnost prostora je določena z metričnim tenzorjem (glej poglavje *Osnove posebne teorije relativnosti*). V ravnem prostoru ima tenzor diagonalno obliko z $\eta_{00} = -1$ in $\eta_{ii} = 1$, $i = 1, 2, 3$. V gravitacijskem polju se tenzor spremeni:

$$\eta_{\alpha\beta} \rightarrow g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}(\vec{r}, t); \quad (4.12)$$

elementi $h_{\alpha\beta}$ merijo odmik od tenzorja ravnega prostora. Gravitacijsko polje torej opišemo s tenzorjem, zato je tudi izvir polja *tenzor*. Poleg komponente, ki predstavlja maso oziroma polno energijo, je izvir polja tudi krajevni del četverca gibalne količine in pa (trirazsežni) napetostni tenzor. Glavni prispevek pride od prve komponente – polne energije. Polje (tenzor h) in izvire povezujejo Einsteinove enačbe, ki pa jih zaradi zahtevnega matematičnega formalizma, v katerem so zapisane, tu ne bomo navajali.

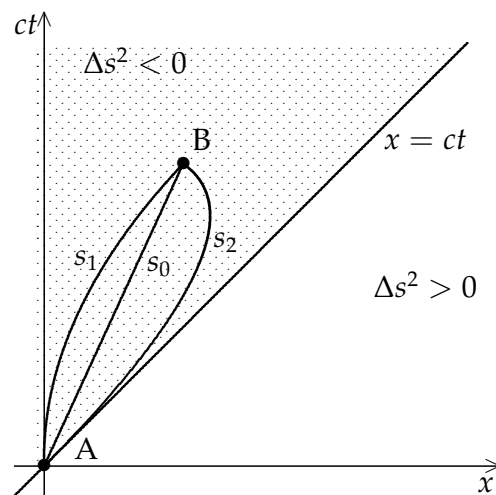
Kot smo povedali, se telo, na katerega ne deluje nobena zunanja sila, giblje po geodetski krivulji. Enačbo za gibanje po geodetski krivulji zapišemo s pomočjo variacijskega principa: zahtevamo, da je čas potovanja za opazovalca, ki se giblje skupaj telesom, najkrajši oziroma stacionaren. Ta čas – lastni čas – je povezan z razdaljo med dogodkoma v ravnem prostoru. V poljubnem inercialnem sistemu smo invariantno razdaljo zapisali kot:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2. \quad (4.13)$$

V lastnem sistemu telesa je $\Delta t = \Delta\tau$ in $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$ in velja

$$\Delta\tau = \frac{\sqrt{-\Delta s^2}}{c} = \sqrt{\Delta t^2 - \frac{1}{c^2}(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2)}. \quad (4.14)$$

Izraz Δs^2 je med dogodki, ki so v vzročni povezavi, vedno negativen, zato je izraz pod korenem vedno pozitiven. (O geodetski krivulji je seveda smiselno govoriti le pri dogodkih, ki sta med seboj vzročno povezana.)



Slika 27: Geodetske krivulje: časovno najkrajša pot med dogodkoma A in B je v ravnem prostoru daljica (s_0), v ukrivljenem prostoru je ta pot lahko drugačna.

V ukrivljenem prostoru geodetska krivulja ni več ravna črta med dogodkoma (glej sliko 27), pač pa se deformira. Razdaljo med dogodkoma zapišemo tako, da pot razdelimo na majhne odseke in prispevke seštejemo (integriramo):

$$\Delta\tau = \int_A^B d\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{00} dt^2 - \frac{1}{c^2}(g_{11} dx^2 + g_{22} dy^2 + g_{33} dz^2)}, \quad (4.15)$$

pri čemer smo k posameznim členom pripisali ustrezne elemente metričnega tenzorja. Zapišemo $dt = (\partial t / \partial \tau) d\tau, \dots$ in dobimo

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{00} \left(\frac{\partial t}{\partial \tau}\right)^2 - \frac{1}{c^2} \left[g_{11} \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2 + g_{22} \left(\frac{\partial y}{\partial \tau}\right)^2 + g_{33} \left(\frac{\partial z}{\partial \tau}\right)^2 \right]} d\tau. \quad (4.16)$$

4.7 Geodetske krivulje v limiti majhnih hitrosti in šibkega polja

V tej limiti vsi opazovalci merijo isti čas, $t = \tau$, in izraz se poenostavi:

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{-g_{00} - \frac{1}{c^2} (g_{11} v_x^2 + g_{22} v_y^2 + g_{33} v_z^2)} dt. \quad (4.17)$$

Raven prostor. Določimo najprej geodetsko krivuljo v ravnem prostoru, $g_{00} = -1$, $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$. V tem primeru mora biti integrand stacionaren; pravzaprav zadošča, da zahtevamo stacionarnost izraza pod integralom:

$$\Delta\tau = \text{ekstrem}, \quad \text{od koder sledi} \quad \frac{d}{dt} \left[1 - \frac{1}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2) \right] = -\frac{1}{c^2} \frac{d\vec{v}^2}{dt} = 0,$$

z rešitvijo

$$\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 0, \quad \text{torej} \quad \vec{v} = 0 \quad \text{ali} \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \vec{0}. \quad (4.18)$$

Telo miruje ali se giblje premo enakomerno — kot smo pričakovali.

Statično gravitacijsko polje. V statičnem gravitacijskem polju so komponente h (glej (4.12)) odvisne od krajevnih koordinat. Predpostavimo, da je polje šibko

$$h_{\alpha\alpha}(\vec{r}) \ll \eta_{\alpha\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, 2, 3. \quad (4.19)$$

Ker obravnavamo gibanje v limiti $v \ll c$, lahko v izrazu (4.17) zanemarimo člene $g_{ii}v_i^2/c^2$, $i = 1, 2, 3$. Iščemo torej ekstrem izraza

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{1 - h_{00}(\vec{r}) - \frac{1}{c^2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)} dt. \quad (4.20)$$

Privzemimo, da se polje *linearно* spreminja s koordinato z , v smeri koordinat x in y pa je konstantno, $h_{00}(\vec{r}) = h_{00}(z) = kz$, opazujemo pa le gibanje v smeri osi z ($v_x = v_y = 0$). Privzamemo še $v_z \ll c$ in $|kz| \ll 1$. Variacijsko nalogo zapišemo v obliki

$$\Delta\tau = \int_A^B \sqrt{(1 - kz) - \frac{v_z^2}{c^2}} dt = \int_A^B \mathcal{L}(z, v_z, t) dt = \text{minimalno}.$$

Ker se v integrandu sedaj pojavi funkcija $z(t)$ in njen odvod $v_z = dz/dt$, se problem iskanja optimalne rešitve prevede na reševanje Euler-Lagrangeeve enačbe:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = 0. \quad (4.21)$$

Velja

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \left((1 - kz) - \frac{v_z^2}{c^2} \right)^{-1/2} (-k) = \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} k \approx \frac{1}{2} k,$$

saj za dovolj majhne kz in v_z/c lahko postavimo $\mathcal{L} = 1$. Podobno velja

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\mathcal{L}^{-1} \frac{2v_z}{c^2} \right) \approx -\frac{d}{dt} \frac{v_z}{c^2}$$

in iz (4.21) končno sledi

$$\frac{k}{2} - \frac{1}{c^2} \frac{dv_z}{dt} = \frac{k}{2} - \frac{a_z}{c^2} = 0, \quad a_z = \frac{c^2 k}{2}.$$

Rešitev je premo enakomerno gibanje s pospeškom $a_z = \frac{1}{2}c^2 k$. Primer ustreza prostemu padu na površju Zemlje. Če os z kaže navpično navzgor, je $a_z = -g$ in konstanta k enaka $k = -2g/c^2$. Komponento metričnega tenzorja potem lahko zapišemo kot

$$h_{00} = kz = -\frac{2gz}{c^2} = -\frac{2mgz}{mc^2} = -\frac{2W_{\text{pot}}}{W_{\text{mirovna}}}. \quad (4.22)$$

Element metričnega tenzorja h_{00} je torej premo sorazmeren s potencialno energijo, zato h_{00} imenujemo kar *gravitacijski potencial*.

Krogelno simetrično gravitacijsko polje. Izraza (4.22) posplošimo na gravitacijsko polje Zemlje (oziroma poljubnega planeta ali zvezde) na večji oddaljenosti od površja. Če z r označimo oddaljenost od središča nebesnega telesa z maso M , za gravitacijsko potencialno energijo telesa z maso m velja: $W_{\text{pot}} = -GmM/r$, in gravitacijski potencial lahko zapišemo kot

$$h_{00} = -\frac{2W_{\text{pot}}}{W_{\text{mirovna}}} = \frac{2GmM}{r mc^2} = \frac{2GM}{c^2 r}, \quad g_{00}(r) = -1 + \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (4.23)$$

Ocenimo vrednost h_{00} na površju Zemlje in Sonca! Zemlja ima maso $M = 6 \cdot 10^{24}$ kg in polmer $r = 6,4 \cdot 10^6$ m, Sonce pa $2 \cdot 10^{30}$ kg in $7,5 \cdot 10^8$ m:

$$h_{00}^{\text{Zemlja}} = 1,4 \cdot 10^{-9}, \quad h_{00}^{\text{Sonce}} = 4 \cdot 10^{-6}.$$

Če za opazovalca na površju Zemlje preteče med dvema dogodkoma na Zemlji čas $\Delta\tau$, potem za mirujočega opazovalca ($\Delta x = \Delta y = \Delta z = 0$) daleč proč preteče Δt in velja

$$\Delta\tau = \sqrt{-g_{00}\Delta t^2} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \Delta t, \quad \Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}} \approx \Delta\tau \left(1 + \frac{GM}{c^2 r}\right). \quad (4.24)$$

Čas se torej podaljša, kot smo ugotovili že v prejšnjem poglavju.

V bližini črne luknje je ekstremno močno gravitacijsko polje. Polmer črne luknje r_s je določen ravno s pogojem $h_{00} = 1$ oziroma $g_{00} = 0$, od koder sledi $r_s = 2GM/c^2$, enako kot v enačbi (4.10). Ura v ladji, ki se približuje površju črne luknje, $r \rightarrow r_s$, teče vedno počasneje in se na površju povsem ustavi.

V gravitacijske polju torej geodetska krivulja ustreza pospešenemu gibanju pod vplivom težnega pospeška. Primeri so prosti pad, poševni met (parabola), krožnica, elipsa ali hiperbola pri gibanju okoli planeta ali zvezde.

***Izpeljava iz Euler-Lagrangeevih enačb.** Izraz (4.20) ima obliko klasične variacijske naloge

$$S = \int_A^B \mathcal{L}(\vec{r}(t), \vec{v}(t), t) dt = \text{ekstrem}. \quad (4.25)$$

Euler-Lagrangeeve enačbe imajo v tem primeru obliko:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_y} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_z} = 0, \quad (4.26)$$

V našem primeru $\mathcal{L}$ ustreza korenski funkciji v integralu (4.17):

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{dh_{00}(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{dh_{00}(r)}{dr} \frac{\partial r}{\partial x}$$

in

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial v_x} = -\frac{d}{dt} \frac{1}{2} \mathcal{L}^{-1} \frac{2v_x}{c^2} = -\frac{dv_x}{c^2 dt} = -\frac{a_x}{c^2},$$

pri čemer smo obdržali le vodilne člene v razvoju po $\frac{1}{c^2}$ in privzeli, da je $|h_{00}| \ll 1$. Podobno naredimo še za drugi dve koordinati in dobimo

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = -\frac{c^2}{2} \frac{dh_{00}(r)}{dr} \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \frac{c^2}{2} \frac{dh_{00}(r)}{dr} \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{c^2}{2} \frac{dh_{00}(r)}{dr} \hat{r}. \quad (4.27)$$

Pospešek kaže v radialni smeri proti središču, tako kot pri klasičnem rezultatu. V okviru Newtonove mehanike velja

$$m\vec{a} = -\frac{GmM}{r^2} \hat{r}. \quad (4.28)$$

S primerjanjem obeh izrazov dobimo zvezo med klasičnim izrazom za gravitacijsko polje in komponento metričnega tenzorja h_{00} :

$$\frac{dh_{00}(r)}{dr} = -\frac{2GM}{c^2 r^2}, \quad h_{00}(r) = \frac{2GM}{c^2 r}. \quad (4.29)$$

Rezultat je enak kot v prejšnjem razdelku.

4.8 *Metrični tenzor za črno luknjo

Točno rešitev Einsteinovih enačb v primeru točkastega naboja je našel Karl Schwarzschild že leta 1915 (kot nemški vojak na ruski fronti). V sferičnih koordinatah – tako imenovanih *Schwarzschildovih koordinatah* – velja

$$-c^2 d\tau^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} + r^2 d\vartheta^2 + r^2 \sin^2 \vartheta d\varphi^2. \quad (4.30)$$

Tu sta ϑ in φ kota, kot ju poznamo iz krogelnega koordinatnega sistema v treh razsežnostih. V prvem členu na desni spoznamo izraz za g_{00} , ki smo ga izpeljali iz zahteve,

da dobimo v limiti šibkega polja klasično gravitacijsko polje; na novo smo dobili izraz za g_{11} oziroma za diagonalni element metričnega tenzorja, zapisanega v krogelnih koordinatah, g_{rr} . Vidimo, da g_{00} postane enak nič, g_{rr} pa divergira, ko krajevna radialna koordinata doseže vrednost $r = r_s = 2GM/c^2$. Vrednost r_s imenujemo *Schwarzschildov polmer* in je enak mejnemu polmeru črne luknje (glej enačbo (4.10)). Na prvi pogled najbolj bode v oči singularnost g_{rr} pri $r = r_s$, a v resnici gre le za navidezno singularnost, ki jo lahko odpravimo z izbiro drugačne radialne koordinate. Edina prava singularnost je pri $r = 0$. Pomembnejša posledica je sprememba predznaka pri matričnih elementih g_{00} in g_{rr} pri $r = r_s$. Tu časovna in prostorska koordinata zamenjata svoji vlogi. Ker je $g_{00} > 0$, se lahko v času sprehajamo naprej in nazaj. Pa opazovalcu, ki bi prečkal Schwarzschildov polmer, to ne bi dosti koristilo, saj vlogo časa prevzame radialna koordinata, ki neusmiljeno teče proti vrednosti nič. Krogelni lupini z $r = r_s$ pravimo *Schwarzschildov horizont*. Vsako telo, tudi svetloba (foton), ki prečka ta horizont, ne more več zapustiti območja znotraj horizonta. Govorimo o črni luknji; v črni luknji se torej vsa snov, ki pade vanjo, zbere v singularnosti pri $r = 0$.

Najbrž se je smiselno vprašati, ali lahko telo sploh doseže horizont? Preverimo to za svetlobni žarek, ki ga usmerimo proti središču črne luknje z začetne lege $r_0 > r_s$. Enačba za gibanje fotona je kar enačba svetlobnega stožca, $\Delta s^2 = 0$, oziroma $d\tau = 0$. Žarek (foton) naj se giblje v radialni smeri ($d\vartheta = d\varphi = 0$) in iz (4.30) sledi

$$\frac{dr}{dt} = \pm c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right).$$

Vidimo, da se hitrost svetlobe zmanjšuje, ko se bližamo horizontu in na horizontu doseže vrednost nič. (Predznak $+$ velja pri gibanju navzven in $-$ pri gibanju proti središču.) Vprašamo se lahko, ali foton v tem primeru sploh doseže horizont v končnem času. Velja

$$- \int_{r_0}^{r_s} \frac{dr}{1 - \frac{r_s}{r}} = c \int_0^t dt = ct.$$

Števec in imenoalec v integrandu na levi pomnožimo z r in dobimo

$$t = -\frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{r dr}{r - r_s} = \frac{1}{c} \int_r^{r_0} dr + \frac{r_s}{c} \int_r^{r_0} \frac{dr}{r - r_s} = \frac{r_0 - r}{c} + \frac{r_s}{c} \ln \frac{r_0 - r_s}{r - r_s}. \quad (4.31)$$

Za $r \rightarrow r_s$ drugi člen divergira; za mirujočega opazovalca zunaj črne luknje svetloba nikoli ne doseže horizonta. Prav tako horizonta za zunanega opazovalca ne doseže nobeno telo, ki se giblje s hitrostjo, manjšo od svetlobne. Dejstvo je pravzaprav posledica podaljšanja časa (glej enačbo (4.24)); opazovalec, ki bi padal v črno luknjo, pa bi horizont dosegel in ga tudi prečkal v končnem lastnem času.

Oglejmo si nekoliko podrobneje usodo opazovalca, ki pada v črno luknjo. Ker se giblje po geodetski krivulji, ne čuti nobene sile. A to ni povsem res, saj se zaradi spreminjanja jakosti gravitacije z razdaljo pojavi tako imenovana *plimska sila*. Če človek na primer stoji na površju Zemlje, deluje na noge nekoliko večja sila kot na glavo, saj so noge bližje središču Zemlje. Plimska sila hoče telo raztegniti v smeri naraščanja sile (torej v radialni smeri), v prečni smeri pa skrčiti. Človek na Zemlji tega učinka ne

zazna, saj je sorazmeren z razmerjem višine telesa in polmera Zemlje in torej zanemarljivo majhen. Plimsko silo Lune in Sonca pa čuti voda v morjih in oceanih in je vzrok za pojava plime in oseke. Če bi se opazovalec bližal horizontu črne luknje, ki bi imela maso, približno enako masi Sonca, bi postale plimske sile tako velike, da bi opazovalca raztrgale že veliko prej, preden bi dosegel horizont.

Danes vemo, da so v središčih galaksij velike črne luknje z maso več milijonov ali celo milijard Sončevih mas in Schwarzschildovim polmerom, ki je za enak faktor večji od Sončevega. V tem primeru so plimske sile pri horizontu zanemarljive in opazovalec bi lahko mirno padal naprej proti središču črne luknje tudi po tem, ko bi prečkal horizont. Imel bi čisto dovolj časa, da bi se razgledal po notranjosti črne luknje – preden bi ga raztrgale plimske sile v bližini singularnosti pri $r = 0$.

4.9 *Gravitacijsko valovanje

Opis ravnega gravitacijskega valovanja. Podobno kot pri elektromagnetnem valovanju, niha pri gravitacijskem valovanju gravitacijsko polje. Količina, ki opisuje gravitacijsko polje, je metrični tenzor, pravzaprav sprememba metričnega tenzorja glede na metrični tenzor ravnega prostora, $h_{\mu\nu}$. Če usmerimo os z v smer širjenja valovanja, ima metrični tenzor v (sicer) ravnem prostoru obliko

$$[g_{\mu\nu}] = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & 1 - h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pri čemer sta

$$h_+ = A_+ \cos(kz - \omega t), \quad h_\times = A_\times \cos(kz - \omega t).$$

Za krožno frekvenco ω in valovni vektor k velja $\omega = c k$ in $k = 2\pi/\lambda$, če je λ valovna dolžina. V primeru, ko sta izvir valovanja telesi, ki krožita okoli skupnega težišča, je frekvenca valovanja enaka dvojni frekvenci kroženja.

Izraz za gostoto energijskega toka lahko izpeljemo le v okviru splošne teorije relativnosti. Obliko enačbe pa lahko uganemo s pomočjo analogije z gostoto energijskega toka v EM valovanju,

$$j_{\text{EM}} = \frac{1}{2} c \left[\epsilon_0 E^2 + \frac{B^2}{\mu_0} \right].$$

Sklepamo, da je gostota energijskega toka tudi pri gravitacijskem valovanju (GV) odvisna od kvadrata amplitude, namesto konstante ϵ_0 , ki je značilna za EM polje, pa pričakujemo, da se v izrazu pojavi gravitacijska konstanta G . Čeprav pri EM valovanju gostota ni odvisna od valovne dolžine oziroma frekvence, dopustimo tudi odvisnost od frekvence, tako kot pri zvočnem valovanju. Odvisnost od konstant in frekvence lahko ugotovimo z *dimenzijsko analizo*. Iskani izraz iščemo z nastavkom

$$j_{\text{GV}} = \mathcal{K} c^\alpha G^\beta \nu^\gamma \left[A_+^2 + A_\times^2 \right]. \quad (4.32)$$

Vemo še, da sta amplitudi brezdimenzijski količini. Enota za j , izražena z osnovnimi enotami, je kg m^{-3} . Izenačimo enote na levi in desni:

$$\text{kg s}^{-1} = \text{m}^{\alpha} \text{s}^{-\alpha} \text{kg}^{-\beta} \text{m}^{3\beta} \text{s}^{-2\beta} \text{s}^{-\gamma}.$$

Hitro se prepričamo, da je $\beta = -1$, $\gamma = 2$ in $\alpha = 3$. Torej

$$j_{\text{GV}} = \mathcal{K} \frac{c^3}{G} v^2 \left[A_+^2 + A_{\times}^2 \right].$$

Izpeljava iz Einsteinovih enačb vodi do $\mathcal{K} = \pi/8$. Prvo, kar opazimo, je kvadratna odvisnost od frekvence, kar je drugače kot pri EM valovanju, a enako kot pri zvoku.

V EM valovanju se prepletata električno in magnetno polje in drugo drugega vzdržujeta, tako da se energijski tok pri širjenju skozi prazen prostor ohranja. Kaj pa ohranja energijski tok pri gravitacijskem valovanju? Gravitacijsko valovanje nosi energijo, gibalno količino in tlak; torej količine, ki nastopajo v Einsteinovih enačbah v splošni teoriji relativnosti in predstavljajo izvir gravitacijskega polja. Tako kot EM valovanje je tudi gravitacijsko valovanje samemu sebi izvir.

Izsevani energijski tok v primeru dveh krožečih teles. Za celotni energijski tok, ki ga izseva sistem teles z masama m_1 in m_2 , ki krožita okoli skupnega težišča na medsebojni razdalji r , je mogoče izpeljati izraz v kompaktni obliki ³:

$$P = \frac{32G^4 m_1^2 m_2^2 (m_1 + m_2)}{5c^5 r^5} = \frac{32}{5} \frac{G^3}{c^5} \frac{m_1^2 m_2^2}{r^2} \omega^2, \quad (4.33)$$

pri čemer je ω kotna hitrost kroženja (krožna frekvenca).

V primeru sistema Zemlje in Sonca ($m_1 = 6 \cdot 10^{24}$ kg, $m_2 = 2 \cdot 10^{30}$ kg, $r = 1,5 \cdot 10^{11}$ m) dobimo presenetljivo majhno vrednost $P = 200$ W. Na račun izsevane moči Zemlja izgublja energijo in razdalja do Sonca se zmanjšuje, a to zmanjšanje je tudi v milijardah let povsem zanemarljivo.

Iz enačbe (4.33) sledi, da moč narašča s peto potenco mas in je obratno sorazmerna z razdaljo na enako potenco. Če bi torej hoteli iz sistema dveh krožečih teles dobiti dovolj močan signal, primeren za opazovanje na velikih razdaljah, bi morali biti masi zelo veliki, razdalja med njima pa zelo majhna. Zanimivi so torej objekti, ki so zelo masivni in imajo majhno velikost. Zvezde in planeti ne pridejo v poštev, edini objekti, ki imajo pri masi, večji ali primerljivi z maso Sonca, dovolj majhno velikost, so nevtronske zvezde in črne luknje, ki smo jih omenili v poglavju 4.4.

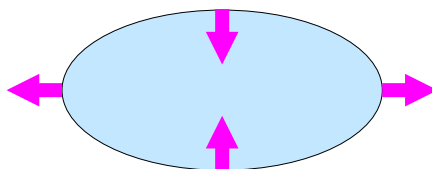
Prvič so zaznali gravitacijsko valovanje pri sistemu dveh krožečih črnih lukenj. Ocenimo energijske razmere pri dveh enakih črnih luknjah z masama po 30 Sončevih mas, kar približno ustreza situaciji pri opazovanem pojavu. Polmer takšne črne luknje dobimo iz (4.10) in meri 80 km. Pri značilni frekvenci valovanja $\nu_v = 40$ Hz, ki jo je oddajal sistem pri prvem pojavu, krožita črni luknji na razdalji 800 km in za izsevani energijski tok sledi

$$P = \frac{64G^4 m^5}{5c^5 r^5} = 2,5 \cdot 10^{47} \text{ W}.$$

³https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitational_wave

Izsevani tok je tolikšen, da je zmanjševanje polmera znatno, kar pomeni, da se sistem tudi vedno hitreje vrti. Pri tem se moč hitro povečuje, kar še dodatno pospeši dogajanje. Na koncu se črni luknji sprimeta in spojita v eno samo črno luknjo in tedaj se gravitacijsko sevanje praktično ustavi. Ocenili so, da je bila celotna izsevana energija pri opisanem kolapsu črnih lukenj enaka trem mirovnim energijam Sonca. Kasneje so opazovali več podobnih pojavov, tudi kolaps dveh nevtronskih zvezd v črno luknjo.

Detekcija gravitacijskih valov. Gravitacijsko valovanje spremeni lastnosti prostora v ravnini, pravokotni na smer širjenja valovanja. Prostor se v tej ravnini krči in razteza s frekvenco valovanja (slika 28). Gravitacijski potencial h_+ predstavlja relativno spremembo razdalje med izbranimi točkama.



Slika 28: Deformacija telesa v nehomogenem gravitacijskem polju.

Amplitudo relativnega raztezka A lahko povežemo z gostoto energijskega toka (4.32), gostoto pa z močjo izvira in razdaljo med detektorjem in izvirom R . Za približno oceno dobimo

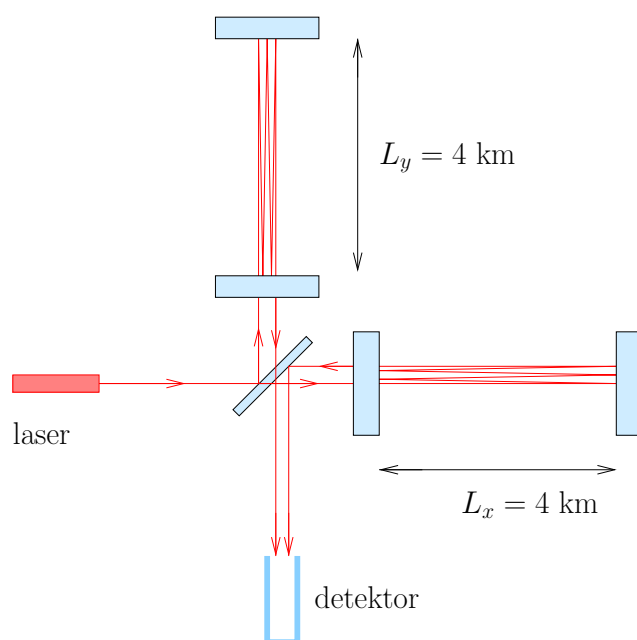
$$A \approx \sqrt{\frac{G}{c^3 v^2}} \sqrt{\frac{P}{4\pi R^2}}.$$

Naprava, s katero je kolaboracija LIGO zaznala prvo gravitacijsko valovanje, more meriti A z natančnostjo, boljšo kot $5 \cdot 10^{-22}$. Pri tej kolaboraciji sta dva podobna detektorja, shematično prikazana na sliki 29, postavljena v dveh mestih, oddaljenih 3002 km. Tako je mogoče na podlagi zakasnitve med prejetima signaloma sklepati na smer, iz katere prihaja gravitacijsko valovanje. Kasneje se je obema detektorjem pridružil še evropski detektor v Pisi (Italija), in s tem se je bistveno izboljšala ločljivost pri določanju smeri, iz katere prihaja valovanje.

Pri prvi detekciji je bila največja moč izvira $3,6 \cdot 10^{49}$ W na razdalji $R = 1,3$ milijarde svetlobnih let, kar ustreza gostoti energijskega toka na Zemlji $0,2$ W/m².

4.10 *Veliki pok, temna snov, temna energija

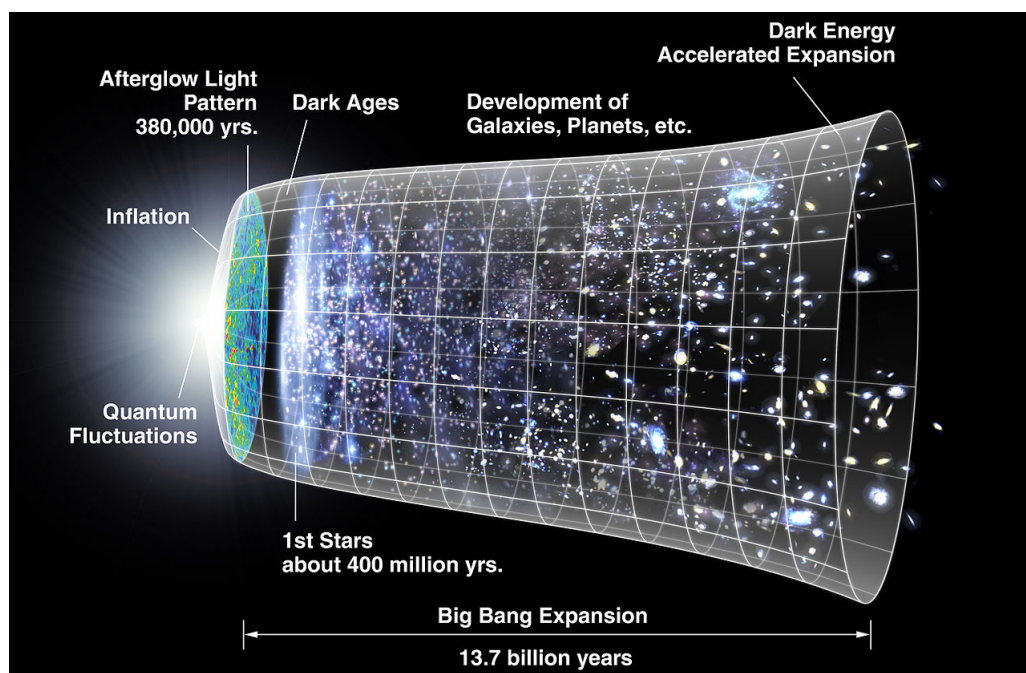
Temna snov. Na podlagi opazovanja gibanja zvezd v galaksijah je možno oceniti maso galaksije, ki ustvarja gravitacijsko polje, v katerem se zvezde gibljejo. Če to oceno primerjamo z oceno mase galaksije, dobljeno na podlagi ocenjenega števila zvezd v galaksiji in njihove mase, kakor tudi mase medzvezdnih plinov, ugotovimo, da tako imenovana vidna masa predstavlja le manjši del mase, odgovorne za gravitacijo. To pomeni, da je večina snovi v galaksiji takšna, da niti ne oddaja svetlobe, niti svetlobe ne odbija. To je *temna snov*. Kaj sestavlja temno snov, za zdaj še ne vemo.



Slika 29: Shematični prikaz delovanja detektorja LIGO. Deluje na principu Michelsonovega interferometra. Zrcali v posameznem kraku tvorita Fabry-Pérotov interferometer. Razmik med zrcaloma je naravnano tako, da se vsa svetloba odbije od notranjega zrcala, ko ni prisotno gravitacijsko valovanje. Ko se spremeni razdalja med zrcaloma, notranje zrcalo prepusti del svetlobe, ki pride do detektorja, večji del pa se vrne v prostor med zrcali. Po približno 300 odbojih se tako prepuščena svetloba močno ojača in hkrati se bistveno zmanjša termični šum. Celotna pot, ki jo prepotuje žarek med zrcaloma, je tako 1100 km. Sistem je bil posebno občutljiv na valovanje s frekvenco velikostnega reda 100 Hz.

Veliki pok. Da se vesolje širi, smo spoznali že pri obravnavi Dopplerjevega premika. Svetloba oddaljenih zvezd je premaknjena proti rdečemu delu spektra, kar pomeni, da se zvezde od nas oddaljujejo; hitrost oddaljevanja je premo sorazmerna z oddaljenostjo. Od tod sklepamo, da je bila vsa snov zbrana na enem mestu pred približno 13,8 milijarde let. Vesolje se je tedaj začelo širiti s tako imenovanim *velikim pokom* in širjenje se nadaljuje v nezmanjšani meri še danes. Vesolje se ne širi v prazen prostor, pač pa se prostor širi hkrati z razpenjajočo se snovjo. Štirirazsežni prostor si lahko ponazorimo s površino balona, ki se povečuje, ko balon napihujemo. Prostor je ukrivljen, tako kot je ukrivljena površina balona – kako pa je to zares videti, pa si seveda nihče ne zna predstavljati – niti Stephen Hawking ne.

Temna energija. Razpenjanje vesolje je mogoče zajeti v Einsteinovih enačbah splošne teorije relativnosti. Iz opazovanja širjenja danes in v preteklosti lahko sklepamo na porazdelitev gostote snovi in energije, ki je izvor metričnih lastnosti štirirazsežnega prostora. (Preteklost seveda opazujejo orjaški teleskopi, usmerjeni na zelo oddaljene vesoljske objekte, ki jih je svetloba zapustila pred milijardami let.) Običajna snov in tudi temna snov, ki smo jo omenili na začetku razdelka, bi – preko svoje mirovne ener-



Slika 30: Razvoj vesolja po velikem poku. Takoj po velikem poku igrajo ključno vlogo *kvantne fluktuacije*, kot jih napoveduje *Heisenbergovo načelo nedoločenosti*. V obdobju *inflacije*, ko se vesolje izjemno hitro širi, imajo fluktuacije kozmične razsežnosti in so odgovorne za nihanja v sicer izotropni porazdelitvi snovi v vesolju. Po inflaciji se elementarni delci (kvarki) pričnejo spajati v protone in nevtrone ter njune antidelce, ki skupaj z elektroni tvorijo snov, kot jo poznamo danes. Svetloba je ujeta v snovi; fotoni se ves čas rojevajo pri anihilaciji delcev in antidelcev in se hkrati absorbirajo pri njihovi tvorbi. Ko se vesolje razpenja, temperatura pada in pričnejo nastajati nevtralni atomi, predvsem vodik. Antidelci se dokončno anihilirajo s svojimi delci, pri tem ostane presežek delcev. To se dogodi nekako 380 000 let po velikem poku. Svetloba sedaj lahko prosto potuje po vesolju; zaradi razpenjanja vesolja se povprečna energija fotonov manjša. Kozmično sevanje v mikrovalovnem območju, ki ga danes lahko opazujemo, nam posreduje informacijo o porazdelitvi snovi v tem obdobju. Vesolje je temno (*Dark Ages*); pojavljajo pa se že prve zgoščine, ki se naprej krčijo pod vplivom gravitacije. Temperatura zgoščine naraste, pride do zlivanja vodika v helij in na nebu zažarijo prve *zvezde* — nekako 400 milijonov let po velikem poku. Nastajajo galaksije in planetni sistemi. Pričakovali bi, da se bo širjenje vesolja upočasnjevalo, a opazimo ravno nasprotno: širjenje poteka vedno hitreje. Domnevamo, da je za to odgovorna *temna energija*. Vir slike: NASA.

gije – zavirali širjenja vesolja. Ker pa opazovanja kažejo, da se vesolje razpenja vedno hitreje, to pomeni, da na metrične lastnosti vpliva še neka druga oblika energije, ki ima nasproten učinek kot mirovna energija. To obliko energije imenujemo *temna energija*. Tudi njenega izvora še ne poznamo.

5 Delci kot valovanje

5.1 De Brogliejeva valovna dolžina delca

Louis de Broglie je leta 1924 izrekel domnevo, da je delcem mogoče pripisati valovne lastnosti. Zvezo med valovno dolžino fotona in njegovo gibalno količino je posplošil tudi na delce. Po tej domnevi ima delec z gibalno količino $p = mv$ valovno dolžino

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}. \quad (5.1)$$

Eksperimentalno sta njegovo domnevo potrdila tri leta kasneje Davisson in Germer. Opazovala sta sipanje elektronov na kristalu in dobila interferenčne maksimume v skladu z de Brogliejevo napovedjo.

Sipanje elektronov na kristalu. Pri poskusu curek elektronov pospešimo z napetostjo U . Po de Brogliejevi hipotezi pomeni curek ravno valovanje z valovno dolžino

$$\lambda = \frac{h}{mv} = \frac{h}{\sqrt{2e_0mU}}. \quad (5.2)$$

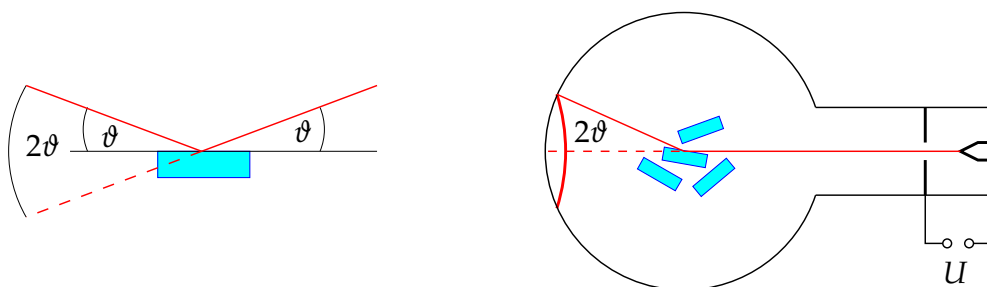
Pri tem smo hitrost izrazili iz izreka o kinetični energiji:

$$A = e_0U = \frac{1}{2}mv^2, \quad v = \sqrt{\frac{2e_0U}{m}}. \quad (5.3)$$

Curek usmerimo na kristal. Curek se odbija od kristalnih ravnin po odbojnem zakonu. Odbiti curki konstruktivno interferirajo, če je izpolnjen Braggov pogoj (3.16).

$$2d \sin \vartheta = N\lambda, \quad N = 1, 2, 3, \dots \quad (5.4)$$

Tu je d razmik med vzporednimi ravninami in ϑ kot, pod katerim nanje vpada elektronski curek. Po odboju ojačani curek nadaljuje pot pod enakim kotom glede na ravnino, tako da se ojačeni curek odkloni za dvojni kot, 2ϑ , od prvotne smeri. Če poznamo d , lahko z merjenjem odklonskega kota preverimo de Brogliejevo zvezo. Preverimo lahko tudi odvisnost med valovno dolžino in napetostjo, kot jo napove (5.2).



Slika 31: Pri poskusu elektronski curek pospešimo z napetostjo U in sipljemo na kristalnem prahu. Do ojačitev pride na tistih kristalčkih, na katere curek vpada pod kotom ϑ , ki zadošča Braggovem pogoju (5.4). Na zaslonu opazimo kolobar ali več kolobarjev za $N \geq 2$.

5.2 Opis valovanja delcev

Ravni val. Interferenco elektronov na kristalu lahko pojasnimo, če elektronskemu curku, ki potuje vzdolž osi x , pripišemo ravno valovanje

$$u(x, t) = A \cos(\omega t - kx), \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi mv}{h} \equiv \frac{mv}{\hbar}. \quad (5.5)$$

A katera količina valuje pri delčnem valovanju?

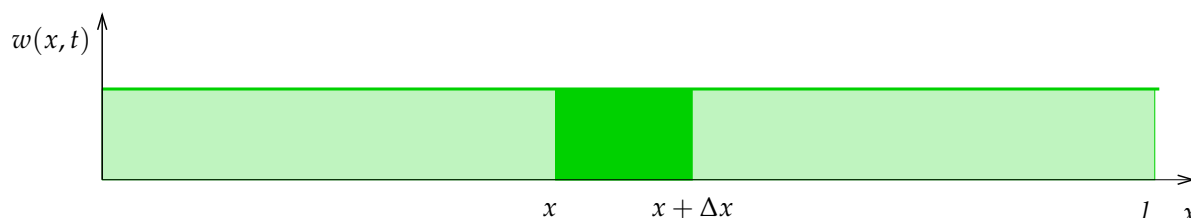
Odgovor je podal leta 1926 Max Born: valuje *verjetnostna amplituda* oziroma *valovna funkcija*, ki jo običajno označimo z grško črko Ψ . Sama valovna funkcija *ni opazljiva količina*, tisto kar lahko opazimo in merimo, je *verjetnostna gostota* $w(x, t)$, ki je *kvadrat valovne funkcije*. Ker sama valovna funkcija ni fizikalna opazljivka, dopuščamo, da je valovna funkcija tudi *kompleksna* količina. Verjetnostno gostoto potem definiramo kot

$$w(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t), \quad (5.6)$$

kjer smo s $*$ označili *konjugirano kompleksno* vrednost. Interpretacija verjetnostne gostote je enaka kot v verjetnostnem računu: verjetnost, da je delec ob času t v dovolj majhnem intervalu $[x, x + \Delta x]$, je

$$\Delta P = w(x, t) \Delta x. \quad (5.7)$$

Verjetnostna gostota je *nenegativna* in *normirana*. Normalizacija, ki jo formalno zapi-



Slika 32: Verjetnostna gostota za elektron v curku z dolžino l .

