mr VENE T. BOGOSLAVOV

# ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 4

TRIDESET DRUGO IZDANJE

ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA
BEOGRAD
2000

## PREDGOVOR DVADESET ŠESTOM, PRERAĐENOM IZDANJU

Prvo izdanje ove zbirke izašlo je iz štampe januara 1968. godine. Zbirka je napisana prema Nastavnom programu matematike za IV razred gimnazije prirodno-matematičkog smera.

U ovo izdanje uneti su sledeći novi odeljci: *Neka svojstva elementarnih funkcija, Granične vrednosti funkcije, Asimptote krivih linija u ravni* (I glava); *Primena izvoda pri određivanju granične vrednosti – Lopitalovo pravilo* (II glava). U VIII glavi dati su neki već korišćeni maturski pismeni zadaci, pošto se ponovo na maturi uvodi ispit iz matematike, i to u dva dela – pismeni i usmeni. Kompleksni brojevi su prebačeni u *Zbirku rešenih zadataka iz matematike 3*. Ove izmene su izvršene da bi Zbirke bile usaglašene sa nastavnim programom matematike za prirodno-matematički smer koji je usvojio Prosvetni savet Srbije, a objavljen je u Službenom glasniku Srbije 31. maja 1991. godine.

Recenzentu ovog izdanja Svetozaru Brankoviću, profesoru Pete beogradske gimnazije, zahvaljujem na pažljivom čitanju rukopisa i sugestijama za njegovo poboljšanje.

Prema težini zadaci se u ovoj zbirci mogu podeliti u tri grupe: lakše (20%), srednje (60%) i teže (20%). Teži zadaci su označeni zvezdicama.

Zahvaljujem svojoj supruzi Nadeždi na pomoći u pripremi i sređivanju rukopisa.

Beograd, marta 1993. godine AUTOR

## PREDGOVOR XXVII DOPUNJENOM IZDANJU

U ovom izdanju VIII glava – Razni zadaci dopunjena je novim maturskim zadacima sa pismenog maturskog ispita u junskom 1994. godine. Takođe je uneto i osam testova sa prijemnih ispita na Beogradskom univerzitetu u periodu 1990. - 1994. godina.

*1. oktobar 1994. godine* AUTOR

## NAPOMENA UZ TRIDESETO IZDANJE

U svom 40-godišnjem postojanju Zavod za udžbenike i nastavna sredstva objavio je veliki broj knjiga koje su imale više izdanja i koje su postale nezaobilazan deo naše kulture i obrazovanja. Takva je i Zbirka rešenih zadataka iz matematike 4, mr Venea Bogoslavova, profesora. Činjenica da je ovo izdanje trideseto po redu govori dovoljno sama za sebe. Sve zbirke profesora Bogoslavova su više od zbirki i gotovo da je nemoguće zamisliti srednjoškolsku nastavu matematike bez njih. Redovnim obogaćivanjem novim zadacima, novim i po sadržaju i po idejama, zbirke su svaki put nove.

Sticajem lepih okolnosti, jubilarno izdanje ove zbirke poklopilo se sa Zavodovim jubilejom i tako potvrdilo da se uspeh jednog izdavača temelji na uglednim autorima i kvalitetnim knjigama. Naše čestitke profesoru Bogoslavovu na njegovim zbirkama rešenih zadataka iz matematike.

*Urednik*
*Žarko Jović*

*Glavni i odgovorni urednik*
dr *Petar Pijanović*

U Beogradu, 19. decembra 1997.

# ZADACI

## I GLAVA

### 1. FUNKCIJE

#### 1.1. Neka svojstva elementarnih funkcija

**Definicija.** Neka su $A$ i $B$*) neprazni skupovi. Funkcija (preslikavanje) skupa $A$ u skup $B$ je svaki podskup $f$ skupa $A \times B$ koji ima ova dva svojstva:

1° Skup svih prvih komponenata $f$ jednak je skupu $A$.

2° $(x, y_1) \in f \land (x, y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.

*Parnost.* Za funkciju $f$, definisanu na simetričnom intervalu $(-a, a)$, kaže se da je:

*parna* ako je $f(-x) = f(x)$ za $x \in (-a, a)$;

*neparna* ako je $f(-x) = -f(x)$ za $x \in (-a, a)$.

*Monotonost.* Za funkciju $f$ kaže se da je monotono rastuća, ako je tačna implikacija

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

a monotono opadajuća ako važi

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

*Periodičnost.* Ako funkcija $f$ zadovoljava relaciju $f(x + \omega) = f(x)$ ($\omega$ konstanta), kaže se da je periodična sa periodom $\omega$, za svako $x$. Najmanji pozitivan broj $\omega$ naziva se osnovni period funkcije.

*Nule.* Svaki realan broj $\alpha$, koji zadovoljava jednačinu $f(x) = 0$, tj. $f(\alpha) = 0$ zove se *realna nula* funkcije $f(x)$.

*Inverzna funkcija.* Neka je $f$ preslikavanje jedan–jedan skupa $A$ u skup $B$.

*) Skup $A$ se zove domen, a skup $B$ kodomen ili antidomen.

Inverzno preslikavanje, u oznaci $f^{-1}$, jeste preslikavanje skupa $f(A)$, određeno jednakošću $f^{-1}(f(x))=x$

1. Odrediti domen i kodomen realnih funkcija određenih na sledeći način:

a) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$;

b) $g(x) = \sqrt{4x - x^2}$;

c) $\psi(x) = \ln(x^2 - 6x)$.

2. Neka funkcija $f$ preslikava skup $R$ na skup $A$ i neka je:

a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 1$;

b) $f(x) = x^2 - 9$;

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 2$. Odrediti skup $A$.

