
GEOMETRIJA V RAVNINI

DRUGI LETNIK

1 Geometrija v ravnini

1.1 Osnove geometrije

- Točka je tisto, kar nima delov.
- Črta je dolžina brez širine.
- Ploskev je tisto, kar ima samo dolžino in širino.

Osnovni zakoni, ki povezujejo točko, premico in ravnino:

1. Dve različni točki določata natanko eno premico.
2. Tri nekolinearne točke določajo natanko eno ravnino.
3. V vsaki ravnini so vsaj tri točke, ki ne ležijo na isti premici. Vsaj štiri točke so, ki ne ležijo v isti ravnini.
4. Če ima premica z ravnino dve skupni točki, potem leži vsaka druga točka te premice v tej ravnini.
5. Dve različni ravnini, ki imata eno točko skupno, imata skupno eno premico.

Definiciji:

- Točke so **kolinearne**, če ležijo na isti premici. Če ne ležijo na isti premici, so nekolinearne.
- Točke so **komplanarne**, če ležijo na isti ravnini. Če ne ležijo na isti ravnini, so nekomplanarne.

Velja:

- Če so tri točke kolinearne, ena vedno leži med drugima dvema.
- Med dvema različnima točkama premice je neskončno mnogo točk.

Posledice osnovnih izrekov:

1. Dve sekajoči se premici določata natanko eno ravnino, ki poteka skozi obe premici.
2. Skozi točko je mogoče položiti natanko eno ravnino, ki je dani ravnini vzporedna.
3. Dve premici, ki nimata nobene skupne točke in ležita v isti ravnini, sta vzporedni; dve premici, ki nimata nobene skupne točke in ne ležita v isti ravnini, sta mimobežni.
4. Dve različni vzporedni premici določata natanko eno ravnino, v kateri ležita obe premici.
5. Premica in točka, ki ne leži na premici, določata natanko eno ravnino, ki poteka skozi premico in točko.

Vzporednost premic:

Premici sta vzporedni, če ležita v isti ravnini in nimata nobene skupne točke, ali sovpadata.

Lastnosti vzporednosti premic:

1. **Refleksivnost:** $p \parallel p$
2. **Simetričnost:** $p \parallel q \Rightarrow q \parallel p$
3. **Tranzitivnost:** $p \parallel q \wedge q \parallel r \Rightarrow p \parallel r$

Aksiom o vzporednosti: Skozi dano točko A poteka natanko ena premica, ki je vzporedna dani premici p .

Konveksne množice

Množica je konveksna, če z vsakim parom točk A in B vsebuje vso daljico AB med njima.

Primeri konveksnih množic:

- Polravnina
- Kot (je presek dveh polravnin)
- Trikotnik, pravokotnik, deltoid, trapez, paralelogram, itd.
- Krog

Poltrak, polravnina, polprostor

1. Poljubna točka razdeli premico na dva poltraka.
2. Vsaka premica p razdeli ravnino na dve polravnini.
3. Vsaka ravnina razdeli polprostor v dva polprostora.

Razdalja med dvema točkama

Poljubnima točkama A in B priredimo realno število $d(A, B)$ kot njuno razdaljo z lastnostmi:

1. Razdalja je nenegativno število: $d(A, B) \geq 0$.
2. Razdalja med točkama je enaka 0 natanko tedaj, ko točki sovpadata: $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$.
3. Za razdaljo velja simetrija $d(A, B) = d(B, A)$
4. Razdalja zadošča trikotniški neenakosti: $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

Daljica

- Daljica AB je množica vseh točk med točkama A in B na premici.
- Dolžina daljice AB je razdalja med točkama A in B . Oznaka: $|AB| = d(A, B)$.
- Nosilka daljice je premica, ki ju določata krajišči daljice AB . (Točki ne smeta sovpadati- $A \neq B$.)
- Simetrala daljice je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od krajišč daljice. Simetrala daljice je premica, ki je pravokotna na daljico in jo razpolavlja.

1.2 Koti

Definicija: Dva poltraka s skupnim izhodiščem razdelita ravnino na dva dela, ki ju imenujemo kota. Poltrakoma pravimo kraka kota, skupnemu izhodišču pa vrh kota.

Če poltraka ne ležita na isti premici, je eden od kotov konveksen, drugi pa nekonveksen.