šemo kot

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x, t)^* \Psi(x, t) dx = 1, \quad (5.8)$$

pomeni, da je verjetnost, da delec najdemo kjer koli na osi x , enaka 1.

Če valovanju v enačbi (5.5) pripišemo verjetnostno gostoto, dobimo funkcijo, ki se spreminja s krajem. Na nekaterih točkah je tako izračunana verjetnostna gostota enaka nič, kar bi pomenilo, da so te vrednosti x za elektron prepovedane. Pričakujemo, da je verjetnostna gostota vzdolž curka konstantna, zato raje vzamemo kompleksno obliko ravnega vala:

$$\Psi(x, t) = A e^{-i(\omega t - kx)}. \quad (5.9)$$

V tem primeru je verjetnostna gostota res konstantna:

$$w(x, t) = \Psi(x, t)^* \Psi(x, t) = A^2 e^{+i(\omega t - kx)} e^{-i(\omega t - kx)} = A^2. \quad (5.10)$$

Če je dolžina elektronskega curka enaka l , lahko iz (5.8) takoj dobimo konstanto A kot $A = 1/\sqrt{l}$.

Superpozicija valov. Rešitev za ravni val (5.9) nekako ne ustreza naši predstavi o delcu, ki se giblje s hitrostjo v . Poiščimo torej obliko valovne funkcije, ki bo bolj ustrezala naši predstavi. Vsekakor bi morala biti verjetnostna gostota čim bolj *lokalizirana*, nekako tako, kot če s hitrim zamahom vrvi ustvarimo en sam val, ki se nato širi naprej po vrvi. Do želene oblike bomo prišli v več korakih.

Iz mehanskih, zvočnih in optičnih valovanj vemo, da vsota dveh (ali več) valovanj tudi predstavlja valovanje. To mora veljati tudi za valovanje delcev, saj sicer ne bi dobili interferenčnih pojavov. Poskusimo z vsoto dveh ravnih valovanj (5.9) z različnima k in ω a enako normalizacijsko konstanto. Vzemimo:

$$k_1 = k + \Delta k, \quad k_2 = k - \Delta k, \quad \omega_1 = \omega + \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega - \Delta\omega,$$

$$\begin{aligned} \Psi_{1,2}(x, t) &= A \left(e^{-i(\omega_1 t - k_1 x)} + e^{-i(\omega_2 t - k_2 x)} \right) \\ &= A \left(e^{-i(\omega t + \Delta\omega t - kx - \Delta kx)} + e^{-i(\omega t - \Delta\omega t - kx + \Delta kx)} \right) \\ &= A e^{-i(\omega t - kx)} \left(e^{-i(\Delta\omega t - \Delta kx)} + e^{i(\Delta\omega t - \Delta kx)} \right) \end{aligned}$$

V zvezi

$$\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos(z).$$

postavimo $z = \Delta\omega t - \Delta kx$ in dobimo

$$\Psi_{1,2}(x, t) = 2A e^{-i(\omega t - kx)} \cos(\Delta\omega t - \Delta kx).$$

Za verjetnostno gostoto velja:

$$w_{1,2}(x, t) = 4A^2 \cos^2(\Delta\omega t - \Delta kx).$$

Verjetnostno gostoto kaže slika 33. Gostota ima vrhove in doline, a prisotnost več vrhov ni v skladu z našim pričakovanjem, da bomo opazili samotni val. Poglejmo, kaj se zgodi, če vzamemo superpozicijo več valov, tako da ostane največji odmik od k in ω nespremenjen; za šest valov izberemo:

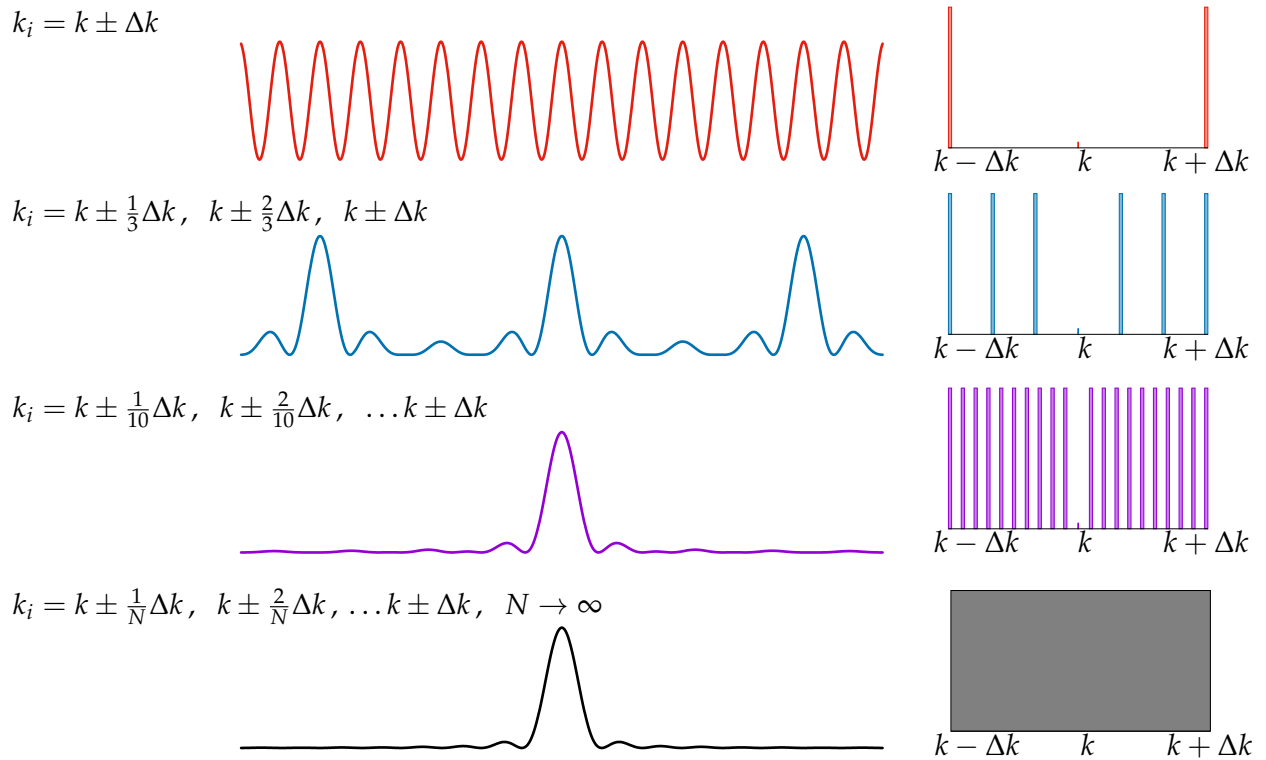
$$k \in \left\{ k \pm \frac{\Delta k}{3}, k \pm \frac{2\Delta k}{3}, k \pm \Delta k \right\}; \quad \omega \in \left\{ \omega \pm \frac{\Delta\omega}{3}, \omega \pm \frac{2\Delta\omega}{3}, \omega \pm \Delta\omega \right\}.$$

Na sliki vidimo, da se višji vrhovi razmaknejo, stranski vrhovi pa postanejo šibkejši. Postopek nadaljujemo:

$$k_n = k \pm \frac{n\Delta k}{N}, \quad \omega_n = \omega \pm \frac{n\Delta\omega}{N}, \quad n = 1, \dots, N.$$

Z večanjem števila delitev intervala N postaja centralni vrh vedno močnejši, stranski pa šibkejši. A se kljub temu daleč proč od centralnega vrha še vedno pojavljajo vrhovi, enako močni kot centralni vrh. Poglejmo, kako se izraz obnaša v limiti, ko gre N preko vseh meja:

$$\Psi(x, t) = A \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N e^{-i(\omega t + (n/N)\Delta\omega t - kx - (n/N)\Delta kx)}.$$



Slika 33: Grafi od zgoraj navzdol kažejo verjetnostne gostote, ki jih dobimo s superpozicijo dveh ravni valovanj (zgornji graf), šestih valovanj (drugi graf od zgoraj), dvajsetih valovanj (tretji graf), neskončno število valovanj s k iz enakega intervala kot pri prejšnjih primerih (spodnji graf).

V tem primeru lahko vsoto po n prevedemo na integral. Uvedemo zvezno spremenljivko $u = n/N$, $dn = Ndu$, ki zavzame vrednosti med 0 in 1, in namesto vsote dobimo integral:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)} N \int_{-1}^1 e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)u} du \quad (5.11)$$

$$= ANe^{-i(\omega t - kx)} \frac{1}{(-i(\Delta\omega t - \Delta k x))} \left[e^{-i(\Delta\omega t - \Delta k x)} - e^{i(\Delta\omega t - \Delta k x)} \right]. \quad (5.12)$$

Da je rezultat končen v limiti $N \rightarrow \infty$, mora biti konstanta A obratno sorazmerna z N , $A = a/N$. Upoštevamo še enakost

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sin(z)$$

in dobimo

$$\Psi(x, t) = 2a e^{-i(\omega t - kx)} \frac{\sin(\Delta\omega t - \Delta k x)}{(\Delta\omega t - \Delta k x)} \quad (5.13)$$

ter

$$w(x, t) = |\Psi(x, t)|^2 = 4a^2 \frac{\sin^2(\Delta\omega t - \Delta k x)}{(\Delta\omega t - \Delta k x)^2}. \quad (5.14)$$

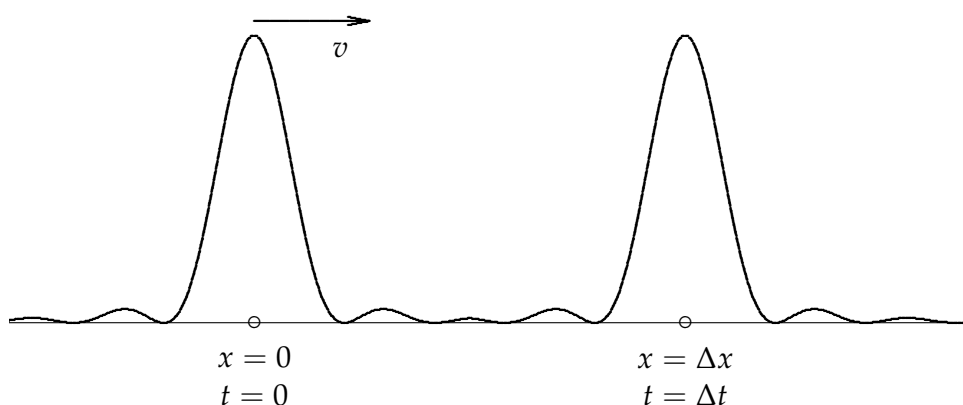
Rezultat je prikazan na spodnjem grafu na sliki 33, in se po obliki le malo razlikuje od grafa nad njim, ki ustreza superpoziciji 20 različnih k in ω .

Uspelo nam je torej ustvariti lokaliziran val, ki veliko bolj ustreza naši predstavi o delcu. Delec smo sestavili iz več ravnih valov z različnimi k , torej različnimi gibalnimi količinami, zato delcu ne moremo pripisati točne gibalne količine. Takšni superpoziciji valov pravimo tudi *valovni paket*. Če želimo izmeriti gibalno količino, ne bomo dobili vedno enake vrednosti, temveč neko vrednost z intervala $[k - \Delta k, k + \Delta k]$. Podobno situacijo sicer srečamo pri vseh eksperimentalnih meritvah, nezanesljivost ali napaka meritve je tu odvisna od natančnosti eksperimentalnih naprav in merilnih pogojev. Z njihovo izboljšavo lahko eksperimentalno nezanesljivost zmanjšamo. V primeru lokaliziranega kvantnega delca pa *načelno ni možno* točno določiti njegove gibalne količine. To je posledica *valovnih lastnosti* delca; tudi valu, ki se približuje obali in udari ob pomol, načelno ne moremo pripisati poljubno natančne gibalne količine. Načelo bomo kvantitativno zapisali v naslednjem poglavju.

Hitrost delca. V prejšnjem razdelku smo opazovali krajevno odvisnost verjetnostne gostote delca ob določenem času, recimo ob $t = 0$. Na sliki 34 je na levi valovni paket prikazan ob času $t = 0$. Verjetnostna gostota ima največjo vrednost tedaj, ko je izraz v imenovalcu enak nič, hkrati pa je isti izraz v argumentu sinusa tudi enak nič. V tem primeru je limita enaka

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{z} = 1, \quad z = \Delta\omega t - \Delta k x.$$

Enako seveda velja za kvadrat izraza. Vrh paketa torej nastopi takrat, ko je izraz v



Slika 34: Leva krivulja ponazarja valovni paket v izhodišču ob času $t = 0$, krivulja na desni pa isti valovni paket ob nekoliko kasnejšem času Δt , ko je prepotoval razdaljo Δx , merjeno od izhodišča.

imenovalcu enak nič. Denimo, da se vrh po času Δt premakne na mesto Δx . Pogoj za vrh je

$$\Delta\omega \Delta t - \Delta k \Delta x = 0.$$

Od tod lahko izračunamo hitrost gibanja vrha:

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}. \quad (5.15)$$

Dobili smo izraz za hitrost vrha paketa, ki jo lahko interpretiramo kot hitrost delca. Zadnji izraz v (5.15) je splošnejši in ustreza *grupni hitrosti* valovanja.

V primeru fotona velja $v = c/\lambda$. Z upoštevanjem $\omega = 2\pi\nu$ in $\lambda = 2\pi/k$ sledi

$$\omega = ck \quad \text{in} \quad v = \frac{d\omega}{dk} = c, \quad (5.16)$$

Rezultat velja v vakuumu, ne velja pa v snovi, v kateri je hitrost odvisna od valovne dolžine, $c = c(\lambda) = c(k)$: tedaj govorimo o *disperziji*, in v tem primeru velja

$$v = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dc(k)}{dk} k + c(k) = -\frac{dc(\lambda)}{d\lambda} \frac{d\lambda}{dk} k + c(\lambda) = -\frac{dc(\lambda)}{d\lambda} \lambda + c(\lambda). \quad (5.17)$$

V primeru valovanja, ki ima disperzijo, vpeljemo dve hitrosti, fazno hitrost c_f , ki povezuje frekvenco in valovno dolžino valovanja, in grupno hitrost c_g , ki ustreza hitrosti, s katero se skozi snov giblje motnja:

$$c_f = v\lambda = \frac{\omega}{k}, \quad c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{dc_f(k)}{dk} k + c_f. \quad (5.18)$$

V primeru delca valovno dolžino in valovni vektor k povežemo z gibalno količino delca (5.1):

$$p = \frac{h}{\lambda} = \frac{hk}{2\pi} = \hbar k, \quad (5.19)$$

pri čemer smo vpeljali reducirano Planckovo konstanto „ $\hbar$ prečna“:

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}, \quad (5.20)$$

ki jo v kvantni fiziki pogosto pišemo namesto h . V primeru fotona povežemo frekvenco svetlobe z energijo

$$W = h\nu = \frac{h\omega}{2\pi} = \hbar\omega. \quad (5.21)$$

Domnevamo, da zveza velja tudi za delec; ni pa še jasno, če W predstavlja polno ali kinetično energijo. Izraza za fazno in grupno hitrost lahko sedaj zapišemo kot

$$c_f = \frac{W}{p} \quad \text{in} \quad c_g = \frac{dW}{dp}. \quad (5.22)$$

V primeru prostega nerelativističnega delca, ki ima le kinetično energijo:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad \text{sledi} \quad c_g = \frac{dW}{dp} = \frac{p}{m} = v \quad \text{in} \quad c_f = \frac{W}{p} = \frac{p}{2m} = \frac{v}{2}. \quad (5.23)$$

Rezultat je smiseln v primeru grupne hitrosti, kar pomeni, da je naša interpretacija delca kot valovnega paketa smiselna. Rezultat velja tudi v primeru, če kinetični energiji prištejemo potencialno energijo, saj potencialna energija ni odvisna od hitrosti.

Poglejmo, kako je s hitrostjo delca, če upoštevamo relativistične izraze za energijo in gibalno količino:

$$c_g = \frac{dW}{dp} = \frac{dW}{dv} \frac{dv}{dp} = \frac{\frac{dW}{dv}}{\frac{dp}{dv}}.$$

Izračunajmo posebej

$$\frac{dW}{dv} = mc^2 \frac{d\gamma}{dv}, \quad \frac{d\gamma}{dv} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-3/2} \left(-\frac{2v}{c^2}\right) = \gamma^3 \frac{v}{c^2} \quad (5.24)$$

in

$$\frac{dp}{dv} = m \frac{d(\gamma v)}{dv} = m \left(v \frac{d\gamma}{dv} + \gamma \right) = m \left(\gamma^3 \frac{v^2}{c^2} + \gamma \right) = m\gamma^3 \left(\frac{v^2}{c^2} + \frac{1}{\gamma^2} \right) = m\gamma^3.$$

Končno

$$\frac{dW}{dp} = \frac{m\gamma^3 v}{m\gamma^3} = v. \quad (5.25)$$

V tem primeru dobimo pričakovan rezultat. Za fazno hitrost valovanja dobimo

$$c_f = \frac{W}{p} = \frac{mc^2 \gamma}{m\gamma v} = \frac{c^2}{v} > c, \quad (5.26)$$

ki je ne moremo povezati s hitrostjo delca.

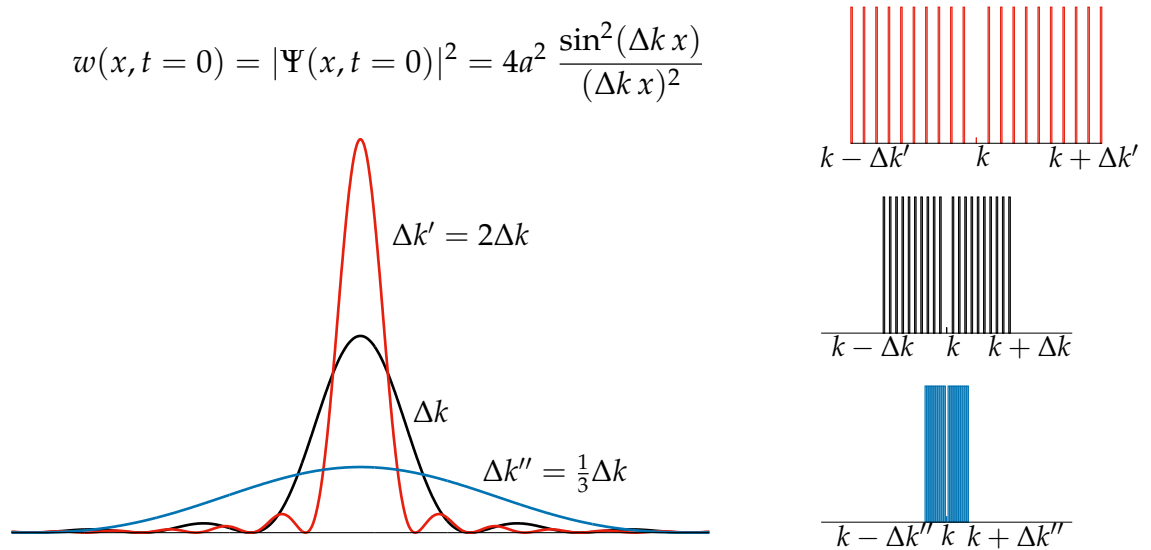
Tako kot lahko povežemo gibalno količino delca z njegovo valovno dolžino oziroma valovnim vektorjem k , lahko *polno* energijo delca povežemo z njegovo (krožno) frekvenco. V nerelativističnem primeru je polna energija enaka vsoti kinetične in potencialne. Potencialna energija je sicer nedoločena do konstante, kar pa ne vpliva na rezultat, saj v opazljivih količinah vedno nastopa le razlika energij.

5.3 Načelo nedoločenosti

Nedoločenost lege v valovnem paketu. V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da valovni paket, ki ustreza delcu, nima točno določene gibalne količine. Nedoločenost gibalne količine smo ocenili s (polovično) širino intervala, s katerega smo jemali k -je:

$$p = \bar{p} \pm \sigma_p, \quad \sigma_p = \hbar \Delta k.$$

Poglejmo si, kako izbira intervala Δk vpliva na obliko verjetnostne gostote. Na sliki 35



Slika 35: Verjetnostne gostote za tri izbire intervala Δk

so prikazane verjetnostne gostote za tri izbire intervala Δk . Vidimo, da je verjetnostna gostota najozkejša pri največji širini intervala Δk in najširša pri najmanjši.

Širino verjetnostne gostote interpretiramo kot nezanesljivost ali nedoločenost, s katero lahko določimo lego delca. Ocenimo jo kar s polovično širino glavnega vrha, tj. razdaljo Δx od sredine do prvega minimuma. Ob času $t = 0$ je vrh v izhodišču, prvi minimum pa se pojavi, ko števec drugič postane nič:

$$\sin \Delta k \Delta x = 0, \quad \Delta k \Delta x = \pi, \quad \Delta x = \frac{\pi}{\Delta k}.$$

Širina je obratno sorazmerna z nedoločenostjo Δk , oziroma nedoločenostjo gibalne količine, $\sigma_p = \hbar \Delta k$. Če namesto Δx pišemo σ_x , enačbo lahko preoblikujemo v

$$\sigma_x = \frac{\pi \hbar}{\sigma_p} \quad \text{ali} \quad \sigma_x \sigma_p = \pi \hbar = \frac{h}{2}.$$

Produkt nedoločenosti je enak Planckovi konstanti, deljeni z 2.

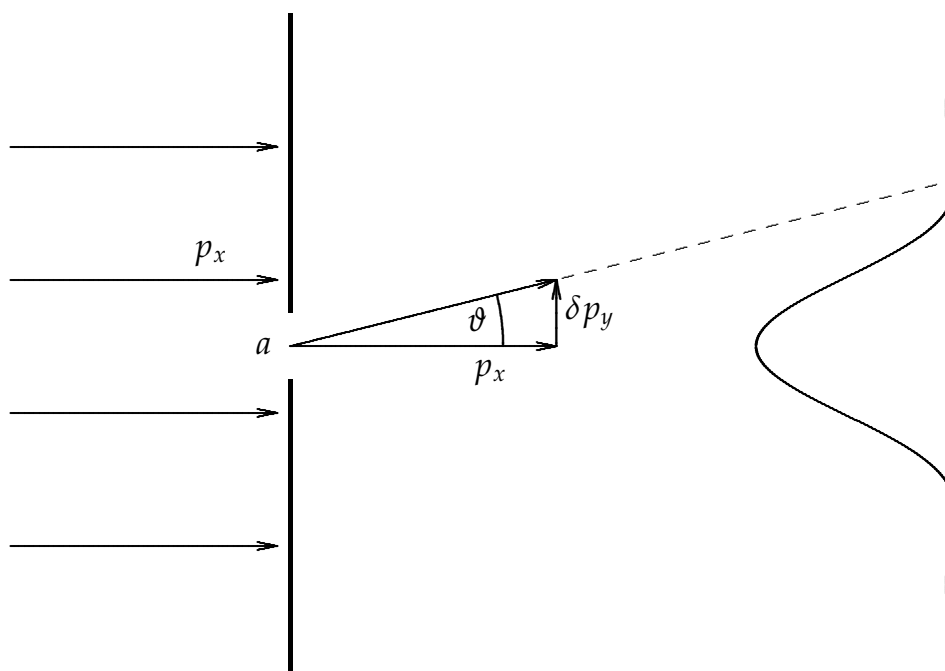
Načelo je leta 1927 formuliral Werner Heisenberg in ima po njemu tudi ime: *Heisenbergovo načelo nedoločenosti*. Heisenberg je ugotovil, da je produkt obeh nedoločenosti

navzdol omejen. Najmanjša možna vrednost produkta je

$$\sigma_x \sigma_p \geq \frac{h}{4\pi} = \frac{\hbar}{2} \quad (5.27)$$

in jo dosežemo takrat, ko ima valovni paket obliko Gaussove funkcije. Če želimo natančno določiti lego delca, ne moremo hkrati poljubno natančno določiti njegove gibalne količine; če želimo imeti delec s čim bolj natančno vrednostjo gibalne količine, pa ne moremo več natančno povedati, kje delec je. Pri poskusu z elektroni, ki se sipljejo na kristalu, s pospeševalno napetostjo precej natančno določimo gibalno količino elektrona, zato pa je njegova lega v curku določena z veliko negotovostjo.

Sipanje delcev na reži. Širok curek elektronov vpada z leve na režo in se na njej uklanja (slika 36). Os x naj bo vodoravna, os y pa navpična. Pred vpadom ima curek le gibalno količino v smeri osi x ; ker je curek dolg in širok, je nedoločenost gibalne količine v smereh x in y zanemarljiva. Širina reže a naj bo primerljiva z de Broglie-



Slika 36: Uklon elektronskega curka na reži.

jevo valovno dolžino elektrona. Po prehodu skozi režo dobimo značilno interferenčno sliko, kakršno poznamo že iz optike. To pomeni, da se po prehodu skozi režo elektroni razpršijo; poleg gibalne količine v smeri x dobijo tudi komponento v smeri osi y . Elektron se z enako verjetnostjo ukloni bodisi navzgor bodisi navzdol, zato je povprečna vrednost gibalne količine v smeri y enaka nič:

$$p_y = 0 \pm \delta p_y.$$

Značilno odstopanje δp_y ocenimo s smerjo, v kateri se pojavi prvi interferenčni minimum. Pogoj za prvi minimum je pri kotu ϑ , kjer je izpolnjen pogoj⁴:

$$\frac{a}{2} \sin \vartheta = \frac{\lambda}{2}.$$

Iz slike sledi za dovolj majhne kote ϑ :

$$\delta p_y = p_x \tan \vartheta \approx p_x \sin \vartheta = p_x \frac{\lambda}{a} = p_x \frac{h}{p_x} \frac{1}{a} = \frac{h}{a}.$$

Manjša ko je širina reže, bolj je razpršen curek valovanja – pravzaprav to poznamo že iz sipanja svetlobe na reži ali oviri. Ugotovitev povežimo z negotovostjo, s katero določimo lego elektrona v curku v smeri y . Preden elektron zadene režo, je lahko kjerkoli na prečnem preseku curka; ko se siplje na reži, pa *vemo*, da je šel skozi režo, in njegovo lego v tistem trenutku poznamo z zanesljivostjo, ki jo ocenimo s polovično širino reže, $\sigma_y = a/2$. V trenutku, ko je šel elektron skozi režo, je njegova nedoločenost lege $\sigma_y = a/2$, nedoločenost gibalne količine pa $\sigma_{p_y} = \delta p_y$. Iz zgornje enačbe sledi ocena

$$\sigma_y \sigma_{p_y} = \frac{h}{2}, \quad (5.28)$$

enaka kot v prejšnjem primeru.

Nedoločenost energije in časa. Nedoločenost lege in gibalne količine smo izpeljali iz valovnega paketa tako, da smo opazovali paket v izbranem trenutku. Opazujmo sedaj obnašanje valovnega paketa v izbrani legi x ; zaradi enostavnosti izberimo $x = 0$. Iz (5.14) potem sledi

$$w(x = 0, t) = a^2 \frac{\sin^2(\Delta\omega t)}{(\Delta\omega t)^2}. \quad (5.29)$$

Oblika paketa je takšna kot na sliki 34, le da je na osi x sedaj čas. Lahko si predstavljamo, da potuje mimo nas val in opazujemo njegovo višino v odvisnosti od časa. Ob času $t = 0$ doseže val največjo vrednost, nato se njegova višina spusti do najnižje vrednosti (nič). Vrednost nič doseže ob času t_0 , ko velja $\sin(\Delta\omega t_0) = 0$. Valovni paket pove porazdelitev *verjetnosti*, kdaj bo delec potoval mimo nas. Največja verjetnost je znotraj intervala $[-t_0, t_0]$. Torej lahko t_0 interpretiramo kot *nedoločenost časa*. Krožna frekvenca je povezana z energijo delca, $W = \hbar\omega$, in ker v valovnem paketu ni le ene same frekvence, temveč več frekvenc, energija delca ni točno določena. Frekvence so enakomerno porazdeljene v intervalu $[\omega - \Delta\omega, \omega + \Delta\omega]$, zato lahko negotovost oziroma *nedoločenost energije* ocenimo z $\sigma_W = \hbar\Delta\omega$. Iz enačbe $\sin(\Delta\omega t_0) = 0$ in $\omega t_0 = \pi$ sledi

$$t_0 \equiv \sigma_t = \frac{\pi}{\Delta\omega} = \frac{\hbar\pi}{\hbar\Delta\omega} = \frac{h}{2\sigma_W} \quad \text{ali} \quad \sigma_t \sigma_W = \frac{h}{2}.$$

⁴Najlažje si pogoj zapomnimo tako, da curke, ki izhajajo s spodnje polovice reže, nadomestimo z enim curkom, ki izhaja iz sredine spodnje polovice reže, curke iz zgornje polovice reže pa s curkom, ki izhaja iz sredine zgornje polovice reže. Curka sta razmaknjena za $a/2$ in od tod hitro sledi zapisani pogoj za oslabitev.

Natančnejša analiza nam da spodnjo mejo produkta:

$$\sigma_t \sigma_W \geq \frac{\hbar}{2} = \frac{h}{4\pi}.$$

Če torej delec potuje mimo nas le kratek čas, energije ne moremo natančno določiti. Ponovno povejmo, da je to posledica dejstva, da delce obravnavamo kot valovanje. Podoben pojav srečamo tudi pri zvoku: če določen ton traja le kratek čas, njegove višine (frekvence) ne moremo točno določiti.

Nedoločenost energije in časa lahko izpeljemo še na drug način. Oglejmo si poskus, pri katerem ravno valovanje z dobro določeno gibalno količino usmerimo na loputo. Loputa naj bo dovolj velika, da niso prisotni interferenčni pojavi, ki smo jih obravnavali v prejšnjem razdelku. Loputo odprimo le za kratek čas δt , tako da loputo zapusti kratek paket valovanja z dolžino $\delta x = v_x \delta t$. Nedoločenost gibalne količine v paketu ocenimo tako kot v prejšnjih dveh primerih z $\delta p_x \approx h/2\delta x$. Zaradi nedoločenosti gibalne količine je nedoločena tudi (kinetična) energija delca v curku. Velja:

$$dW = d\left(\frac{1}{2}mv_x^2\right) = mv_x dv_x = v_x d(mv_x) = v_x dp_x.$$

Za majhne spremembe lahko diferencialne nadomestimo z odstopanji (nedoločenostjo) in zapišemo:

$$\delta W = v_x \delta p_x = v_x \frac{h}{2\delta x} = v_x \frac{h}{2v_x \delta t} = \frac{h}{2\delta t},$$

ali, zapisano z nedoločenostmi:

$$\sigma_W \sigma_t = \frac{h}{2}. \quad (5.30)$$

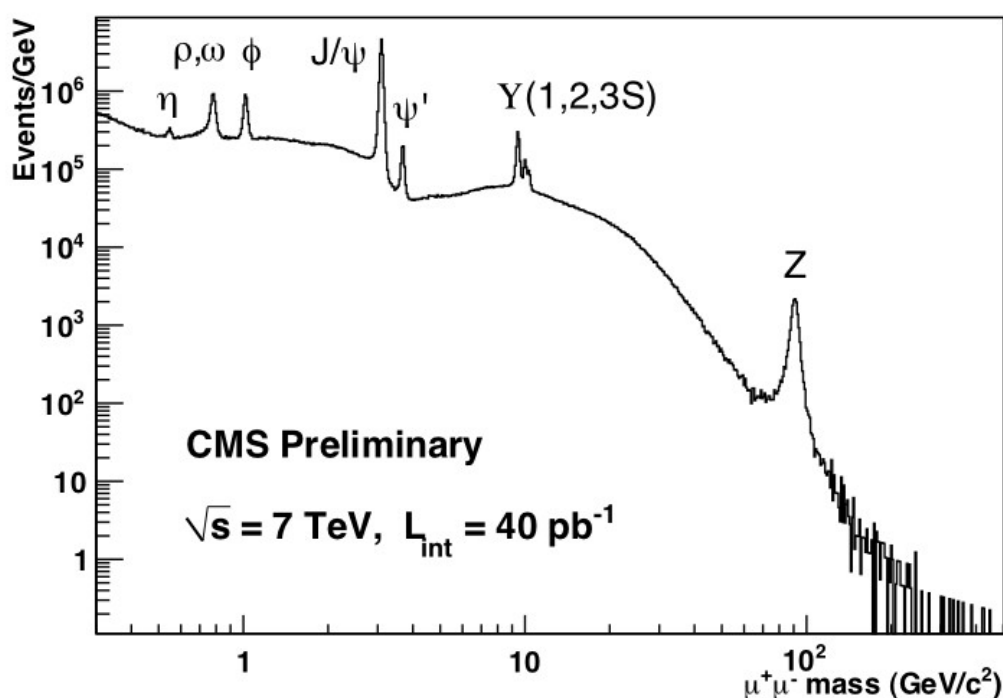
Nedoločenost energije lahko interpretiramo tudi drugače. Delcu dovedemo delo in (mehanska) energija delca se spremeni. Klasično se energija ohranja in jo načelno lahko določimo s poljubno natančnostjo. Kvantnomehansko pa je natančnost odvisna od časa, ki je na voljo za merjenje energije. Če delec hitro spremeni svoje stanje in pri tem odda delo, njegova energija ni točno določena in pri ponovitvah poskusa dobimo različne rezultate za oddano delo. Svetloba, ki jo na primer izseva nihajoči elektron, nima točno določene energije (in s tem tudi ne valovne dolžine), ampak je nedoločenost odvisna od časa trajanja nihanja.

Nedoločenost energije pri razpadih delcev. Načelo, ki smo ga spoznali v prejšnjem razdelku, igra pomembno vlogo pri razpadih delcev. Dva taka razpada poznamo iz prvih testov teorije relativnosti, ko so opazovali podaljšanje časa v curku hitro gibajočih se mionov. Mioni nastajajo pri trkih hitrih kozmičnih protonov z atomi v višjih plasteh atmosfere. Pri tem najprej nastajajo pioni π^- , ki nato razpadajo na mione in nevtrine. V mirovanju pion živi $\tau = 2,6 \cdot 10^{-8}$ s. Pri razpadu večino energije odnese nevtrino, ki ima zelo majhno maso, konsistentno z nič. Odhajajoči nevtrino si lahko predstavljamo kot paket valovanja, ki se giblje s svetlobno hitrostjo. Podobno velja za odhajajoči mion. Ker energije nastalih produktov zaradi končne dolžine paketa načelno ne moremo točno določiti, tudi energije piona ne moremo absolutno natančno

določiti. Energija neobstoje delcev torej ni točno določena. Je pa nedoločenost energije v primeru piona zelo majhna:

$$\delta W = \frac{h}{2\tau} = \frac{hc}{2\tau c} \approx 10^{-9} \text{ eV}. \quad (5.31)$$

Pri novih delcih, ki jih dobimo v velikih pospeševalnikih, so lahko razpadni časi znatno krajši, celo krajši kot 10^{-20} s. Eksperimentalno takšnih časov ni mogoče meriti, saj delci pred razpadom prepotuje razdaljo, krajšo od tisočinke nanometra. V tem primeru merimo energije kratkoživih delcev preko energij delcev, v katere kratkoživi delci razpadajo. Iz porazdelitve energij določimo širino porazdelitve, ki ustreza nedoločenosti energije, iz nedoločenosti energije pa še razpadni čas.



Slika 37: Merjenje mirovne energije kratkoživih delcev v trkalniku protonov v centru CERN. Detektor meri energijo in gibalno količino para miona in antimiona, ki nastaneta pri razpadu delca. Mirovna energija delca je enaka invariantni energiji para in je prikazana na vodoravni osi. Na navpični osi je število dogodkov v intervalu mirovne energije s širino 1 GeV. Pri razpadu bozona Z je največ dogodkov pri energiji 91,2 GeV. Širina porazdelitve (nedoločenost energije) je 2,5 GeV, od koder ocenimo življenjski čas bozona Z z $3 \cdot 10^{-25} \text{ s}^{-1}$.

Posledice načela nedoločenosti. Načelo nedoločenosti je eno temeljnih načel moderne fizike. Načelna nezmožnost hkratne določitve lege in hitrosti (gibalne količine) je v očitnem nasprotju s konceptom delca, kot ga poznamo iz klasične fizike. V okviru klasične fizike je tir delca enolično določen z začetnimi pogoji, ki podajajo začetno lego in začetno hitrost telesa. Če ene ali obeh količin načelno ne moremo točno določiti, pomeni, da tira telesa ne moremo enolično napovedati. Napovemo lahko le *verjetnost*, da

se bo delec gibal po določenem tiru. Obnašanje sistemov je torej *slučajno* — *nedeterministično* — v nasprotju z *determinističnim* obnašanjem klasičnega telesa. Številni fiziki, tudi Einstein, zato načela sprva niso hoteli priznati.

V vsakdanjem makroskopskem svetu načelo pravzaprav sploh ne pride do izraza. Če opazujemo gibanje makroskopskega telesa z maso 1 kg in hitrostjo 1 m/s, njegove lege zagotovo ne moremo določiti natančneje kot je velikost atomskega jedra, $\sigma_x = 10^{-15}$ m. Če od tod določimo nedoločenost hitrosti, dobimo

$$\sigma_v = \frac{\sigma_p}{m} \approx \frac{h}{m\sigma_x} \approx 10^{-18} \text{ m/s}. \quad (5.32)$$

Načelo nedoločenosti torej v vsakdanjem svetu ne igra nikakršne vloge; igra pa jo v svetu mikroskopskih delcev, kjer odločilno določa njihovo obnašanje. Če bi namesto makroskopskega delca vzeli elektron z maso 10^{-30} kg, bi pri našem zgledu dobili nedoločenost hitrosti, večjo od svetlobne hitrosti, kar pomeni, da lege elektrona sploh ne moremo določiti s tolikšno natančnostjo. Domnevajo, da je načelo igralo ključno vlogo v začetnih trenutkih nastanka vesolja.

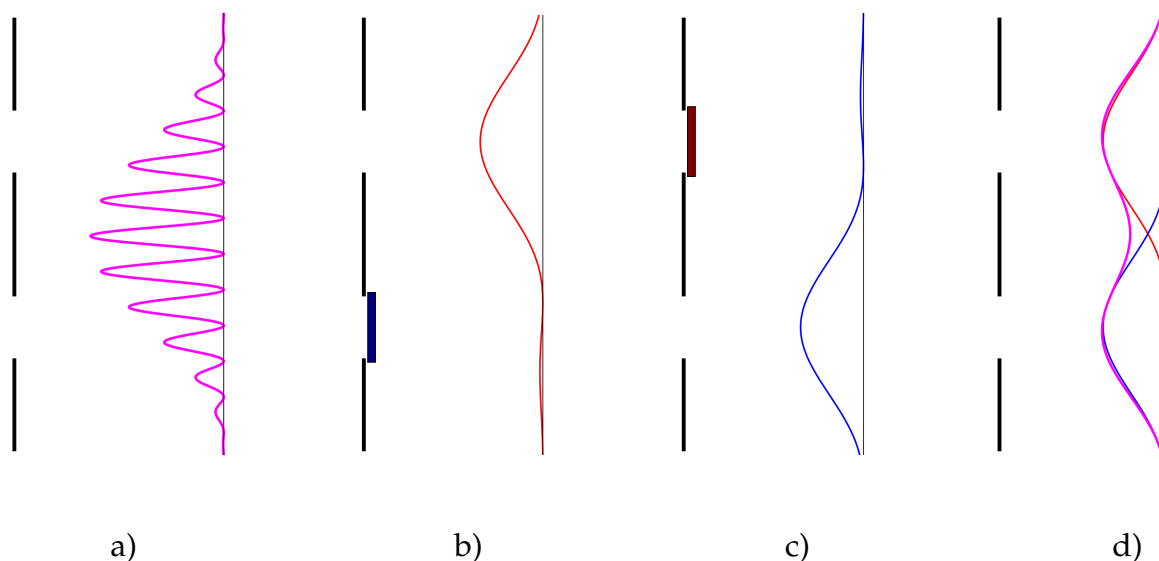
Načelo nedoločenosti ima tudi močno filozofsko implikacijo. Pove, da je narava *nedeterministična*, torej obnašanje sistemov v prihodnosti ni enolično določeno s preteklostjo, v nasprotju z *determinističnim* pogledom, ki pravi, da je obnašanje sistemov enolično določeno s preteklostjo. Seveda kvantna mehanika omogoča napovedovanje obnašanja fizikalnega sistema v prihodnosti in to pogosto celo z veliko večjo natančnostjo kot klasična fizika, a napovedi so vedno le *statistične*, absolutno natančne napovedi *načelno* niso mogoče.