3. Odrediti oblast definisanosti funkcije date formulom:

a) $f(x) = \sqrt{\log(3x^2 - 2x)}$;

b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 1}{(x+3)(x-4)}} + \log\frac{1}{x-4}$;

c) $y = (2x + 8 - x^2)^{-\frac{1}{2}} + \log_{0,3}(x-1)$;

d) $y = \sqrt{\log_{0,5}(3x-8) - \log_{0,5}(x^2+4)}$;

e) $y = \frac{3}{4 - x^2} + \log(x^2 - x)$;

f) $y = \sqrt{\log_{10}\frac{5x - x^2}{4}}$.

4. Funkcija $f(x)$ definisana je na segmentu $[0, 1]$.
Odrediti oblast definisanosti funkcije $f\left(\frac{x^2 - 1}{x + 2}\right)$.

5. Ako je $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, tada je $f(2) + 2f(0) = f(1)$. Dokazati.

6. Ako je $f(x) = \frac{2x + 1}{x - 2}$, tada je $f(f(x)) = x$. Dokazati.



7. Ako je $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$, tada je

$$\frac{f(x) - f(y)}{1 + f(x)f(y)} = \frac{x - y}{1 + xy}.$$ Dokazati.

8. Ako je $f(x) = \sin x$, dokazati da je

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)\sqrt{1 - f^2\left(\frac{x-y}{2}\right)}.$$

9. Neka je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Tada je
$f(x+3) - 3f(x+2) + 3f(x+1) - f(x) = 0$. Dokazati.

10. Rešiti funkcionalne jednačine:

a) $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$;

b) $f(x + x^{-1}) = x^2 + x^{-2}$;

c) $f(x^{-1}) = x + \sqrt{1 + x^2}$;

d) $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$, gde je $f$ nepoznata funkcija.

11. Ako je $f(x - 1) = 2x - 3$, odrediti $f(f(x^2 - x + 1))$.

12. Data je funkcija formulom $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

Dokazati da je $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 1$.

13. Odrediti realne nule funkcija određenih formulama:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3 + 8}$;

b) $f(x) = \frac{x^4 - 17x^2 + 16}{x^2 + 2}$;

c) $f(x) = \sin x - \frac{1}{2}$;

d) $f(x) = \log(x - 1)$;

e) $f(x) = \operatorname{tg} x - \sqrt{3}$;

f) $f(x) = \sqrt{\sin x + 1}$.

14. Ispitati parnost sledećih funkcija:

a) $f(x) = x^2 - 1 - 3\cos x$;

b) $f(x) = x^2 + 1 + \sin x^2$;

c) $f(x) = x^3 + 2 + \sin x$;

d) $f(x) = \dfrac{x}{\sin x} + 1$;

e) $f(x) = \dfrac{\sin x + \operatorname{tg} x - x^3}{\cos^2 x}$;

f) $f(x) = \dfrac{\sin^2 x + \cos 3x}{x^2}$; g) $f(x) = \dfrac{2^x - 1}{2^x + 1}$;

h) $f(x) = 2^x + \dfrac{1}{2^x}$; i) $f(x) = 2^x - 2^{-x}$.

15. Data je funkcija formulom $f(x) = \dfrac{(1 + a^x)^2}{a^x}$.

Dokazati da je data funkcija parna.

16. Data je funkcija $f(x) = \log(x + \sqrt{1 + x^2})$. Dokazati da je data funkcija neparna.

17. Ako je $f(x) = \log \dfrac{1 - x}{1 + x}$, tada je

$f(a) + f(b) = f\left(\dfrac{a + b}{1 + ab}\right)$. Dokazati.

18. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx$. Odrediti realne parametre $a$ i $b$ tako da je $f(x) - f(x - 1) = x$. Zatim, dokazati da je zbir prvih $n$ prirodnih brojeva jednak $f(n)$.

19. Polinom $f(x)$ trećeg stepena, čiji je slobodni član jednak nuli, zadovoljava jednakost

$f(x) - f(x - 1) = x^2$.

Odrediti polinom $f(x)$ i pokazati da je $f(n)$ jednak zbiru kvadrata prvih $n$ prirodnih brojeva.



20. Odrediti osnovni period funkcije:

a) $y = a \sin bx$; b) $y = \operatorname{tg} \dfrac{x}{2}$;

c) $y = \cos^2 x$; d) $y = \sin^2 \dfrac{x}{2}$;

e) $y = \sin x \cos x$; f) $y = tg\,(x + a)$.

21. Funkcija $y = \sin x + \dfrac{1}{2}\sin 2x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$ ima osnovni period $\omega = 2\pi$. Dokazati.

22. Odrediti osnovni period i amplitudu funkcije $y = a\cos px + b\sin px$.

23. Odrediti osnovni period funkcije:

a) $y = \cos^4 x + \sin^4 x$; b) $y = \cos^6 x + \sin^6 x$.

24. Data je funkcija $f(x) = x^2$. Odrediti njenu inverznu funkciju i skicirati grafike funkcija $f(x)$ i $f^{-1}(x)$.

25. Data je funkcija $f(x) = \log_2(x - 1)$. Odrediti njenu inverznu funkciju $f^{-1}$ i skicirati grafike za obe funkcije.

26. Data je funkcija $f(x) = 3^x - 1$. Odrediti njenu inverznu funkciju i nacrtati odgovarajući grafik.

27. Dokazati da je inverzna funkcija funkcije

$f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

sama ta funkcija i skicirati njen grafik.

28. Data je funkcija $f(x) = \log_2(x + \sqrt{x^2 + 1})$. Odrediti $f^{-1}$.

29. Data je funkcija $f(x) = \dfrac{a^x - a^{-x}}{2}$.

Odrediti $f^{-1}$ $(a > 1)$.

**30.** Data je funkcija $f(x)=\dfrac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}}$ $(a>1)$.

a) Pokazati da je funkcija $f$ neparna.

b) Pokazati da je $f^{-1}(x)=\log_a\dfrac{1+x}{1-x}$.

**31.*** Naći eksplicitni analitički izraz funkcije $y=f(x)$, koja je implicitno definisana jednačinom

$\ln(x^2-1)+3\ln(y+2)=3$.