Koti:

1. **Ničelni kot** meri 0° , njegova kraka sestavljata poltrak.
2. **Polni kot** meri 360° , njegova kraka sestavljata poltrak.
3. **Pravi kot** je kot s pravokotnima krakoma. Pravi kot je enak svojemu sokotu in meri 90° .
4. **Iztegnjen kot** - kraka ležita na premici in sta nasprotno usmerjena.
5. **Oster kot** je manjši od sokota, je torej manjši od 90° .
6. **Topi kot** je večji od sokota, je torej večji od 90° .
7. **Sosedna kota** imata skupen vrh in en krak.
8. **Sokota** sta sosedna kota, katerih unija je iztegnjeni kot.
9. **Sovršna kota** sta kota, ki imata skupen vrh, kraka pa se dopolnjujeta v premici.
10. Kota sta **komplementarna**, če je njuna vsota 90° .
11. Kota sta **suplementarna**, če je njuna vsota 180° .

Kote merimo v **stopinjah** (kotne minute, sekunde) ali **radianih**.

1.3 Trikotniki

Stranice v trikotniku:

1. V vsakem trikotniku je vsota dolžin dveh stranic večja od dolžine tretje stranice in absolutna vrednost razlike dolžin teh dveh stranic je manjša od dolžine tretje stranice

$$|b - c| < a < b + c$$

2. V trikotniku leži večji stranici nasproti večji kot in obratno. Skladnima stranicama ležita nasproti skladna kota.

Koti v trikotniku:

Notranji kot trikotnika ima vrh v oglišču, kraka pa sta določena z drugima ogliščema.

Zunanji kot trikotnika je sokot notranjega kota trikotnika. Vsak zunanji kot trikotnika je enak vsoti njemu nepriležnih notranjih kotov (koti z vzporednimi kraki).

Velja:

1. Vsota notranjih kotov je 180° .
2. Vsota zunanjih kotov je 360° .

Višine, simetrale, težiščnice

Definicije:

1. **Višina** je najmanjša razdalja med stranico in nasprotnim ogliščem. Zato je pravokotna na stranico.
2. **Težiščnica** je daljica, ki povezuje oglišče z razpoloviščem nasprotne stranice.
3. **Simetrala stranice** je premica, ki je pravokotna na stranico in jo razpolavlja.
4. **Simetrala kota** je premica, ki poteka skozi vrh kota in ga razpolavlja.

Znamenite točke trikotnika

1. **Višinska točka** je presečišče vseh višin.
2. **Težišče** je presečišče vseh težiščnic. Težiščnico deli v razmerju 2 : 1.
3. **Središče trikotniku očrtanega kroga** je presečišče simetral stranic.
4. **Središče trikotniku včrtanega kroga** je presečišče simetral notranjih kotov.

Skladnost trikotnikov

Trikotnika sta **skladna**, če imata **skladne vse stranice in vse kote**.

Zadostni pogoji za skladnost trikotnikov so:

1. Trikotnika se ujemata v dveh stranicah in kotu med njima.(sks)
2. Trikotnika se ujemata v eni stranici in obeh njej priležnih kotih.(ksk)
3. Trikotnika se ujemata v vseh stranicah. (sss)
4. Trikotnika se ujemata v dveh stranicah in kotu, ki leži daljši stranici nasproti.(sSK)

Znak za skladnost je $\cong$.

Talesov izrek o sorazmerjih

Če množico premic, ki se sekajo v eni točki, sekamo z množico vzporednic, potem je razmerje odsekov na eni premici šopa enako razmerju enakoležnih odsekov na katerikoli premici istega šopa.

Podobnost trikotnikov

Trikotnika sta **podobna**, če imata **enaka razmerja vseh stranic in enake notranje kote**.

$$a : b : c = a_1 : b_1 : c_1, \alpha = \alpha_1, \beta = \beta_1, \gamma = \gamma_1 \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle A'B'C'.$$

Zadostni pogoji za podobnost:

1. Trikotnika se ujemata v dveh notranjih kotih.
2. Razmerje stranic enega trikotnika je enako razmerju enakoležnih stranic drugega trikotnika.
Npr. $a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = k$
3. Trikotnika se ujemata v razmerju dveh stranic in kotu med njima. Npr. $b : c = b_1 : c_1, \alpha = \alpha_1$

Znak za podobnost je $\sim$.

1.4 Krožnica, krog, lok

Krožnica je množica točk v ravnini, ki so enako oddaljene od izbrane točke, ki jo imenujemo središče. Razdalja od središča do poljubne točke na krožnici imenujemo **polmer** ali **radij** krožnice.

Obodni in središčni kot

Izreka:

1. Nad istim lokom je središčni kot je dvakrat večji od obodnega kota.
2. Vsi obodni koti nad istim lokom so enaki.

Talesov izrek o kotu v polkrogu

Če je osnovnica trikotnika premer kroga in tretje oglišče leži na krožnici, je trikotnik pravokoten.

Vsi koti v polkrogu so enaki in merijo 90°