5.4 Interferenčni poskusi z delci

Curek elektronov z določeno gibalno količino in valovno dolžino λ usmerimo na dve reži v razmiku a . Na zaslonu nastane značilna interferenčna slika, kakršno poznamo že iz sipanja svetlobe (glej sliko 38a)). Delna curka, ki izhajata iz rež pod kotom ϑ , se ojačita v smereh, za katere velja $a \sin \vartheta = N\lambda$. Če zapremo eno od rež (sliki 38 b) in c)), interferenca izgine in na zaslonu opazimo značilno sliko uklona na eni reži, tako kot na sliki 36.

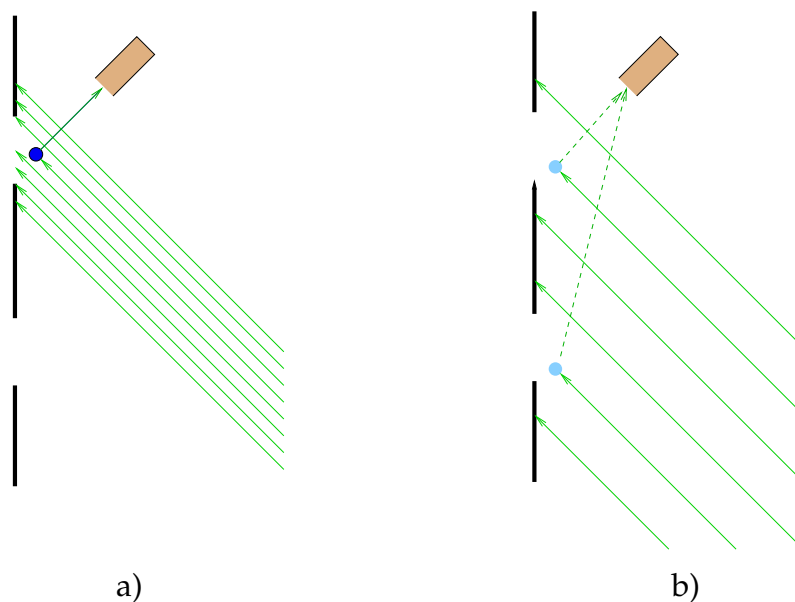
Denimo, da na reži pošljemo en sam elektron in izmerimo njegovo lego na zaslonu. Poskus ponavljamo, tako da vsakič pošljemo le po en elektron. Narišemo porazdelitev elektronov na zaslonu. Kakšna bo ta porazdelitev? Bomo opazili interferenčne maksimume in minimume kot na sliki 38a), ali pa bo porazdelitev podobna porazdelitvi na sliki 38d), ki je vsota porazdelitve elektronov, ki gredo bodisi skozi zgornjo bodisi skozi spodnjo režo? Ali je torej mogoče, da elektron interferira s samim seboj, kar bi pomenilo, da gre skozi obe reži hkrati, ali pa gre izključno le skozi zgornjo ali skozi spodnjo režo? S stališča klasične fizike je edini možni odgovor drugi, saj je elektron nedeljiv delec. Poskus pa potrdi prvo možnost: tudi pri sipanju posameznih elektronov dobimo interferenčno sliko. Elektron lahko interferira sam s seboj.

Kaj se pri tem dogaja z elektronom, bi lahko ugotovili s poskusom, prikazanim na sliki 39. Na reži svetimo s svetlobo in odbito svetlobo (fotone) merimo z detektorjem, ki ga postavimo k eni od rež. Ko se elektron pojavi v reži, se na njem siplje foton, ki ga



Slika 38: Uklon elektronskega curka na dveh režah: verjetnostna gostota (jakost) pri uklonu na dveh režah (a)), na zgornji reži (b)), na spodnji reži (c)), uklonska slika v primeru, če delna curka ne interferirata (d)).

zazna detektor, in tedaj vemo, da je elektron šel skozi izbrano režo. Če se na zaslonu pojavi elektron in hkrati detektor ne zazna fotona, pa pomeni, da je šel foton skozi drugo režo. K drugi reži lahko postavimo še en detektor. Če bi šel elektron skozi obe reži, bi dobili hkrati signal v obeh detektorjih.



Slika 39: Poskus, s katerim skušamo ugotoviti, skozi katero režo je šel elektron: s svetlobo svetimo na režo (z desne) in z detektorjem opazujemo žarek, ki se odbije od elektrona (a)); če svetimo s svetlobo z daljšo valovno dolžino, kot je razmik med režama, ne moremo ugotoviti, ali je svetloba, ki jo je zaznal detektor, prišla od prve ali od druge reže (b)).

S poskusi te vrste je dejansko možno ugotoviti, skozi katero režo gre elektron. Po-

kaže se, da gre vedno le skozi eno režo, bodisi skozi prvo bodisi skozi drugo, nikoli pa ne gre skozi obe hkrati. A na zaslonu ni več interferenčne slike! Dobimo sliko, ki ustreza vsoti porazdelitev v primeru, ko izmenoma odpiramo eno od rež in zapiramo drugo (glej sliko 39d)). Zdi se, da se elektron obnaša drugače, če ga opazujemo, kot če ga ne opazujemo. Vendar poskus, ko elektron opazujemo s sipanjem svetlobe, ni enak poskusu, pri katerem smo dobili interferenčno sliko. Ko se je foton sipal na elektronu, je predal elektronu del svoje gibalne količine in energije in tako spremenil tir elektrona.

Težavo bi lahko rešili, če bi vzeli svetlobo z zelo dolgo valovno dolžino. V tem primeru je gibalna količina fotona lahko poljubno majhna in foton ne zmoti elektrona. Res, na zaslonu se ponovno pojavi interferenčna slika. Vendar pa sedaj ne moremo več ugotoviti, skozi katero režo je šel elektron. Svetloba z veliko valovno dolžino namreč lahko razloči le objekte, ki so večji od valovne dolžine. V našem primeru je kriterij razmerje med valovno dolžino in razmikom med režami a . Pri $\lambda > a$ detektor sicer zazna sipani foton, a ni več mogoče ugotoviti, iz katere reže je prišel sipani foton. Če merimo z dvema detektorjema, zaznata sipani foton oba detektorja. V tem primeru bi lahko elektron šel tudi skozi obe reži hkrati, a tega pojava ne bi mogli razločiti od primera, ko gre elektron skozi eno samo režo.

Ugotovitvam lahko damo matematično obliko. Denimo, da valovna funkcija Ψ_1 opisuje tir elektrona skozi prvi in Ψ_2 tir skozi drugo režo. Pri interferenci seštevamo odmike valovanj, kar velja tudi za delčno valovanje. Skupna valovna funkcija je zato $\Psi_{12} = \Psi_1 + \Psi_2$, verjetnostna gostota na zaslonu pa je enaka kvadratu absolutne vrednosti:

$$w_{12}^{(a)} = |\Psi_{12}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \Psi_1^* \Psi_2 + \Psi_2^* \Psi_1.$$

V primeru, ko je ena od rež zaprta, je verjetnostna gostota enaka

$$w_1^{(b)} = |\Psi_1|^2, \quad \text{oziroma} \quad w_2^{(c)} = |\Psi_2|^2,$$

skupna verjetnostna gostota, prikazana na sliki 39d), pa je

$$w_{12}^{(d)} = w_1^{(b)} + w_2^{(c)} = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$$

in ustreza situaciji, ko s poskusom lahko ugotovimo, po kateri poti je šel delec.

Ugotovitve posplošimo: če lahko delec potuje do detektorja po različnih poteh in nikakor ni mogoče ugotoviti, po kateri poti je šel delec, seštevamo valovne funkcije, ki ustrezajo posameznim potem. Verjetnostna gostota je kvadrat vsote valovnih funkcij. Če je vsaj načelno možno ugotoviti, po kateri poti gre delec, pa se seštevajo verjetnosti za posamezne procese; verjetnostna gostota je vsota kvadratov posameznih valovnih funkcij. Pri tem ni pomembno, ali procese tudi dejansko opazujemo.

Kvantni delci imajo za naše pojme čudno obnašanje, skregano z izkušnjami iz makroskopskega sveta, saj se pri nekaterih procesih obnašajo kot delci, pri drugih pa kot valovanje. A zavedati se moramo, da ostre meje med kvantnimi delci in „klasičnimi“ delci ni. Pri makroskopskih delcih valovne lastnosti nikoli ne pridejo do izraza; kot smo videli že v prejšnjem poglavju, bi imeli takšni delci praktično neskončno majhno valovno dolžino in interferenčnih pojavov nikakor ne bi bilo mogoče realizirati. Je pa dandanes mogoče pripraviti interferenčne poskuse z molekulami, sestavljenimi iz nekaj sto atomov.

6 Modeli atoma

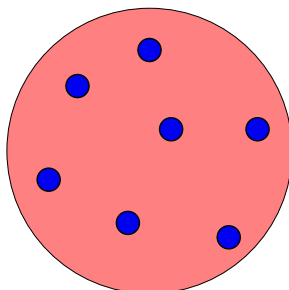
V nasprotju s teorijo relativnosti, ki jo je formuliral Albert Einstein v koncizni matematični obliki in so jo kasneje potrjevala številna opazovanja in poskusi, je bil razvoj teorije, ki opisuje obnašanje delcev v mikroskopskem svetu, veliko počasnejši. Pri razvoju je sodelovalo veliko fizikov, eksperimentalnih in teoretičnih, in teorija je potrebovala nekaj desetletij, da je dosegla končno obliko. V naslednjih poglavjih si bomo ogledali nekatere najpomembnejše etape v razvoju kvantne slike gradnikov mikroskopskega sveta – atomov.

6.1 Thomsonov model

V 19. stoletju so atome imeli za najmanjše, nedeljive delce snovi. Prvi korak k drugačni sliki je naredil J. J. Thomson z odkritjem elektrona leta 1897. V katodni cevi je z napetostjo U pospeševal negativno nabite delce in jih odklanjal v prečnem magnetnem polju z gostoto B . Hitrost delcev dobimo iz ohranitve energije, $\frac{1}{2}mv^2 = eU$, polmer kroženja pa iz Newtonovega zakona, če za silo vzamemo $F = evB$. Iz Newtonovega zakona in energijskega izreka sledi

$$m \frac{v^2}{r} = evB \quad \text{in} \quad \frac{m}{e} = \frac{B^2 r^2}{2U}.$$

Ker so poznali velikost osnovnega naboja, je Thomson z merjenjem polmera tira lahko določil maso delca. Prišel je do presenetljivega odkritja: delec je imel skoraj 2000 krat manjšo maso kot vodik, najlažji atom. Torej delec ni mogel biti ion, temveč neki nov delec; Thomson ga je imenoval *elektron*. Nosilci negativnega naboja so torej elektroni. Ker je atom sestavljen iz pozitivnega in negativnega naboja, pomeni, da atom ni nedeljiv delec temveč je sestavljen iz elektronov in nekakšnega oblaka pozitivnega naboja, ki določa maso atoma. Thomson je svoj model predlagal leta 1904. Kasneje so model imenovali *model slivovega pudinga*. V nevtralnem atomu je toliko elektronov, kolikor jih je potrebno, da nevtralizirajo naboj pozitivnega oblaka (ozadja). Atom lahko seva, tako da elektroni nihajo ali krožijo okoli pozitivne sredice.



Slika 40: Thomsonov model slivovega pudinga

6.2 Rutherfordov model

Thomsonov model sta Hans Geiger in Ernest Marsden zavrpla leta 1909 s poskusom, pri katerem sta sipala delce alfa na atomih zlata. Delci alfa so helijeva jedra in nosijo naboj $+2e_0$. Opazila sta, da večina delcev potuje neovirano skozi atom, zelo majhen del pa se jih zelo močno odkloni (slika 41a)). Njun poskus je leta 1911 interpretiral Ernest Rutherford, tako da je predpostavil, da je v središču atoma zelo majhno, pozitivno nabito jedro, okoli katerega krožijo elektroni (slika 41b)), podobno kot krožijo planete okoli Sonca. Model je zato poimenoval *planetarni model*. Namesto gravitacijske veže elektrone v atomu elektrostatska sila. Če je naboj jedra Ze_0 , Newtonov zakon za kroženje elektrona okoli jedra zapišemo kot

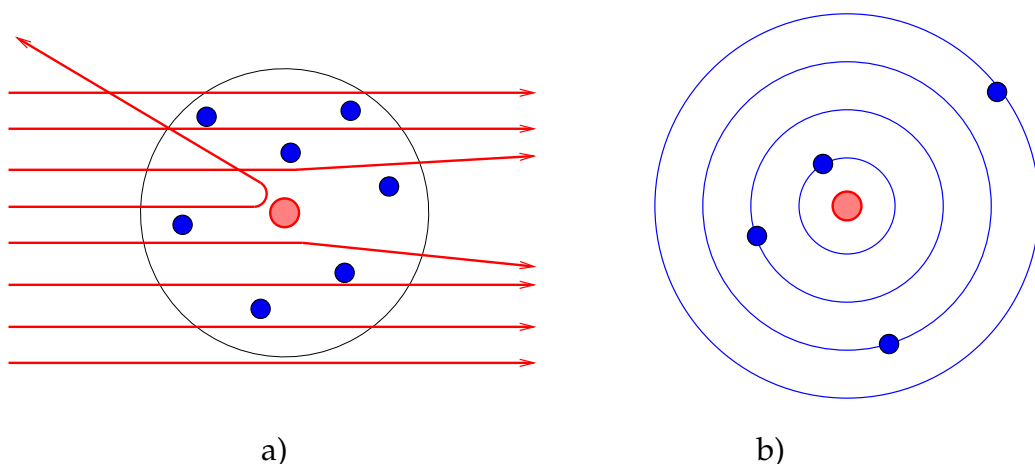
$$ma_r = m \frac{v^2}{r} = \frac{e_0 Ze_0}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Energija elektrona je sestavljena iz kinetične in potencialne:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{e_0 Ze_0}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{Ze_0^2}{8\pi\epsilon_0 r}. \quad (6.1)$$

Energija je negativna, kar pomeni, da je elektron vezan. Absolutna vrednost energije je energija, ki jo moramo atomu dovesti, da dobimo mirujoč prost elektron v veliki oddaljenosti od jedra.

V nasprotju s pravim planetnim sistemom je opisani model *nestabilen*. Elektron je nabit delec in pri kroženju *seva* in s tem izgublja energijo. Vezavna energija se zato zmanjšuje – po absolutni vrednosti povečuje, zato se radij tirnice zmanjšuje in na koncu elektron „pade“ v jedro. Pri tem se frekvenca kroženja spreminja in spekter izsevane svetlobe bi moral biti zvezen. V resnici pa so fiziki že tedaj vedeli, da atom seva le določene diskretne valovne dolžine.



Slika 41: a) Rutherfordovo sipanje, b) planetarni model.

6.3 Bohrov model

Postulati. Niels Bohr je leta 1913 planetarni model dopolnil z dodatnimi predpostavkami – *postulati* – ki pa jih ni posebej utemeljeval. Predpostavil je:

- elektroni krožijo po krožnicah (orbitalah) okoli jedra (tako kot v planetarnem modelu);
- elektroni lahko krožijo le po določenih orbitalah in pri tem ne sevajo; orbitale so določene z zahtevo, da je vrtilna količina elektrona na orbitali enaka celemu večkratniku Planckove konstante, deljene z 2π ;
- elektroni emitirajo ali absorbirajo svetlobo le pri prehodu z ene orbitale na drugo.

Dejstva, da elektron ne seva, Bohr ni pojasnil, pač pa privzel brez dokaza. Tudi pravila za kvantizacijo ni utemeljil; izkazalo se je, da je s to zahtevo dobil pravilne energije orbital, s katerimi je lahko kvantitativno napovedal opažene črtaste spektre atomov.

Energije in velikost orbital v vodikovem atomu, ki ga sestavljata jedro (proton) in elektron, dobimo iz Newtonovega zakona ob upoštevanju dodatnega pogoja za kvantizacijo orbital:

$$m \frac{v^2}{r} = \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad \Gamma = mvr = n \frac{h}{2\pi} = n\hbar, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.2)$$

Prvo enačbo pomnožimo z mr^3 , tako da na desni dobimo ravno kvadrat vrtilne količine

$$m^2 v^2 r^2 = n^2 \hbar^2 = \frac{m e_0^2}{4\pi\epsilon_0} r,$$

od koder izluščimo r :

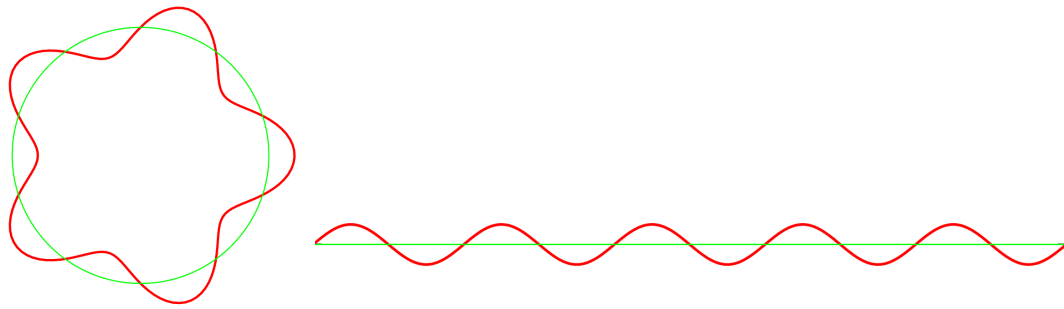
$$r = \frac{4\pi n^2 \hbar^2 \epsilon_0}{m e_0^2} = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e_0^2} n^2 \equiv n^2 r_B, \quad (6.3)$$

pri čemer smo vpeljali *Bohrov radij*

$$r_B = \frac{h^2 \epsilon_0}{\pi m e_0^2} = 0,053 \text{ nm}. \quad (6.4)$$

Energije orbital dobimo kar iz enačbe (6.1), ki velja za kroženje na orbitali pri poljubnem r :

$$E_n = -\frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} \frac{1}{n^2} = E_1 \frac{1}{n^2}, \quad E_1 = -\frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} = -13,6 \text{ eV}. \quad (6.5)$$



Slika 42: Valovanje elektrona v Bohrovem modelu: slika na levi ustreza valovanju elektrona, pri katerem je obseg orbitale enak petkratniku njegove de Brogliejeve valovne dolžine; slika na desni kaže analogno valovanje na struni, pri katerem je dolžina strune enaka petkratniku valovne dolžine.

Bohrov model in de Brogliejeva valovna dolžina. Povejmo, da je z de Brogliejevo domnevo možno interpretirati diskretne orbitale v Bohrovem modelu atoma. Bohrov postulat o kvantizaciji vrtilne količine $\Gamma = n\hbar$ lahko prepišemo v obliko:

$$\Gamma = mvr = \frac{h}{\lambda} r \quad \text{in} \quad \Gamma = n\hbar = \frac{nh}{2\pi}, \quad (6.6)$$

od koder sledi

$$2\pi r = n\lambda. \quad (6.7)$$

Pogoj interpretiramo tako, da so možne le tiste orbitale, pri katerih je obseg orbitale cel večkratnik valovne dolžine, podobno kot so na struni možne valovne dolžine, ki ustrezajo pogoju $n\lambda = l$, pri čemer je l je dolžina strune. (Na struni so sicer možne tudi valovne dolžine, ki ustrezajo pogoju $(n - \frac{1}{2})\lambda = l$, a v tem primeru se nihanje na krožnici ne bi gladko nadaljevalo v naslednji krog.) A je takšna slika napačna; elektroni v atomu se pač ne gibljejo po krožnicah. Pravo sliko orbital nam da le neoporečen kvantno mehanski pristop.

6.4 Vodikov spekter

Valovno dolžino svetlobe, ki jo elektron izseva pri prehodu z orbitale z n na orbitalo z n' , $n' < n$, lahko dobimo iz tretjega postulata. Energija izsevanega fotona je enaka razliki energij orbital:

$$h\nu = \frac{hc}{\lambda} = E_n - E_{n'} = E_1 \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)$$

in

$$\lambda = \frac{hc}{|E_1|} \frac{1}{\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)} = 91,1 \text{ nm} \frac{n^2 n'^2}{n^2 - n'^2}.$$

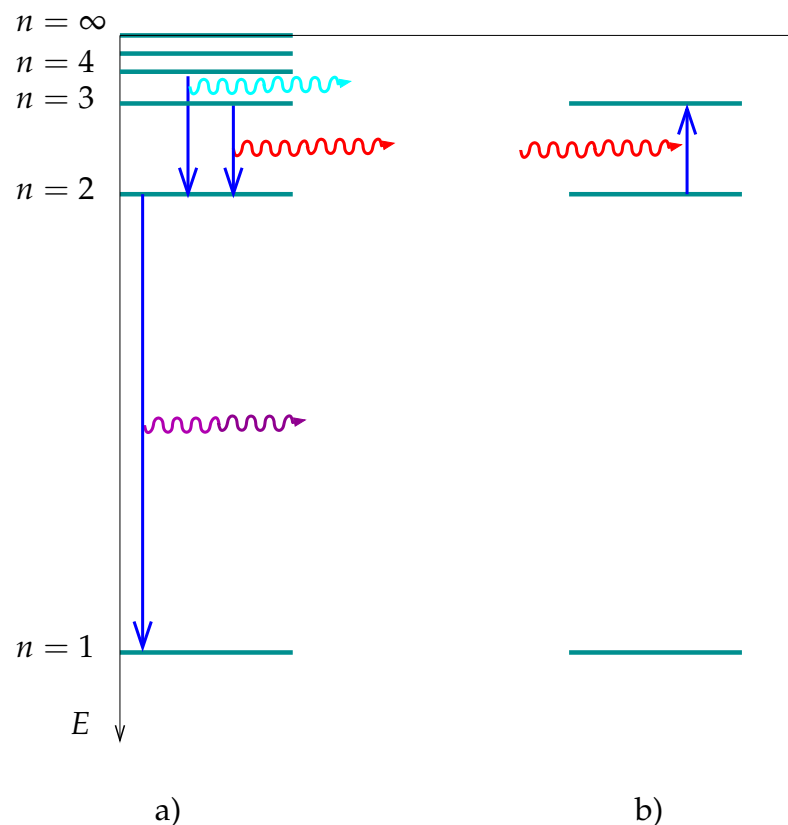
V primeru, ko elektron z absorpcijo fotona preskoči na višjo orbitalo, $n > n'$, mora imeti absorbirani foton tolikšno valovno dolžino, da je prehod mogoč.

Oglejmo si najznačilnejše valovne dolžine prehodov. Ko elektron prehaja na najnižjo orbitalo z $n' = 1$, dobimo za $n = 2, 3, 4 \dots$ valovne dolžine

$$\lambda = 91,1 \text{ nm} \frac{4}{3} = 121,5 \text{ nm}, \quad 91,1 \text{ nm} \frac{9}{8} = 102,5 \text{ nm}, \quad 91,1 \text{ nm} \frac{16}{15} = 97,2 \text{ nm} \dots$$

Valovne dolžine padejo v UV območje; govorimo o *Lymanovi seriji*. Vidna svetlobo dobimo pri *Balmerjevi seriji*, ko elektron prehaja na orbitalo z $n' = 2$. Za $n = 3, 4, 5 \dots$ dobimo valovne dolžine

$$\lambda = 91,1 \text{ nm} \frac{36}{5} = 656 \text{ nm}, \quad 91,1 \text{ nm} \frac{16}{3} = 486 \text{ nm}, \quad 91,1 \text{ nm} \frac{100}{21} = 434 \text{ nm} \dots$$



Slika 43: a) emisija svetlobe v vodikovem atomu, b) absorpcija

6.5 Vzbujanje atomov

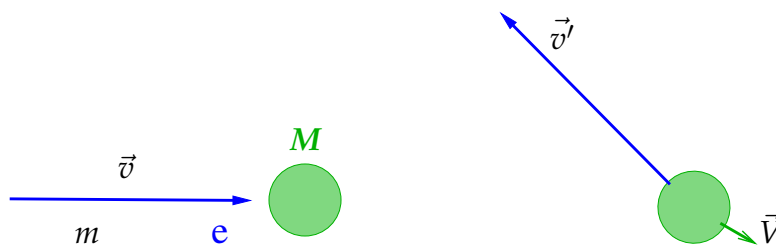
Razen s svetlobo lahko atome vzbuja tudi s trki. Skozi plin spustimo električni tok in pri trkih z elektroni lahko elektroni v atomu preidejo na višjo energijsko orbitalo. Pri vračanju na nižjo orbitalo sevajo svetlobo.

Obravnavajmo trk elektrona in mirujočega atoma. Nemoten atom je v najnižjem možnem energijskem stanju; v primeru vodikovega atoma to pomeni, da je elektron, ki je vezan v atomu, v stanju z najnižjo možno energijo, torej na orbitali z $n = 1$. Trk je *neelastičen*, če je kinetična energija delcev na koncu manjša od začetne. Tedaj se del kinetične energije spremeni v notranjo energijo, ki ima v našem primeru točno določeno interpretacijo: ko elektron, vezan v atomu, preskoči na višjo orbitalo, je sprememba notranje energije atoma enaka razliki energij končne in začetne orbitale. Energije orbital so *kvantizirane* in obstaja najmanjša potrebna energija, ki vzbudi atom iz osnovnega stanja v vzbujeno stanje. V vodikovem atomu je to razlika med orbitalo z $n = 2$ in najnižjo energijsko orbitalo z $n = 1$, in meri $\Delta E = E_2 - E_1 = 13,6 \text{ eV} \left(1 - \frac{1}{4}\right) = 10,2 \text{ eV}$. Če torej elektron, ki trči z atomom, nima dovolj velike energije, atom ne more preiti v vzbujeno stanje in trk je *elastičen*.

Pri elastičnem trku elektron izgubi le malo kinetične energije. Izguba je največja takrat, ko atom prevzame največjo možno kinetično energijo, to pa je v primeru, ko se elektron po trku giblje v smeri, nasprotni od vpadne. Tedaj iz ohranitve skupne gibalne količine sledi $mv = MV - mv'$, če z m označimo maso elektrona, z M maso atoma, z v in v' začetno in končno hitrost elektrona in z V hitrost atoma po trku. Velja $V = m(v + v')/M$. Ker je trk elastičen, je razlika kinetičnih energij elektrona pred trkom in po njem enaka kinetični energiji atoma po trku:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv'^2 = \frac{1}{2}MV^2 = \frac{m}{M} \frac{1}{2}m(v + v')^2 < \frac{4m}{M} \cdot \frac{1}{2}mv^2,$$

saj je $v' < v$. Sprememba začetne kinetične energije je torej sorazmerna z razmerjem mas elektrona in atoma. Ker je $m \ll M$, je zmanjšanje kinetične energije zanemarljivo.



Slika 44: Elastični trk elektrona z atomom

Drugače je pri neelastičnem trku. V mejnem primeru se na koncu atom in sipani elektron gibljeta z enako hitrostjo in iz ohranitve gibalne količine sledi $mv = (M + m)V$, $V = mv/(M + m)$. Energijski zakon zapišemo kot

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(M + m)V^2 + \Delta E,$$

pri čemer je ΔE notranja energija, enaka energijski razliki orbital. Kinetična energija atoma je enaka

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = \frac{m}{M + m} \cdot \frac{1}{2}mv^2.$$

Zopet velja $m \ll M$ in kinetična energija po trku je zanemarljiva v primerjavi s kinetično energijo elektrona pred trkom. Praktično vsa kinetična energija elektrona se pretvori v notranjo energijo atoma. To velja v mejnem primeru; pri večji kinetični energiji elektrona je kinetična energija elektrona približno enaka začetni, zmanjšani za ΔE .

Pojav izkoriščamo za direktno merjenje energijskih razlik med orbitalami v atomu. Pri *Franck-Hertzevem* poskusu so v katodni cevi atomi v plinastem stanju. Elektrone pospešimo z napetostjo U in merimo tok elektronov. Dokler ne dosežemo kritične napetosti, pri kateri je energija elektrona enaka energijski razliki med najnižjima orbitalama v atomu ($e_0 U = E_2 - E_1$), so trki elektronov z atomi elastični in elektroni ne izgubljajo energije. Tok elektronov narašča. Ko dosežemo kritično napetost, se pričnejo elektroni ustavljati. Počasni elektroni ne pridejo do druge elektrode, pač pa jih „posrka“ pozitivno naelektrena žična zanka v katodi. Tok elektronov pade. Ko napetost še naprej povečujemo, se kinetična energija elektronov, ki neelastično trkajo z atomi, povečuje, in tok elektronov narašča. Tok pade vsakič, ko energija elektrona doseže energijsko razliko med enim od višjih vzbujenih stanj atoma in osnovnim stanjem, $e_0 U = E_n - E_1$. Prek merjenja napetosti, pri kateri tok pade, torej lahko posnamemo spekter vzbujenih stanj. Metoda odpove pri stanjih, katerih energije se med seboj le malo razlikujejo. (Glej še eksperimentalno vajo „Franck-Hertzev poskus“.)

6.6 Kvantna slika

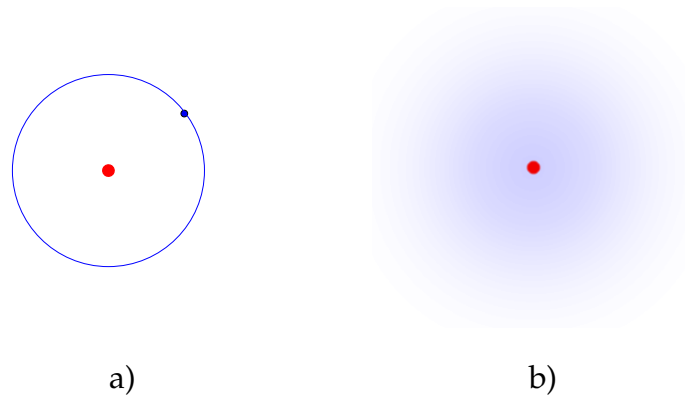
V kvantni sliki delcu ne moremo pripisati tira, saj ni mogoče hkrati točno določiti njegove lege in hitrosti (gibalne količine). Elektron v vodikovem atomu opišemo kot nekakšen valovni paket okoli (skoraj) točkastega protona.⁵ Lahko privzamemo, da je verjetnostna porazdelitev elektrona krogelno simetrična (glej sliko 45). Če postavimo izhodišče koordinatnega sistema v proton, je elektron v povprečju v izhodišču, $\vec{r} = 0$ ($\bar{x} = \bar{y} = \bar{z} = 0$). Lego elektrona določajo oddaljenost od izhodišča, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ in sferična kota ϑ in φ . Elektron se lahko giblje v radialni smeri in v tangentialni smeri; komponento gibalne količine v radialni smeri označimo s p_r . Za gibanje v radialni smeri velja načelo nedoločenosti v obliki

$$\sigma_r \sigma_{p_r} > \frac{\hbar}{2}. \quad (6.8)$$

Gibalna količina elektrona v radialni smeri p_r je v povprečju enaka nič, saj se elektron giblje proč od izhodišča in proti izhodišču, v povprečju pa ostane lokaliziran v izhodišču. Lahko zapišemo $p_r = \bar{p}_r + \sigma_{p_r} = \sigma_{p_r}$. Nedoločenost σ_r ocenimo kar z r in (6.8) zapišemo kot $r p_r > \frac{\hbar}{2}$.

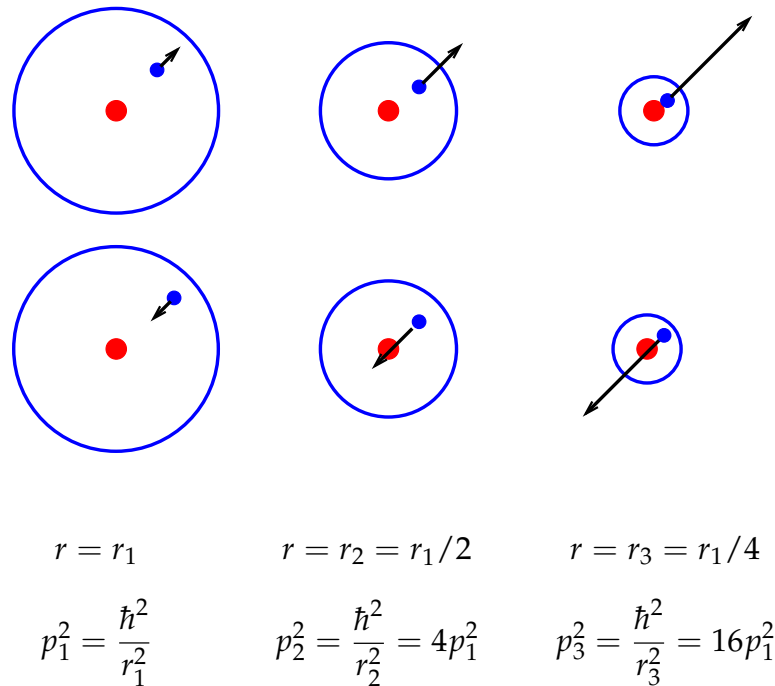
Gibanje v tangentialni smeri predstavlja kroženje. Obravnava je bolj zamotana. Načelo nedoločenosti povezuje nedoločenost smeri (kota) in vrtilne količine. Povejmo le, da ima krogelno simetrična porazdelitev popolnoma nedoločeno smer v prostoru, zato je vrtilna količina točno enaka nič. To ni presenetljivo, saj vrtenja idealno krogelno simetričnega telesa na noben način ne moremo opaziti. (Predstavljajmo si enobarvno, idealno gladko biljardno kroglico.) Elektron v osnovnem stanju torej ne kroži.

⁵O protonu bomo več povedali v zaključku poglavja.



Slika 45: Vodikov atom v a) Bohrovem modelu, b) kvantni sliki.

Denimo, da se elektron približuje jedru vodika. Na razdalji r ima gibalno količino p , ki je navzdol omejena z nedoločenostjo σ_{p_r} . Ko se r in s tem σ_r manjšata, σ_{p_r} narašča, tako kot to zahteva načelo nedoločenosti (6.8). Podobno kot gibalna količina je navzdol omejena tudi kinetična energija elektrona, $W_{\text{kin}} \geq p_r^2/2m$. Ko gremo proti središču, gre nedoločenost r proti nič, nedoločenost p_r pa preko vsake meje. Posledično gre tudi kinetična energija elektrona preko vsake meje. Elektron bi torej moral imeti neskončno veliko kinetično energijo, če bi želel doseči izhodišče. V primeru protona in elektrona se kinetična energija povečuje na račun elektrostatske potencialne energije, ki po velikosti narašča, ko se delca približujeta. V limiti $r \rightarrow 0$ se tudi potencialna energija bliža (negativni) neskončni vrednosti.

Slika 46: Odvisnost kvadrata gibalne količine elektrona od velikosti atoma; velikost ocenimo kar s polmerom sfere, znotraj katere se z največjo verjetnostjo nahaja elektron: $r = \sigma_r$.

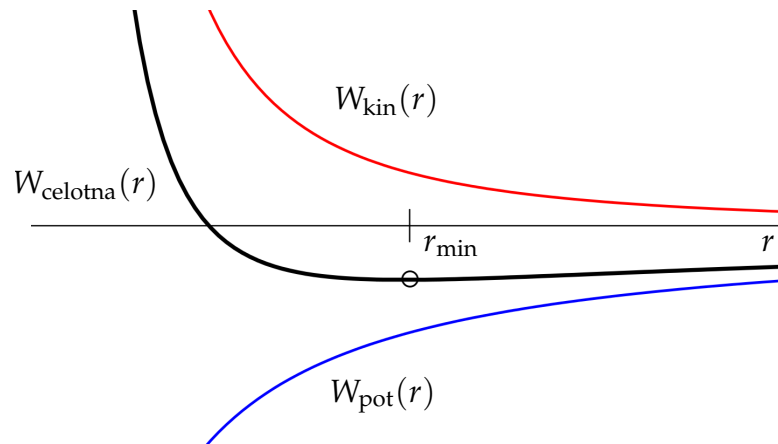
Raziščimo, katera energija prevladuje pri majhnih oddaljenostih. Vrednost produkta nedoločenosti v (6.8) ocenimo kar s $\hbar$:

$$\sigma_r \sigma_{p_r} = r p_r = \hbar, \quad p_r = \frac{\hbar}{r}.$$

Za kinetično energijo elektrona, ki je posledica načela nedoločenosti, potem dobimo

$$W_{\text{kin}} = \frac{p_r^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2mr^2}. \quad (6.9)$$

Ko se razdalja elektrona do protona zmanjšuje, kinetična energija narašča obratno



Slika 47: Kinetična, potencialna in celotna energija elektrona v odvisnosti od razdalje do protona.

sorazmerno s kvadratom razdalje, medtem ko potencialna energija pada le obratno sorazmerno z razdaljo (glej sliko 47). Pri večjih razdaljah prevladuje privlačna potencialna energija in celotna energija se z manjšanjem razdalje zmanjšuje. Sistem se krči. Pri manjših razdaljah pa začne prevladovati odbojna kinetična energija, skupna energija začne naraščati in krčenje se zaustavi. Sistem doseže ravnovesje tam, kjer ima skupna energija minimum:

$$W(r) = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r} = \text{minimum} \quad \text{ali} \quad \frac{dW(r)}{dr} = 0.$$

Dobimo

$$-2 \frac{\hbar^2}{2mr^3} + \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = 0, \quad r_{\text{min}} = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me_0^2} = r_B.$$

Minimum je ravno pri Bohrovem radiju! Torej smo za velikost vodikovega atoma dobili enako oceno kot Bohr. Prav tako je energija enaka kot v Bohrovem modelu:

$$W(r_B) = \frac{\hbar^2}{2mr_B^2} - \frac{e_0^2}{4\pi\epsilon_0 r_B} = -\frac{e_0^2}{8\pi\epsilon_0 r_B} = E_1.$$

Razlog, da je energija točno enaka energiji v Bohrovem modelu, je v izbiri konstante na desni strani načela nedoločenosti; če bi namesto $\hbar$ izbrali raje $\frac{1}{2}\hbar$ ali $2\hbar$, bi dobili

nekoliko drugačne vrednosti za velikost in energijo — v vsakem primeru pa bi dobili smiselno oceno za obe velikosti.

Če ne bi predpostavili krogelno simetrične porazdelitve, bi imel elektron tudi od nič različno vrtilno količino. Kinetična energija bi dobila prispevek zaradi vrtenja in bi bila večja od naše ocene (6.9). Ravnovesna razdalja bi bila pri večji oddaljenosti od izhodišča, skupna energija pa po velikosti manjša. Takšna rešitev bi ustrezala enemu od vzbujenih stanj (v Bohrovem modelu stanju z $n > 1$). To pomeni, da – v nasprotju z Bohrovo sliko – elektron v osnovnem stanju sploh ne kroži.

Pri izpeljavi smo iz klasične fizike prevzeli le izraz za potencialno energijo med nabitima delcema, gibalno enačbo pa smo nadomestili z načelom nedoločenosti, načelom, ki igra ključno vlogo v dinamiki mikroskopskih delcev. Z načelom nedoločenosti lahko pojasnimo, zakaj je snov stabilna; enako razmišljanje kot pri vodikovem atomu velja tudi za druge sisteme delcev, med katerimi vlada privlačna sila.

6.7 Gibanje protona

Opis v težiščnem sistemu protona in elektrona. Pri obravnavi vodikovega atoma smo predpostavljali, da proton miruje v središču koordinatnega sistema. Pri natančnejši obravnavi moramo sistem opisati z gibanjem težišča in gibanjem protona in elektrona v težiščnem sistemu, pri katerem je težišče delcev pri miru. Če masi označimo z m_e in m_p in razdalji do težišča z r_e in r_p , velja $m_e r_p = m_p r_e$. Od tod sledi $r_p = (m_p/m_e)r_e \approx r_B/2000$. V težiščnem sistemu je torej proton praktično v težišču in naša predpostavka, da proton miruje v izhodišču, je bila upravičena. Ocenimo še prispevek protona h kinetični energiji težišča: pri gibanju v težiščnem sistemu sta gibalni količini delcev nasprotno enaki in za njuni velikosti lahko zapišemo $p_p = p_e$. Kinetična energija protona je potem

$$W_p = \frac{p_p^2}{2m_p} = \frac{m_e}{m_p} \frac{p_e^2}{2m_e} \approx \frac{1}{2000} W_e,$$

kar lahko pri naši natančnosti zanemarimo.