Odrediti zatim oblast definisanosti funkcije $f$ i njenu inverznu funkciju $f^{-1}$, za $x>1$.

**32.*** Odrediti inverznu funkciju $f^{-1}$ funkcije

$f(x)=\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}$

**33.** Odrediti inverznu funkciju $f^{-1}$ funkcije:

a) $f(x)=2\sin 3x$; b) $f(x)=\dfrac{2}{1-2\cos x}$;

c) $f(x)=\dfrac{1}{2}(1+\cos x)$; d) $f(x)=\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

**34.** Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

a) $f(x)=\arccos\dfrac{x-2}{2x}$;

b) $f(x)=\sqrt{3-x}+\arcsin\dfrac{3-2x}{5}$;

c) $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\arcsin\dfrac{x+1}{2x+1}$;

d) $f(x)=\arccos\dfrac{x}{1+x}+\sqrt{1-x^2}$.

**35.** Rešiti jednačinu:

a) $4\,\mathrm{arc\,tg}\,(x^2-3x-3)=\pi$;

b) $6\arcsin(x^2-6x+8{,}5)=\pi$.



**36.** Funkcija $f$ data je formulom $f(x)=\sqrt{\dfrac{1-x^2}{x}}$.
Odrediti sva rešenja $\beta\in[0,\pi]$ jednačine
$f(\sin\beta)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

**37.*** Dokazati da ni za jednu realnu vrednost $x$ funkcija određena formulom $y=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+1}$ nema vrednosti veće od $\dfrac{3}{2}$ i manje od $\dfrac{1}{2}$.

**38.** Skicirati grafike sledećih funkcija:

a) $y=|x|+|x+2|$;

b) $y=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{x^2+4x+4}$;

c) $y=|x^2-1|$; d) $y=|x-x^2|-x$;

e) $y=\dfrac{4}{x^2-4}$; f) $y=\dfrac{1}{\sin x}$;

g) $y=\dfrac{1}{|\cos x|}$;

h) $y=2\sin x\,|\cos x|$ $(0\le x\le 2\pi)$.

**39.*** Dokazati da je $P(x)=A(x^3-x)$ $(A=\text{const})$ jedini polinom koji zadovoljava jednakost
$(x-1)P(x+1)=(x+2)P(x)$.

**40.*** Odrediti realnu funkciju $f$ koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu $f\left(\dfrac{x+2}{2x+1}\right)=5x+3$.

**41.*** Data je funkcija $x\to f(x)=a+bc^x$. Odrediti realne brojeve $a, b, c$, ako je $f(0)=5$, $f(1)=14$, $f(2)=50$.

**42.** Data je funkcija $f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$ $(x\ne -1)$. Odrediti:

a) $f(f(x))$;

b) rešenja jednačine $f(f(x))=0{,}5$;

c) rešenja jednačine $f(x)-f(f(x))=0{,}5$.

43.* Data je funkcija $f(x)=x(1+x^2)^{-0,5}$. Uzračunati $f(f(f(f(f(x)))))$.

44.* Za funkciju $f(x)$ definisana je funkcija $f^n(x)$ na sledeći način:
$f^1(x)=f(x),\ f^{n+1}(x)=f(f^n(x))\ \ (n=1,2\ldots)$.
Ako je $f(x)=x(1+x^2)^{-0,5}$
dokazati da je $f^n(x)=x(1+nx^2)^{-0,5}$.

45. Data je funkcija $f(x)=\log_2\dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

a) Odrediti oblast definisanosti funkcije $f$.
b) Rešiti jednačinu $f(x)=1$.
c) Rešiti nejednačinu $f(x)>0$.
d) Za koje vrednosti parametara $a$ jednačina
$f(x)=\log_2(x+a)$ ima realna rešenja?

46. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{\sqrt[4]{16-x^2}}{1-\sin x\sin 7x}$.

a) Odrediti oblast definisanosti date funkcije.
b) Ispitati da li je data funkcija parna ili neparna.

47. Odrediti oblast definisanosti funkcije
$f(x)=\sqrt{(x^2-3x-10)\log^2(x-3)}$.

48. Ako je $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{3}$, tada je

(1) $2f(x+2)+f(-x-1)=x^2+4x+4$.
Dokazati. Da li važi obrnuto?

49. Odrediti oblast definisanosti funkcije
$f(x)=\sqrt{16-x^2}\,\log_2(x^2-5x+6)$.

50. Odrediti oblast definisanosti funkcije

$$f(x)=\arcsin(4x^2+2x-1)+\sqrt[4]{\frac{(x-2)(x-3)}{x^2}}.$$



51. Date su funkcije $f(x)=ax+b$ i $g(x)=cx^2$.
Odrediti realne brojeve $a, b$ i $c$ tako da je
$f(g(x))=g(f(x))$.

52. Data je funkcija $f(x)=2x^2+2x^{-2}+5x+5x^{-1}$.
Dokazati da je $f(x)=f(x^{-1})$.

53. Ako je

$$f(x)=\frac{a^x-a^{-x}}{a^x+a^{-x}},\quad g(x)=\frac{2}{a^x+a^{-x}},$$

tada je

$$f(x+y)=\frac{f(x)+f(y)}{1+f(x)\cdot f(y)},$$

$$g(x+y)=\frac{g(x)+g(y)}{1+f(x)\cdot f(y)}.$$

Dokazati.

54. Ako je $f\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)+2f\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)=x$,
odrediti $f(x)$.

55. Date su realne funkcije $f_1(x)=(x-1)^2$, $f_2(x)=|x-1|^2$,
$f_3(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^5}{x-1}}$, $f_4(x)=|x-1|\sqrt{x^2-2x+1}$ i
$f_5(x)=(x-1)\sqrt{(x-1)^2}$. Ispitati koja su od sledećih tvrđenja tačna:

a) sve funkcije su međusobno različite;
b) $f_3\neq f_1=f_2=f_4\neq f_5$;
c) $f_1=f_2=f_3=f_4\neq f_5$;
d) $f_3\neq f_1=f_2\neq f_4$ i $f_5\neq f_1$;
e) sve date funkcije su jednake.