Načelo nedoločenosti za lego in gibalno količino protona. Če za elektron velja $r_e p_e = \hbar$, potem za proton velja $r_p p_p = \frac{1}{2000} r_e p_e = \frac{1}{2000} \hbar$. Zdi se, da smo kar krepko prekršili načelo nedoločenosti. Vendar lega protona ni določena le s koordinato r_p v težiščnem sistemu, temveč tudi s koordinato, ki opisuje težišče atoma (sistema protona in elektrona). Enako velja za gibalno količino; gibalni količini v težiščnem sistemu je potrebno prišteti še gibalno količino težišča. Zaradi velike mase protona velja, da tako koordinata težišča kot gibalna količina težišča praktično sovpadata s koordinato in gibalno količino protona. Njun produkt je navzdol omejen z načelom nedoločenosti, kar pomeni, da lege (težišča) atoma in njegove gibalne količine ne moremo hkrati točno določiti. Če govorimo o mirujočem atomu, ne moremo ničesar povedati o njegovi legi; če lego atoma omejimo na majhen prostor, pa atom ne more mirovati.

7 Schrödingerjeva enačba

7.1 Časovno odvisna valovna enačba

Enačba v eni razsežnosti. Do sedaj še nismo nič povedali, kakšno enačbo uboga valovna funkcija delca; zapisali pa smo že rešitev za prosti delec. Za foton – delec, ki se giblje s svetlobno hitrostjo – domnevamo, da je to kar valovna enačba, kot smo jo spoznali pri Matematičnih metodah v fiziki:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi(\vec{r}, t) = \Delta \Psi(\vec{r}, t), \quad (7.1)$$

pri čemer je Δ Laplaceov operator. Če izraz za raven fotonski val, $\Psi = Ae^{-i(\omega t - kx)}$, vstavimo v enačbo, dobimo na levi $(-\omega^2/c^2)\Psi$ in na desni $-k^2\Psi$. Če enačbo pomnožimo s $\hbar = h/2\pi$ in upoštevamo $p = h/\lambda = \hbar k$ in $W = h\nu = \hbar\omega$, dobimo znano zvezo med polno energijo fotona in njegovo gibalno količino:

$$W^2 = c^2 p^2. \quad (7.2)$$

Enačba (7.1) očitno velja le za (proste) fotone, ne pa za delce, ki imajo od nič različno mirovno energijo (maso).

Valovne enačbe za delce pravzaprav ne izpeljujemo, saj gre za povsem novo področje fizike, kjer zakonov v matematični obliki še ne poznamo. Enačbo torej *postuliramo*; preverjamo njene napovedi z izidi eksperimentov, in če so napovedi konsistentne, enačbo proglasimo kot nov *zakon* narave.

Seveda pa je pri iskanju dokončne oblike zakona dovoljeno ugibanje. Pri takšnem ugibanju fiziki povezujejo spoznanja in zakone iz različnih področij fizike in jim skušajo dati novo vsebino.

Pri ugibanju oblike valovne enačbe za delce se omejimo na *nerelativistične delce*. Po analogiji z zvezo (7.2) pričakujemo, da bo enačba odražala zvezo med energijo in gibalno količino delca. Za prost delec velja

$$W = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{p^2}{2m}, \quad (7.3)$$

prav tako poznamo rešitev valovne enačbe, saj smo z njo uspešno opisali sipanje elektronov na kristalu:

$$\Psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}.$$

Pri izpeljavi hitrosti delca smo dobili konsistenten rezultat, če smo za $\hbar\omega$ vzeli kar kinetično energijo. Gibalno količino povežemo z de Brogliejevo valovno dolžino, $p = \hbar k$ in enačbo (7.3) prepisemo z valovnimi količinami:

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (7.4)$$

Na desni je k^2 tako kot v primeru fotona, torej na desni pričakujemo drugi odvod po kraju. Na levi pa ω nastopa v prvi in ne v drugi potenci; prvo potenco dobimo, če izraz za ravno valovanje odvajamo le enkrat po času. Velja

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} Ae^{-i(\omega t - kx)} = -i\omega Ae^{-i(\omega t - kx)},$$

in

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A e^{-i(\omega t - kx)} = (-k^2) A e^{-i(\omega t - kx)}.$$

Če prvi izraz pomnožimo z $i\hbar$ in drugega z $-\hbar^2/2m$, ugotovimo, da prva enačba vodi do izraza na levi strani (7.4), druga pa do izraza na desni. Torej

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t).$$

Če je poleg kinetične prisotna tudi potencialna energija, zapišemo polno energijo kot $E = W_{\text{kin}} + V_{\text{pot}}(x)$. Ker potencialna energija ne vsebuje gibalne količine (oz. hitrosti), potencialni člen dodamo kot faktor, ki le pomnoži valovno funkcijo:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) + V_{\text{pot}}(x) \Psi(x, t). \quad (7.5)$$

Dobili smo *časovno odvisno* Schrödingerjevo enačbo v eni razsežnosti.

Enačba v treh razsežnostih. Posplošitev na tri razsežnosti je enostavna: kvadrat gibalne količine delca zapišemo kot $\vec{p}^2 = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2$, kar pomeni, da moramo drugemu odvodu po koordinati x prišteti še druga odvoda po koordinatah y in z . Dobimo

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] \Psi(\vec{r}, t) + V_{\text{pot}}(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t).$$

Enačbo je leta 1925 postuliral avstrijski fizik Erwin Schrödinger. Enačba je *linearna* in *homogena* in spominja na *difuzijsko* enačbo v matematični fiziki. Razlika je predvsem v izrazu na levi, ki je *kompleksen*⁶.

7.2 Stacionarna Schrödingerjeva enačba.

Ko obravnavamo *stacionarno stanje* v klasični fiziki, zahtevamo, da se količine v poljubni točki prostora s časom ne spreminjajo. Pogoj za temperaturo pri prevajanju toplote po palici na primer zapišemo kot $\partial T(\vec{r}, t) / \partial t = 0$.

V Schrödingerjevi enačbi pa zadeva ni tako preprosta, saj valovna funkcija ni *opazljiva* količina; kar lahko merimo, je *verjetnostna gostota*. Če se omejimo na enorazsežni problem, pogoj za stacionarno stanje zapišemo kot

$$\frac{\partial \Psi^*(x, t) \Psi(x, t)}{\partial t} = 0.$$

Če valovno rešitev zapišemo kot produkt časovno odvisne funkcije in funkcije, odvisne od krajevne koordinate (koordinat), $\Psi(x, t) = e^{-i\omega t} \psi(x)$, ugotovimo

$$\Psi^*(x, t) \Psi(x, t) = e^{i\omega t} e^{-i\omega t} \psi^*(x) \psi(x) = \psi^*(x) \psi(x).$$

⁶S substitucijo $t = i\tau$ enačbo lahko prevedemo v realno enačbo v kompleksnem času, ki je mnogo stabilnejša za numerično računanje od originalne enačbe.

Časovna odvisnost v eksponentu izgine, in časovni odvod gostote je enak nič. Valovno funkcijo stacionarnega stanja torej lahko zapišemo v obliki

$$\Psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \psi(x).$$

Če izraz vstavimo v časovno odvisno enačbo (7.5), dobimo

$$i\hbar \left(-i \frac{E}{\hbar} \right) e^{-iEt/\hbar} \psi(x) = -e^{-iEt/\hbar} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V_{\text{pot}}(x) e^{-iEt/\hbar} \psi(x).$$

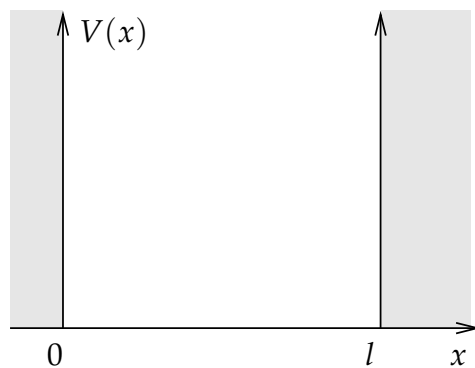
Po okrajšanju ostane

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V_{\text{pot}}(x) \psi(x). \quad (7.6)$$

Dobili smo *stacionarno Schrödingerjevo enačbo*; parameter E pomeni skupno energijo delca (vsoto kinetične in potencialne energije).

7.3 Neskončna ravna jama: stacionarna stanja

Delec naj bo v potencialu oblike



$$V(x) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq x \leq l, \\ \infty & ; \quad x < 0 \quad \text{in} \quad x > l. \end{cases} \quad (7.7)$$

Slika 48: Ravna jama

V področju, kjer je potencial neskončen, bi bila energija delca neskončna. To področje je za delec nedosegljivo, zato je tu valovna funkcija enaka nič. Iščemo rešitev Schrödingerjeve enačbe le znotraj intervala $0 \leq x \leq l$, kjer je potencial enak nič. Velja

$$E\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) \quad \text{ali} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + \frac{2mE}{\hbar^2} \psi(x) = 0. \quad (7.8)$$

Uvedemo

$$\frac{2mE}{\hbar^2} = k^2 \quad \text{ali} \quad E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \quad (7.9)$$

in dobimo znano enačbo, kakršno smo reševali pri nihanju harmoničnega nihala, le da je sedaj neodvisna spremenljivka x in ne t :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + k^2 \psi(x) = 0.$$

Rešitev je

$$\psi(x) = A \sin kx + B \cos kx, \quad (7.10)$$

pri čemer A in B določimo iz robnih pogojev. V točki $x = 0$ zahtevamo, da je funkcija enaka nič, saj se mora zvezno nadaljevati v področje, kjer je potencial neskončen. Od tod takoj sledi, da je $B = 0$. Na drugem krajišču mora biti funkcija prav tako enaka nič, torej

$$A \sin kl = 0.$$

Od tod sicer sledi $A = 0$, vendar nas ta *trivialna* rešitev ne zanima; zanima nas, ali so možne tudi rešitve s končnim A . V tem primeru moramo zahtevati, da je $\sin kl$ enak nič, od koder sledi

$$\sin kl = 0, \quad kl = n\pi \quad \text{ali} \quad k_n = \frac{n\pi}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.11)$$

Dovoljeni so le tisti valovni vektorji k , ki so večkratniki π/l . Če enačbo malo preuredimo in zapišemo $k = 2\pi/\lambda$, dobimo za možne valovne dolžine znani izraz

$$\lambda = \frac{2l}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

ki smo ga spoznali pri obravnavi lastnih frekvenc strune, vpete na obeh krajiščih. Valovno funkcijo, ki je rešitev Schrödingerjeve enačbe v ravni jami, torej lahko zapišemo kot

$$\psi_n(x) = A \sin k_n x = A \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Valovna funkcija mora biti normirana; od tod določimo konstanto A :

$$\int_0^l w(x) dx = A^2 \int_0^l \sin^2 k_n x dx = 1.$$

Izvednotimo

$$\int_0^l \sin^2 k_n x dx = \frac{1}{2} \int_0^l (1 - \cos 2k_n x) dx = \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin 2k_n x}{2k} \right) \Big|_0^l.$$

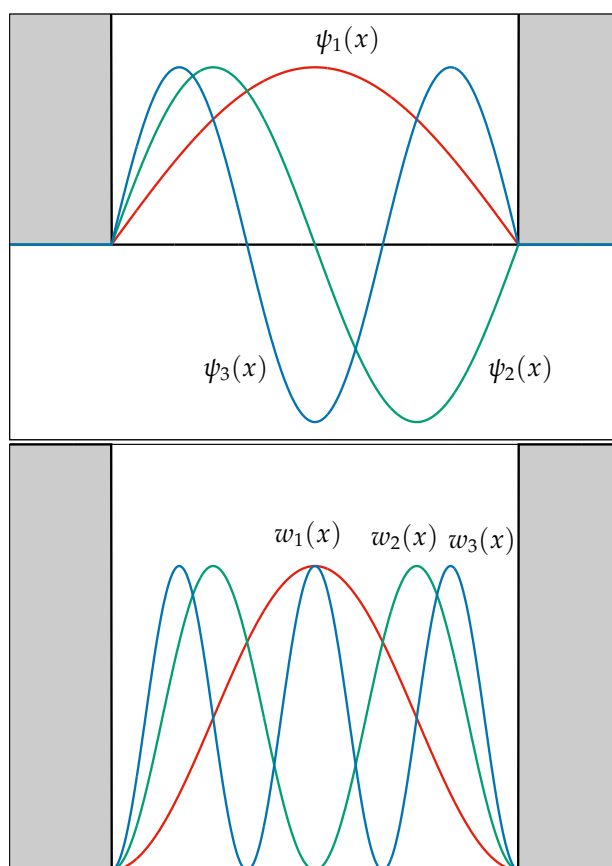
Drugi člen je zaradi pogoja (7.11) enak nič na zgornji meji, oba člena pa sta enaka nič na spodnji. Dobimo

$$A^2 \int_0^l \sin^2 k_n x dx = A^2 \frac{l}{2} = 1, \quad A = \sqrt{\frac{2}{l}}, \quad (7.12)$$

torej neodvisno od n . Izračunajmo še energijo n -tega stanja. Zvezo med energijo in valovnim vektorjem smo zapisali v (7.9):

$$E_n = \frac{k_n^2 \hbar^2}{2m} = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ml^2} = n^2 E_1, \quad E_1 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ml^2}. \quad (7.13)$$

Energija je torej kvantizirana – podobno kot v Bohrovem modelu vodikovega atoma – le da se tu razlike med energijami stanj povečujejo z naraščajočim n , v Bohrovem modelu pa se te razlike zmanjšujejo.



Slika 49: Delec v neskončni ravni jami. Na zgornji sliki so prikazana tri stanja z najnižjimi energijami, na spodnji sliki pa ustrezne verjetnostne gostote $w_n(x) = (\psi_n(x))^2$.

***Ortogonalnost lastnih funkcij.** Za rešitve stacionarne Schrödingerjeve enačbe – *lastne funkcije* –

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{n\pi x}{l} \quad (7.14)$$

velja pomembna lastnost:

$$\int \psi_n(x) \psi_m(x) dx = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}. \quad (7.15)$$

Pravimo, da so lastne funkcije *ortogonalne*. Lastnost velja splošno; dokažimo jo za funkcije (7.14). Produkt razbijemo na vsoto dveh kosinusov:

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(\cos \frac{(n-m)\pi x}{l} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{l} \right) \\ &= \frac{1}{\pi l} \left(\frac{l}{(n-m)} \sin \frac{(n-m)\pi x}{l} - \frac{l}{(n+m)} \sin \frac{(n+m)\pi x}{l} \right) \Big|_0^l; \end{aligned}$$

na spodnji meji sta oba člena enaka nič, na zgornji pa dobimo

$$= \frac{\sin(n-m)\pi}{(n-m)\pi} - \frac{\sin(n+m)\pi}{(n+m)\pi}.$$

Drugi člen je vedno nič, saj je sinus večkratnika π enak nič; pri prvem členu to velja za $n \neq m$, pri $n = m$ pa moramo iz vrednotiti limito, ko gresta števec in imenoalec proti nič; rezultat je 1.

7.4 Pričakovane vrednosti fizikalnih količin

Verjetnost za detekcijo delca na intervalu $[x, x + \Delta x]$ podaja verjetnostna gostota $w(x)$. Povprečna vrednost lege delca je potemtakem

$$\bar{x} = \langle x \rangle = \int_0^l x w(x) dx.$$

V kvantni mehaniki namesto o povprečni vrednosti fizikalne količine govorimo o *pričakovani vrednosti* količine, in jo namesto s črtilico nad količino označimo z $\langle \rangle$. Povprečni odmik od povprečja, σ – v kvantni mehaniki govorimo o *nedoločenosti* količine – pa kot

$$\sigma^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \int_0^l (x^2 - \langle x \rangle^2) w(x) dx = \int_0^l (x - \langle x \rangle)^2 w(x) dx.$$

Za ravno jamo izračunamo

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= A^2 \int_0^l x \sin^2 k_n x dx = A^2 \int_0^l x \frac{1}{2} (1 - \cos 2k_n x) dx \\ &= \frac{2}{l} \left[\frac{x^2}{4} - \frac{\cos 2k_n x}{8k_n^2} - \frac{x \sin 2k_n x}{4k_n} \right]_0^l = \frac{2}{l} \frac{l^2}{4} = \frac{l}{2}. \end{aligned}$$

Upoštevali smo, da je na spodnji meji $\cos 2k_n x = 1$ in $\sin 2k_n x = 0$, na zgornji meji pa $\cos 2k_n l = \cos 2\pi n = 1$ in $\sin 2k_n l = \sin 2\pi n = 0$. Podobno sledi

$$\langle x^2 \rangle = A^2 \int_0^l x^2 \sin^2 k_n x dx = \frac{l^2}{3} - \frac{l^2}{2n^2\pi^2} \quad \text{in} \quad \sigma_x^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \frac{l^2}{12} - \frac{l^2}{2n^2\pi^2}.$$

Kako pa izračunamo hitrost oziroma gibalno količino delca? Pri izpeljavi Schrödingerjeve enačbe smo ugotovili, da je valovni vektor sorazmeren z *odvodom valovne funkcije* po krajevni koordinati; valovni vektor pa je povezan z gibalno količino delca kot $p_x = \hbar k_x$. V tem primeru moramo eksplicitno zapisati odvod po valovni funkciji in ne po verjetnostni gostoti. Preverimo za ravni val ($\Psi(x, t) = Ae^{-i(\omega t - kx)}$):

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int \Psi^*(x, t) \left(\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x, t) dx \\ &= A^* A \frac{\hbar}{i} \int e^{i(\omega t - kx)} \frac{\partial}{\partial x} e^{-i(\omega t - kx)} dx \\ &= \frac{\hbar}{i} (ik) A^* A \int e^{i(\omega t - kx)} e^{-i(\omega t - kx)} dx = \hbar k, \end{aligned}$$

saj je ravni val normiran:

$$\int \Psi^*(x, t) \Psi(x, t) dx = A^* A \int 1 dx = 1.$$

Podobno izračunamo pričakovano vrednost kinetične energije, saj je ta premo sorazmerna s kvadratom gibalne količine:

$$\begin{aligned} \langle W_{\text{kin}} \rangle &= \left\langle \frac{p^2}{2m} \right\rangle = \int \Psi^*(x, t) \left[\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \right)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi(x, t) dx \\ &= \int \Psi^*(x, t) \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] \Psi(x, t) dx. \end{aligned}$$

Za hitrost uporabimo kar zvezo z gibalno količino:

$$\langle v \rangle = \frac{\langle p \rangle}{m} = \frac{\hbar \langle k \rangle}{m}, \quad \langle v^2 \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{m^2} = \frac{\hbar^2 \langle k^2 \rangle}{m^2}.$$

Za izračun polne energije delca potrebujemo časovni odvod valovne funkcije:

$$\langle E \rangle = \int \Psi^*(x, t) \left[-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right] \Psi(x, t) dx = \hbar \omega.$$

Tabela 2: Fizikalne količine in njihovi operatorji v eni razsežnosti.

količina	oznaka	operator	pričakovana vrednost
lega	x	$\hat{x} = x$	$\langle x \rangle = \int \Psi^*(x, t) x \Psi(x, t) dx$
potencial	$U(x)$	$\hat{U} = U(x)$	$\langle U \rangle = \int \Psi^*(x, t) U(x) \Psi(x, t) dx$
gibalna količina	p_x	$\hat{p} = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$	$\langle p \rangle = \frac{\hbar}{i} \int \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) dx$
kinetična energija	$W_{\text{kin}} \equiv T$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$	$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) dx$
polna energija	$W \equiv E$	$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$	$\langle E \rangle = i\hbar \int \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) dx$

Operatorji. Strnimo ugotovitve! V vseh izrazih za pričakovane vrednosti smo valovno funkcijo bodisi množili z x ali neko funkcijo x bodisi odvajali po krajevni ali časovni koordinati. Operaciji, ki izvede transformacijo valovne funkcije, priredimo *operator*. Fizikalne količine in njim prirejene operatorje zberemo v tabeli 2; operatorji so označeni s strešico (^).

Za stacionarna stanja v ravni jami lahko hitro izračunamo, da je pričakovana vrednost koordinate kar $l/2$, pričakovana vrednost gibalne količine nič, vrednost kinetične energije pa enaka polni energiji stanja, saj je potencialna energija znotraj jame po privzetku enaka nič.

7.5 Nestacionarna stanja v neskončni ravni jami

Ker je Schrödingerjeva enačba *linearna*, je poljubna linearna kombinacija rešitev tudi rešitev enačbe. Za zgled vzemimo linearno kombinacijo prvega in drugega stacionarnega stanja:

$$\Psi(x, t) = a\Psi_{n=1}(x, t) + b\Psi_{n=2}(x, t) = ae^{-i\omega_1 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_1 x) + be^{-i\omega_2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_2 x), \quad (7.16)$$

pri čemer velja

$$k_1 = \frac{\pi}{l}, \quad \omega_1 = \frac{E_1}{\hbar} = \frac{\pi^2 \hbar}{2ml^2}, \quad k_2 = \frac{2\pi}{l}, \quad \omega_2 = \frac{E_2}{\hbar} = \frac{4\pi^2 \hbar}{2ml^2},$$

a in b naj bosta realna.

*Pokažimo, da je (7.16) res rešitev časovno odvisne Schrödingerjeve enačbe (7.5). Izračunajmo levo stran enačbe:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = a\hbar\omega_1 e^{-i\omega_1 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_1 x) + b\hbar\omega_2 e^{-i\omega_2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_2 x) \quad (7.17)$$

in še desno za $0 \leq x \leq l$, ko je $W_{\text{pot}}(x) = 0$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) = a \frac{\hbar^2 k_1^2}{2m} e^{-i\omega_1 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_1 x) + b \frac{\hbar^2 k_2^2}{2m} e^{-i\omega_2 t} \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(k_2 x). \quad (7.18)$$

Upoštevamo zvezo (7.4) za ω_1 in k_1 ter ω_2 in k_2 in takoj vidimo, da sta leva stran (7.17) in desna stran (7.18) Schrödingerjeve enačbe enaki.

Energija nestacionarnega stanja. Iz enačbe (7.17) hitro izračunamo energijo nestacionarnega stanja (glej Tabelo 2):

$$\begin{aligned} E &= i\hbar \int_0^l \Psi^*(x, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) dx \\ &= a^2 \hbar\omega_1 \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2(k_1 x) dx + ab \hbar\omega_1 e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} \frac{2}{l} \int_0^l \sin(k_1 x) \sin(k_2 x) dx \\ &\quad + ba \hbar\omega_2 e^{i(\omega_1 - \omega_2)t} \frac{2}{l} \int_0^l \sin(k_2 x) \sin(k_1 x) dx + b^2 \hbar\omega_2 \frac{2}{l} \int_0^l \sin^2(k_2 x) dx. \end{aligned}$$

Zaradi ortogonalnosti (7.15) sta prvi in četrti integral enaka ena, drugi in tretji pa nič. Dobimo

$$E = a^2 \hbar\omega_1 + b^2 \hbar\omega_2 = a^2 E_1 + b^2 E_2. \quad (7.19)$$

Koeficienta a^2 in b^2 interpretiramo kot verjetnosti, da je delec v stanju z $n = 1$ oziroma $n = 2$; energija mešanega stanja je torej enaka uteženemu povprečju energije prvega in drugega stanja.

Verjetnostna gostota nestacionarnega stanja. Verjetnostno gostoto zapišemo kot

$$w(x, t) = a^2 \Psi_1^*(x, t) \Psi_1(x, t) + b^2 \Psi_2^*(x, t) \Psi_2(x, t) + ab [\Psi_1^*(x, t) \Psi_2(x, t) + \Psi_2^*(x, t) \Psi_1(x, t)] .$$

V prvih dveh členih se časovna odvisnost v eksponentu okrajša, v tretjem in četrtem pa ne:

$$w(x, t) = a^2 \frac{2}{l} \sin^2(k_1 x) + b^2 \frac{2}{l} \sin^2(k_2 x) + ab \left[e^{i(\omega_2 - \omega_1)t} + e^{-i(\omega_2 - \omega_1)t} \right] \frac{2}{l} \sin(k_1 x) \sin(k_2 x) .$$

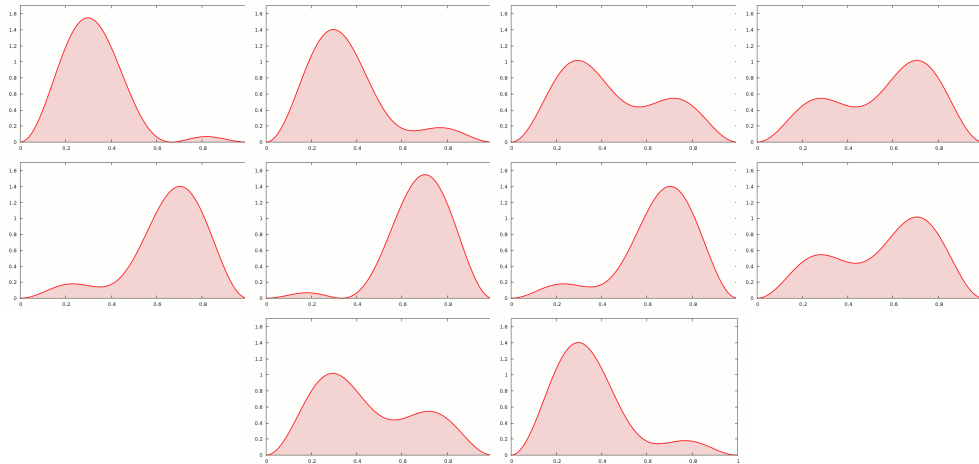
Upoštevamo $e^{iz} + e^{-iz} = 2 \cos(z)$ in dobimo

$$w(x, t) = a^2 \frac{2}{l} \sin^2(k_1 x) + b^2 \frac{2}{l} \sin^2(k_2 x) + 2ab \cos[(\omega_2 - \omega_1)t] \frac{2}{l} \sin(k_1 x) \sin(k_2 x) . \quad (7.20)$$

Verjetnostna gostota je odvisna od časa in sicer harmonično niha s frekvenco, ki je sorazmerna razliki energij obeh stanj:

$$\nu = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi} = \frac{E_2 - E_1}{2\pi\hbar} = \frac{E_2 - E_1}{h} . \quad (7.21)$$

Nihanje je prikazano na zaporedju sličic na sliki 50.



Slika 50: Delec v neskončni ravni jami v nestacionarnem stanju: prikazan je en nihaj, pri katerem je delec na začetku v levi polovici jame, po pol nihaja pride v desno polovico in se na koncu zopet znajde v začetnem stanju (ta sličica ni prikazana, ker je enaka prvi).

Izračunajmo še integral verjetnostne gostote. Zaradi ortogonalnosti je mešani člen enak nič in dobimo

$$\int_0^l w(x, t) dx = a^2 + b^2 = 1 , \quad (7.22)$$

saj je verjetnostna gostota normirana. Verjetnost, da delec najdemo znotraj jame, je 1, in enaka vsoti verjetnosti $P_1 = a^2$, da je delec v prvem stacionarnem stanju, in verjetnosti $P_2 = b^2$, da je delec v drugem stanju.

Za pričakovano vrednost lege delca dobimo

$$\langle x \rangle = \int_0^l x w(x, t) dx = \frac{1}{2}l + 2abA_{12} \cos(\omega_2 - \omega_1)t, \quad (7.23)$$

pri čemer smo vpeljali koeficient A_{12} , odvisen le od valovnih funkcij prvega in drugega stanja:

$$A_{12} = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin(k_1 x) \sin(k_2 x) dx = -\frac{8l}{9\pi^2}. \quad (7.24)$$

Govorimo o matričnem elementu za prehod delca iz stanja $n = 2$ v stanje $n = 1$.

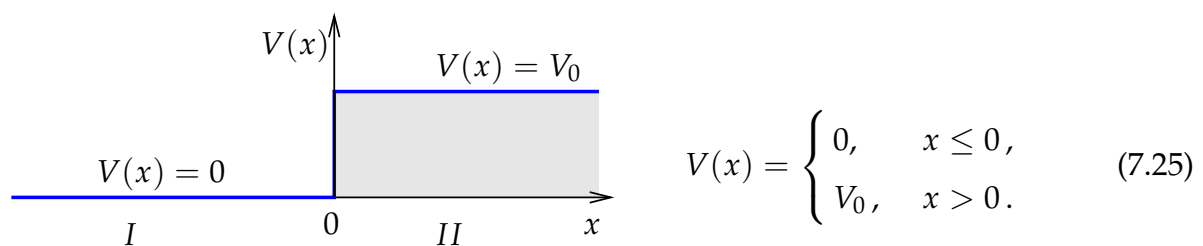
Pričakovana vrednost lege delca se s časom spreminja, torej delec seva (če je seveda nabit). V stacionarnem stanju pa je pričakovana vrednost lege konstantna in ne seva. Na preprostem modelu smo torej „upravičili“ zadnji Bohrov postulat: delec seva le v primeru, ko prehaja iz enega stacionarnega stanja v drugo; energija izsevanega fotona, $h\nu$, je enaka razliki energij obeh stacionarnih stanj.

Prehod iz vzbujenega v osnovno stanje razložimo z naslednjim mehanizmom: delec v vzbujenem stanju dobi zaradi interakcije z okolico primes drugih stanj. Stanje ni stacionarno in delec seva energijo. Energija delca se s časom zmanjšuje, povečuje pa primes osnovnega stanja (koeficienta a v našem primeru). Na koncu vse komponente višjih vzbujenih stanj izzvenijo in delec ostane v (stacionarnem) osnovnem stanju.

Kot bomo videli kasneje, se lahko zgodi, da neposreden prehod v osnovno stanje ni možen. Lahko pa je možen prehod v eno od drugih stacionarnih stanj, ki imajo energijo manjšo od energije začetnega stanja. Če bi pri našem zgledu namesto stanja $n = 2$ vzeli stanje $n = 3$, prehod ne bi bil mogoč, saj bi bil koeficient A_{13} v izrazu za $\langle x \rangle$ (glej (7.23)) enak nič in delec ne bi seval. O tem se lahko hitro prepričamo, če zapišemo integral (7.24) tako da namesto stanja $n = 2$ vstavimo stanje $n = 3$ in upoštevamo simetrijo valovnih funkcij glede na zrcaljenje prek izhodišča. Možen pa bi bil prehod iz stanja $n = 3$ v stanje $n = 2$.

7.6 Potencialni skok

V naslednjem zgledu obravnavamo prost delec, ki pride v področje, kjer je potencial različen od nič:



Slika 51: Potencialni skok

V področju $x \leq 0$ ima stacionarna Schrödingerjeva enačba obliko

$$E\psi_I(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_I(x), \quad \text{ozziroma} \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_I(x) + k^2 \psi_I(x) = 0, \quad k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}.$$

Rešitev lahko zapišemo bodisi s sinusi ali kosinusi (kot smo to naredili v primeru neskončne jame) ali z eksponentno funkcijo z imaginarnim eksponentom. Ker nas v našem primeru zanima rešitev s potujočim valovanjem, izberemo drugo možnost:

$$\psi_I(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}.$$

Smiselno je upoštevati oba člena; prvi predstavlja potujoče valovanje, ki potuje v smeri osi x , drugi člen pa potujoče valovanje v nasprotni smeri. Drugi člen torej opiše odboj od meje med področjema, kjer je prišlo do spremembe potenciala.

V področju $x > 0$ ima stacionarna Schrödingerjeva enačba obliko

$$E\psi_{II}(x) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{II}(x) + V_0\psi_{II}(x), \quad (7.26)$$

oziroma

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_{II}(x) + k'^2 \psi_{II}(x) = 0, \quad k'^2 = \frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}. \quad (7.27)$$

V tem primeru je smiselno upoštevati le rešitev, ki predstavlja val, potujoč v smeri osi x :

$$\psi_{II}(x) = Ce^{ik'x}.$$

Iščemo koeficiente A , B in C , energija E in s tem oba valovna vektorja k in k' pa so podatki. (E je lahko napetost, s katero pospešujemo elektrone, pomnožena z osnovnim nabojem.) Enačbe za koeficiente dobimo pri $x = 0$ iz zahteve, da je tam valovna funkcija zvezna:

$$\psi_I(x=0) = \psi_{II}(x=0), \quad \text{sledi} \quad A + B = C$$

in zvezno odvedljiva:

$$\left. \frac{\partial \psi_I(x)}{\partial x} \right|_{x=0} = \left. \frac{\partial \psi_{II}(x)}{\partial x} \right|_{x=0}, \quad \text{sledi} \quad ikA - ikB = ik'C.$$

Dobljeni sistem:

$$A + B - C = 0, \quad A - B - \frac{k'}{k} C = 0.$$

ima tri neznanke, ki ustrezajo koeficientom A , B in C ter dve enačbi. Rešitev je enoparametrična družina; to pomeni, da eno od neznank interpretiramo kot prost parameter in drugi neznanki izrazimo s tem parametrom. V našem primeru je smiselno predpisati vrednost koeficienta A . Kot bomo pokazali v naslednjem razdelku, je vrednost A povezana z jakostjo vpadnega toka. Koeficienta B in C potem izrazimo z A kot

$$C = \frac{2k}{k+k'} A, \quad B = \frac{k-k'}{k+k'} A. \quad (7.28)$$

Gibajočemu se delcu pripišemo *gostoto verjetnostnega toka* po analogiji s gostoto snovnega toka, $j_m = \rho v$, kjer je ρ gostota snovi in v hitrost gibanja snovi (vse v eni razsežnosti). V kvantnem primeru gostoto nadomestimo z verjetnostno gostoto:

$$j_w(x) = vw(x) = \frac{p}{m} w(x) = \frac{\hbar k}{m} w(x) = |A|^2 \frac{\hbar k}{m}, \quad (7.29)$$

pri čemer smo hitrost delca nadomestili z valovnim vektorjem in maso. Enota za gostoto verjetnostnega toka v eni razsežnosti je kar s^{-1} . Gostoto verjetnostnega toka v eni razsežnosti torej interpretiramo kot verjetnost, da gre delec v časovni enoti mimo opazovalca. V primeru curka elektronov lahko gostoto povežemo kar z velikostjo gostote električnega toka:

$$j_{\text{el}} = \frac{I}{S} = \frac{Ne_0|A|^2v}{S},$$

pri čemer je N število elektronov v curku⁷, S pa prečni presek curka. Ker nas N in S pogosto ne zanimata, namesto A vpeljemo $A' = A\sqrt{N/S}$, tako da ima zveza med j_{el} in j_w preprostejšo obliko, $j_{\text{el}} = e_0j_w = e_0A'^2v$.

* **Operator gostote verjetnostnega toka.** V konsistentni obravnavi vpeljemo operator gostote verjetnostnega toka in računamo pričakovano vrednost operatorja. V izrazu (7.29) gibalno količino nadomestimo z operatorjem $(\hbar/i)\partial/\partial x$, ki deluje na ψ^* in ψ v izrazu za verjetnostno gostoto. Tok ima tedaj obliko

$$j_w(x) = \frac{\hbar}{2mi} \left[\psi^*(x) \frac{\partial \psi(x)}{\partial x} - \psi(x) \frac{\partial \psi^*(x)}{\partial x} \right]. \quad (7.30)$$

Z negativnim predznakom pri drugem členu zagotovimo, da je izraz realen ($j_w(x)^* = j_w(x)$).

V primeru potencialnega skoka lahko izračunamo gostoto verjetnostnega toka na obeh straneh skoka. Za $x > 0$ velja

$$j_w^{II} = \frac{\hbar}{2mi} \left[Ce^{-ik'x}(ik')Ce^{ik'x} - Ce^{ik'x}(-ik')Ce^{-ik'x} \right] = \frac{\hbar}{2mi} C^2 2ik' = C^2 \frac{\hbar}{m} k',$$

za $x < 0$ pa

$$\begin{aligned} j_w^I &= \frac{\hbar}{2mi} \left[(Ae^{-ikx} + Be^{ikx})ik(Ae^{ikx} - Be^{-ikx}) - (Ae^{ikx} + Be^{-ikx})(-ik)(Ae^{-ikx} - Be^{ikx}) \right] \\ &= (A^2 - B^2) \frac{\hbar}{m} k. \end{aligned} \quad (7.31)$$

Z izračunanimi koeficienti lahko hitro preverimo, da se gostota verjetnostnega toka ob prehodu čez skok ohranja: $j_w^I = j_w^{II}$.

Rezultat (7.31) lahko interpretiramo kot razliko med vpadnim in odbitim tokom

$$j_{\text{vpadni}} = A^2 \frac{\hbar}{m} k, \quad j_{\text{odbiti}} = B^2 \frac{\hbar}{m} k$$

in vpeljemo *odbojnost (reflektivnost)* kot razmerje

$$R = \frac{j_{\text{odbiti}}}{j_{\text{vpadni}}} = \frac{B^2}{A^2} = \frac{(k - k')^2}{(k + k')^2}.$$

⁷Predpostavljamo, da ima curek končno dolžino, a tako veliko, da je nedoločnost gibalne količine zanemarljiva.

Prav tako vpeljemo *prepustnost* (*tranzitivnost*) kot razmerje med prepuščenim tokom ($j_{\text{prep.}} \equiv j_w^{II}$) in vpadnim tokom:

$$T = \frac{j_{\text{prep.}}}{j_{\text{vpadni}}} = \frac{C^2 k'}{A^2 k} = \frac{4kk'}{(k + k')^2}.$$

Zlahka se prepričamo, da velja $T + R = 1$.

7.7 Delec v klasično prepovedanem območju

Pri obravnavi v prejšnjem poglavju smo po tistem predpostavljali, da je energija delca E večja od potencialne energije V_0 na skoku. Kaj pa se zgodi v primeru, ko je $E < V_0$? V tem primeru bi imel delec *negativno* kinetično energijo, kar pa klasično ni mogoče. Področje $E < V_0$ je za klasični delec nedosegljivo (prepovedano).

V kvantni mehaniki pa takšna možnost obstaja. Pomeni, da je v prepovedanem območju vrednost k'^2 (glej (7.27)) negativna in je k' *imaginaren*. Namesto k' vpeljemo realen parameter

$$\kappa = ik' = \pm i \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}} = \mp \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

in rešitev v področju $x > 0$ ima splošno obliko

$$\psi_{II}(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}.$$

Drugi člen gre za $x \rightarrow \infty$ preko vseh meja, kar seveda ni smiselno, zato postavimo $D = 0$. Iz pogoja za zveznost in zvezno odvedljivost pri $x = 0$ sledi podoben sistem enačb za koeficiente kot v prejšnjem razdelku:

$$A + B - C = 0, \quad A - B - \frac{i\kappa}{k} C = 0,$$

z rešitvama

$$C = \frac{2k}{k + i\kappa} A, \quad B = \frac{k - i\kappa}{k + i\kappa} A. \quad (7.32)$$

Rezultat postane preglednejši, če izrazimo koeficienta A in B s koeficientom C :

$$A = \frac{k + i\kappa}{2k} C, \quad B = \frac{k - i\kappa}{2k} C. \quad (7.33)$$

Od tod sledi

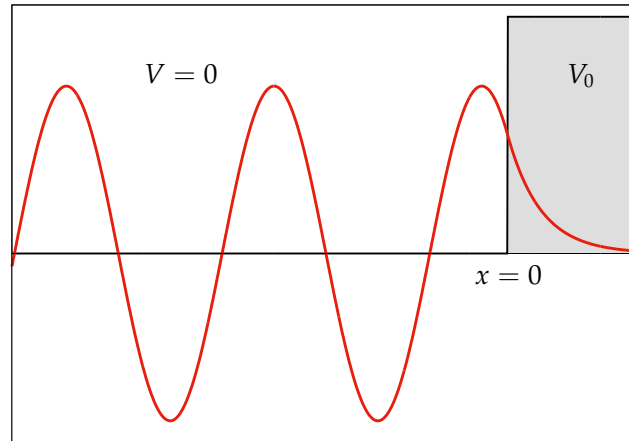
$$B^* B = \frac{(k + i\kappa)(k - i\kappa)}{4k^2} C^* C = A^* A,$$

kar pomeni, da se ves tok vpadnih delcev odbije. Delec prodre v klasično prepovedano območje, vendar verjetnost, da ga najdemo na oddaljenosti x od skoka, eksponentno pojema: $w(x) = C^* C e^{-2\kappa x}$, $x > 0$.

V področju $x < 0$ dobimo *stoječe* valovanje:

$$\begin{aligned}\psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx} = \frac{C}{2k} \left(k(e^{ikx} + e^{-ikx}) + i\kappa(e^{ikx} - e^{-ikx}) \right) \\ &= C \left(\cos kx - \frac{\kappa}{k} \sin kx \right).\end{aligned}$$

V primeru zelo visokega potencialnega skoka, $\kappa \gg k$, prevlada člen s sinusom, kar pomeni, da se valovna funkcija na meji približuje nič; prav tako postane nič valovna funkcija v prepovedanem območju.



Slika 52: Valovna funkcija delca pri prehodu v klasično prepovedano območje.

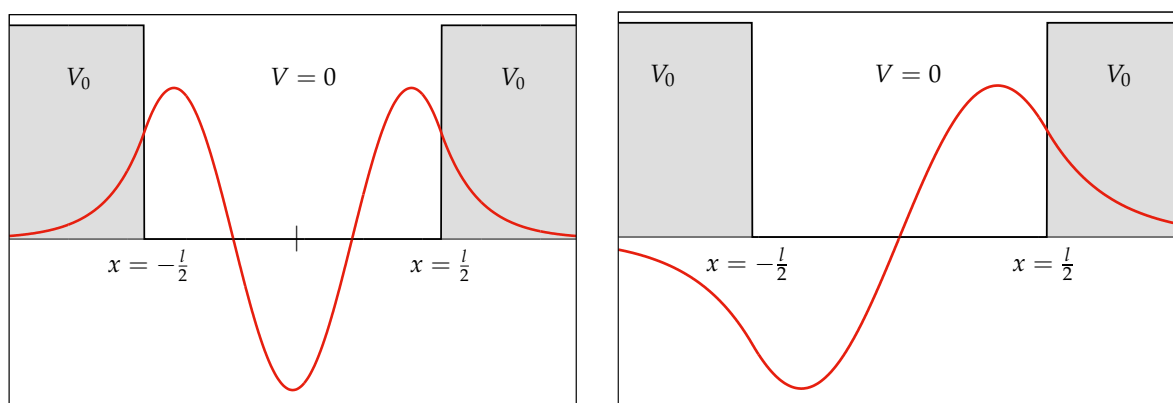
7.8 Valovna funkcija delca v končni ravni jami

Denimo, da postavimo v področju $x < 0$ še en potencialni skok z enako višino. Če ga postavimo na primerno razdaljo, dobimo enako situacijo kot na desni: delec lahko prodre v prepovedano območje, med prepovedanima območjema pa dobimo stoječi val. Rešitev interpretiramo kot valovno funkcijo delca v končni potencialni jami.

Pri takšni konstrukciji smo iskali širino jame, pri kateri postane valovna funkcija na levi enaka zrcalni sliki tiste na desni. Običajno pa je širina jame predpisana in iščemo energijo, pri kateri se valovna funkcija v jami zvezno in zvezno odvedljivo nadaljuje v eksponentni funkciji v levem in desnem prepovedanem območju. Račun pa ni več tako enostaven, kot je bil v primeru neskončne jame.

V tem primeru je smiselno postaviti izhodišče na sredino jame, tako da jama sega od $x = -\frac{1}{2}l$ do $x = \frac{1}{2}l$ (glej sliko 53). Valovne funkcije so simetrične glede na zrcaljenje okoli $x = 0$ (za $n = 1, 3, 5, \dots$), ali antisimetrične ($n = 2, 4, 6, \dots$). Zato zadošča, da zapišemo robni pogoj le na enem krajišču, recimo pri $x = \frac{1}{2}l$. Znotraj jame zapišemo nastavek za simetrične valovne funkcije v obliki $\psi_I(x) = A \cos kx$, za $x > \frac{1}{2}l$ pa kot $\psi_{II} = Ce^{-\kappa x}$. (V primeru antisimetričnih valovnih funkcij namesto $\cos kx$ vzamemo $\sin kx$.) Tu je $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ in $\kappa = \sqrt{2m(V_0 - E)}/\hbar$. Energije E še ne poznamo in jo določimo iz robnega pogoja. Pri $x = \frac{1}{2}l$ je funkcija zvezna in zvezno odvedljiva:

$$A \cos(kl/2) = Ce^{-\kappa l/2}, \quad -kA \sin(kl/2) = -\kappa Ce^{-\kappa l/2}.$$

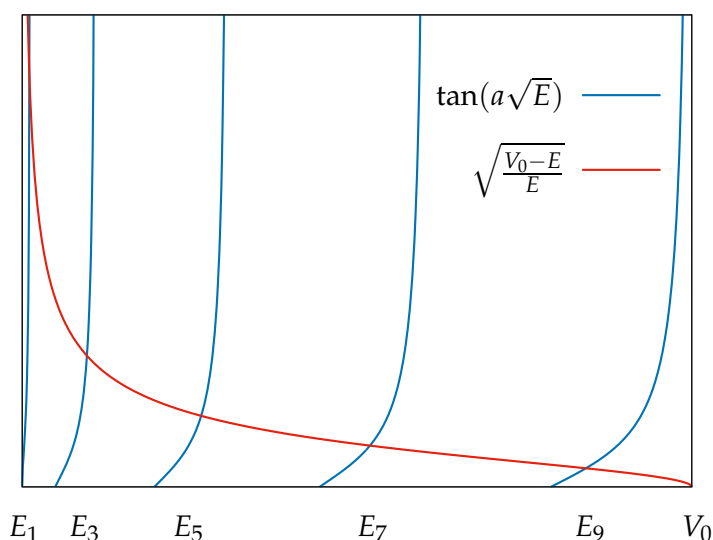


Slika 53: Valovna funkcija delca v končni potencialni jami v tretjem in drugem lastnem stanju (Glej rešitve za vzbujeno stanje v neskončni jami na sliki 49.)

Če drugo enačbo delimo s prvo, dobimo

$$k \tan(kl/2) = \kappa, \quad \text{oziroma} \quad \sqrt{2mE} \tan\left(\frac{\sqrt{2mE}l}{2\hbar}\right) = \sqrt{2m(V_0 - E)}.$$

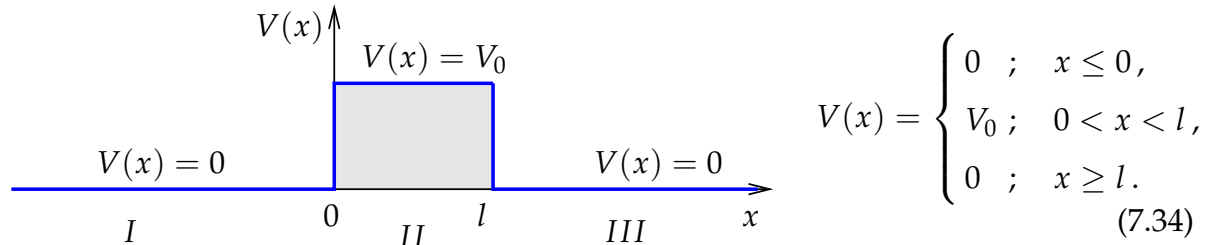
Dobili smo *transcendentno* enačbo za E , ki jo lahko rešimo grafično ali numerično. Ker funkcija tangens ni bijektivna, dobimo več rešitev; smiselne rešitve so omejene s pogojem $E < V_0$.



Slika 54: Grafična rešitev transcendentne enačbe $\tan(a\sqrt{E}) = \sqrt{\frac{V_0-E}{E}}$, $a = \frac{\sqrt{2m}l}{2\hbar}$ za $n = 1, 3, 5, \dots$. Energije E_n odčitamo na presečiščih funkcij.

7.9 Tunelski pojav

Oglejmo si, kako opišemo obnašanje delca v primeru *potencialne plasti* s širino l in višino $V_0 > E$. Klasična analogija je zid (ovira), ki pa je tako visoka, da je delec ne more preskočiti:



Slika 55: Potencialna plast

Zapišemo valovno funkcijo za vsako od treh področij in koeficiente določimo iz zahteve po zveznosti in zvezni odvedljivosti funkcije pri $x = 0$ in $x = l$. Za posamezna področja smo že zapisali splošno rešitev:

$$\begin{aligned} \psi_I(x) &= Ae^{ikx} + Be^{-ikx}, & x \leq 0, \\ \psi_{II}(x) &= Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x}, & 0 < x < l, \\ \psi_{III}(x) &= Fe^{ikx}, & x \geq l. \end{aligned}$$

$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}, \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}.$$

Pri tem smo zaradi končne širine prepovedanega področja upoštevali tudi člen, ki eksponentno narašča; predpostavili pa smo, da imamo v področju $x > l$ le odhajajoči val. Pogoj pri $x = 0$ ima podobno obliko kot v prejšnjem razdelku:

$$A + B = C + D, \quad ik(A - B) = -\kappa(C - D). \quad (7.35)$$

Pri $x = l$ pa dobimo

$$Ce^{-\kappa l} + De^{\kappa l} = Fe^{ikl}, \quad -\kappa Ce^{-\kappa l} + \kappa De^{\kappa l} = ikFe^{ikl}. \quad (7.36)$$

Ponovno bomo vse koeficiente izrazili s koeficientom A . V splošnem je postopek precej dolgovizen, zato vpeljemo nekaj približkov, veljavnih v primeru dovolj širokega in visokega potenciala. Če je $\kappa l \gg 1$, je člen z D mnogo manjši od člena s C (v nasprotnem primeru bi v prepovedanem območju prevladala eksponentno naraščajoča funkcija, kar pa ni smiselno), zato ga pri zapisu robnih pogojev pri $x = 0$ lahko zanemarimo. V tem približku dobimo enako rešitev za C kot v prejšnjem poglavju:

$$C = \frac{2ik}{ik - \kappa} A.$$

V zapisu pogoja pri $x = l$ pa moramo upoštevati tudi člen z D , saj vsebuje faktor $e^{\kappa l}$, ki je lahko velik. Iz prve enačbe v pogoju (7.36) izluščimo D :

$$D = e^{-\kappa l} (Fe^{ikl} - Ce^{-\kappa l})$$

in ga vstavimo v drugo enačbo. Sledi

$$-2\kappa C e^{-\kappa l} = (ik - \kappa) F e^{ikl}.$$

Za koeficient F končno dobimo

$$F = \frac{2\kappa C}{\kappa - ik} e^{-\kappa l - ikl} = -\frac{4i\kappa k}{(\kappa - ik)^2} A e^{-\kappa l - ikl}.$$

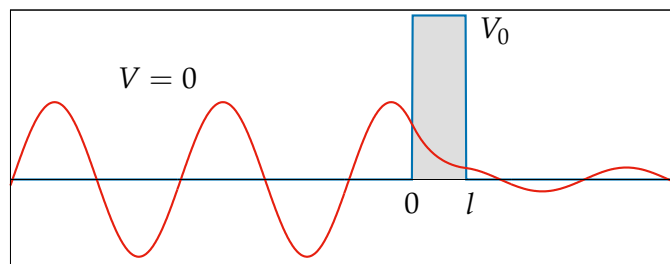
Zanima nas prepustnost plasti:

$$T = \frac{F^* F}{A^* A} = \frac{16\kappa^2 k^2}{(\kappa^2 + k^2)^2} e^{-2\kappa l}.$$

V primeru zelo visoke ovire ($V_0 \gg E$ oziroma $\kappa^2 \gg k^2$) se rezultat poenostavi in dobimo

$$T \approx \frac{16k^2}{\kappa^2} e^{-2\kappa l} \approx \frac{16E}{V_0} e^{-\sqrt{8mV_0/\hbar^2} l}.$$

Prepustnost lahko interpretiramo kot verjetnost, da delec preskoči oviro kljub temu, da je njegova energija manjša od energije, potrebne, da se povzpne na oviro. Verjetnost eksponentno pojema s širino plasti; prav tako zelo hitro pojema z njeno višino.

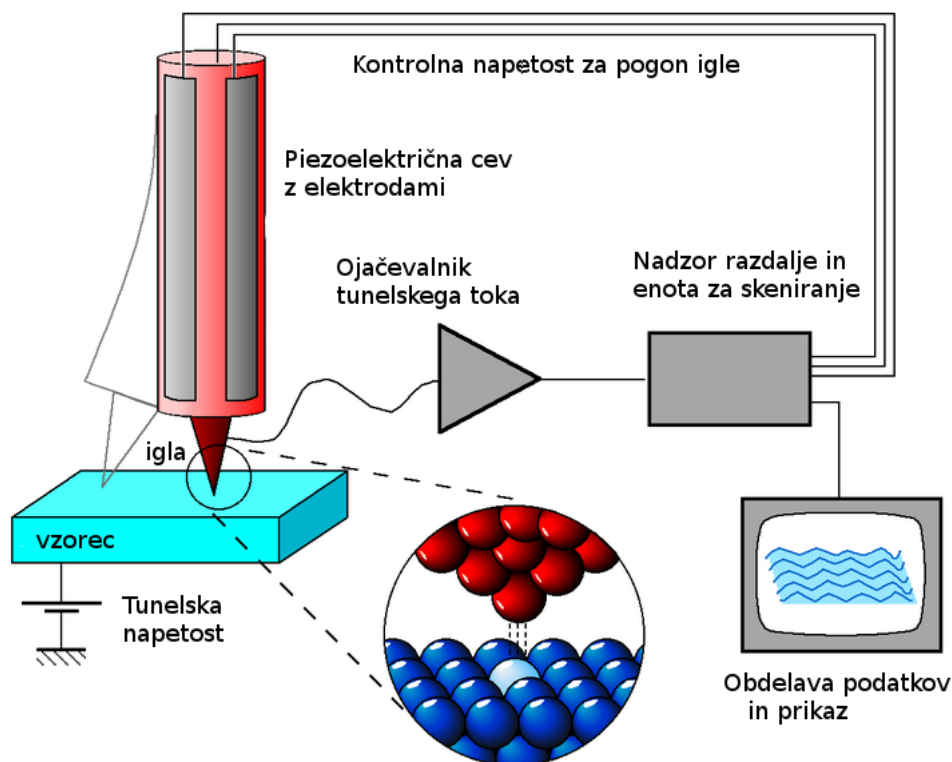


Slika 56: Tuneliranje skozi potencialno plast

Tunelski pojav povežemo z načelom nedoločenosti. Ko je delec v prepovedanem območju, poznamo njegovo lego z negotovostjo, ki jo ocenimo s širino ovire l . Po načelu nedoločenosti je v tem območju njegova gibalna količina nedoločena, nedoločeno ocenimo z $\hbar/l$. To pomeni, da je tudi energija nedoločena; z določeno verjetnostjo je energija lahko večja od potencialne energije in delec tedaj lahko "preskoči" oviro. Verjetnost je tem večja, čim večja je nedoločenost energije in gibalne količine, torej čim manjša je širina ovire.

Vrstični tunelski mikroskop. Pojav izkoriščamo pri *vrstičnem tunelskem mikroskopu*, ki omogoča opazovanje posameznih atomov v kristalu, hkrati pa omogoča poseganje v atomsko zgradbo na površju. Igla mikroskopa je na dnu široka le nekaj atomov, v sami konici pa celo en sam atom (glej sliko). Med iglo in vzorec priključimo napetost (tunelsko napetost), ki pa je premajhna, da bi elektroni, vezani v kristalu, z vzorca prehajali na iglo. Če iglo dovolj približamo površju kristala, nekako na razdaljo med

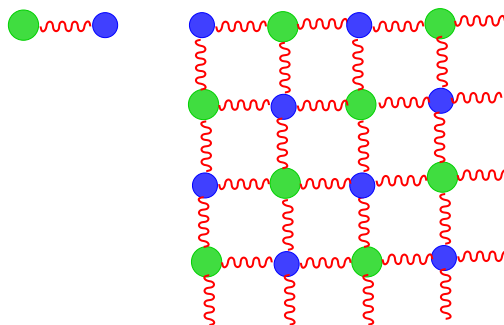
0,4 nm in 0,7 nm, pa je razdalja dovolj majhna, da elektroni prehajajo na iglo s tunelskim pojavom. Verjetnost za tuneliranje je eksponentno odvisna od razdalje med iglo in površjem kristala; majhna sprememba razdalje lahko občutno spremeni verjetnost za prehod. Z verjetnostjo za prehod je povezan tok elektronov, ki teče na iglo. Z merjenjem spremembe „tunelskega toka“ tako natančno spremljamo spremembe navpične razdalje. Iglo premikamo po površju kristala z napravo, ki deluje po načelu inverznega piezoelektričnega pojava (napetost povzroči silo). Na ta način je možno doseči zelo majhne premike igle. Ločljivost v vodoravni smeri je sicer omejena z velikostjo konice in jo ocenimo na 0,1 nm. V navpični smeri pa je ločljivost znatno boljša in jo ocenimo na 0,01 nm. S premikanjem igle po vrsticah in merjenjem tunelskega toka mikroskop skenira površje kristala in na ekranu dobimo značilno sliko, na kateri lahko dobro razločimo posamezne atome.



Slika 57: http://en.wikipedia.org/wiki/File:ScanningTunnelingMicroscope_schematic.png

7.10 Harmonski oscilator

Klasični harmonski oscilator. Najpreprostejše nihalo v klasični fiziki je telo z maso m na vzmeti s konstanto k . Telo harmonsko (sinusno) niha s krožno frekvenco $\omega = \sqrt{k/m}$. Energija nihanja je vsota kinetične energije in potencialne prožnostne energije $W_{\text{pr}} = \frac{1}{2}kx^2$, če je x odmik telesa od mirovne lege.



Slika 58: Prost harmonski oscilator in harmonski oscilatorji, sklopljeni v mrežo: s takšnim modelom lahko pojasnimo različne lastnosti snovi.

Kvantni opis: brezdimenzijska oblika. Pri kvantnem opisu harmonskega oscilatorja se delec giblje v potencialu $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$. Stacionarno Schrödingerjevo enačbo v tem primeru zapišemo kot⁸

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2 \right] \psi(x) = E\psi(x). \quad (7.37)$$

Enačbo prepišemo v brezdimenzijsko obliko. Klasični frekvenci oscilatorja priredimo energijo $h\nu = h\omega/2\pi = \hbar\omega$. Energije stanj oscilatorja bomo izražali v enotah te energije, zato enačbo delimo s $\hbar\omega = \hbar\sqrt{k/m}$. Dobimo

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{\hbar}{\sqrt{km}} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{\sqrt{km}}{\hbar} x^2 \right] \psi(x) = \frac{E}{\hbar\omega} \psi(x).$$

Vpeljemo brezdimenzijsko koordinato y :

$$y = \sqrt{\frac{\sqrt{km}}{\hbar}} x = \frac{x}{b}, \quad b = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{km}}} = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}. \quad (7.38)$$

Schrödingerjevo enačbo lahko tedaj zapišemo v obliki

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right] \psi(y) = \varepsilon \psi(y), \quad \varepsilon = \frac{E}{\hbar\omega}. \quad (7.39)$$

K enačbi sodi robni pogoj $\psi(y) \rightarrow 0$, ko $y \rightarrow \pm\infty$.

⁸V stacionarnem primeru pišemo E raje na desni strani enačbe.

Osnovno stanje. Rešitev, ki ustreza osnovnemu stanju, poiščimo z nastavkom $\psi_0(y) = e^{\lambda y^2}$. Nastavek vstavimo v (7.39) in dobimo

$$\frac{1}{2} \left[-2\lambda e^{\lambda y^2} - 4\lambda^2 y^2 e^{\lambda y^2} + y^2 e^{\lambda y^2} \right] = \varepsilon e^{\lambda y^2}.$$

Ker na desni strani enačbe ni členov, ki bi vsebovali y^2 , se morajo členi na levi, ki vsebujejo y^2 , okrajšati:

$$-4\lambda^2 y^2 + y^2 = 0, \quad \lambda = \pm \frac{1}{2}.$$

Smiselna je le rešitev z negativnim predznakom, saj gre rešitev s pozitivnim λ preko vseh meja, ko $y \rightarrow \pm\infty$. Ker se drugi in tretji člen okrajšata, na levi ostane le prvi člen:

$$-\lambda e^{\lambda y^2} = \varepsilon e^{\lambda y^2}, \quad \varepsilon = -\lambda = \frac{1}{2}$$

in

$$E_0 = \varepsilon \hbar \omega = \frac{1}{2} \hbar \omega \quad \text{in} \quad \psi_0(y) = A e^{-\frac{1}{2} y^2}. \quad (7.40)$$

Iz zahteve, da je verjetnostna gostota normirana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(y)|^2 dy = 1, \quad A^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = A^2 \sqrt{\pi} = 1,$$

sledi

$$\psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-\frac{1}{2} y^2}, \quad \psi_0(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} e^{-x^2/2b^2}. \quad (7.41)$$

*Pokažimo, da je je dobljena energija res najnižja možna energija in je torej dobljena rešitev res osnovno stanje. Energija harmonskega oscilatorja je vsota kinetične in potencialne energije in jo lahko zapišemo kot

$$E = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} k \langle x^2 \rangle.$$

Pri tem sta $\langle p^2 \rangle$ in $\langle x^2 \rangle$ pričakovani vrednosti kvadrata gibalne količine in kvadrata lege:

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 + \sigma_p^2, \quad \langle x^2 \rangle = \langle x \rangle^2 + \sigma_x^2. \quad (7.42)$$

Od tod sledi ocena

$$E \geq \frac{\sigma_p^2}{2m} + \frac{1}{2} k \sigma_x^2.$$

Enakost velja v primeru $\langle p \rangle = 0$ in hkrati $\langle x \rangle = 0$. Izraz na desni lahko prepišemo v obliko

$$E \geq \left(\frac{\sigma_p}{\sqrt{2m}} - \sqrt{\frac{k}{2}} \sigma_x \right)^2 + \sqrt{\frac{k}{m}} \sigma_p \sigma_x.$$

Prvi člen je nenegativen, drugi člen pa je navzdol omejen z načelom nedoločenosti, $\sigma_p \sigma_x \geq \frac{1}{2} \hbar$. Tako dobimo končno oceno

$$E \geq \sqrt{\frac{k}{m}} \frac{\hbar}{2} = \frac{1}{2} \hbar \omega = E_0.$$

Energija E_0 , ki ustreza stanju ψ_0 , je najnižja možna energija harmonskega oscilatorja, torej je ψ_0 res osnovno stanje sistema.

Vzbujena stanja. Vpeljimo operatorja

$$a^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dy} + y \right), \quad a^{(-)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{d}{dy} + y \right). \quad (7.43)$$

Prvi (drugi) operator funkcijo pomnoži z y in od rezultata odšteje (prišteje) odvod funkcije.

Trdimo: Valovne funkcije harmonskega oscilatorja in energije lahko zapišemo v obliki:

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{(+)}{}^n \psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left(-\frac{d}{dy} + y \right)^n \psi_0(y), \quad \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.44)$$

***Dokaz** (s popolno indukcijo):

Za $n = 0$ je to kar stanje z najnižjo energijo $\psi_0(y)$ z energijo $\frac{1}{2}$.

Predpostavimo, da trditev (7.44) velja za n -to lastno stanje, torej da je ψ_n rešitev (7.39). Pokažimo, da je tedaj

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{(n+1)!}} a^{(+)}{}^{n+1} \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} a^{(+)} \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{(+)}{}^n \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{(n+1)}} a^{(+)} \psi_n$$

tudi rešitev (7.39). (Funkcija $\psi(y)$ je rešitev Schrödingerjeve enačbe, če po izvrednotenju leve strani enačbe dobimo isto funkcijo, pomnoženo s konstanto. Konstanta ustreza energiji stanja.)

Oglejmo si najprej, kako produkt operatorjev (7.43) deluje na poljubno funkcijo $f(y)$:

$$\begin{aligned} a^{(+)} a^{(-)} f(y) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} f(y) + y^2 f(y) - \frac{d}{dy} y f(y) + y \frac{d}{dy} f(y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} f(y) + y^2 f(y) - f(y) \right] \end{aligned} \quad (7.45)$$

in

$$\begin{aligned} a^{(-)} a^{(+)} f(y) &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} f(y) + y^2 f(y) + \frac{d}{dy} y f(y) - y \frac{d}{dy} f(y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} f(y) + y^2 f(y) + f(y) \right]. \end{aligned} \quad (7.46)$$

Od tod dobimo koristni zvezi: s pomočjo (7.45) lahko levo stran Schrödingerjeve enačbe (7.39) prepišemo v obliko

$$\frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right] f(y) = \left[a^{(+)} a^{(-)} + \frac{1}{2} \right] f(y); \quad (7.47)$$

če zvezo (7.45) odštejemo od (7.46), pa sledi

$$a^{(-)} a^{(+)} f(y) = a^{(+)} a^{(-)} f(y) + f(y). \quad (7.48)$$

Schrödingerjevo enačbo za harmonski oscilator sedaj zapišemo v obliki

$$\left[a^{(+)} a^{(-)} + \frac{1}{2} \right] \psi(y) = \varepsilon \psi(y). \quad (7.49)$$

Če je ψ_n rešitev Schrödingerjeve enačbe z energijo ε_n , iz (7.49) sledi

$$a^{(+)} a^{(-)} \psi_n(y) = (\varepsilon_n - \frac{1}{2}) \psi_n(y). \quad (7.50)$$

Za $\psi_{n+1} = a^{(+)} \psi_n / \sqrt{n+1}$ pa velja:

$$\left[a^{(+)} a^{(-)} + \frac{1}{2} \right] \psi_{n+1}(y) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left[a^{(+)} a^{(-)} a^{(+)} \psi_n(y) + \frac{1}{2} a^{(+)} \psi_n(y) \right].$$

Uporabimo (7.48) in zamenjajmo vrstni red operatorjev $a^{(-)} a^{(+)}$ v prvem členu. Za izraz v oglatem oklepaju dobimo

$$a^{(+)} (a^{(+)} a^{(-)} + 1) \psi_n(y) + \frac{1}{2} a^{(+)} \psi_n(y) = a^{(+)} a^{(+)} a^{(-)} \psi_n(y) + \frac{3}{2} a^{(+)} \psi_n(y).$$

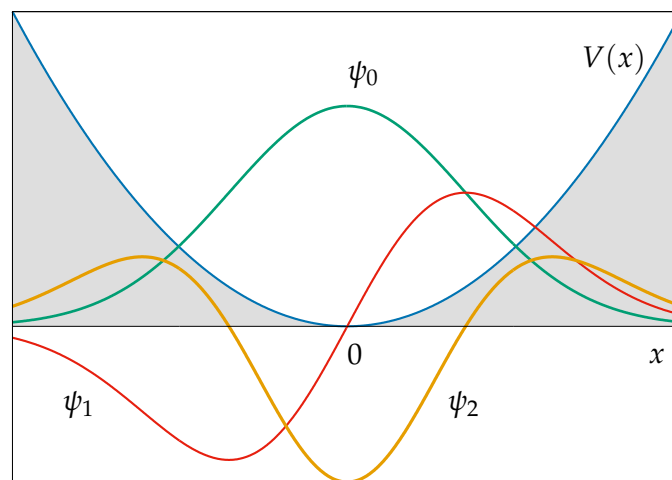
V prvem členu $a^{(+)} a^{(-)} \psi_n(y)$ nadomestimo z zvezo (7.50):

$$a^{(+)} (\varepsilon_n - \frac{1}{2}) \psi_n(y) + \frac{3}{2} a^{(+)} \psi_n(y) = (\varepsilon_n + 1) a^{(+)} \psi_n(y) = (\varepsilon_n + 1) \sqrt{n+1} \psi_{n+1}(y).$$

Dobili smo torej

$$\left[a^{(+)} a^{(-)} + \frac{1}{2} \right] \psi_{n+1}(y) = \frac{1}{2} \left[-\frac{d^2}{dy^2} + y^2 \right] \psi_{n+1}(y) = (\varepsilon_n + 1) \psi_{n+1}(y) \equiv \varepsilon_{n+1} \psi_{n+1}(y), \quad (7.51)$$

kar pomeni, da je $\psi_{n+1}(y)$ rešitev Schrödingerjeve enačbe z energijo $\varepsilon_n + 1$, torej energijo stanja ψ_n , povečano za 1.



Slika 59: Harmonski potencial in tri najnižje lastne valovne funkcije.

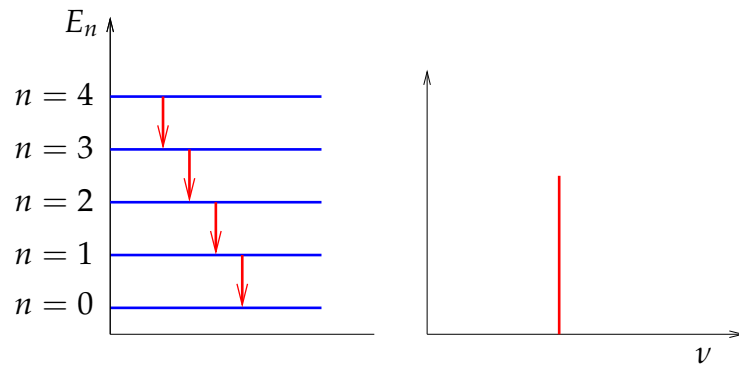
Spekter harmonskega oscilatorja. Iz zveze v (7.51), $\varepsilon_{n+1} = \varepsilon_n + 1$, in $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$ lahko takoj konstruiramo spekter harmonskega oscilatorja:

$$\varepsilon_1 = 1 + \frac{1}{2}, \quad \varepsilon_2 = 2 + \frac{1}{2}, \dots, \quad \varepsilon_n = n + \frac{1}{2}$$

in

$$E_n = \varepsilon_n \hbar \omega = (n + \frac{1}{2}) \hbar \omega, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (7.52)$$

Energijski nivoji so torej med seboj enakomerno razmaknjeni; energijska razlika je enaka klasični frekvenci harmonskega oscilatorja, pomnoženi s Planckovo konstanto.



Slika 60: Spekter harmonskega oscilatorja

Valovne funkcije za $n > 0$ dobimo iz zvez (7.41) in (7.44). Za prvo in drugo vzbujeno stanje dobimo

$$\psi_1(y) = a^{(+)} \psi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{d}{dy} + y \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-y^2/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} y e^{-y^2/2},$$

$$\psi_2(y) = \frac{1}{\sqrt{2!}} a^{(+)} \psi_1(y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{d}{dy} + y \right) \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} y e^{-y^2/2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi}} \left(y^2 - \frac{1}{2} \right) e^{-y^2/2},$$

oziroma

$$\psi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-b \frac{d}{dx} + \frac{x}{b} \right) \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} e^{-x^2/2b^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \frac{x}{b} e^{-x^2/2b^2};$$

$$\psi_2(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{2} \right) e^{-x^2/2b^2}.$$

V splošnem velja

$$\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(y) e^{-y^2/2},$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n \left(\frac{x}{b} \right) e^{-x^2/2b^2},$$

kjer so H_n Hermitevi polinomi. Hermitevi polinomi tvorijo poln sistem, kar zagotavlja, da smo našli vse bazične rešitve našega problema.

8 Schrödingerjeva enačba v treh razsežnostih

8.1 Stacionarno stanje

V primeru treh krajevnih razsežnosti ima časovno odvisna Schrödingerjeva enačba obliko

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[\frac{\vec{p}^2}{2m} + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (8.1)$$

Gibalno količino nadomestimo v tem primeru z operatorjem

$$\frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} = \vec{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

in enačbo (8.1) prepišemo v obliko

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \Psi(\vec{r}, t) \quad (8.2)$$

kjer je Δ Laplaceov operator

$$\Delta = \vec{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Tabela 3: Fizikalne količine in njihovi operatorji v treh razsežnostih; v kartezičnih koordinatah: $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ in $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.

količina	oznaka	operator	pričakovana vrednost
lega	$\vec{r}$	$\hat{\vec{r}} = \vec{r}$	$\langle \vec{r} \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \Psi(\vec{r}, t) dV$
potencial	$U(\vec{r})$	$\hat{U} = U(\vec{r})$	$\langle U \rangle = \int \Psi^*(\vec{r}, t) U(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, t) dV$
gibalna količina	$\vec{p}$	$\hat{\vec{p}} = \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla}$	$\langle \vec{p} \rangle = \frac{\hbar}{i} \int \Psi^*(\vec{r}, t) \vec{\nabla} \Psi(\vec{r}, t) dV$
kinetična energija	$W_{\text{kin}} \equiv T$	$\hat{T} = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta$	$\langle T \rangle = -\frac{\hbar^2}{2m} \int \Psi^*(\vec{r}, t) \Delta \Psi(\vec{r}, t) dV$
polna energija	$W \equiv E$	$\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$	$\langle E \rangle = i\hbar \int \Psi^*(\vec{r}, t) \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) dV$

V stacionarnem stanju se fizikalne količine ne spreminjajo s časom. Pričakovano vrednost fizikalne količine A zapišemo kot

$$\langle A \rangle = \int_V \Psi^*(\vec{r}, t) \hat{A} \Psi(\vec{r}, t) dV, \quad (8.3)$$

pri čemer je $\hat{A}$ (časovno neodvisni) operator, ki ustreza fizikalni količini A , * pa označuje kompleksno konjugirano vrednost (ko nadomestimo $i \rightarrow -i$). Podobno kot v enorazsežnem primeru je izraz (8.3) neodvisen od časa, če je časovno odvisna valovna funkcija oblike

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-i\omega t}.$$

Velja namreč

$$\Psi^*(\vec{r}, t) \Psi(\vec{r}, t) = \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) e^{i\omega t - i\omega t} = \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}) e^0 = \psi^*(\vec{r}) \psi(\vec{r}).$$

Konstanta ω je povezana z energijo delca prek zveze $E = h\nu = \hbar\omega$:

$$\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-iEt/\hbar}.$$

Odvod na desni strani enačbe (8.2) je enak

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) i\hbar \frac{\partial}{\partial t} e^{-iEt/\hbar} = \psi(\vec{r}) i\hbar \left(-\frac{iE}{\hbar} \right) e^{-iEt/\hbar} = \psi(\vec{r}) E e^{-iEt/\hbar}.$$

Na levi in desni strani enačbe okrajšamo časovno odvisni del $e^{-iEt/\hbar}$, preuredimo, in dobimo *stacionarno* Schrödingerjevo enačbo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}) \right] \psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}). \quad (8.4)$$

8.2 Harmonski oscilator v treh razsežnostih

Pri trirazsežnem harmonskem oscilatorju privzamemo, da je sila premo sorazmerna z razdaljo delca od izhodišča (in kaže proti izhodišču); ustrezni potencial je

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{2}kr^2 = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2).$$

Valovna funkcija je funkcija treh spremenljivk in Schrödingerjeva enačba ima obliko:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right] \psi(x, y, z) = E\psi(x, y, z). \quad (8.5)$$

Rešitev iščemo z nastavkom v obliki produkta treh funkcij

$$\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Nastavek vstavimo v (8.5):

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} Y(y)Z(z) + \frac{\partial^2 Y(y)}{\partial y^2} X(x)Z(z) + \frac{\partial^2 Z(z)}{\partial z^2} X(x)Y(y) \right) \\ + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)X(x)Y(y)Z(z) = EX(x)Y(y)Z(z). \end{aligned}$$

Enačbo delimo z $X(x)Y(y)Z(z)$ in druge odvode funkcij zapišimo kar kot X'' , Y'' in Z'' :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{Z''(z)}{Z(z)} \right) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) = E. \quad (8.6)$$

Ker je na desni strani konstanta, mora biti tudi izraz na levi strani konstanten za poljubne vrednosti spremenljivk x , y in z . Pogoji je mogoče izpolniti le, če je izraz na levi, odvisen od spremenljivke x , konstanten:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{1}{2} kx^2 = E_X$$

in hkrati konstantna tudi izraza, odvisna od y in z :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{1}{2} ky^2 = E_Y,$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{Z''(z)}{Z(z)} + \frac{1}{2} kz^2 = E_Z.$$

Parametri na desni so konstante, neodvisne od x , y in z . Velja:

$$E_X + E_Y + E_Z = E.$$

Zgornje enačbe pomnožimo po vrsti z $X(x)$, $Y(y)$ in $Z(z)$, preuredimo in dobimo

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} kx^2 \right] X(x) = E_X X(x), \quad (8.7)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2} ky^2 \right] Y(y) = E_Y Y(y), \quad (8.8)$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} kz^2 \right] Z(z) = E_Z Z(z). \quad (8.9)$$

Vsaka od enačb (8.7), (8.8) in (8.9) predstavlja stacionarno Schrödingerjevo enačbo v eni razsežnosti (7.37). Rešitve enačbe smo izpeljali v prejšnjem poglavju. Za energije velja

$$\begin{aligned} E_X &= (n_x + \frac{1}{2}) \hbar\omega, & n_x &= 0, 1, 2, \dots, \\ E_Y &= (n_y + \frac{1}{2}) \hbar\omega, & n_y &= 0, 1, 2, \dots, \\ E_Z &= (n_z + \frac{1}{2}) \hbar\omega, & n_z &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Celotna energija je potem enaka

$$\begin{aligned} E &= E_X + E_Y + E_Z = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \hbar\omega = (n + \frac{3}{2}) \hbar\omega, \\ n &= n_x + n_y + n_z = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (8.10)$$

8.3 Vzbuena stanja harmonskega oscilatorja

Iz (8.10) razberemo, da je najnižja energija harmonskega oscilatorja v primeru $n = 0$ ($n_x = n_y = n_z = 0$) in enaka

$$E_0 = \frac{3}{2} \hbar\omega$$

in valovna funkcija

$$\psi_{000}(x, y, z) = X_0(x)Y_0(y)Z_0(z) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}.$$

Energija je odvisna le od vsote vseh treh kvantnih števil, ki smo ji priredili kvantno število n . Energijski nivoji so razmaknjeni za $\Delta E = \hbar\omega$, tako kot pri harmonskem oscilatorju v eni razsežnosti. Valovne funkcije vzbujenih stanj pa so odvisne od treh kvantnih števil n_x , n_y in n_z .

Vzbujeno stanje z $n = 1$ lahko realiziramo na tri načine, bodisi kot $n_x = 1$, $n_y = 0$ in $n_z = 0$, kot $n_x = 0$, $n_y = 1$ in $n_z = 0$, ali kot $n_x = 0$, $n_y = 0$ in $n_z = 1$. Ustrezne tri valovne funkcije so

$$\psi_{100}(x, y, z) = X_1(x)Y_0(y)Z_0(z) = \psi_1(x)\psi_0(y)\psi_0(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}\right)^3 \sqrt{2} \frac{x}{b} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}, \quad (8.11)$$

$$\psi_{010}(x, y, z) = X_0(x)Y_1(y)Z_0(z) = \psi_0(x)\psi_1(y)\psi_0(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}\right)^3 \sqrt{2} \frac{y}{b} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}, \quad (8.12)$$

$$\psi_{001}(x, y, z) = X_0(x)Y_0(y)Z_1(z) = \psi_0(x)\psi_0(y)\psi_1(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}\right)^3 \sqrt{2} \frac{z}{b} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}. \quad (8.13)$$

Vsa ta tri stanja imajo enako energijo. V primeru, ko imajo različna stanja enako energijo, pravimo, da so stanja *degenerirana*. Stopnja degeneriranosti je število stanj, ki imajo enako energijo. V primeru stanj z $n = 1$ je stopnja enaka 3.