56.* Ako je niz funkcija $f_n(x)$, $n\in N$, definisan na sledeći način:

$$f_1(x)=\frac{x}{x-1},\ f_2(x)=\frac{1}{1-x},\ f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x)),\ n\in N,$$

izračunati $f_{1992}(1992)$.

57. Ako je $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = (x-1)^2$, izračunati $f(3)$.

58. Date su funkcije $f_1(x) = 1$, $f_2(x) = \mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\ \mathrm{ctg}\,\frac{x}{2}$, $f_3(x) = \frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$,
$f_4(x) = \frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{|\sqrt{2}\cos x|}$. Ispitati koja su od sledećih tvrđenja tačna:
a) sve funkcije su međusobno jednake;
b) među datim funkcijama nema međusobno jednakih;
c) $f_1 \neq f_2 = f_3 \neq f_4$;
d) $f_1 \neq f_2 = f_3 = f_4$;
e) $f_1 \neq f_3 = f_4 \neq f_2 \neq f_1$.

59. Date su funkcije $f_1(x) = 2\log_2 x$, $f_2(x) = \log_2 x^2$, $f_3(x) = 2\log_2 |x|$,
$f_4(x) = \frac{2}{\log_x 2}$. Ispitati koji su od sledećih iskaza tačni:
a) sve funkcije su međusobno jednake;
b) među datim funkcijama nema međusobno jednakih;
c) $f_1 = f_2 = f_3 \neq f_4$;
d) $f_1 = f_4 \neq f_2 \neq f_3$;
e) $f_1 \neq f_2 = f_3 \neq f_4 \neq f_1$.

60. Ako je $f(x) = \log_6 x + 3\log_3 9x$, izračunati $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$.

61. Ako je $f(x-2) = x^3 - 2x - 1$, izračunati $f(1)$.

62. Funkcija $f(x) = 2x - 1$ definisana je u skupu realnih brojeva. Za koje vrednosti $x$ su: $f(0)$, $f(f(x))$ i $f(x^2)$ uzastopni članovi aritmetičkog niza?

63. Data je funkcija $x \to f(x) = x^2 + ax + 3$, $(a, x, y \in R)$.
a) Izračunati $f(6)$, ako je $f(-1) = 4$.
b) Rešiti jednačinu $f(f(x)) = 52$, ako je $f(-1) = 4$.



## 1.2. Granična vrednost funkcije

*Definicija 1.* Kažemo da je $A$ granična vrednost funkcije $f(x)$ u tački $a$, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji broj $\delta > 0$, takav da je $|(f(x) - A| < \varepsilon$ za svako $x$ za koje je $|x - a| < \delta$.
Pišemo $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ ili $f(x) \to A$, $x \to a$.

Teorema: Ako ke $\lim f(x) = \mathrm{A}$ i $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \mathrm{B}$ tada važi

a) $\lim\limits_{x\to a} [f(x) \pm g(x)] = \mathrm{A} \pm \mathrm{B}$  b) $\lim\limits_{x\to a} [f(x)\cdot g(x)] = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}$ i
c) $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$, $\mathrm{B} \neq 0$

64. Koristeći definiciju granične vrednosti funkcije dokazati:
a) $\lim\limits_{x\to 2} 2x = 4$;  b) $\lim\limits_{x\to 2} x^2 = 4$;
c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x+2}{3} = 1$;  d) $\lim\limits_{x\to 1} (3x+2) = 5$.

65. Po definiciji granične vrednosti, pokazati da je $\lim\limits_{x\to a} (2x - 1) = 3$.

Koliko mora biti $\delta$ da bi za sve
$x \in (2-\delta, 2+\delta)$ bilo $|(2x-1) - 3| < 0{,}01$?

66. Odrediti sledeće granične vrednosti:
a) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3x+1}{4x}$;  b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5x^2-3x+2}{2x^2+4x+1}$;  c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^2}$.

Odrediti granične vrednosti (67 – 69):

67. a) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$;  b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^2+6x-7}{x^2-5x+4}$;  c) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^4-2x^2+1}{x^2-8x+7}$.

68. a) $\lim\limits_{x\to 5} \frac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;  b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{3x^4-4x^2+1}{x^3-x^2-x+1}$;
c) $\lim\limits_{x\to -3} \frac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$.

**69.** a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{3x^2-5x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x^3-8x^2+15x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^5-16x}{2x^2+4x-16}$.

Odrediti sledeće granične vrednosti (70 – 73):

**70.** a) $\lim\limits_{x\to\infty} (x-\sqrt{x^2-10x})$; b) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+1}-x)$;

c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$; d) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{a}}$;

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[6]{x}}{\sqrt[8]{x}-\sqrt[12]{x}}$.

**71.** a) $\lim\limits_{a\to 0} \dfrac{\sqrt{b^2+4ac}-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$;

b) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{8\sqrt{x}-x^2}{8-4\sqrt{x}}$; c) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{5x}-5}$;

d) $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{4(2-\sqrt{x-3})}{x^2-49}$; e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{4x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-3}{\sqrt{x+1}-2}$. g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$;

**72.** a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{3x+1}-\sqrt[3]{4}}{\sqrt{2x-1}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to\infty} (x(\sqrt{x^2+1}-x))$.

**73.*** a) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$;

b) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$;

c) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{x^2+ax+c}+\sqrt{x^2+bx+d}-2x)$;

d) $\lim\limits_{x\to\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)}-x)$

($a, b, c$ i $d$ realni parametri).

Odrediti sledeće granične vrednosti (74 – 79):

**74.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x\sin x}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(a+x)-\sin(a-x)}{x}$;

f) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.