Tabela 4: Energije stanj in stopnja degeneriranosti v trirazsežnem harmonskem oscilatorju

n_x	n_y	n_z	n	$E/\hbar\omega$	deg.	$\deg_n$
0	0	0	0	$\frac{3}{2}$	1	1
1	0	0	1	$\frac{5}{2}$	3	3
1	1	0	2	$\frac{7}{2}$	3	6
2	0	0	2		3	
1	1	1	3	$\frac{9}{2}$	1	10
2	1	0	3		6	
3	0	0	3		3	
...	...	...	n	$n + \frac{3}{2}$		$\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$

Dve od šestih valovnih funkcij zapišemo kot

$$\psi_{200}(x, y, z) = X_2(x)Y_0(y)Z_0(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}\right)^3 \left(\frac{x^2}{b^2} - \frac{1}{2}\right) e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}, \quad (8.14)$$

$$\psi_{110}(x, y, z) = X_1(x)Y_1(y)Z_0(z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{b}}\right)^3 2 \frac{xy}{b^2} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2}. \quad (8.15)$$

8.4 Trirazsežna neskončna jama

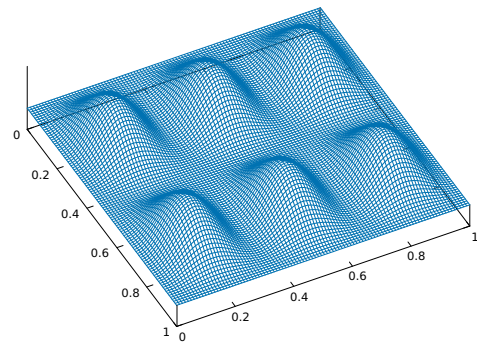
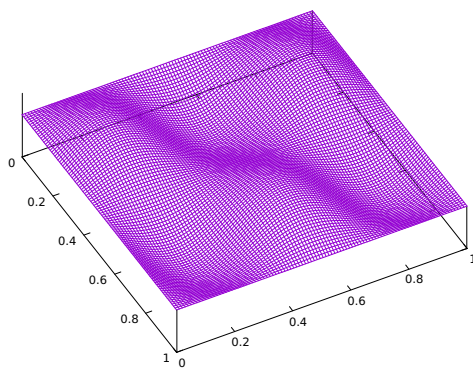
Vzemimo, da je potencial enak nič znotraj kocke z robom l , zunaj pa neskončen:

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq l, \ 0 \leq y \leq l, \ 0 \leq z \leq l, \\ \infty, & \text{sicer} \end{cases}$$

Zunaj jame je valovna funkcija enaka nič, znotraj jame pa zadošča Schrödingerjevi enačbi z $V = 0$ — glej (8.5). Za njeno rešitev vzamemo produktni nastavek v obliki $\psi(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Nadaljnji postopek je enak kot v primeru trirazsežnega harmonskega oscilatorja. Enačba razpade v tri enake enačbe za funkcije $X(x)$, $Y(y)$ in $Z(z)$ z rešitvami, ki so enake kot v primeru enorazsežne neskončne jame: $X(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(n_x \pi x / l)$, $n_x = 1, 2, 3, \dots$ in podobno za drugi dve funkciji. Celotna valovna funkcija je enaka

$$\psi_{n_x n_y n_z}(x, y, z) = \sqrt{\frac{8}{l^3}} \sin\left(\frac{n_x \pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{n_y \pi y}{l}\right) \sin\left(\frac{n_z \pi z}{l}\right),$$

$n_x = 1, 2, 3, \dots \quad n_y = 1, 2, 3, \dots \quad n_z = 1, 2, 3, \dots$



$$\psi_{2,3}(x, y) = \frac{2}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \sin \frac{3\pi y}{l}$$

$$w_{2,3}(x, y) = |\psi_{2,3}(x, y)|^2$$

Slika 61: Stanja lahko nazorno prikažemo za *dvorazsežno ravno jama*

Za energije stacionarnih stanj pa dobimo

$$E = E_X + E_Y + E_Z = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2ml^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2).$$

Tudi v tem modelu so vzbujena stanja degenerirana, razen v primeru $n_x = n_y = n_z$.

n_x	n_y	n_z	E	deg.
1	1	1	$3E_1$	1
2	1	1	$6E_1$	3
2	2	1	$9E_1$	3
3	1	1	$11E_1$	3
2	2	2	$12E_1$	1
3	2	1	$14E_1$	6
3	2	2	$17E_1$	3
...	...	...	...	...

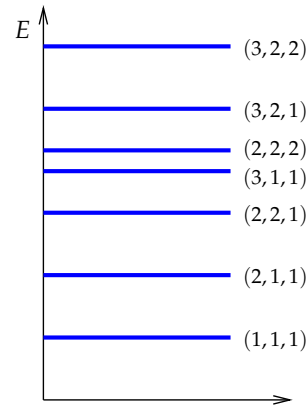


Tabela 5: Degeneracija v trirazsežni jami

8.5 Separacija spremenljivk v primeru krogelno simetričnega potenciala

Nastavek v obliki produkta $X(x)Y(y)Z(z)$ lahko uporabimo le v posebnih primerih, ko je potencial mogoče zapisati kot vsoto treh členov, pri čemer je vsak člen odvisen le od ene same koordinate, od x , y ali z .

Če je potencial $V(\vec{r})$ odvisen le od razdalje od izhodišča, r , je smiselno vpeljati krogelne koordinate:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos \vartheta = \frac{z}{r} \quad \tan \varphi = \frac{y}{x};$$

oziroma

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi, \quad y = r \sin \vartheta \sin \varphi, \quad z = r \cos \vartheta. \quad (8.16)$$

Laplaceov operator ima tedaj obliko

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \Delta_r + \Delta_{\vartheta, \varphi} = \Delta_r + \frac{\tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi}}{r^2}, \\ \Delta_r &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right), \\ \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} &= \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \end{aligned}$$

Vpeljali smo operator $\tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi}$, ki je odvisen le od dveh Eulerjevih kotov in neodvisen od r . Rešitev Schrödingerjeve enačbe iščemo z nastavkom v obliki produkta dveh funkcij, kjer je ena funkcija odvisna le od r in druga le od kotov ϑ in φ :

$$\psi(\vec{r}) = R(r)\Phi(\vartheta, \varphi).$$

Stacionarno Schrödingerjevo enačbo zapišemo kot

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\Phi(\vartheta, \varphi) \Delta_r R(r) + \frac{R(r)}{r^2} \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \Phi(\vartheta, \varphi) \right] + V(r) R(r) \Phi(\vartheta, \varphi) = E R(r) \Phi(\vartheta, \varphi). \quad (8.17)$$

Enačbo delimo z $R(r)\Phi(\vartheta, \varphi)$:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta_r R(r)}{R(r)} - \frac{\hbar^2}{2mr^2} \frac{\tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \Phi(\vartheta, \varphi)}{\Phi(\vartheta, \varphi)} + V(r) = E,$$

pomnožimo z $2mr^2$ in preuredimo:

$$-\frac{\hbar^2 \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \Phi(\vartheta, \varphi)}{\Phi(\vartheta, \varphi)} = 2mr^2(E - V(r)) + \hbar^2 r^2 \frac{\Delta_r R(r)}{R(r)}.$$

Enačba mora veljati za poljubne r , ϑ in φ , kar je mogoče izpolniti le v primeru, če sta izraza na levi in desni enaka (isti) konstanti, označimo jo z a , torej

$$-\frac{\hbar^2 \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \Phi(\vartheta, \varphi)}{\Phi(\vartheta, \varphi)} = a$$

in hkrati

$$2mr^2(E - V(r)) + \hbar^2 r^2 \frac{\Delta_r R(r)}{R(r)} = a.$$

Enačbi preuredimo

$$-\hbar^2 \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \Phi(\vartheta, \varphi) = a \Phi(\vartheta, \varphi) \quad (8.18)$$

in

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_r + \frac{a}{2mr^2} + V(r) \right] R(r) = E R(r). \quad (8.19)$$

Prvi člen v Schrödingerjevi enačbi (8.2) interpretiramo kot kinetično energijo delca; prva dva člena v (8.17) in (8.19) torej ustrezata dvema prispevkoma h kinetični energiji: prvi je odvisen od gibanja delca v *radialni* smeri, drugi pa od gibanja v smeri, pravokotni na $\vec{r}$, torej kroženja. Drugi člen lahko interpretiramo kot rotacijsko kinetično energijo. Klasični izraz za energijo pri kroženju zapišemo kot

$$W_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^2 J = \frac{\Gamma^2}{2J} = \frac{\Gamma^2}{2mr^2},$$

pri čemer je $\Gamma = J\omega$ vrtilna količina in $J = mr^2$ vztrajnostni moment točkastega delca. Konstanto a torej lahko enačimo s pričakovano vrednostjo kvadrata vrtilne količine:

$$a = \langle \Gamma^2 \rangle.$$

Iz dobljenih rezultatov lahko izluščimo tri pomembne zaključke, ki veljajo za sisteme s krogelno simetričnim potencialom:

- valovno funkcijo lahko zapišemo v obliki produkta radialne funkcije $R(r)$ in funkcije Φ , odvisne od kotov ϑ in φ ;
- radialni del valovne funkcije je odvisen od potenciala, poleg tega pa še od energije in velikosti kvadrata vrtilne količine;
- kotni del valovne funkcije je neodvisen od potenciala in je torej enak za vse krogelno simetrične sisteme.

8.6 Vrtilna količina

Klasično vrtilno količino delca definiramo kot vektorski produkt krajevnega vektorja (ročice) in gibalne količine

$$\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{p} = (\Gamma_x, \Gamma_y, \Gamma_z),$$

$$\Gamma_x = yp_z - zp_y, \quad \Gamma_y = zp_x - xp_z, \quad \Gamma_z = xp_y - yp_x.$$

V kvantni mehaniki operator za komponento gibalne količine v smeri x zapišemo kot $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$, in podobno za drugi dve komponenti. Vrtilno količino namesto z $\vec{\Gamma}$ označimo z $\vec{L}$. Dobimo

$$\hat{L}_x = \frac{\hbar}{i} \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = \frac{\hbar}{i} \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right).$$

Poglejmo si, kako se spremeni valovna funkcija pri zasuku $\vec{r} \rightarrow \vec{r} + d\vec{r}$, $d\vec{r} \perp \vec{r}$. Za os izberimo os z . Spremembo funkcije izračunajmo kot totalni diferencial:

$$d\psi \equiv d\psi(x, y, z) = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy + \frac{\partial\psi}{\partial z} dz.$$

Pri vrtenju okoli osi z se spreminja samo kot φ , r in ϑ pa sta konstantna. Iz (8.16) sledi

$$dx = -r \sin \vartheta \sin \varphi d\varphi = -y d\varphi, \quad dy = r \sin \vartheta \cos \varphi d\varphi = x d\varphi, \quad dz = 0$$

in

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x}(-y)d\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial y}x d\varphi = \left[-y \frac{\partial}{\partial x} + x \frac{\partial}{\partial y} \right] \psi d\varphi.$$

Izraz v oglatem oklepaju je do konstante $\hbar/i$ enak operatorju $\hat{L}_z$ in lahko zapišemo

$$d\psi = \frac{i\hat{L}_z}{\hbar} \psi d\varphi \quad \text{in} \quad \frac{d\psi}{\psi} = \frac{i\hat{L}_z}{\hbar} d\varphi. \quad (8.20)$$

Če enačbo (8.20) preuredimo, iz nje razberemo izraz za operator $\hat{L}_z$ v krogelnih koordinatah:

$$\hat{L}_z \psi = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial\psi}{\partial\varphi}, \quad \hat{L}_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial\varphi}, \quad (8.21)$$

Pri tem smo totalne odvode nadomestili s parcialnimi, saj smo izpeljavo naredili pri konstantnih r in ϑ .⁹ Enačbo (8.20) integriramo, na desni od $\varphi = 0$ do poljubnega kota φ , in na levi od vrednosti funkcije pri $\varphi = 0$ do vrednosti funkcije pri φ . Dobimo

$$\ln \left(\frac{\psi(r, \vartheta, \varphi)}{\psi(r, \vartheta, 0)} \right) = \frac{i \hat{L}_z \varphi}{\hbar} \quad \text{ozioroma} \quad \psi(r, \vartheta, \varphi) = e^{i \hat{L}_z \varphi / \hbar} \psi(r, \vartheta, 0). \quad (8.22)$$

Če ima v sistemu komponenta L_z konstantno vrednost, lahko v eksponentu operator nadomestimo kar z njegovo pričakovano vrednostjo:

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = e^{i L_z \varphi / \hbar} \psi(r, \vartheta, 0), \quad (8.23)$$

kar pomeni, da se funkcija pri zasuku delca le pomnoži s kompleksnim faznim faktorjem. Pri zasuku za polni kot se delec vrne v začetno stanje, kar pomeni, da se funkcija za $\varphi = 2\pi$ ne spremeni, torej:

$$e^{i L_z 2\pi / \hbar} = 1.$$

To je izpolnjeno, če je eksponent večkratnik $2\pi i$:

$$\frac{i L_z 2\pi}{\hbar} = m 2\pi i, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

od koder sledi

$$\frac{L_z}{\hbar} = m, \quad \text{ozioroma} \quad L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (8.24)$$

Prišli smo do pomembne ugotovitve: vrtilna količina ne more zavzeti poljubne vrednosti, pač pa le vrednosti, ki so večkratniki Planckove konstante, deljene z 2π .

Ugotovitev velja za eno od komponent vrtilne količine (komponento v smeri osi z). Kako je z drugima dvema komponentama (komponentama v smeri x in y)? Izkaže se, da sta drugi dve komponenti nedoločeni in pri rotaciji delca nimata konstantne vrednosti (podobno kot je nedoločena, recimo, gibalna količina vezanega delca). Pač pa ima konstantno vrednost velikost gibalne količine:

$$|\vec{L}| = \sqrt{\vec{L}^2} = \sqrt{L_x^2 + L_y^2 + L_z^2}.$$

Po nekoliko dolgovoznem računu ugotovimo, da lahko operator za $\vec{L}^2$ zapišemo kot

$$\vec{L}^2 = (\vec{r} \times \vec{p})^2 = \left(\vec{r} \times \frac{\hbar}{i} \vec{\nabla} \right)^2 = -\hbar^2 \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi}.$$

S tem smo potrdili predpostavko pri razcepu Laplaceovega operatorja v Schrödingerjevi enačbi, da namreč drugi člen v enačbah (8.17) in (8.19) predstavlja rotacijsko kinetično energijo in da torej parameter a ustreza pričakovani vrednosti kvadrata vrtilne količine.

⁹Zveza (8.21) omogoča, da enačbo (8.22) interpretiramo kot Taylorjev razvoj funkcije $\psi(\varphi)$ okoli vrednosti pri $\varphi = 0$; v to se najhitreje prepričamo, če eksponent razvijemo v vrsto.

8.7 Rešitve kotnega dela valovne funkcije

V primeru krogelno simetričnega potenciala je kotni del valovne funkcije $\Phi(\vartheta, \varphi)$ neodvisen od oblike potenciala in je enak za vse potenciale. Kotno odvisnost določa enačba (8.18); pri tem smo odvisnost od kota φ že določili z zvezama (8.23) in (8.24):

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = \Phi(\vartheta, 0) e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Splošne rešitve enačbe (8.18) so krogelne funkcije (tako imenovani sferični harmoniki)

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = Y_{lm}(\vartheta, \varphi),$$

ki zadoščajo diferencialni enačbi

$$-\left[\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right] Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = l(l+1) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \quad (8.25)$$

in so odvisne od dveh indeksov (v kvantni mehaniki ju interpretiramo kot kvantni števili) l in m , ki lahko zavzameta vrednosti:

$$l = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l. \quad (8.26)$$

Iz primerjave enačb (8.25) in (8.18) ugotovimo

$$a = \langle \vec{L}^2 \rangle = \hbar^2 l(l+1). \quad (8.27)$$

Velikost vrtilne količine je torej tudi kvantizirana in lahko zavzame vrednosti

$$|\vec{L}| = \hbar \sqrt{l(l+1)}, \quad l = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (8.28)$$

Kvantno število l določa velikost vrtilne količine in ga imenujemo *kvantno število velikosti vrtilne količine*. V prejšnjem poglavju smo ugotovili, da lahko komponenta vrtilne količine v smeri osi z zavzame vrednosti:

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Kvantno število m je po absolutni vrednosti omejeno s kvantnim številom l , saj komponenta vrtilne količine ne more biti večja od velikosti vrtilne količine:

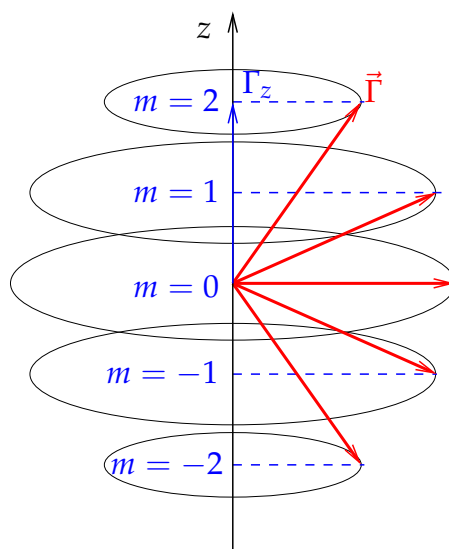
$$\hbar \sqrt{l(l+1)} \geq \hbar m, \quad \text{torej} \quad m \leq l, \quad (8.29)$$

kar smo že upoštevali v (8.26). Zaradi razlogov, ki jih bomo omenili kasneje, število m imenujemo *magnetno kvantno število*.

Kot smo že omenili, vrtilna količina okoli osi x in prav tako vrtilna količina okoli osi y nista konstantni, temveč se spreminjata tako, da je zadoščeno enačbi

$$L_x^2 + L_y^2 = \vec{L}^2 - L_z^2 = \hbar^2 (l(l+1) - m^2),$$

– razen v primeru, ko je velikost vrtilne količine enaka nič; tedaj so vse komponente enake nič.

Slika 62: Ponazoritev vektorja vrtilne količine za $l = 2$.

Funkcije Y_{lm} so normirane in velja

$$\int_0^\pi d\vartheta \sin \vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi Y_{lm}^*(\vartheta, \varphi) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) = 1.$$

Pri $l = 0$ imamo le možnost $m = 0$ in ustrezna krogelna funkcija ima obliko

$$Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}. \quad (8.30)$$

Pri $l = 1$ imamo tri možnosti za m , in sicer $m = 0, \pm 1$:

$$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta, \quad Y_{1\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}. \quad (8.31)$$

Pri $l = 2$ imamo pet možnosti za m , namreč $m = 0, \pm 1, \pm 2$:

$$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1),$$

$$Y_{2\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{15}{8\pi}} \cos \vartheta \sin \vartheta e^{\pm i\varphi}, \quad Y_{2\pm 2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}} \sin^2 \vartheta e^{\pm 2i\varphi}. \quad (8.32)$$

8.8 *Trirazsežni harmonski oscilator v krogelni bazi

V prejšnjem poglavju smo predstavili rešitev za harmonski oscilator v eni in treh razsežnostih. V slednjem primeru smo rešitev za osnovno stanje in vzbujena stanja zapisali kar s kartezičnimi koordinatami x, y in z . Zaradi posebne oblike potenciala je bil račun v kartezičnih koordinatah enostavnejši. Kartezično rešitev lahko prepišemo v krogelno bazo in na ta način dobimo vpogled na nekatere lastnosti, ki veljajo za poljubno obliko krogelno simetričnih potencialov.

Osnovno stanje ψ_{000} ustreza $n = 0$ in ga lahko enostavno prepišemo v krogelno bazo, saj je izraz v števcu eksponenta ravno enak r^2 :

$$\psi_{000}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 e^{-(x^2+y^2+z^2)/2b^2} = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 e^{-r^2/2b^2} = R(r) \Phi(\vartheta, \varphi).$$

Ker valovna funkcija ni odvisna od kotov, rešitev kotnega dela lahko ustreza le funkciji Y_{00} (enačba (8.30)), torej $l = 0$ in $m = 0$:

$$\Phi(\vartheta, \varphi) = Y_{00} = \frac{1}{\sqrt{4\pi}},$$

$$R(r) \equiv R_{n=0, l=0} = \sqrt{4\pi} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 e^{-r^2/2b^2} = \frac{2}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b^3}} e^{-r^2/2b^2}.$$

Pri $n = 1$ v valovnih funkcijah nadomestimo kartezične koordinate s krogelnimi:

$$\psi_{100}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{2} \frac{1}{b} r \sin \vartheta \cos \varphi e^{-r^2/2b^2}, \quad (8.33)$$

$$\psi_{010}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{2} \frac{1}{b} r \sin \vartheta \sin \varphi e^{-r^2/2b^2}, \quad (8.34)$$

$$\psi_{001}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{2} \frac{1}{b} r \cos \vartheta e^{-r^2/2b^2}. \quad (8.35)$$

Vidimo, da je ψ_{001} sorazmerna s $\cos \vartheta$, torej sferični harmonik Y_{10} ustreza kvantnima številoma $l = 1$ in $m = 0$:

$$\psi_{001}(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{2} \frac{1}{b} r e^{-r^2/2b^2} \sqrt{\frac{4\pi}{3}} Y_{10}(\vartheta, \varphi) \equiv R(r) Y_{10}(\vartheta, \varphi),$$

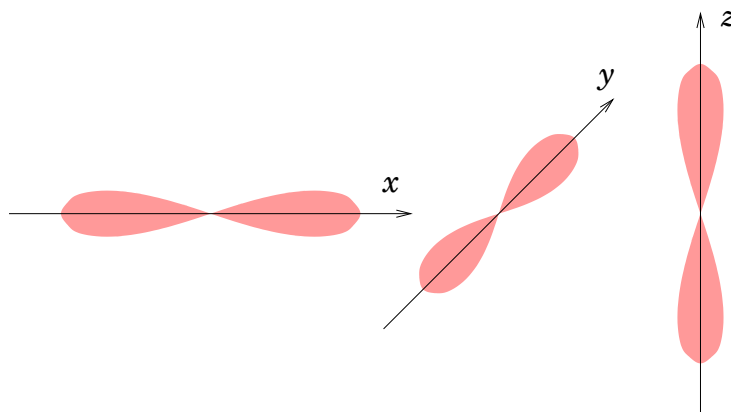
od koder razberemo

$$R(r) \equiv R_{n=1, l=1}(r) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{b} r e^{-r^2/2b^2} = \sqrt{\frac{8}{3}} \frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b^5}} r e^{-r^2/2b^2}.$$

Pri drugih dveh funkcijah pa je odvisnost od kota φ drugačna kot pri sferičnih harmonikih.

Problem razrešimo tako, da vzamemo *linearno kombinacijo* teh dveh funkcij:

$$\begin{aligned} \psi_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100} + i\psi_{010}) = -\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \frac{1}{b} r \sin \vartheta (\cos \varphi + i \sin \varphi) e^{-r^2/2b^2} \\ &= -\left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \frac{1}{b} r e^{-r^2/2b^2} \sin \vartheta e^{i\varphi} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt[4]{\pi} \sqrt{b}} \right)^3 \sqrt{\frac{8\pi}{3}} \frac{1}{b} r e^{-r^2/2b^2} Y_{11}(\vartheta, \varphi) \\ &= R_{n=1, l=1}(r) Y_{11}(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$



Slika 63: Ponazoritev verjetnostnih gostot za funkcije ψ_{100} , ψ_{010} in ψ_{001} ,

in podobno

$$\psi_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_{100} - i\psi_{010}) = R_{n=1, l=1}(r) Y_{1-1}(\vartheta, \varphi).$$

Dobili smo tri stanja z različnimi vrednostmi kvantnega števila m , ki ustrezajo istima kvantnima številoma n in l . Vsa tri stanja imajo poleg enake energije tudi enako velikost vrtilne količine in enako radialno odvisnost, $R(r)$, razlikujejo pa se po velikosti projekcije vrtilne količine na os z .

Navedene ugotovitve potrdimo, če izračunamo pričakovano vrednost kvadrata vrtilne količine v stanjih (8.33)–(8.35):

$$a = \langle \vec{L}^2 \rangle = -\hbar^2 \int \psi^* \tilde{\Delta}_{\vartheta, \varphi} \psi dV.$$

Ko iz vrednotimo odvode po kotih, se izraz pri vseh treh funkcijah poenostavi in dobimo

$$a = -\hbar^2 \int \psi^* (-2) \psi dV = 2\hbar^2 \int |\psi|^2 dV = 2\hbar^2,$$

saj so funkcije normirane. Dobljeni rezultat res ustreza vrednost $l = 1$ (glej (8.27)).

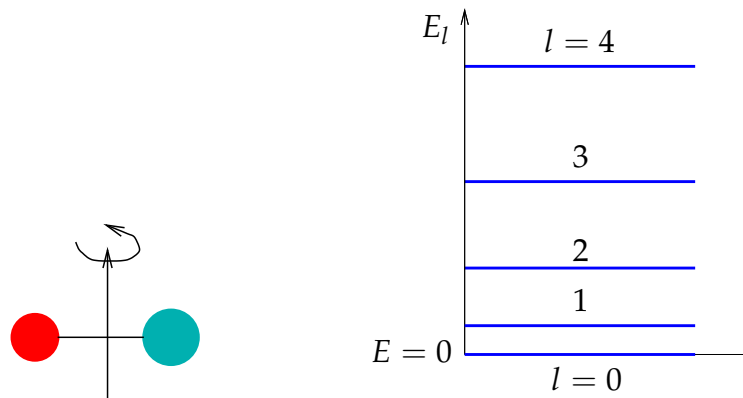
Pri $n = 2$ je situacija nekoliko bolj zamotana. Ker se v izrazih pojavljajo $\cos^2 \vartheta$, $\sin^2 \vartheta$, ... domnevamo, da ta stanja ustrezajo $l = 2$. A vseh stanj je šest, različnih stanj z $l = 2$ pa kvečjemu pet ($m = \pm 2, \pm 1, 0$). Izkaže se, da s primerno kombinacijo funkcij dobimo pet novih funkcij, ki ustrezajo $l = 2$ in eno funkcijo, ki ustreza $l = 0$. Vseh pet funkcij z $l = 2$ ima enako radialno valovno funkcijo $R_{22}(r)$, a ta je različna od radialne funkcije R_{20} , ki ustreza stanju z $l = 0$. Vseh šest stanj pa ima seveda enako energijo. Pri $n = 3$ je deset degeneriranih stanj, od tega jih sedem ustreza $l = 3$ in tri $l = 1$; pri $n = 4$ pa petnajst stanj, devet z $l = 4$, pet z $l = 2$ in eno z $l = 0$, ...

8.9 Rotator

Nekatere sisteme lahko obravnavamo kot delec, ki kroži na konstantni razdalji okoli stalne osi. V tem primeru se razdalja do središča ne spreminja in je radialni del valovne funkcije $R(r)$ kar enak konstanti. Zaradi enostavnosti vzemimo še $V(r) = \text{konst.} = 0$. K energiji sistema prispeva le rotacijska kinetična energija, odvisna od kvantnega števila l :

$$E_l = \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}, \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (8.36)$$

Valovna funkcija delca je odvisna le od ϑ in φ in je sorazmerna z $Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$.



Slika 64: Model rotatorja in njegov spekter.

9 Sistemi nerazločljivih delcev

9.1 Fermioni in bozoni

Valovna funkcija dveh delcev. Doslej smo se ukvarjali z valovnimi funkcijami, ki ustrezajo enemu samemu delcu. V fizikalno zanimivih sistemih, kot so atomi ali molekule, pa nas pogosto zanima obnašanje dveh ali več delcev. Kako zapišemo valovno funkcijo v takšnih primerih? Zaradi enostavnosti se omejimo na sistem v eni razsežnosti. Prvi delec naj bo v stanju, ki ga opisuje funkcija $\psi_a(x)$, drugi pa v stanju $\psi_b(x)$. Stanji a in b sta lahko dve funkciji harmonskega oscilatorja z različnima n ali dve funkciji v ravni jami, ... Funkcijo $\psi_a(x)$ bomo imenovali *enodelčna valovna funkcija*. Valovna funkcija dveh delcev je funkcija dveh spremenljivk, koordinate prvega delca x_1 in koordinate drugega delca x_2 ; poleg tega ima skupna funkcija še dva indeksa, ki ustrezata dvema enodelčnim funkcijama: $\Psi_{ab}(x_1, x_2)$. Valovno funkcijo interpretiramo podobno kot v primeru enodelčne funkcije: $|\Psi_{ab}(x_1, x_2)|^2 \Delta x_1 \Delta x_2$ je verjetnost, da je prvi delec v intervalu Δx_1 okoli lege x_1 in hkrati drugi delec v intervalu Δx_2 okoli x_2 . Iz verjetnostnega računa vemo, da se v takšnem primeru skupna verjetnost zapiše kot *produkt* obeh verjetnosti:

$$P_{1,2} = P_1 P_2 \quad \text{ali} \quad |\Psi_{ab}(x_1, x_2)|^2 \Delta x_1 \Delta x_2 = |\psi_a(x_1)|^2 \Delta x_1 |\psi_b(x_2)|^2 \Delta x_2, \quad (9.1)$$

kar implicira, da je valovna funkcija dveh delcev produkt enodelčnih valovnih funkcij za prvi in za drugi delec:

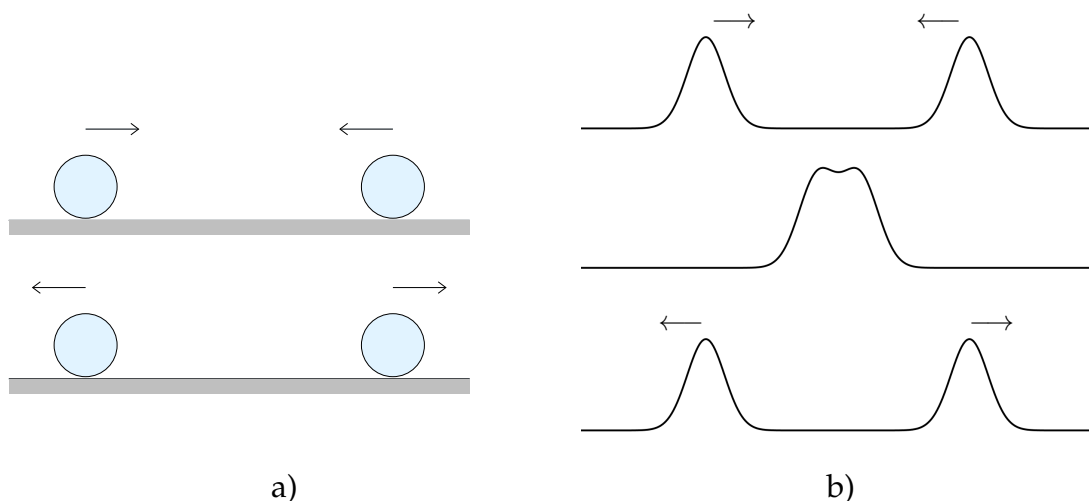
$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = \psi_a(x_1) \psi_b(x_2).$$

A to še ni kompletan zapis; upoštevati moramo, da so kvantni delci *nerazločljivi*.

Nerazločljivi delci. Enaki kvantni delci – na primer elektroni – se med seboj ne razlikujejo. Lastnosti elektrona so določene z njegovim nabojem in maso¹⁰, drugih lastnosti, po katerih bi lahko razlikovali elektron od elektrona, pa ni. Dva elektrona sta torej popolnoma enaka in ju ni mogoče razlikovati. Opazujmo srečanje dveh elektronov, ki se na začetku gibljeta drug proti drugemu; tisti na levi naj bo prvi, oni na desni pa drugi. Ker sta delca nerazločljiva, pomeni, da na koncu ni mogoče povedati, ali je levi elektron prvi, desni pa drugi in sta delca elastično centralno trčila, ali pa je levi elektron drugi in desni prvi in sta delca šla le drug mimo drugega. Iz izkušenj z makroskopskimi delci se nam takšna lastnost zdi nenavadna. Bolje jo bomo razumeli, če si namesto „biljardnih kroglic“ predstavljamo srečanje dveh enakih samotnih valov na vodni gladini ali na vrvi. Ustvarimo dva vala, ki se gibljeta drug proti drugemu in po srečanju nadaljujeta svojo pot. V tem primeru ne moremo reči, ali je pri srečanju prišlo do odboja, ali pa sta vala potovala drug „skozi“ drugega. V primeru valov torej ni nenavadno, če valov ne moremo identificirati kot prvega in drugega.

Izključitveno načelo. V sistemu dveh enakih delcev to pomeni, da ne moremo trditi, da je prvi delec vedno v stanju a in drugi v stanju b . Ker sta delca nerazločljiva, je

¹⁰Kasneje bomo spoznali, da ima elektron tudi vrtilno količino.



Slika 65: Trk dveh nerazločljivih delcev (a)) in trk dveh valov na vrvi (b)).

lahko tudi drugi delec v stanju a in prvi v stanju b . Smiselno je predpostaviti, da sta obe konfiguraciji enako verjetni. Namesto (9.1) lahko zapišemo

$$|\Psi_{ab}(x_1, x_2)|^2 \Delta x_1 \Delta x_2 = \left(\frac{1}{2} |\psi_a(x_1)|^2 |\psi_b(x_2)|^2 + \frac{1}{2} |\psi_a(x_2)|^2 |\psi_b(x_1)|^2 \right) \Delta x_1 \Delta x_2. \quad (9.2)$$

Od tod lahko sklepamo, da moramo tudi v valovni funkciji upoštevati obe možnosti s po velikosti enakima koeficientoma:

$$\Psi_{ab}(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_a(x_1)\psi_b(x_2) \pm \psi_a(x_2)\psi_b(x_1)) \quad (9.3)$$

Upoštevali smo, da ima lahko drugi člen tudi negativen predznak, saj v obeh primerih dobimo pozitivni predznak pri verjetnostni gostoti.¹¹ Izbira predznaka pri drugem členu ima daljnosežne posledice. Pozitivni predznak velja za delce, ki jim pravimo *bozoni*, negativni pa za *fermione*. Hitro se prepričamo, da za bozone pri zamenjavi delcev (oziroma njihovih koordinat, $x_1 \leftrightarrow x_2$) velja

$$\Psi_{ab}^B(x_2, x_1) = \Psi_{ab}^B(x_1, x_2),$$

za fermione pa

$$\Psi_{ab}^F(x_2, x_1) = -\Psi_{ab}^F(x_1, x_2).$$

Pravimo, da je bozonska valovna funkcija *simetrična* na zamenjavo delcev, fermionska pa *antisimetrična*. Razlika se pozna v primeru, ko sta enodelčni stanji enaki, $b = a$. Sledi

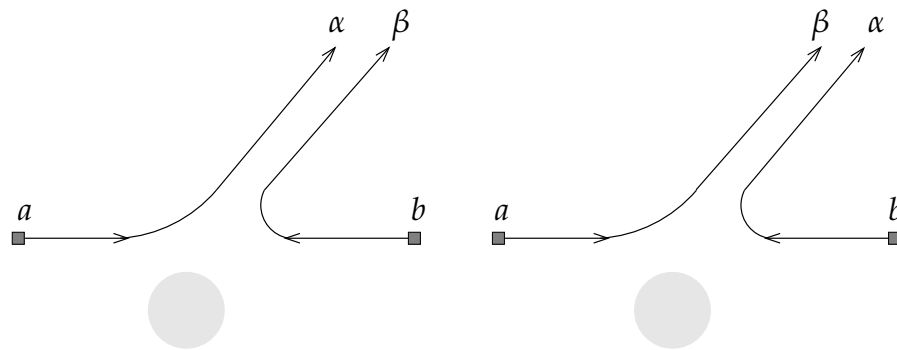
$$\Psi_{aa}^B(x_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} 2 \psi_a(x_1)\psi_a(x_2). \quad (9.4)$$

$$\Psi_{aa}^F(x_1, x_2) = 0. \quad (9.5)$$

¹¹Če iz vrednotimo $|\Psi_{ab}(x_1, x_2)|^2$ dobimo poleg obeh členov v (9.2) tudi mešane člene oblike $\psi_a^*(x_1)\psi_b^*(x_2)\psi_a(x_2)\psi_b(x_1)$, kar ustreza situaciji, ko bi bil delec 1 hkrati v stanju a in b . To pa pri stanjih, ki jih dobimo z reševanjem Schrödingerjeve enačbe, ni mogoče.

Drugo enačbo interpretiramo tako, da dva (enaka) fermiona ne moreta biti hkrati v istem stanju. Enako velja za tri, štiri, pet ... fermionov. Tej lastnosti fermionov pravimo *Paulijevo izključitveno načelo*.

Sipanje nerazločljivih delcev. Primerjajmo obnašanje fermionov in bozonov pri sipanju. Prvi delec prihaja iz izvira a , drugi iz izvira b ; po srečanju se delca sipljeta in nadaljujeta pot do detektorja v približno isti smeri z enakima velikostma gibalne količine. Končno stanje (valovno funkcijo) prvega delca označimo z $\alpha(1)$ in drugega z $\beta(2)$ (α in β ustrezata ravnemu valu z določenim k in določeno smerjo). Detektor prav tako



Slika 66: Sipanje dveh delcev iz začetnih stanj a in b v končni stanji α in β . Na desni sliki sta končni stanji zamenjani. (S sivino je nakazana prisotnost tretjega delca, ki zagotavlja ohranitev gibalne količine celotnega sistema, na razmislek pa ne vpliva.)

zazna dogodek, ko je delec iz prvega izvira na koncu v stanju β , delec iz drugega izvira pa v stanju α . Če delca nista nerazločljiva – recimo, da imamo opravka z elektronom in mionom, ali protonom in nevtronom – lahko oba dogodka razlikujemo. Kot smo spoznali pri obravnavi interferenčnih poskusov, je skupna verjetnost za oba dogodka kar vsota verjetnosti za vsak dogodek posebej¹²:

$$P(\text{razločljivi}) = P(a \rightarrow \alpha) + P(a \rightarrow \beta) = |\alpha(1)|^2 |\beta(2)|^2 + |\alpha(2)|^2 |\beta(1)|^2.$$

Pri sipanju nerazločljivih delcev pa ni mogoče ugotoviti, ali je delec, ki je na koncu v stanju α , prišel iz izvira a ali iz izvira b . V tem primeru moramo najprej sešteti valovni funkciji. Pri tem je pomembno, ali sta delca bozona ali fermiona:

$$P(\text{bozoni}) = |\Psi(a \rightarrow \alpha) + \Psi(a \rightarrow \beta)|^2 = |\alpha(1)\beta(2) + \alpha(2)\beta(1)|^2. \quad (9.6)$$

$$P(\text{fermioni}) = |\Psi(a \rightarrow \alpha) - \Psi(a \rightarrow \beta)|^2 = |\alpha(1)\beta(2) - \alpha(2)\beta(1)|^2. \quad (9.7)$$

Vzemimo sedaj, da sta delca pri obeh dogodkih na koncu v istem stanju, $\beta = \alpha$. V primeru razločljivih delcev dobimo

$$P(\text{razločljivi}) = 2|\alpha(1)|^2 |\alpha(2)|^2, \quad (9.8)$$

¹²Zapis $a \rightarrow \alpha$ za prvi delec implicira $b \rightarrow \beta$ za drugi delec, $a \rightarrow \beta$ za prvi delec pa $b \rightarrow \alpha$ za drugi delec.

v primeru bozonov torej

$$P(\text{bozoni}) = 4|\alpha(1)|^2|\alpha(2)|^2 = 2P(\text{razločljivi}), \quad (9.9)$$

v primeru fermionov pa $P(\text{fermioni}) = 0$.

Verjetnosti v primeru treh ali več bozonov. Rezultate lahko posplošimo na sistem treh ali več delcev. Za bozone velja, da mora biti valovna funkcija več delcev simetrična na zamenjavo poljubnih dveh delcev, pri fermionih pa antisimetrična. Pri treh bozonih namesto (9.6) dobimo

$$P = |\alpha(1)\beta(2)\gamma(3) + \alpha(2)\beta(1)\gamma(3) + \dots|^2$$

Število členov je enako 6, saj lahko tri delce postavimo na tri prosta mesta na $3 \cdot 2 = 6$ različnih načinov. V primeru razločljivih delcev namesto (9.8) dobimo $P(\text{razločljivi}) = 6|\alpha(1)|^2|\alpha(2)|^2$, namesto (9.9) pa

$$P(\text{bozoni}) = 36|\alpha(1)|^2|\alpha(2)|^2|\alpha(3)|^2 = 6P(\text{razločljivi}). \quad (9.10)$$

V splošnem velja

$$P(\text{bozoni}) = (n!)^2|\alpha(1)|^2|\alpha(2)|^2 \dots |\alpha(n)|^2 = n!P(\text{razločljivi}). \quad (9.11)$$

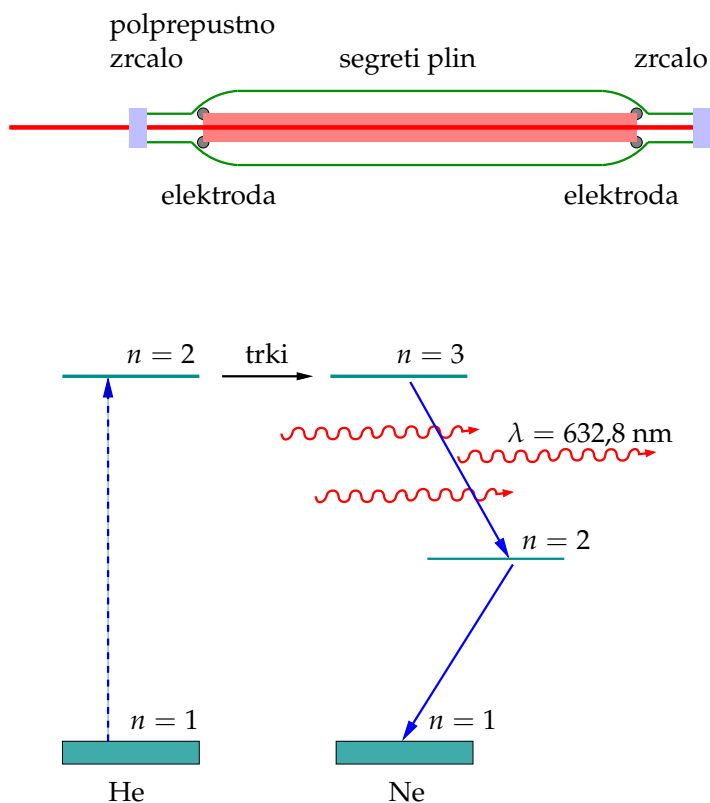
To pomeni, da je verjetnost, da se n bozonov siplje v isto enodelčno stanje, $n!$ krat večja kot bi bila v primeru razločljivih delcev. Rezultat interpretiramo tudi tako, da je verjetnost, da se n -ti bozon siplje v stanje, v katerem je že $n - 1$ bozonov, n krat večja kot v primeru, ko v stanju ni nobenega delca.

Stimulirana emisija in laserji. Namesto o sipanju lahko v primeru fotonov govorimo tudi o emisiji fotona pri prehodu nabitega delca iz vzbujenega stanja v osnovno (ali nižje ležeče) stanje. V tem primeru se verjetnost za emisijo poveča $n + 1$ krat, če je v okolici prisotno n fotonov, ki imajo vsi enako valovno dolžino in se vsi gibljejo v isti smeri. Govorimo o *stimulirani emisiji* – okolica v tem primeru „stimulira“ atom, da izseva foton hitreje, kot bi ga v primeru, ko bi bil atom izoliran od okolice.

Stimulirano emisijo izkoriščajo *laserji*¹³.

Delovanje si oglejmo na primeru helij-neonovega laserja. Svetloba, ki jo izseva laser, nastane pri prehodu elektrona iz stanja z $n = 3$ v stanje z $n = 2$ v atomu neona. Valovna dolžina rdeče svetlobe je 632,8 nm. Najprej opišimo razliko med svetlobo, ki jo izseva laser, in enobarvno (rdečo) komponento svetlobe, ki jo izseva običajna neonska cev in ustreza izbranemu prehodu med atomskimi nivoji. Cev seva svetlobo v različnih smereh in z različnimi valovnimi dolžinami, ki so posledica Dopplerjevega pojava in trkov zaradi termičnega gibanja atomov neona. V laserski svetlobi pa je zastopana le ena sama valovna dolžina in vsi fotoni se gibljejo v isti smeri (fotoni so torej vsi v istem kvantnem stanju.)

¹³LASER pomeni „Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation“ (ojačevanje svetlobe s stimuliranim sevanjem valovanja).



Slika 67: Laser.

V laserju postavimo neonsko cev, v kateri je tudi nekaj helija, med ravni zrcali, tako da med njima nastane stoječe valovanje z izbrano valovno dolžino. Med elektrodama teče električni tok, ki vzbuja atome v plinu. Fotoni stoječega valovanja stimulirajo prehode med omenjenima nivojema atoma neona in sicer takšne, pri katerih se izseva foton, ki ima enako valovno dolžino in smer kot fotoni, ki resonirajo med zrcaloma. Pri laserjih z zveznim delovanjem je eno od zrcal polprepustno in del svetlobe zapusti napravo v obliki vzporednega curka. Pri pulznih laserjih se eno od zrcal nenadoma odpre in vsi fotoni naenkrat planejo na prosto. Na ta način dosežemo izjemno veliko moč, ki jo lahko zberemo na majhnem delu prostora.

Za delovanje laserja mora biti izpolnjen pogoj, da je število atomov, pri katerih je elektron na zgornjem energijskem nivoju ($n = 3$ v primeru neona), večje od števila atomov, pri katerih je elektron na spodnjem nivoju ($n = 2$). Kot bomo spoznali v naslednjem poglavju, je v segretem plinu situacija ravno obratna: število atomov z elektroni v višjih vzbujenih stanjih je manjše od števila atomov z elektroni v stanjih z nižjo energijo. Tu priskočijo na pomoč helijevi atomi. Helijev atom je lahko v vzbujenem stanju, pri katerem je elektron v stanju z $n = 2$; to stanje je energijsko blizu stanju neona z $n = 3$. Pri trkih med helijevimi in neonovimi atomi lahko vzbujeni helijev atom preda energijo atomu neona, ki se vzbudi v stanje z $n = 3$, helijev atom pa se vrne v osnovno stanje. Tak proces je zelo verjeten, zato je v segretem plinu veliko neonovih atomov z elektroni v stanju $n = 3$. Elektron ne more preiti direktno v osnovno stanje, pač pa

najprej preskoči v stanje z $n = 2$ (pri tem izseva svetlobo z valovno dolžino 632,8 nm) in nato v osnovno stanje z $n = 1$ ¹⁴. Drugi prehod se zgodi veliko hitreje kot prvi, zato je v plinu malo atomov neona v vzbujenem stanju z $n = 2$, veliko več je tistih v stanju $n = 3$. Pogoj za delovanje laserja je tako izpolnjen: prehodi iz stanja $n = 3$ v $n = 2$ potekajo predvsem preko stimulirane emisije, kar pomeni, da je večina izsevanih fotonov v istem kvantnem stanju.

Kvantna prepletenost in paradoks EPR. Zaradi enostavnosti privzemimo, da imata delca v zapisu valovne funkcije (9.3) na razpolago le dve stanji. Dve stanji delca običajno povežemo z *lastno vrtilno količino* delca ali *spinom*. Mislimo si, da se delec vrtilno okoli lastne osi, podobno kot rotirajo planeti pri gibanju skozi vesolje. Ampak pri mikroskopskih delcih sta možni le dve vrednosti vrtilne količine. Pri fotonih ti dve možnosti ustrezata levi in desni cirkularni polarizaciji, pri nabitih delcih kot so elektron ali proton, pa dvema orientacijama vrtilne količine v magnetnem polju: v smeri magnetnega olja ali v nasprotni smeri, po velikost enaki $\frac{1}{2}\hbar$. Dve stanji lahko slikovito ponazorimo tudi z znakoma $\uparrow$ — spin gor in $\downarrow$ — spin dol.

Izraz (9.3) ima v tem primeru obliko vsote dveh stanj dveh delcev:

$$\Psi_{12}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_1 \downarrow_2 \pm \uparrow_2 \downarrow_1). \quad (9.12)$$

V prvem stanju ima prvi delec spin $\uparrow$ in drugi $\downarrow$; v drugem sta delca zamenjana. Obe stanji sta enako verjetni; ker je verjetnost odvisna od kvadrata, predznak $\pm$ za interpretacijo ni pomemben¹⁵. Če je prvi delec v stanju $\downarrow$, mora biti drugi delec v stanju $\uparrow$, in obratno. Pravimo, da sta delca *prepletena*. Prepletenost lahko dosežemo tudi s stanjema:

$$\Phi_{12}^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_1 \uparrow_2 \pm \downarrow_2 \downarrow_1). \quad (9.13)$$

Mislimo si, da v nekem trenutku ustvarimo par elektronov v stanju Ψ_{12}^{-} in delca odletita vsaksebi v nasprotnih smereh. Opazovalec A izmeri orientacijo spina elektrona, ki leti proti njemu. Po standardni interpretaciji kvantnomehanskih procesov izida poskusa ne moremo enolično napovedati, pač pa lahko le napovemo, da bo izmeril bodisi spin $\uparrow$ z verjetnostjo 50 % ali z enako verjetnostjo spin $\downarrow$. Denimo, da A izmeri spin $\uparrow$. Kaj bo izmeril opazovalec, ki meri orientacijo spina elektrona, ki leti v drugi smeri? Ker sta stanji obeh elektronov prepleteni, mora izmeriti nasprotno orientacijo spina, torej $\downarrow$. Če pa bi A izmeril $\downarrow$, bi moral B izmeriti $\uparrow$. Ampak, kako drugi elektron ve, kaj je izmeril opazovalec A? Einstein je sklepal, da si morata elektrona izmenjati informacijo, a ta informacija lahko potuje kvečjemu s svetlobno hitrostjo. Ker pa poskus lahko izvedeta sočasno, izid poskusa, kot ga napoveduje kopenhavska interpretacija kvantne mehanike, krši kavzalnost, saj je v enem opazovalnem sistemu vzrok (meritev A) pred posledico (meritev B), v drugem pa posledica pred vzrokom. V kasnejših

¹⁴O prehodu med stanjema odloča matrični element za prehod, ki smo ga omenili v poglavju 7.5. Če je matrični element nič, prehod ni možen.

¹⁵Poleg spina je stanje delca določeno še z drugimi kvantnimi števili, povezanimi z gibanjem delca v prostoru. Predznak je pomemben, če sta oba delca v istem prostorskem stanju, na primer dva elektrona v osnovnem stanju vodikovega atoma, ali dva fotona laserske svetlobe. V tem primeru moramo pri elektronih zapisati predznak $-$, pri fotonih pa predznak $+$.

teoretičnih in eksperimentalnih analizah poskusa so ugotovili, da si delca ne izmenjata informacije. Po drugi strani pa so pokazali, da s pomočjo opisanega poskusa ni mogoče prenašati informacij in energije. Eksperiment s prepletenima fotonoma so izvedli na razdalji 143 km in potrdili pravilnost kvantne interpretacije.

9.2 *Osnove kvantnega računalništva

Kubit. Klasični računalniki temeljijo na operacijah med *biti*. Bit predstavlja osnovno enoto informacije in lahko zavzame dve vrednosti, 0 in 1. Bit realiziramo z enosmerno napetostjo, tako da bit 0 ustreza napetosti 0 V, bit 1 pa napetosti 5 V (ali nižji).

Osnovna enota informacije v kvantnem računalniku je *qubit*, slovensko *kubit*. Predstavlja dve možni kvantni stanji; običajno ju ponazorimo s spinom elektrona ali fotona, tako da $\uparrow$ ustreza $|0\rangle$, $\downarrow$ pa $|1\rangle$.

Kvantna reprezentacija se bistveno razlikuje od klasične reprezentacije. Kvantni delec lahko obstaja kot *linearna superpozicija* stanj, saj je poljubna linearna kombinacija rešitev Schrödingerjeve enačbe tudi rešitev. Stanje delca s spinom zato v splošnem zapišemo kot¹⁶

$$|\psi\rangle = a_0 \uparrow + a_1 \downarrow \equiv a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \quad (9.14)$$

kjer sta a_0 in a_1 kompleksna koeficienta. Ker mora biti valovna funkcija normirana, velja $|a_0|^2 + |a_1|^2 = 1$, tako da za zapis zadoščajo le tri realna števila. Poleg tega lahko za enega od koeficientov izberemo realno vrednost in ostaneta le dva prosta realna parametra. Izberemo dva kota, θ in ϕ na *Blochovi* sferi in zapišemo:

$$|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |1\rangle. \quad (9.15)$$

Izbiri $\theta = 0$ ustreza stanje $|0\rangle$, ki se na sferi nahaja na „severnem“ polu, izbiri $\theta = 180^\circ$ in $\phi = 0$ pa $|1\rangle$ na „južnem“ polu.

Delec, ki nosi informacijo, je torej hkrati v stanju $|0\rangle$ in $|1\rangle$. Ko izmerimo orientacijo spina delca, pa dobimo točno določeno vrednost, bodisi 0 ali 1. Če poskus ponavljamo, bomo enkrat dobili 0, drugič 1, nikoli pa ne vmesne vrednosti. Kvadrat absolutne vrednosti koeficienta a_0 (a_1) pomeni verjetnost, da pri meritvi izmerimo vrednost 0 (1). Pravimo, da pri meritvi valovna funkcija delca *kolapsira*, in spremenljivka, ki določa stanje sistema, zavzame točno določeno vrednost.

Kubitni nizi. Več bitov v klasičnem računalniku tvori nize ali registre, ti pa predstavljajo številke, črke, barve Podobno v niz sestavimo več kubitov. V primeru dveh kubitov so možne štiri kombinacije 0 in 1: 00, 01, 10, 11. Stanju sistema (dveh delcev) ustreza linearna kombinacija stanj

$$|\Psi\rangle = a_0|00\rangle + a_1|01\rangle + a_2|10\rangle + a_3|11\rangle, \quad (9.16)$$

kjer so $a_i, i = 0, 1, 2, 3$ kompleksni koeficienti, normirani kot $\sum_{i=0}^3 |a_i|^2 = 1$. Podobno nizu treh kubitov ustreza stanje

$$|\Psi\rangle = a_0|000\rangle + a_1|001\rangle + a_2|010\rangle + a_3|011\rangle + a_4|100\rangle + a_5|101\rangle + a_6|110\rangle + a_7|111\rangle.$$

Stanje $|101\rangle$ pomeni stanje, v katerem ima prvi delec spin $\downarrow$, drugi $\uparrow$ in tretji $\downarrow$.

¹⁶Pri zapisu kvantnega stanja delca bomo zaradi preglednosti uporabili zapis z oklepaji $|\rangle$ — *keti*.

Procesiranje. Klasični niz je v točno določenem stanju; če večkrat preberem vrednost niza, dobimo vedno enak rezultat.

Kvantni niz na začetku postopka postavimo na določeno vrednost, recimo $|000\rangle$. Nato niz obdelamo z zaporedjem tako imenovanih kvantnih vrat. Kvantni niz je lahko na koncu v katerem koli baznem stanju, po katerem smo stanje razvili: $|a_i|^2$ predstavlja *verjetnost*, da se niz nahaja v i -tem baznem stanju. Ko preberemo vrednost niza, lahko dobimo kateri koli rezultat z verjetnostjo $|a_i|^2$. Rezultat torej ni enoličen, a s ponavljanjem postopka lahko natančnost rezultata izboljšamo.

Kvantna logična vrata. V klasičnih računalnikih operacije nad biti izvajamo z elektronskimi vezji, ki jim pravimo logična vrata, na primer vrata AND, OR, NOT, NAND, NOR, V kvantnem računalniku operacije izvajamo s *kvantnimi logičnimi vrati*.

Formalno lahko operacije, s katerimi spreminjamo kubite, upodobimo z *unitarnimi* matrikami. Unitarne matrike zagotovijo, da se pri operaciji ohranja norma stanja. Če kubit v enačbi (9.14) predstavimo s stolpcem $\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}$, imajo značilne matrike obliko

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Prva je Hadamardova matrika, druge tri so Paulijeve matrike in so sorazmerne z operatorji za tri komponente spinske vrtilne količine. Matrika $\mathbf{H}$ iz stanja $|0\rangle$ ustvari stanje $\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$, σ_x stanje $|1\rangle$ spremeni v $|0\rangle$ in obratno, σ_y ima podoben učinek, le da spremeni še fazo, σ_z ohrani $|0\rangle$, stanju $|1\rangle$ pa spremeni predznak: Zapišimo

$$\uparrow = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \downarrow = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_0 \uparrow + a_1 \downarrow = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix}.$$

Velja

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \downarrow &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow + \downarrow), \\ \sigma_x \uparrow &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \downarrow, \quad \sigma_z \downarrow = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = -\downarrow, \\ \sigma_x(a_0 \uparrow + a_1 \downarrow) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = (a_1 \uparrow + a_0 \downarrow). \end{aligned}$$

Učinek vrat lahko realiziramo z magnetnim poljem ali elektromagnetnim valovanjem, odvisno od tega, katere delce uporabljamo za upodobitev kubita.

Uporaba. Kvantni računalniki niso primerni za reševanje vseh vrst problemov, ki jih zastavljamo računalnikom. So pa lahko izjemno hitri pri reševanju nekaterih nalog. Ena takšnih nalog je povezana s problemi kodiranja pri varnem prenosu informacije. Kodiranje večinoma temelji na zelo zelo velikih številih M , ki so produkti dveh (ali več) zelo velikih praštevil, P_1 in P_2 . Število M potuje po povezavi in če sprejemnik pozna enega od praštevil (P_1), lahko dekodira informacijo s pomočjo drugega praštevila, ki ga enostavno izračuna kot $P_2 = M/P_1$. Če nekdo povezavi prisluškuje, prejme le število

M. Kodo lahko razbije tako, da ugotovi, iz katerih dveh praštevil je M sestavljen. To lahko ugotovi le s poskušanjem, kar pa je izjemno dolgotrajen postopek. Danes verjamemo, da bo mogoče kodo razbijati s uporabo kvantnih računalnikov, zato ni čudno, da se za njihov razvoj zelo zanima in ga finančno podpira vojska.

Drug zanimiv problem je Fourierova transformacija, ki je tudi povezana z dekodiranjem.

V splošnem so zanimivi tako imenovani NP polni problemi, pri katerih najdemo optimalno rešitev le s poskušanjem vseh možnosti. Ker se pogosto zadovoljimo le z dovolj optimalno rešitvijo, nas tu probabilistična narava kvantnega računanja ne moti. Takšna metoda je metoda kvantnega ohlajanja, ki je izpeljanka iz metode simuliranega ohlajanja (simulated annealing). Obstaja tudi kvantna verzija metoda Monte Carlo, ki ima že v klasični izvedbi probabilističen značaj.

Kvantna teleportacija. Izraz je povzet po znanstveno fantastični literaturi, čeprav s premikanjem predmetov ali oseb na velikih razdaljah kvantna teleportacija nima nikakršne povezave. Pri kvantni teleportaciji prenesemo popolno informacijo o stanju (kvantnega) delca z ene lokacije na drugo s pomočjo klasične komunikacije in para prepletenih delcev.

V najbolj enostavnem primeru prenesemo en kubit informacije iz kraja A v kraj B. Informacija se pri tem *prenese* in ne *kopira*, kar pomeni, da v A ni več informacije o stanju (nosilca) kubita. Kubit v kraju A, ki ga bomo prenesli, je določen s parametroma α in β v zapisu $\psi = \alpha \uparrow + \beta \downarrow$.

V tretjem kraju ustvarimo prepleten par identičnih delcev, identičnih tudi delcu, ki je nosilec informacije, ki jo želimo prenesti. Prepleteni par je v enem od štirih stanj z valovno funkcijo Ψ_{12}^+ , Ψ_{12}^- , Φ_{12}^+ ali Φ_{12}^- , zapisanih v (9.12) in (9.13). Eksperimentatorja v A in B se vnaprej dogovorita, za katero prepleteno stanje gre. Naj bo v našem primeru to Ψ_{12}^+ , ki ga označimo Ψ_{AB}^+ . Enega od delcev pošljemo v kraj A (imenujmo ta delec kar A), drugega v kraj B (delec B). Delec, ki nosi informacijo o kubit, imenujmo C. Valovno funkcijo treh delcev zapišemo kot

$$\Psi_{AB}^+ \cdot \psi_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_B + \downarrow_A \uparrow_B) (\alpha \uparrow_C + \beta \downarrow_C).$$

V nadaljnjih korakih bomo izraz le preuredili (končni rezultat še vedno enak začetnemu). Najprej zmnožimo in in zamenjamo vrstni red delcev B in C v produktih:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \uparrow_A \uparrow_C \downarrow_B + \beta \uparrow_A \downarrow_C \downarrow_B + \alpha \downarrow_A \uparrow_C \uparrow_B + \beta \downarrow_A \downarrow_C \uparrow_B). \quad (9.17)$$

Produkte prvega in tretjega delca izrazimo s funkcijami Ψ_{AC}^+ , Ψ_{AC}^- , Φ_{AC}^+ in Φ_{AC}^- , ki jih v našem primeru zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Psi_{AC}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_C + \downarrow_A \uparrow_C), \\ \Psi_{AC}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \downarrow_C - \downarrow_A \uparrow_C), \\ \Phi_{AC}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \uparrow_C + \downarrow_A \downarrow_C), \\ \Phi_{AC}^- &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\uparrow_A \uparrow_C - \downarrow_A \downarrow_C). \end{aligned}$$

Seštejemo in odštejemo prvi dve enačbi in enako še tretjo in četrto:

$$\begin{aligned}\uparrow_A \downarrow_C &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{AC}^+ + \Psi_{AC}^-), \\ \downarrow_A \uparrow_C &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi_{AC}^+ - \Psi_{AC}^-), \\ \uparrow_A \uparrow_C &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{AC}^+ + \Phi_{AC}^-), \\ \downarrow_A \downarrow_C &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\Phi_{AC}^+ - \Phi_{AC}^-).\end{aligned}$$

Stanje vseh treh delcev v zapisu (9.17) sedaj lahko izrazimo s prepletenimi funkcijami delcev A in C v kraju A in stanjem delca B v kraju B:

$$\begin{aligned}\Psi_{AB}^+ \cdot \psi_C &= \frac{1}{2} \Psi_{AC}^+ \cdot (\alpha \uparrow_B + \beta \downarrow_B) \\ &+ \frac{1}{2} \Psi_{AC}^- \cdot (\alpha \uparrow_B - \beta \downarrow_B) \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{AC}^+ \cdot (\alpha \downarrow_B + \beta \uparrow_B) \\ &+ \frac{1}{2} \Phi_{AC}^- \cdot (\alpha \downarrow_B - \beta \uparrow_B).\end{aligned}\quad (9.18)$$

Opazimo, da ima preurejeni izraz podobno strukturo kot začetni, le da se sedaj linearna kombinacija stanj delca C pojavi v zapisu delca B in sicer skupaj s prepleteno funkcijo Ψ^+ , v kateri pa je drugi delec C in ne več B.

Preden eksperimentator v kraju A določi stanje delcev A in C, sta delca A in C lahko z enako verjetnostjo v katerem koli od baznih prepletenih stanj dveh delcev, delec B pa v štirih različnih stanjih, ki ustrezajo štirim stanjem kubita. Kot smo že omenili, je eno od teh stanj enako stanju delca C.

Eksperimentator v kraju A izmeri orientacijo spinov delcev A in C in dobi vrednosti, ki ustrezata enemu od štirih baznih stanj. Zaradi prepletenosti vseh treh delcev je v tem trenutku tudi delec B v kraju B v točno določenem stanju in sicer v enem od stanj, zapisanih v (9.18). Eksperimentator v A sporoči rezultat svoje meritve v obliki dveh bitov po klasični komunikacijski povezavi: rezultat 00 ustreza prvemu stanju (Ψ_{AC}^+), 01 drugemu (Ψ_{AC}^-), 10 tretjemu (Φ_{AC}^+) in 11 četrtemu stanju (Φ_{AC}^-). Ker pozna vsa možna stanja treh delcev (9.18), eksperimentator v kraju B sedaj ve, v katerem stanju je delec B. Na podlagi te informacije, stanje delca bodisi obdrži ali pa spremeni. Če prejel informacijo 00, stanje ohrani, če je prejel 01, spremeni predznak pri spinu $\downarrow$ (z vrati σ_z), pri 10 obrne orientacijo spinov (σ_x), pri 11 obrne orientacijo in spremeni predznak pri spinu $\downarrow$ (σ_x in σ_z).

Lahko se vprašamo, zakaj eksperimentator v kraju B ne meri kar stanja delca B, ki je prišel do njega, in na ta način ugotovi, v kakšnem stanju je. A če določi stanje, ga hkrati tudi uniči, saj po meritvi lahko ugotovi le, da je delec v stanju bodisi $\downarrow$ ali $\uparrow$.

Kaj je uporabna vrednost opisanega postopka? V splošnem seveda ne bomo pošiljali le en kubit sporočila, temveč cel niz. To je način, na katerega si kvantni računalniki izmenjujejo informacije. Izmenjava je kodirana in izmenjavi *niti načeloma* ni mogoče prisluškovati. Če prestrežemo klasično informacijo, ne vemo, na katero prepleteno kvantno stanje se nanaša. Če prestrežemo enega ali celo oba delca v prepletenem stanju, informacija nikakor ni povezana s stanjem tretjega delca, katerega stanje prenašamo. Povejmo, da po meritvi eksperimentatorja A delec C ni več v stanju, v katerem je bil pred začetkom poskusa; njegovo stanje je prevzel delec B.

Poskuse s teleportacijo so doslej izvedli s fotoni in atomi.

10 Osnove statistične fizike

10.1 Sistemi delcev pri končni temperaturi

Atomi, molekule, kristali in drugi sistemi delcev niso ves čas v istem kvantnem stanju. Z absorpcijo fotonov iz okolice elektroni prehajajo iz nižjih v višje nivoje; z višjih nivojev prehajajo na nižje z emisijo fotona. Višja kot je temperatura, večja je verjetnost, da je atom ali molekula v vzbujenem stanju. Pri absolutni ničli vzbujevanje zamre; sistem je v najnižjem energijskem stanju (osnovnem stanju).

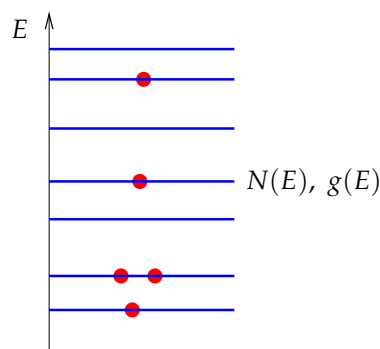
Pri statistični obravnavi sistemov nas zanima, koliko delcev je v katerem od vzbujenih stanj. Pri tem sta pomembni energija vzbujenega stanja in temperatura. Namesto števila delcev vpeljemo *delež* $n(E) = \Delta N(E) / N_0$, pri čemer je $\Delta N(E)$ število delcev pri energiji E in N_0 število vseh delcev; $n(E)$ je torej *gostota porazdelitve* delcev po energijah. Porazdelitev je normirana:

$$n(E) = \frac{\Delta N(E)}{N_0},$$

$$\sum_E n(E) = 1.$$

Porazdelitev zapišemo kot produkt

$$n(E) = g(E) f(E, T).$$



Slika 68: Zasedenost stanj pri končni T

Tu je $g(E)$ stopnja degeneriranosti nivoja z energijo E , to je število stanj kvantnega sistema, ki imajo enako energijo, $f(E, T)$ pa je *zasedbeno število* (enodelčnega) stanja z energijo E . Degeneracijo smo spoznali pri vzbujenih stanjih harmonskega oscilatorja v treh razsežnostih. Stanja so bila tam določena s tremi kvantnimi števili n_x , n_y in n_z , energija pa z njihovo vsoto $E = (n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2}) \hbar\omega$. Vsoto $n_x + n_y + n_z = 1$ na primer realiziramo na tri različne načine, vsoto $n_x + n_y + n_z = 2$ pa na šest načinov. Pomeni, da je stopnja degeneriranosti nivoja z energijo $E = \frac{5}{2} \hbar\omega$ enaka $g(E) = 3$, nivoja z $E = \frac{7}{2} \hbar\omega$ pa $g(E) = 6$. Degeneracijo smo srečali tudi pri obravnavi neskončne jame v treh razsežnostih in pri rotatorju.

Zasedbeno število $f(E, T)$ predstavlja povprečno zasedenost izbranega stanja in je odvisno od temperature in od vrste delca. Zaradi izključitvenega načela sme biti zasedbeno število za fermione med 0 in 1. Pri bozonih te omejitve ni; v prejšnjem poglavju smo spoznali, da bozon z večjo verjetnostjo zasede stanje, v katerem je že nekaj bozonov. Poleg tega posebej ločimo še zasedbeno število za klasične delce. V principu so vsi delci kvantni, a v primeru, ko imajo delci na razpolago zelo veliko nezasedenih stanj, njihov fermionski ali bozonski značaj ne pride do izraza. Delce tedaj lahko obravnavamo kot razločljive, tako kot obravnavamo delce v klasični fiziki. V naslednjem podpoglavju ugotovimo, da to velja za atome ali molekule v plinu, ne velja pa za elektrone v kovini, kjer igra izključitveno načelo bistveno vlogo, in moramo delce obravnavati kot fermione.

10.2 Število razpoložljivih stanj

Ocenimo razmerje med številom stanj, ki jih imajo na razpolago delci v dveh značilnih sistemih, in številom delcev. Na podlagi tega razmerja se odločimo, če je potrebno delce v sistemu obravnavati kot kvantne ali kot klasične delce.

Obravnavajmo sistem delcev, zaprt v kocki s stranico ℓ . Za energijo delca v neskončni potencialni jami velja $E = E_X + E_Y + E_Z$. Naj bo E_X prispevek k energiji najvišjega stanja s kvantnim številom n_x , ki je lahko še zasedeno:

$$E_X = \frac{n_x^2 \pi^2 \hbar^2}{\ell^2 2m}, \quad n_x^2 = \frac{8\ell^2 m E_X}{h^2}$$

in podobno za E_Y in E_Z . V povprečju velja $E_X = \frac{1}{3}E$, pri čemer je E ocena za zgornjo mejo energije delca v obravnavnem sistemu. Število stanj, ki jih ima na razpolago delec pri zgornji meji za energijo E , potem ocenimo:

$$n_x^2 = \frac{8\ell^2 m c^2 E}{3h^2 c^2} = n_y^2 = n_z^2 \quad \text{in} \quad \mathcal{N} = n_x n_y n_z = n_x^3.$$

Oceno naredimo za dva značilna sistema: molekule v zraku in elektrone v kovini.

Molekule v zraku. Energijo E ocenimo z dvakratno povprečno energijo molekule zraka pri temperaturi $T = 300$ K: $E \approx 2\bar{E} = 3k_B T = 7 \cdot 10^{-2}$ eV. Dušik in kisik imata približno enaki masi in za mirovno energijo delca vzamemo kar $mc^2 \approx 30 \cdot 10^9$ eV in za stranico kocke $\ell = 1$ m = 10^9 nm. Račun se poenostavi, če Boltzmannovo konstanto zapišemo z elektronvolti: $k_B = R/N_A = 8,617 \cdot 10^{-5}$ eV/K. Izračunamo

$$n_x^2 = \frac{8\ell^2 m c^2 E}{3h^2 c^2} = \frac{8 \cdot 10^{18} \text{ nm}^2 \cdot 30 \cdot 10^9 \text{ eV} \cdot 7 \cdot 10^{-2} \text{ eV}}{3(1240 \text{ eV nm})^2} = 30 \cdot 10^{20},$$

in končno še število razpoložljivih stanj

$$n_x \approx 5 \cdot 10^{10}, \quad \mathcal{N} = n_x^3 \approx 10^{32}.$$

Vemo, da je v $22,4$ m³ plina ravno Avogadrovo število molekul; število molekul v prostornini 1 m³ je potem

$$N = \frac{1 \text{ m}^3}{22,4 \text{ m}^3} N_A = 3 \cdot 10^{25},$$

kar je mnogo manjše od števila razpoložljivih stanj. Molekule v plinu lahko obravnavamo kot **klasične delce**.

Elektroni v kovini. Pri obravnavi fotoefekta smo ugotovili, da so značilne energije prevodniških elektronov nekaj eV. Zgornjo mejo za energijo ocenimo z $E \approx 10$ eV. Velja še: $m_e c^2 \approx 0,5 \cdot 10^6$ eV, in $\ell = 1$ m = 10^9 nm, Izračunamo

$$n_x^2 = \frac{8\ell^2 m_e c^2 E}{3h^2 c^2} = \frac{8 \cdot 10^{18} \text{ nm}^2 \cdot 5 \cdot 10^5 \text{ eV} \cdot 10 \text{ eV}}{3(1240 \text{ eV nm})^2} = 9 \cdot 10^{18}.$$

Pri računi razpoložljivih stanj moramo upoštevati, da imajo elektroni dve polarizaciji in sta na vsakem stanju lahko po dva elektrona:

$$n_x \approx 3 \cdot 10^9, \quad \mathcal{N} = 2n_x^3 \approx 10^{29}.$$

Število elektronov ocenimo v primeru bakra, kjer vsak atom prispeva po en (valenčni) elektron, je

$$N = N_{\text{Cu}} = \frac{m_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} N_A = \rho_{\text{Cu}} \ell^3 \frac{N_A}{M_{\text{Cu}}} \approx 10^{29},$$

pri čemer smo upoštevali $\rho_{\text{Cu}} = 8900 \text{ kg/m}^3$, $M_{\text{Cu}} = 64 \text{ kg/kmol}$ in $N_A = 6 \cdot 10^{26}$. Število elektronov je primerljivo s številom stanj in elektrone moramo obravnavati kot **fermione**.

10.3 Klasični delci: Maxwell-Boltzmannova statistika

Zasedbeno število za klasične delce. Atome in molekule v plinu obravnavamo kot klasične delce. Zasedbeno število izpeljemo iz porazdelitve gostote delcev po višini v izotermni atmosferi. V tem primeru je povprečna kinetična energija delcev neodvisna od višine, energija se spreminja le na račun potencialne energije. Če se v atmosferi dvignemo za dz , se tlak zmanjša za

$$dp = -\rho g dz.$$

Diferencial tlaka izrazimo s spremembo gostote iz splošne plinske enačbe

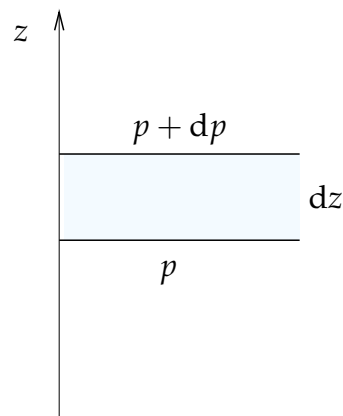
$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \text{delimo z } V: \quad p = \rho \frac{RT}{M}.$$

Iz prve enačbe sledi

$$\frac{RT}{M} d\rho = -\rho g dz$$

z rešitvijo

$$\rho(z) = \rho(0) e^{-Mgz/RT} = \rho(0) e^{-m_1gz/k_B T}.$$



Slika 69: Izotermna atmosfera

Na koncu smo upoštevali, da je masa m_1 enega delca (atoma ali molekule) enaka kilomolski masi, deljeni z Avogadrovim številom N_A , in $R = N_A k_B$, pri čemer je k_B Boltzmannova konstanta. Izraz m_1gz je potencialna energija delca. Ugotovimo, da se z naraščanjem potencialne energije zasedenost stanj eksponentno zmanjšuje. Ker je kinetična energija konstantna, lahko ugotovitev splošimo na celotno energijo delca. Zasedbeno število potem zapišemo v obliki

$$f_{\text{kl}} = f_0 e^{-E/k_B T}, \quad (10.1)$$

pri čemer je f_0 konstanta, ki jo določimo z zahtevo, da je porazdelitev normirana.

Maxwellova porazdelitev. Opazujmo plin znotraj kocke s stranico $\ell = 1$ m. Stene posode ustrezajo neskončnemu potencialu, saj delci plina ne morejo ulti iz posode. Plin obravnavamo kot sistem neodvisnih kvantnih delcev v neskončni ravni jami v treh razsežnostih. Enodelčna stanja so produkti stanj za vsako razsežnost posebej. V smeri x zapišemo enodelčne valovne funkcije kot $\psi_{n_x}(x) = \sqrt{\frac{2}{\ell}} \sin(k_x x)$, $k_x = \frac{\pi}{\ell} n_x$, $n_x = 1, 2, 3, \dots$ in analogno v smereh y in z . Za energijo stanja velja $E = \frac{p^2}{2m_1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_1 \ell^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$. Značilne energijske razlike med stanji so

$$\Delta E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m_1 \ell^2} = \frac{h^2 c^2}{8m_1 c^2 \ell^2} \approx 10^{-22} \text{ eV}.$$

Tako majhna razlika je nemerljiva; to pomeni, da so stanja zelo na gosto porazdeljena. Diskretno porazdelitev po energijah zato nadomestimo z zvezno porazdelitvijo.

Če so energijske razlike med stanji majhne, nas zanima povprečno število delcev v intervalu energij $[E, E + \Delta E]$

$$\Delta N(E) = \Delta \mathcal{N}(E) f(E, T)$$

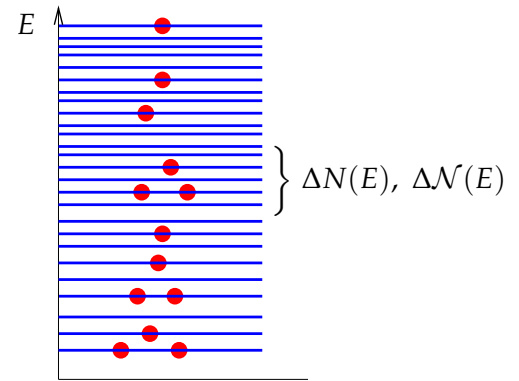
$\Delta \mathcal{N}(E)$ je število vseh stanj v tem energijskem intervalu, $f(E, T)$ pa zasedbeno število. Velja

$$\sum_{\Delta E} \Delta N(E) = N_0.$$

Lahko vpeljemo tudi gostoto porazdelitve

$$w(E) = \frac{\Delta N(E)}{N_0 \Delta E} \xrightarrow{\Delta E \rightarrow 0} = \frac{dN(E)}{N_0 dE},$$

z lastnostjo $\int n(E) dE = 1$.



Slika 70: Porazdelitev pri veliki gostoti stanj

Najprej izpeljimo porazdelitev v eni razsežnosti. Zanima nas le gibanje delcev v smeri osi x . Namesto po energijah zapišimo porazdelitev po hitrostih delcev. Zveza med hitrostjo in stanjem s kvantnim številom n_x je linearna

$$n_x = \frac{\ell}{\pi} k_x = \frac{\ell}{\pi} \frac{p_x}{\hbar} = \frac{\ell}{\pi} \frac{m_1}{\hbar} v_x \quad \text{oziroma} \quad \Delta \mathcal{N} = \Delta n_x = \frac{\ell}{\pi} \frac{m_1}{\hbar} \Delta v_x.$$

Število stanj v intervalu hitrosti je kar premo sorazmerno s širino intervala. Število delcev v intervalu hitrosti Δv_x dobimo tako, da število stanj pomnožimo z zasedbenim številom:

$$\Delta N = \Delta \mathcal{N} f(E, T) = \frac{\ell m_1}{\pi \hbar} \Delta v_x f_0 e^{-E/k_B T}, \quad \frac{\Delta N}{N_0} = A e^{-m_1 v_x^2 / 2k_B T} \Delta v_x, \quad A = \frac{\ell m_1 f_0}{\pi \hbar N_0}.$$

Ker nas zanima le gibanje v smeri x , se delci razlikujejo le po prispevku $\hbar$ kinetični energiji $\frac{1}{2} m_1 v_x^2$. Vse konstante smo združili v eno samo konstanto A , ki jo določimo iz

zahteve, da je gostota porazdelitve

$$w(v_x) = \lim_{\Delta v_x \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{N_0 \Delta v_x} = \frac{dN}{N_0 dv_x} = A e^{-m_1 v_x^2 / 2k_B T}$$

normirana:

$$\int_{-\infty}^{\infty} w(v_x) dv_x = A \int_{-\infty}^{\infty} e^{-m_1 v_x^2 / 2k_B T} dv_x = A \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{2k_B T}{m_1}} = 1, \quad A = \sqrt{\frac{m_1}{2\pi k_B T}}.$$

Pri porazdelitvi v treh razsežnostih nas zanima delež delcev, ki imajo komponento x hitrosti v intervalu $[v_x, v_x + \Delta v_x]$ in hkrati komponenti hitrosti v smeri y in z v intervalih $[v_y, v_y + \Delta v_y]$ in $[v_z, v_z + \Delta v_z]$. Namesto o deležu lahko govorimo tudi o verjetnosti, da je hitrost delca znotraj teh intervalov. Verjetnost zapišemo kot *produkt* verjetnosti za posamezne intervale:

$$\Delta P = \Delta P_x \Delta P_y \Delta P_z = w(v_x) \Delta v_x w(v_y) \Delta v_y w(v_z) \Delta v_z.$$

Ker so vse smeri enakovredne, imajo verjetnostne gostote v vseh smereh enako obliko in lahko zapišemo

$$\begin{aligned} \Delta P(v_x, v_y, v_z) &= A^3 e^{-m_1 v_x^2 / 2k_B T} e^{-m_1 v_y^2 / 2k_B T} e^{-m_1 v_z^2 / 2k_B T} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z \\ &= A^3 e^{-m_1 v^2 / 2k_B T} \Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z, \end{aligned}$$

saj je kvadrat velikosti hitrosti enak $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$. Vidimo, da je porazdelitev odvisna le od *velikosti* hitrosti, ne pa od posameznih komponent. Zato nas zanima porazdelitev po velikosti hitrosti. Pri prehodu na drugo spremenljivko za porazdelitve velja

$$\frac{\Delta P(v)}{\Delta v} = \frac{\Delta P(v_x, v_y, v_z)}{\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z} \left| \frac{dv_x dv_y dv_z}{dv} \right|.$$

Pri izpeljavi drugega člena si pomagamo z analogijo tako, da vzamemo namesto vektorja $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z)$ kar vektor lege $\vec{r} = (x, y, z)$. Potem je

$$\frac{dx dy dz}{dv} = \frac{dV}{dr} = 4\pi r^2, \quad \text{za} \quad V = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

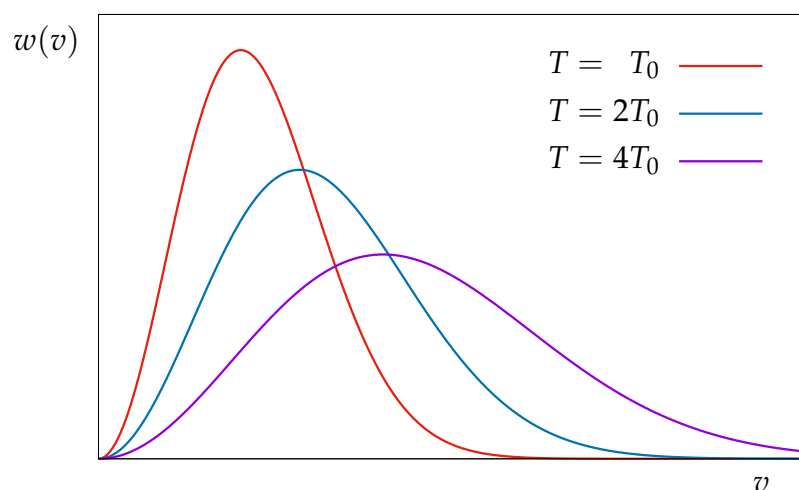
Namesto r sedaj pišimo v in dobimo

$$w(v) = \frac{\Delta P(v)}{\Delta v} = \frac{\Delta P(v_x, v_y, v_z)}{\Delta v_x \Delta v_y \Delta v_z} = A^3 e^{-m_1 v^2 / 2k_B T} 4\pi v^2 = 4\pi \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} v^2 e^{-m_1 v^2 / 2k_B T}.$$

To je *Maxwellova porazdelitev* po hitrostih delcev.