**75.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{x^3}$; d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2x-\sin x}{3x+\sin x}$;

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$; f) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{\sin(x+1)}$.

**76.** a) $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{x-\pi}$; b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sin(1-x)}{\sqrt{x}-1}$;

c) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin^2 x-\sin^2 a}{x^2-a^2}$; d) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)\operatorname{tg} x\right)$;

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos ax - \cos bx}{x^2}$; f) $\lim\limits_{x \to 1} \left( (1-x) \operatorname{tg} \dfrac{\pi x}{2} \right)$.

**77.*** a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \sin x} - \sqrt{\cos 2x}}{\operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{2} - \sqrt{1 + \cos x}}{\sin^2 x}$;

**78.*** a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(a+x) - \sin(a-x)}{\operatorname{tg}(a+x) - \operatorname{tg}(a-x)}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} x} - \sqrt{1 + \sin x}}{x^3}$;

**79.*** a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$.

**80.** Izraziti površinu $P_n$ i obim $O_n$ pravilnog mnogougla, upisanog u kružnicu poluprečnika $r$, u funkciji broja stranica $n$, a zatim odrediti $\lim\limits_{n \to \infty} P_n$ i $\lim\limits_{n \to \infty} O_n$. (Jedinica za merenje ugla – radijan.)

Odrediti sledeće granične vrednosti (81 – 83):

**81.*** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2^x + 2^{3-x} - 6}{\sqrt{2^{-x}} - 2^{1-x}}$.

**82.*** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}$.

**83.*** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^m - 1}{x^n - 1}$ ($m$ i $n$ prirodni brojevi).



Znajući da je

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

odrediti sledeće granične vrednosti (84 – 90):

**84.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x+m}{x-m}\right)^x$;

**85.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{mx+n}{mx+p}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{3}{x}\right)^x$.

**86.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log(1+10x)}{x}$;

**87.** a) $\lim\limits_{x \to \infty} x(\ln(x+1) - \ln x)$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} \ln \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

**88.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{5}{4x}\right)^x$; b) $\lim\limits_{x \to 0} (1+2x)^{\frac{5}{x}}$.

**89.** a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-3x+7}\right)^x$.

**90.** a) $\lim\limits_{x \to 0} (1 + 3\operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$;

**91.** Dokazati da je:

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$; b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{a^x - 1}{x} = \ln a$;

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ .

Odrediti sledeće granične vrednosti (92 – 99):

**92.*** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{-2x}-1}{x}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ .

**93.*** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-1}{\sin x}$ ; b) $\lim\limits_{x\to \infty} x(\sqrt[x]{a}-1)\ (a>0)$ .

**94.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\cos x}$ .

**95.** a) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)}$; b) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)}{2\cos\dfrac{x}{2}-\sqrt{2}}$.

**96.*** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\sin x\ln(1+x)}$ .

**97.*** $\lim\limits_{x\to 0} (1+\mathrm{tg}^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$ .

**98.*** $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ ( $a$ i $b$ celi brojevi).

**99.*** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos ax}-\sqrt[n]{\cos bx}}{x^2}$ .

**100.*** Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ tako da je:

a) $\lim\limits_{x\to \infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right) = 0;$

b) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2-x+1}-ax+b) = 0$ .



Odrediti sledeće granične vrednosti (101 – 105):

**101.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2\arcsin x}{3x}$ .

**102.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arc\,tg}\, x}{x}$ ; b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{arc\,tg}\, 2x}{\sin 3x}$ .

**103.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(1-2x)}{4x^2-1}$ ;

b) $\lim\limits_{x\to \infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\mathrm{arc\,tg}\dfrac{x}{x+1}\right)$ .

**104.** a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x^2}{\sin \pi x}$; b) $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$.

**105.** $\lim\limits_{x\to a} \sin\dfrac{x-a}{2}\cdot \mathrm{tg}\dfrac{\pi x}{2a}$.

**106.*** Data je funkcija $f(x) = \dfrac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}$, gde su $a$ i $b$ realni brojevi.

Izračunati:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

**107.*** Data je funkcija $f(x) = \dfrac{3x+4}{2x+\sqrt{x^2+4}}$. Odrediti:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$; b) $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$.

### 1.3. **Asimptote krivih linija u ravni**

1°. Ako postoji realan broj $a$ takav da je $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ ,
onda je prava $x = a$ vertikalna asimptota funkcije $y = f(x)$ .

2°. Ako postoje granične vrednosti

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

i $n=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$,

onda je prava $y=kx+n$ kosa asimptota. Ako je $k=0$, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y=n$.

Odrediti asimptote krivih (108 – 116):

**108.** a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{x-2}$; b) $f(x)=4x+1+\dfrac{1}{x}$;

**109.** a) $y=\dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$; b) $y=\dfrac{x^3}{x^2-1}$.

**110.** a) $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$; b) $y=\dfrac{x^2-4}{1-x^2}$.

**111.** a) $y=\dfrac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$; b) $y=e^{\frac{1}{x}}$.

**112.** a) $y=\dfrac{1}{\cos x}$; b) $y=\operatorname{ctg} x$;

c) $y=\dfrac{1}{\sin x}$.

**113.** a) $y=xe^{\frac{1}{x}}$; b) $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+1}}$.

**114.** $f(x)=\dfrac{1}{x}+2\operatorname{arc\,tg} x$.

**115.** $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$.

**116.** $f(x)=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$.



# II GLAVA

## 2. IZVOD FUNKCIJE

### 2.1. Priraštaj funkcije

*Obrasci i definicije*

1° Priraštaj funkcije $x\to y=f(x)$ u tački sa apscisom $x_0$ je

(1) $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

2° Srednja brzina promene funkcije na intervalu $[x_0, x_0+\Delta x]$ je

(2) $$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

3° Neprekidnost funkcije.

**Difinicija 1.** Funkcija $x\to y=f(x)$ neprekidna je u tački sa apscisom $x=a$, ako je granična vrednost funkcije za $x\to a$ jednaka vrednosti funkcije za $x=a$, tj.

(3) $$\lim_{x\to a}f(x)=f(a).$$

**Definicija 2.** Funkcija $x\to y=f(x)$ neprekidna je u tački $x=a$, ako je u toj tački definisana i ako beskonačno malom priraštaju argumenta odgovara beskonačno mali priraštaj funkcije:

(4) $$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0.$$

**117.** Ako nezavisno promenljiva poraste za $\Delta x=0{,}002$, funkcija $x\to f(x)=x^2+x-1$ dobija priraštaj $\Delta y=0{,}006004$. Odrediti početnu vrednost nezavisno promenljive.

**118.** Za koliko treba da poraste vrednost nezavisno promenljive počevši od $x_0=0$ da bi funkcija $x \to y=-x^2+2x+3$ porasla za $\Delta y=0{,}0199$? Za $\Delta x$ dobiće se dve vrednosti. Objasniti ovaj slučaj na grafiku funkcije.

**119.** Odrediti ugao koji sa osom $Ox$ gradi sečica parabole $y=x^2-7x+10$ koja sadrži tačke parabole sa apscisama $x_1=2$ i $x_2=6$.

**120.** Odrediti srednju brzinu promene funkcije $x \to y=2x^3-x^2+1$ za $x_0=1$ i $\Delta x=0{,}1$.

**121.** Odrediti priraštaj $\Delta x$ argumenta $x$ i odgovarajući priraštaj $\Delta y$ funkcije $x \to y=f(x)$, pri promeni nezavisno promenljive od vrednosti $x_1$ na vrednost $x_2$:

a) $x \to f(x)=\log_{10}x,\quad x_1=1,\quad x_2=1000;$

b) $x \to f(x)=\log_{10}2x,\quad x_1=0{,}5,\quad x_2=5.$

**122.** Odrediti srednju brzinu promene funkcije $x \to f(x)=\sin x$ ako je $x=5°$ a $\Delta x=20'$.

**123.** Tačka se kreće po zakonu koji je definisan jednačinom $s=5t^3+10t$, gde je $t$ vreme u sekundama, a $s$ put u metrima. Odrediti srednju brzinu kretanja u intervalu $t \in [20, 20+\Delta t]$ i rezultat primeniti na brojnom primeru za:

a) $\Delta t=1$; b) $\Delta t=0{,}1$; c) $\Delta t=0{,}01$. Izračunati trenutnu brzinu kretanja za $t=20$ s.

**124.** Data je funkcija $x \to y=\dfrac{x-a}{a^2-b^2}$ i početna vrednost argumenta $x_1=a-b$. Odrediti krajnju vrednost argumenta $x_2$ ako je $\Delta y=\dfrac{1}{a-b}$.

**125.** Ispitati neprekidnost funkcije:

a) $f(x)=x^2+x-1$ u tački sa apscisom $x=2$;

b) $f(x)=x^3-4x^2+3x+5$ u tački sa apscisom $x=1$.



**126.** Dokazati da su sledeće funkcije neprekidne za svako $x$:

a) $f(x)=ax^2+bx+c$; b) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$;

c) $f(x)=\sin x$; d) $f(x)=xe^x$.

**127.*** Proširiti oblast definisanosti funkcije:

$$f(x)=\frac{\sqrt{10-x}-3}{\sqrt{2-x}-1}, \ x \in D,$$

tako da nova funkcija bude neprekidna u tački sa apscisom $x=1$.

**128.*** Proširiti oblast definisanosti funkcije

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \quad (x \neq 0),$$

tako da nova funkcija bude neprekidna u tački sa apscisom $x=0$.

**129.*** Odrediti realan broj $a$ tako da funkcija bude neprekidna za svako $x$:

a) $f(x)=\begin{cases} x+1, & x \leqslant 1 \\ 3-ax^2, & x>1 \end{cases}$;

b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4, & x<0 \\ a+2, & x=0 \\ x-4, & x>0 \end{cases}$;

c) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & x \neq 2 \\ a, & x=2. \end{cases}$

**130.** Odrediti tačke prekida sledećih funkcija $x \to y=f(x)$:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{x^2-6x+8}$;

c) $f(x)=\dfrac{x-1}{x(x+1)(x^2-4)}$; d) $f(x)=\operatorname{tg} x$;

e) $f(x)=\dfrac{x}{\sin x}$; f) $f(x)=\dfrac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}$.

**131.** Dokazati da funkcija $f(x)=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}$ ima prekid prve vrste.

**132.** Data je funkcija $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

Dokazati da data funkcija ima tačku prekida prve vrste.

**133.** Odrediti vrstu prekida funkcije
$y=\operatorname{arc\,tg}(1+\frac{1}{x})$.

## 2.2. Izvod funkcije

**Definicija 1.** Izvod funkcije $f(x)$ u tački sa apscisom $x=a$ naziva se konačna granična vrednost količnika priraštaja funkcije i priraštaja argumenta u tački $a$ kad priraštaj argumenta teži nuli ili kad $x\to a$, tj.

(1) $f'(a) \stackrel{\text{def}}{=} \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ (izvod $f'(a)$ u tački sa apscisom $x=a$ predstavlja broj);

(2) $f'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$.

Formula (2) je definiciona relacija za izvod funkcije u svakoj tački u kojoj je ona definisana.

### 1° Tablica izvoda elementarnih funkcija:

1. $(C)'=0$ $(C=\text{const.})$,
2. $(x)'=1$,
3. $(x^n)'=nx^{n-1}$,
4. $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ $(x>0)$,
5. $(\sin x)'=\cos x$,
6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(\operatorname{tg} x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$ $(x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi)$
8. $(\operatorname{ctg} x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$ $(x\neq k\pi)$
9. $(a^x)'=a^x\ln a$,
10. $(e^x)'=e^x$,
11. $(\log_a x)'=\dfrac{\log_a e}{x}$ $(x>0,\ a>0)$
12. $(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$,
13. $(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(|x|<1)$,
14. $(\operatorname{arc\,tg} x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$
15. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
16. $(\operatorname{arc\,ctg} x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$.