Hitrost, pri kateri ima porazdelitev vrh, izračunamo z zahtevo:

$$\left. \frac{dw(v)}{dv} \right|_{v=\max} = 0, \quad \text{sledi} \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}.$$



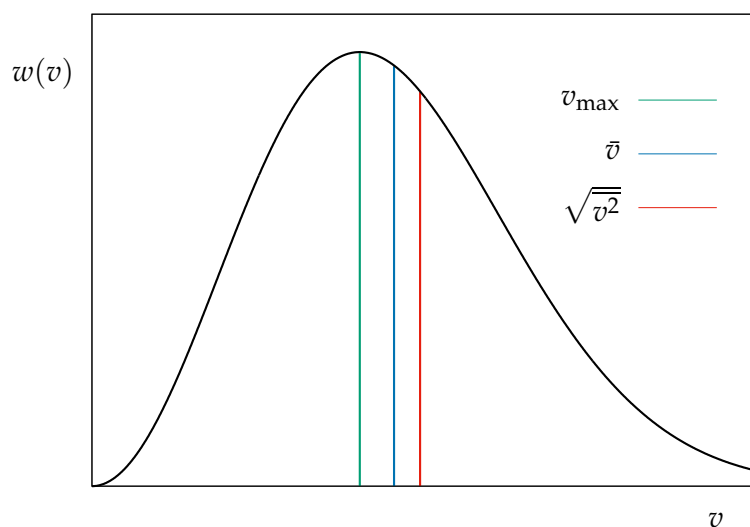
Slika 71: Maxwellove porazdelitve za tri različne temperature

Povprečja. Za povprečno hitrost delcev velja

$$\bar{v} = \int_0^\infty v w(v) dv = 4\pi \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \left(\frac{2k_B T}{m_1} \right)^2 \frac{1}{2} \int_0^\infty u e^{-u} du = \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m_1}} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}.$$

Uporabili smo substitucijo $u = m_1 v^2 / 2k_B T$.

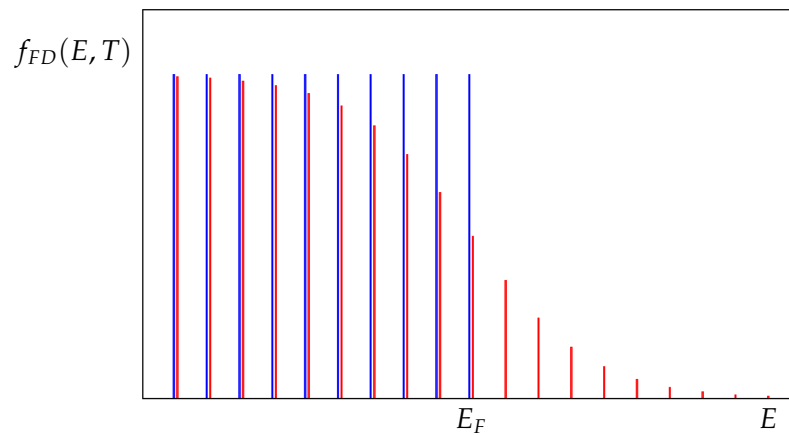
Rezultat se nekoliko razlikuje od rezultata $\sqrt{3RT/M}$, ki smo ga izpeljali pri kinetičnem opisu idealnega plina iz izraza za povprečno kinetično energijo $\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{3}{2}k_B T$. Izraz, ki ga dobimo pri kinetični teoriji, moramo interpretirati kot koren iz povprečne vrednosti *kvadrata* hitrosti in ni enak kvadratu povprečne hitrosti, ki smo jo izračunali pri naši izpeljavi.



Slika 72: Značilne hitrosti pri Maxwellovi porazdelitvi.

10.4 Zasedbeno število za bozone in fermione

Zasedbeno število za fermione. Izraz za zasedbeno število mora pri fermionih zadoščati *izključitvenemu načelu*. Pri zelo nizki temperaturi so v sistemu zasedena vsa stanja z najnižjo možno energijo, tako da je v vsakem stanju po en fermion. Mislimo si, da N fermionov postopoma zapolnjuje enodelčna stanja: prvi gre v stanje z najnižjo energijo, drugi v stanje z naslednjo višjo energijo, ... Energijo zadnjega stanja, ki je pri tem še zasedeno, imenujemo *Fermijeva energija*, E_F . Pri višji temperaturi bodo zasedena tudi stanja z energijo, večjo od Fermijeve. Zasedbeno število pomeni verjetnost, da je stanje zasedeno. Pri dovolj visoki energiji $E \gg E_F$ je smiselno predpostaviti, da je verjetnost, da je stanje zasedeno, zelo majhna in izključitveno načelo ni pomembno. Pričakujemo, da bo tedaj zasedbeno število enako kot za klasične delce.



Slika 73: Zasedbeno število za fermione: z modro je označeno število pri absolutni ničli, z rdečo pri končni temperaturi.

Izraz, ki ustreza naštetim zahtevam, je

$$f_{FD}(E, T) = \frac{1}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1}.$$

Govorimo o *Fermi-Diracovi* (FD) statistiki. V limiti $T \rightarrow 0$ je za $E < E_F$ izraz v eksponentu velik in negativen; eksponent je mnogo manjši od 1 in ga lahko zanemarimo. Dobimo $f_{FD} = 1$ (glej sliko 73). Za $E > E_F$ pa je eksponent velik in pozitiven; v limiti $T \rightarrow 0$ gre izraz v imenovalcu proti neskončnosti in $f_{FD} = 0$. Pri končni temperaturi in $E \gg E_F$ lahko v imenovalcu zanemarimo 1 in dobimo $f_{FD} \approx e^{-E/k_B T}$.

Bozoni. V škatli imejmo plin pri temperaturi T , ki skupaj s stenami seva fotone. Zanima nas število fotonov pri energiji $E = h\nu$. Ti fotoni naj prihajajo iz atomov (ali molekul) pri prehodu iz vzbujenega stanja z energijo E_2 v osnovno stanje z energijo E_1 , $h\nu = E_2 - E_1$. Razmerje med številom atomov v vzbujenem in osnovnem stanju je enako

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{Ae^{-E_2/k_B T}}{Ae^{-E_1/k_B T}} = e^{-(E_2-E_1)/k_B T} = e^{-h\nu/k_B T},$$

saj se atomi v plinu obnašajo kot klasični delci. Atom v osnovnem stanju lahko tudi absorbira foton s tolikšno energijo in preide v vzbujeno stanje z energijo E_2 . V ravnovesju se emitira toliko fotonov, kolikor se jih absorbira. Denimo, da je v sistemu že N_f fotonov. Kot smo ugotovili v prejšnjem poglavju, v tem primeru naraste verjetnost za stimulirano emisijo fotona in ta je za izbran atom premo sorazmerna s $(N_f + 1)$, $p_e = (N_f + 1)a_1$, verjetnost za absorpcijo pa je premo sorazmerna s številom razpoložljivih fotonov, $p_a = N_f a_1$, verjetnosti za emisijo in absorpcijo v celotnem sistemu dobimo tako, da verjetnost za en atom pomnožimo s številom atomov v vzbujenem stanju, $P_e = N_2 p_e$, in v osnovnem stanju, $P_a = N_1 p_a$. V ravnovesju iz zahteve $P_a = P_e$ sledi

$$N_1 N_f a_1 = N_2 (N_f + 1) a_1 = N_1 e^{-h\nu/k_B T} (N_f + 1) a_1.$$

Po okrajšanju sledi

$$\frac{N_f + 1}{N_f} = e^{h\nu/k_B T} \quad \text{in} \quad N_f = \frac{1}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Povprečno število fotonov v stanju z $E = h\nu$ interpretiramo kot zasedbeno število za fotone in dobimo

$$f_{BE}(E, T) = \frac{1}{e^{E/k_B T} - 1}.$$

Govorimo o *Bose-Einsteinovi* statistiki. V nasprotju s fermioni je zasedbeno število lahko večje kot 1.

10.5 Sevanje črnega telesa

Število stanj. Pri obravnavi delcev v plinu smo ugotovili, da so stanja porazdeljena zelo na gosto, zato namesto diskretne porazdelitve po energiji delamo z zvezno porazdelitvijo. Pri izpeljavi porazdelitve po energiji kot zvezni spremenljivki želimo najprej ugotoviti, koliko stanj $\Delta\mathcal{N}$ je v energijskem intervalu $[E, E + \Delta E]$. Kvantno število n , ki šteje stanja, najprej povežemo z valovnim vektorjem stanja k ; pri tem predpostavljamo, da so stanja stoječi valovi v potencialni jami.

Obravnavajmo najprej primer, ko se delci (fotoni) gibljejo le v eni smeri. Za ta primer velja tako kot pri delcih v plinu:

$$n = \frac{\ell}{\pi} k, \quad \Delta n = \frac{\ell}{\pi} \Delta k.$$

Energijo fotona zapišemo kot

$$E = c|\vec{p}| = \hbar k \quad \text{in} \quad \Delta E = \hbar \Delta k = \frac{\hbar \pi}{\ell} \Delta n.$$

Število stanj je premo sorazmerno s širino intervala ΔE oziroma Δk .

V primeru gibanja v dveh razsežnostih (v ravnini xy) postane izpeljava bolj zamotana. Stanje fotona je določeno z dvema kvantnima številoma n_x in n_y , $n_x = 1, 2, 3, \dots$ in $n_y = 1, 2, 3, \dots$ in velja

$$k_x = \frac{\pi}{\ell} n_x, \quad k_y = \frac{\pi}{\ell} n_y.$$

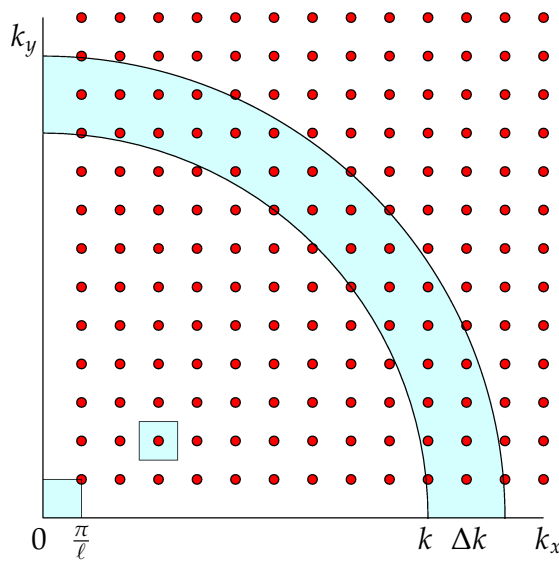
Energijo fotona zapišemo kot

$$E = c|\vec{p}| = \hbar ck, \quad \Delta E = \hbar c \Delta k,$$

pri čemer je k velikost valovnega vektorja.

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}.$$

Stanja ponazorimo s točkami v koordinatnem sistemu, v katerem na vodoravno os nanašamo komponento k_x , na navpično pa k_y (Slika 74). Možna stanja so označena s točkami. Stanja s konstantno energijo $E = \hbar ck$ ležijo na krožnici s središčem v izhodišču



Slika 74: Stanja v dvorazsežni potencialni jami. Stanja v intervalu $[k, k + \Delta k]$ so osenčena. Manjša kvadrata predstavljata ploščino, ki pripada enemu stanju.

in polmerom k , stanja v energijskem intervalu $[E, E + \Delta E]$ pa na delu kolobarja, ki ga omejujeta krožnici z radijema k in $k + \Delta k$ v prvem kvadrantu. Število stanj v iskanem intervalu najlažje dobimo tako, da ploščino dovoljenega območja delimo s ploščino, ki pripada enemu stanju:

$$\Delta \mathcal{N} = \frac{S}{S_1} = \frac{\frac{1}{4} 2\pi k \Delta k}{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2}.$$

V primeru treh razsežnosti je situacija podobna, le da imamo namesto četrтинke kolobarja osminko krogelne lupine s polmerom k in debelino Δk . Stanja znotraj lupine preštejemo tako, da delimo prostornino lupine s prostornino, ki pripada enemu stanju:

$$\Delta \mathcal{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{8} 4\pi k^2 \Delta k}{\left(\frac{\pi}{\ell}\right)^3}.$$

Upoštevati moramo, da ima foton dve možni polarizaciji (če se elektromagnetno valovanje širi v smeri osi z , ima ena polarizacija smer osi x in druga smer osi y). To prinese dodaten faktor 2 k številu stanj. Namesto velikosti valovnega vektorja k raje pišemo frekvenco, $\nu = \frac{c}{\lambda} = \frac{ck}{2\pi}$:

$$\Delta\mathcal{N} = \frac{V}{V_1} = \frac{\pi k^2 \Delta k}{\pi^3} \ell^3 = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 \Delta\nu V.$$

Namesto ℓ^3 smo zapisali kar prostornino prostora, v katerem opazujemo fotone. Delež fotonov ΔN pa dobimo tako, da število razpoložljivih stanj $\Delta\mathcal{N}$ pomnožimo s povprečnim številom fotonov v stanju z energijo $E = h\nu$:

$$\Delta N = \Delta\mathcal{N} f_{BE}(E, T) = \frac{8\pi}{c^3} V \frac{\nu^2 \Delta\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Če deleže seštejemo (integriramo) po vseh frekvencah, dobimo število fotonov v prostornini V pri temperaturi T :

$$\begin{aligned} \frac{N}{V} &= \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{h\nu/k_B T} - 1} = 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \\ &\approx 8\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3 \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = 16\pi \left(\frac{k_B T}{hc} \right)^3. \end{aligned}$$

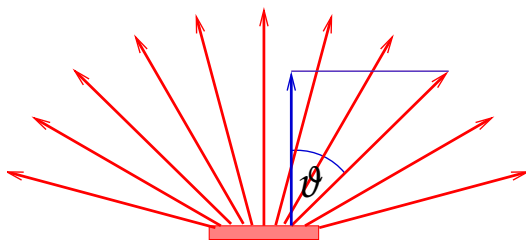
Gostota fotonov narašča s tretjo potenco temperature. Pri temperaturi $T = 300$ K dobimo $N/V \approx 10^{15} \text{ m}^{-3}$.

Planckov zakon. Če gostoto delcev pri določeni frekvenci pomnožimo z energijo fotonov pri tej frekvenci, $h\nu$, dobimo energijsko gostoto v intervalu $d\nu$:

$$\frac{dw_E}{d\nu} = \frac{dN(E)}{V d\nu} h\nu = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Opazujmo energijski tok, ki teče z dela stene s ploščino S . (V ravnovesju enak tok prihaja na steno.) Gostoto toka zapišemo kot

$$j = \frac{P}{S} = \frac{dE}{S dt} = \frac{w_E dV}{S dt} = \frac{w_E S ds}{S dt} = w_{EC}.$$



Slika 75: Sevanje z dela stene.

Pri tem smo predpostavili, da tok teče le v smeri pravokotno na steno. V resnici pa stena seva enakomerno v vse smeri. Upoštevati moramo le projekcijo na smer, pravokotno na steno (glej sliko 75). Povprečje po prostorskem kotu vodi do

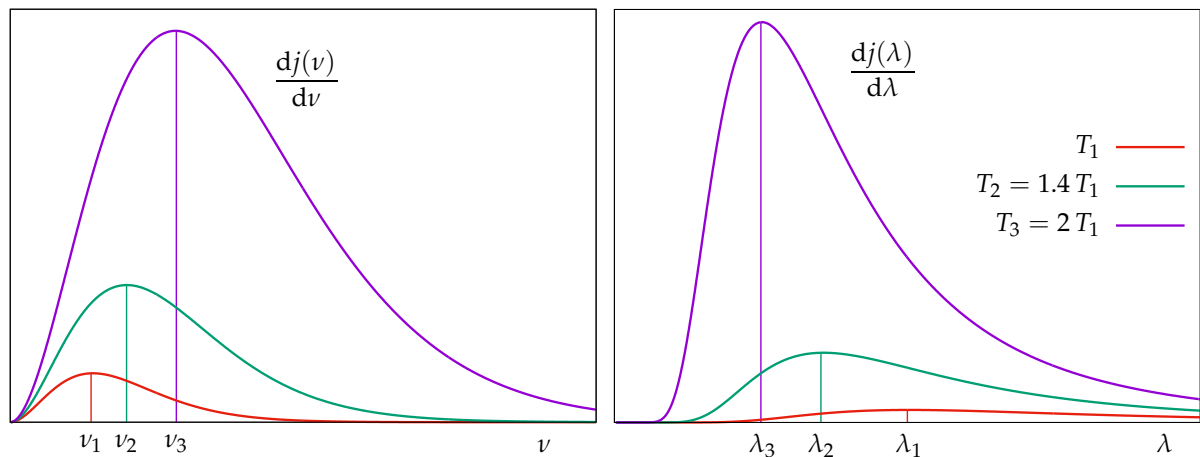
$$j = \frac{1}{4\pi} \int w_{EC} \cos \vartheta \, d\Omega = \frac{1}{4\pi} w_{EC} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \cos \vartheta \sin \vartheta \, d\vartheta = \frac{1}{4} w_{EC},$$

pri čemer integriramo samo po polovici prostorskega kota. Zveza velja tudi za vsako frekvenco posebej in lahko zapišemo

$$\frac{dj}{d\nu} = \frac{c}{4} \frac{dw_E}{d\nu} = \frac{2\pi h}{c^2} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T} - 1}.$$

Izpeljali smo *Planckov zakon* za sevanje črnega telesa. Namesto porazdelitve po frekvencah svetlobe zapišimo še porazdelitev po valovnih dolžinah:

$$\frac{dj}{d\lambda} = \frac{dj}{d\nu} \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{c}{\lambda} \right)^3 \frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1} \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right| = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5 (e^{hc/\lambda k_B T} - 1)}. \quad (10.2)$$



Slika 76: Porazdelitev izsevanega toka črnega telesa po frekvencah (levi graf) in valovnih dolžinah (desni graf) za tri značilne temperature: rdeča (najnižja krivulja) ustreza nižji temperaturi, zelena srednji in vijolična višji.

Wienov zakon. Na grafih 76 vidimo, da se z večanjem temperature izsevani tok povečuje pri vseh frekvencah oziroma valovnih dolžinah; vrh porazdelitve se seli k večjim frekvencam oziroma k manjšim valovnim dolžinam. Poiščimo valovno dolžino λ_{maks} , pri kateri ima porazdelitev (10.2) vrh. Pri dovolj majhni valovni dolžini je eksponent mnogo večji od 1 in enico v imenovalcu lahko zanemarimo, torej

$$\frac{d}{d\lambda} \frac{dj}{d\lambda} \approx 2\pi hc^2 \frac{d}{d\lambda} \left[\lambda^{-5} e^{-hc/\lambda k_B T} \right] = 0.$$

Dobimo

$$-5\lambda^{-6} e^{-hc/\lambda k_B T} - \lambda^{-5} e^{-hc/\lambda k_B T} \left(-\frac{hc}{k_B T} \lambda^{-2} \right) \Big|_{\lambda=\lambda_{\text{maks}}} = 0.$$

z rešitvijo

$$\lambda_{\text{maks}} = \frac{hc}{5k_B T} \quad \text{ozioroma} \quad \lambda_{\text{maks}} T = b_W, \quad b_W \approx \frac{hc}{5k_B}.$$

Dobili smo *Wienov zakon*; b_W je Wienova konstanta. Pri točni izpeljavi dobimo $b_W = hc/4.965 k_B = 2,898 \cdot 10^{-3} \text{ m K}$.

Stefanov zakon. Z večanjem temperature izsevani tok narašča. Celotno izsevano gostoto toka j dobimo tako, da prispevke seštejemo po vseh frekvencah:

$$j = \int_0^\infty \frac{dj}{d\nu} d\nu \approx \frac{2\pi h}{c^2} \int_0^\infty \nu^3 e^{-h\nu/k_B T} d\nu = \frac{2\pi h}{c^2} \left(\frac{k_B T}{h} \right)^4 \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx. \quad (10.3)$$

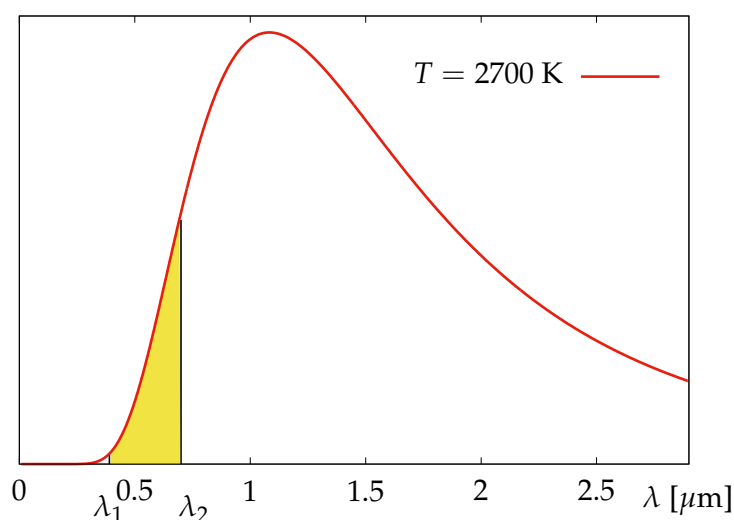
Vpeljali smo novo spremenljivko

$$x = \frac{h}{k_B T} \nu.$$

Vrednost integrala je $3! = 6$ in dobimo

$$j = \sigma T^4, \quad \sigma \approx \frac{12\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}; \quad \text{točno pa} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2} = 5,670 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}.$$

Sevanje svetil v vidnem območju. Svetilo, ki seva kot črno telo – na primer žarnica z volframovo nitko – oddaja del svetlobnega toka v vidnem območju, tj. v intervalu med $\lambda_1 = 390 \text{ nm}$ in $\lambda_2 = 700 \text{ nm}$. Ocenimo, kolikšen del svetlobnega toka, ki ga oddaja svetilo, segreto na temperaturo T , je v vidnem delu spektra. Govorimo o *izkoristku* svetila.



Slika 77: Svetilo, segreto na temperaturo 2700 K, seva le majhen del energijskega toka v vidnem območju.

Razmerje jakosti lahko zapišemo (glej enačbo (10.3)):

$$\frac{\Delta j}{j} \approx \frac{\int_{\nu_2}^{\nu_1} \frac{dj}{d\nu} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dj}{d\nu} d\nu} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx}{\int_0^\infty x^3 e^{-x} dx} = \frac{1}{6} \int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx,$$

pri čemer je

$$x_1 = \frac{h}{k_B T} \nu_2 = \frac{hc}{k_B T} \frac{1}{\lambda_2} \quad \text{in} \quad x_2 = \frac{h}{k_B T} \nu_1 = \frac{hc}{k_B T} \frac{1}{\lambda_1}.$$

Boltzmannovo konstanto izrazimo v enotah eV/K:

$$k_B = \frac{1,3806 \cdot 10^{-23} \text{ J eV}}{1,602 \cdot 10^{-19} \text{ J K}} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K} \quad \text{in} \quad \frac{hc}{k_B} = 1,44 \cdot 10^7 \text{ nm K}.$$

Pri značilni temperaturi žarnice, $T = 2700 \text{ K}$, velja

$$x_1 = 7,6 \quad \text{in} \quad x_2 = 13,7.$$

Po krajšem računu dobimo¹⁷:

$$\frac{\Delta j}{j} \approx 0,05 = 5 \, \%.$$

Žarnica torej le manjši del oddanega energijskega toka seva v področju vidnih frekvenc, 95 % sevanja je v infrardečem območju; to predstavlja toplotne izgube. Pri višji temperaturi bi bil izkoristek boljši, a smo pri volframovih žarnicah omejeni s temperaturo tališča 3695 K.

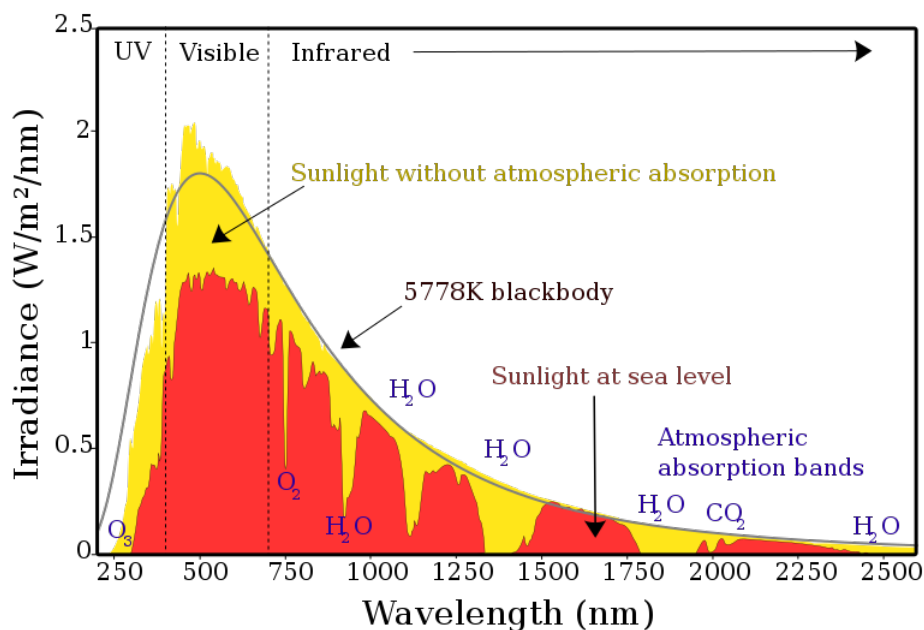
Izkoristek je celo manjši, če upoštevamo, da človeško oko skoraj ne zaznava valovnih dolžin na mejah vidnega spektra. Najbolj je občutljivo na svetlobo z valovno dolžino 555 nm v intervalu nekako med 480 nm in 650 nm. Pri računanju svetlobne jakosti v tem intervalu lahko integral aproksimiramo kar z vrednostjo integranda pri 555 nm, pomnoženi s širino intervala:

$$\int_{x_1}^{x_2} x^3 e^{-x} dx \approx \bar{x}^3 e^{-\bar{x}} \Delta x, \quad \bar{x} = 9,6, \quad \Delta x = x_2' - x_1' = 3.$$

Dobimo

$$\frac{\Delta j}{j} \approx \frac{0,18}{6} = 3 \, \%.$$

¹⁷Velja: $\int x^3 e^{-x} dx = -e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6)$

Spekter Sončeve svetlobe.

Slika 78: Spekter sončne svetlobe, ki vpada na vrhnjo plast atmosfere (rumena barva), in spekter na morski gladini (rdeča barva). Črna krivulja ustreza spektru črnega telesa pri temperaturi 5778 K. Označeni so intervali valovnih dolžin v UV, vidnem in infrardečem področju, in področja, ker prevladuje absorpcija na račun kisika, vodne pare ali CO_2 v atmosferi. Na ordinati je prikazana spektralna gostota $dj/d\lambda$, na abscisi pa valovna dolžina.

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Solar_spectrum_en.svg

Sevanje zvezd. Z merjenjem spektra in jakosti svetlobe, ki prihaja z zvezd, lahko dobimo pomembne podatke. Z merjenjem jakosti svetlobe določimo celoten izsev zvezde $P_z = 4\pi r^2 j$, če je r oddaljenost zvezde od Zemlje. Iz valovne dolžine, pri kateri ima porazdelitev po valovnih dolžinah vrh, izračunamo temperaturo $T_z = b_W / \lambda_{\text{maks}}$. Iz dobljene temperature površja zvezde izračunamo gostoto svetlobnega toka na površju $j_z = \sigma T^4$. Končno lahko iz celotnega izseva (moči), ki ga oddaja zvezda, $P_z = 4\pi R_z^2 j_z$, izračunamo še polmer zvezde $R_z = \sqrt{P_z / 4\pi j_z}$. (Velikosti zvezde s teleskopom sicer ne moremo izmeriti.)

Emisivnost. Realna telesa niso črna, zato je izsevani tok manjši kot pri idealnem črnem telesu. Vpeljemo albedo (odbojnost) a kot razmerje med odbito in vpadno jakostjo svetlobe:

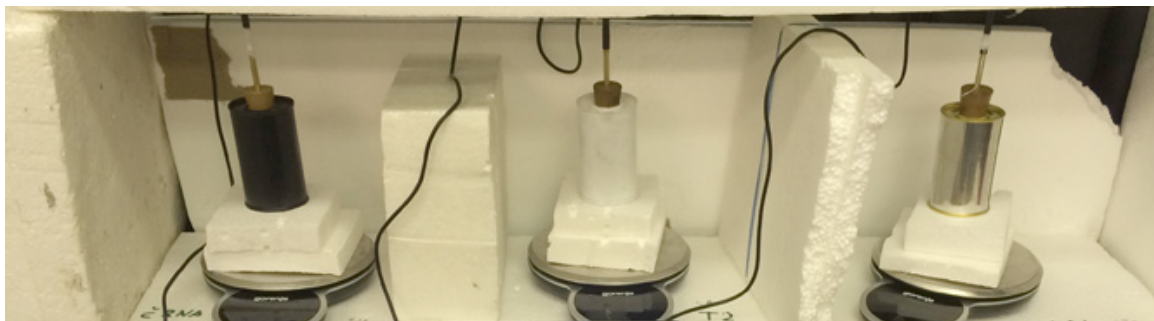
$$a = \frac{j_{\text{odbiti}}}{j_{\text{vpadni}}}.$$

Velja $a = 1$ za belo, $a = 0$ za črno telo in $0 < a < 1$ za sivo telo. Stefanov zakon potem zapišemo kot

$$j = (1 - a)\sigma T^4 \equiv \varepsilon\sigma T^4.$$

Faktor $\varepsilon = 1 - a$ imenujemo *emisivnost* in je odvisna od valovne dolžine. Emisivnost za infrardečo svetlobo je za večino teles zelo blizu vrednosti 1, zato pri sobni temperaturi večina teles seva kot črno telo, izjema so le telesa s kovinskim površjem.

O tem se prepričamo s poskusom, pri katerem merimo temperaturo pri ohlajanju vode v črni, beli in kovinski posodi. Temperatura vode v črni in beli posodi pojema enako hitro; v kovinski pa počasneje.



Slika 79: Merjenje temperature pri ohlajanju vode v črni, beli in kovinski posodi. Posode se ohlajajo s sevanjem in s konvekcijo; oddani energijski tok zaradi konvekcije je pri vseh treh posodah enak.

Toplogredni pojav. Toplogredni pojav ali učinek, zaradi katerega se Zemlja segreva na račun plinov v atmosferi, pojasnimo z odvisnostjo absorpcije oz. emisivnosti od valovne dolžine svetlobe.

Površje Sonca ima temperaturo približno 5800 K, zato ima spekter izsevane svetlobe vrh v vidni svetlobi pri valovni dolžini 550 nm. Atmosfera je za vidno svetlobo skoraj prozorna in 65 % vpadne svetlobe doseže Zemljino površje. Površje, segreto na približno 300 K, seva infrardečo svetlobo z vrhom pri 10 μm . Pri teh valovnih dolžinah pride v atmosferi do zelo močne absorpcije v tako imenovanih toplogrednih plinih. Albedo atmosfere za infrardečo svetlobo je zato blizu 0, emisivnost pa blizu 1. Približno polovico svetlobe se izseva nazaj na Zemljo, druga polovica pa v vesolje. V ravnovesju — in seveda Zemlja je v ravnovesju — je izsevan energijski tok v vesolje enak vpadnemu. Tok, ki se vrne nazaj na Zemljo, dodatno segreva površje. Ocenimo, kolikšna bi bila temperatura površja, če v atmosferi ne bi bilo toplogrednih plinov in bi se vsa svetloba, ki jo seva površje, vrnila v vesolje. Gostota vpadnega toka s Sonca, ki doseže površje, je $j_0 = 1,0 \text{ W/m}^2$, celotni tok pa

$$P_{\text{vpadni}} = j_0 S = j_0 \pi R^2,$$

R je polmer Zemlje. Zemlja bi sevala energijski tok

$$P_{\text{oddani}} = j S' = \sigma \bar{T}^4 4\pi R^2,$$

kjer je $\bar{T}$ povprečna temperatura površja in je $S' = 4\pi R^2$ njegova površina; ker površje seva v infrardečem področju, smo vzeli $a = 0$. V ravnovesju sta oba tokova enaka,

$P_{\text{vpadni}} = P_{\text{oddani}}$; od tod izračunamo

$$\bar{T} = \sqrt[4]{\frac{j_0}{4\sigma}} = 258 \text{ K} = -15^\circ \text{ C}.$$

Če v atmosferi ne bi bilo toplogrednih plinov, bi bilo na Zemlji preklemsko mraz. K sreči, pa Zemlja dodatno ogreva energijski tok, ki ga sevajo toplogredni plini. Toplogredni plini so zato zelo koristni, če jih seveda ni preveč.



Slika 80: Toplogredni pojav <https://prezi.com/59hf-r-prppg/global-warming/>

10.6 Elektroni v kovini

Obravnavamo elektrone v kovini znotraj kocke z robom ℓ . Stanja elektronov aproksimiramo s stanji v neskončni ravni jami. Število stanj je enako kot pri obravnavi fotonov, zaprtih v škatlo. Podobno kot fotoni imajo tudi elektroni dve polarizaciji, zato lahko kar prepišemo izraz za število stanj kot funkcijo valovne vektorja. Namesto valovnega vektorja bomo obravnavali porazdelitev po kinetični energiji. Velja

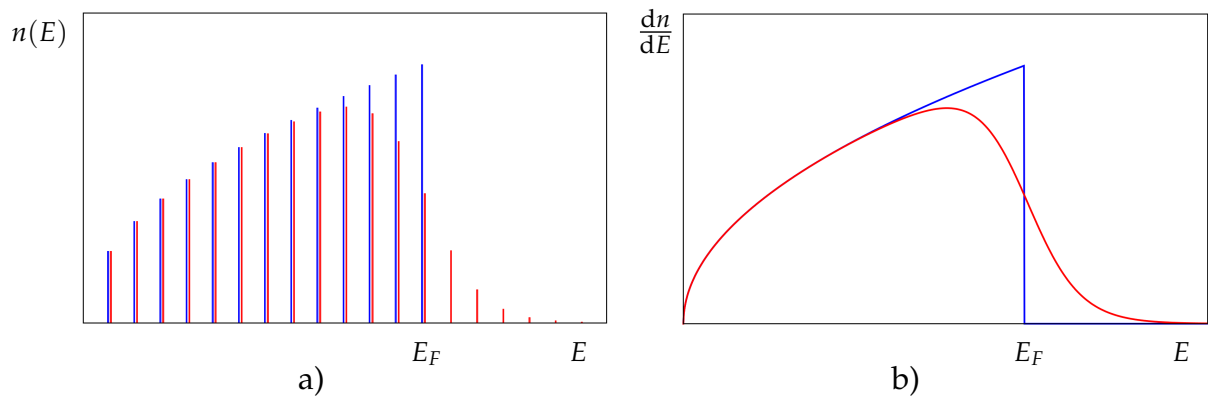
$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \quad dE = \frac{\hbar^2 k dk}{m}.$$

Število stanj v intervalu dE je potem enako

$$d\mathcal{N} = \frac{\pi k^2 dk}{\pi^3} \ell^3 = \frac{V}{\pi^2} k dk = V \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \frac{m}{\pi^2 \hbar^2} dE = V 8\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{m^3}{\hbar^2}} \sqrt{E} dE.$$

Število elektronov je potem

$$dN = d\mathcal{N} f_{FD}(E, T) = V 8\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{m^3}{\hbar^2}} \frac{\sqrt{E}}{e^{(E-E_F)/k_B T} + 1} dE.$$



Slika 81: Fermi-Diracova porazdelitev pri temperaturi 0 (modra) in pri končni temperaturi (rdeča): a) diskretna, b) zvezna.

Za razliko od fotonov je število elektronov v kovini konstantno pri vseh (dovolj nizkih) temperaturah. Povezano je s Fermijevo energijo E_F , saj v limiti $T \rightarrow 0$ elektroni napolnjujejo vsa stanja do Fermijeve energije. Iz znanega števila elektronov torej lahko določimo E_F . Pri absolutni ničli je zasedbeno število 1, če je energija stanja manjša od E_F , in 0, če je večja. Zato zadošča, da integriramo le do E_F :

$$N = \int dN = V 8\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{m^3}{\hbar^2}} \int_0^{E_F} \sqrt{E} dE = V 8\sqrt{2}\pi \sqrt{\frac{m^3}{\hbar^2}} \frac{2}{3} E_F^{3/2} = V \frac{\pi}{3} \left(\frac{8mE_F}{\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Od tod dobimo

$$E_F = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{2/3}.$$

Število elektronov v kovini je odvisno od števila atomov in števila elektronov, ki jih v kovino prispeva posamezen atom. V bakru, denimo, je drugo od teh števil kar ena:

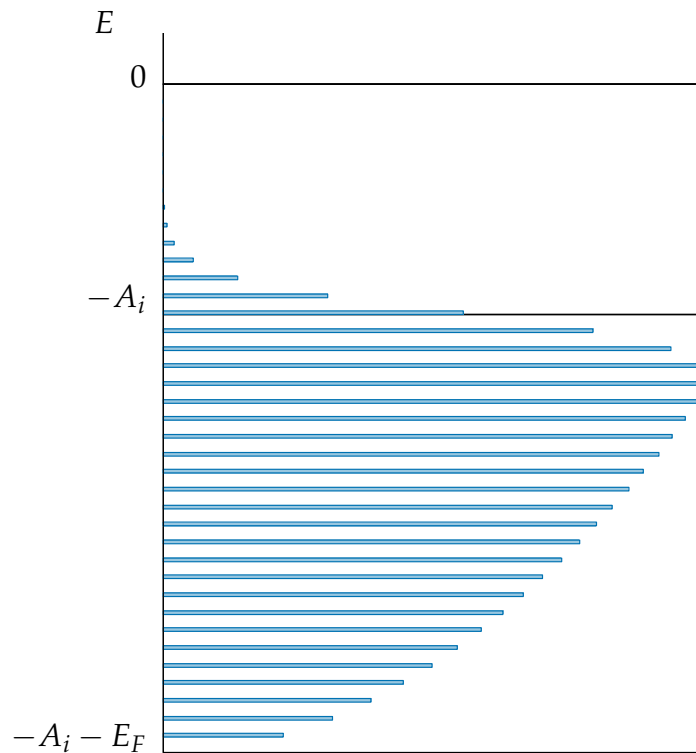
$$N = N_{\text{Cu}} = \frac{m_{\text{Cu}}}{M_{\text{Cu}}} N_A = \rho_{\text{Cu}} V \frac{N_A}{M_{\text{Cu}}}.$$

Tu je M_{Cu} masa kilomola bakra, ρ_{Cu} gostota kovine in N_A Avogadrovo število (na kilomol). S podatki za baker dobimo $E_F = 7$ eV. Iz normirane gostote porazdelitve elektronov

$$w(E) = \frac{dN}{NdE} = \frac{3}{2E_F} \sqrt{\frac{E}{E_F}} \frac{1}{(e^{(E-E_F)/k_B T} + 1)}$$

hitro izračunamo povprečno kinetično energijo elektronov v limiti $T \rightarrow 0$:

$$\bar{E} = \int_0^{E_F} E w(E) dE = \frac{3}{5} E_F.$$



Slika 82: Energijski spekter elektronov v kovini: energija 0 ustreza prostemu elektronu zunaj kovine s kinetično energijo 0, A_i je izstopno delo in je enako energiji, potrebni da elektron s kinetično energijo E_F ravno še izbijemo iz kovine. Potencialna energija elektronov v jami je $-(A_i + E_F)$.