### 2° Osnovna pravila izvoda:

1. $(Cf(x))'=C\cdot f'(x)$,
2. $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$,
3. $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$,
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\ g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$ $(g(x)\neq 0)$.

Po definiciji odrediti izvode funkcija (134–137) definisanih formulama:

**134.** a) $f(x)=\sqrt{2x-3}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{4x+5}}$.

**135.** a) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{x-a}$.

**136.** a) $f(x)=x\sin x$; b) $f(x)=x\cos x$.

**137.*** a) $f(x)=x^2\sin 2x$; b) $f(x)=x^2\cos 3x$.

Primenom tablica izvoda i osnovnih pravila izvoda odrediti izvode funkcija definisanih formulama (138–149):

**138.** a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$; b) $f(x)=2x\sqrt{x}$.

**139.** a) $y=5x^6-3x^5+4x-8$; b) $y=4x^3-2x^2+x-5$.

**140.** a) $y=6\sqrt[3]{x}-4\sqrt[4]{x}$; b) $y=\sqrt[3]{x}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}+\dfrac{3}{x^2}-\dfrac{1}{5x^3}+4$.

**141.** a) $y=(x^2+a^2)(x^2-a^2)$; b) $y=(x^3-1)(x^2+x+1)$.

**142.** a) $f(x)=(2x+1)(x^2+3x-1)$; b) $f(x)=(3x^2+1)(2x^2+3)$.

**143.** a) $f(x)=x^2\cos x$; b) $f(x)=x^3\sin x$.

**144.** a) $f(x)=\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x$; b) $f(x)=x-\sin x\cos x$.

**145.** a) $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x-a}{x+a}$; c) $f(x)=\dfrac{x^2}{2-x^2}$.

**146.** a) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$.

147. a) $f(x)=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$; b) $f(x)=e^x \arcsin x$.

148. a) $y=\dfrac{\cos x}{1-\sin x}$; b) $f(t)=\dfrac{\cos t}{1+2\sin t}$.

149. $f(t)=\dfrac{(1+t^2)\operatorname{arc\,tg} t-t}{2}$.

150. Data je funkcija $f(x)=-x^3+9x^2+x-1$. Odrediti $f'(-1)$.

151. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{1}{4}x^4-\dfrac{1}{3}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-1$. Odrediti $f'(3)$.

152. Data je funkcija $f(x)=3\ln x-x^2$. Izračunati $f'(1)$.

153. Data je funkcija $f(t)=t^3-3\ln t$. Izračunati $f'(3)$.

154. Data je funkcija $f(x)=\dfrac{\cos x+1}{\cos x-1}$. Izračunati $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

155. Ako je $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$, izračunati $f'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

156. Ako je $f(x)=5\arcsin x-3\arccos x$, izračunati $f'\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

157. Ako je $f(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$, izračunati $f'(-1)$.

158. Ako je $f(x)=3\operatorname{arc\,tg} x-2\operatorname{arc\,cotg} x$ izračunati $f'(2)$.

159. Ako je $f(x)=\dfrac{1-\sin x}{1+\cos x}$ izračunati $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Odrediti prvi izvod funkcije $x \to y=f(x)$ (160–168) ako je:

160. $f(x)=\dfrac{1+\operatorname{ctg} x}{\operatorname{ctg} x}$.

161. $f(x)=\dfrac{\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}$.

162. $f(x)=\cos x\,(1+\sin x)$.



163. $f(x)=\sin x\,(1-\cos x)$.

164. $f(x)=\dfrac{5-e^x}{e^x+2}$.

165. $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$.

166. $f(x)=\dfrac{\ln x}{1-\ln x}$.

167. $f(x)=\dfrac{\ln x-2}{\ln x}$.

168. $f(x)=\dfrac{\ln x+1}{\ln x}$.

169. Pokazati da funkcija $y=\dfrac{1+\ln x}{x-x\ln x}$ zadovoljava jednačinu

$2x^2y'=x^2y^2+1$.

170. Odrediti tačke u kojima je izvod funkcije $y=\dfrac{1}{3}x^3$ jednak izvodu funkcije $y=2x^2+5x+3$.

171. Odrediti jednačinu tangente na grafiku date funkcije u datoj tački koja pripada grafiku

a) $y=2x^2-3x+2$ u tački $A(2, y)$;

b) $y=x^4-x^2+3$ u tački $A(1, y)$;

c) $y=\ln x$ u tački $A(1, y)$:

d) $y=\sin x$ u tački $A(\pi, y)$.

172. Odrediti jednačinu one tangente krive $y=x^3+3x^2-5$ koja je normalna na pravu $2x-6y+1=0$.

173. U kojoj je tački parabole $y=x^2-7x+3$ tangenta paralelna sa pravom $y=5x+2$?

174. Data je funkcija $f(x)=x^3-3x^2+1$. Odrediti tačke u kojima su tangente date funkcije paralelne sa apscisnom osom.

175. Odrediti jednačine tangenti krive $y=x^3-2x^2+x-2$, koje su paralelne sa pravom $7x-4y+28=0$.

176. Dve krive definisane su jednačinama: $y=2x^2+2x-3$ i $y=x^3-2x+5$. Dokazati da ove krive imaju zajedničku tangentu u tački M(2, 9) i odrediti jednačinu zajedničke tangente.

177. Odrediti jednačine tangente i normale funkcije $f(x)=x^4-x^2+3$ u tački M(1, $y$) koja pripada grafiku date funkcije.

178. Odrediti jednačine tangente i normale parabole $y=4-x^2$ u tačkama preseka sa osom Ox. Konstruisati parabolu, tangentu i normalu.

179. Odrediti jednačine tangente i normale funkcije $f(x)=\cos x$ u tački $A\left(\frac{\pi}{2}, y\right)$.

180. Odrediti jednačine tangente i normale funkcije $f(x)=\cos^2\sqrt{x}$ u tački M(0, $y$).

181. Odrediti relaciju koju zadovoljavaju realni brojevi $k$, $n$, i $p$ da prava $y=kx+n$ bude tangenta paraboli $y^2=2px$.

182. Odrediti relaciju koju zadovoljavaju realni brojevi $a$, $k$ i $n$ da prava $y=kx+n$ bude tangenta parabole $y=ax^2$.

183. Dokazati da je površina trougla, koji je određen bilo kojom tangentom hiperbole $2xy=a^2$ i koordinatnim osama, konstantna i jednaka $a^2$.

184. Data je kvadratna funkcija $y=ax^2+bx+c$. Odrediti koeficijente $a$, $b$ i $c$ tako da grafik sadrži koordinatni početak, da za $x=2$ ima tangentu paralelnu osi $Ox$ i da njegov grafik u tački sa apscisom $x=3$ ima tangentu paralelnu simetrali prvog i trećeg kvadranta koordinatnog sistema.

185. Data je funkcija $f(x)=ax^2+bx+c$. Odrediti realne brojeve $a$, $b$ i $c$ tako da grafik date funkcije sadrži tačke M(0, 2), N(1, 0) i da u tački N tangenta ima koeficijent pravca $k=-3$.

186. U funkciji $f(x)=x^2+bx+c$ odrediti koeficijente $b$ i $c$ tako da njen grafik sa pravom $y=x$ ima jednu zajedničku tačku sa apscisom $x=2$.

187. Data je funkcija $x\to f(x)=\frac{ax-x^3}{4}$. Odrediti realan broj $a$ tako da grafik date funkcije seče osu $Ox$ pod uglom $\alpha=45°$.



188. Odrediti jednačine tangenti krive $y=x^3+x^2$ čiji je koeficijent pravca 8.

189. Odrediti jednačine tangenti krive $y=2x^3+4x^2-x$, čiji je koeficijent pravca 0,5.

190. Odrediti dodirne tačke tangenti krive $y=x^3-x^2+2x+3$, koje su paralelne pravoj $3x-y-7=0$.

191. Odrediti jednačinu tangente, parabole $y=x^2-4x+7$, koja je normalna na pravu određenu koordinatnim početkom i temenom date parabole.

### 2.3. Izvod složene funkcije

Ako je $y=f(u)$ a $u=g(x)$, i ako funkcije $f(u)$ i $g(x)$ imaju izvode, tada je $y'=f'(u)\cdot g'(x)$. (Funkcija $y=f(\varphi(x))$ naziva se složena funkcija.)

Tablični izvodi prethodnog paragrafa tada postaju:

1. $(u^n)'=nu^{n-1}u'$;
2. $(\sqrt{u})'=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot u'$;
3. $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$;
4. $(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$;
5. $(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$;
6. $(\operatorname{ctg} u)=-\frac{u'}{\sin^2 u}$;
7. $(a^u)'=a^u\ln a\cdot u'$;
8. $(e^u)'=e^u\cdot u'$;
9. $(\log_a u)'=\frac{\log_a e\cdot u'}{u}$;
10. $(\ln u)'=\frac{u'}{u}$;
11. $(\arcsin u)=\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
12. $(\arccos u)=-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$;
13. $(\operatorname{arctg} u)=\frac{u'}{1+u^2}$;
14. $(\operatorname{arcctg} u)=-\frac{u'}{1+u^2}$.

U sledećim zadacima odrediti prvi izvod datih složenih funkcija (192–229):

192. a) $y=ax^2+bx+c$; b) $y=(1-5x)^4$.

**93.** a) $y=2\sin 6x$; b) $y=\operatorname{tg} ax$.

**94.** a) $y=x^2e^{-2x}$; b) $y=e^{-x}(\sin x+\cos x)$.

**95.** a) $y=e^{x^2-x+2}$; b) $y=\ln(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$.

**96.** a) $y=\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$; b) $y=\ln\dfrac{1+x}{1-x}$.

**97.** a) $y=\ln\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$; b) $y=\ln(e^{2x}+\sqrt{e^{4x}+1})$.

**98.** a) $y=\sin^4 x$; b) $y=\sin x-\dfrac{1}{3}\sin^3 x$.

**99.** $y=\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x+3x$.

**200.** $y=\dfrac{1}{2}\ln\operatorname{tg} x+\ln\cos x$.

**201.** a) $y=\sqrt{\dfrac{1+\sin x}{1-\sin x}}$; b) $y=\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\dfrac{1}{3}\operatorname{tg}^3\dfrac{x}{2}$.

**202.** $y=\dfrac{1}{4}\operatorname{tg}^4 x-\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x-\ln\cos x$.

**203.** $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x+\ln\cos x$.

**204.** $y=\dfrac{1}{2}\ln\sin x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x$.

**205.** a) $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}}$; b) $y=\ln\sqrt{\dfrac{\sin 2x}{1-\sin 2x}}$.

**206.** $y=\sqrt{x+1}-\ln(1+\sqrt{x+1})$.

**207.** a) $y=\arcsin\dfrac{x}{2}$; b) $y=\arccos\dfrac{1}{x}$.

**208.** $y=x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}$.



**209.** $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$.

**210.** a) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x^2}{a}$; b) $y=\arcsin 2x$.

**211.** a) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$; b) $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$.

**212.** a) $y=\arcsin\dfrac{x^2-a^2}{x^2+a^2}$; b) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x-1}{x+1}$.

**213.** a) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y=\operatorname{arcctg}\dfrac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$.

**214.** a) $y=\ln\dfrac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\dfrac{a}{b}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{b}$; b) $y=\dfrac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2})e^{\arcsin x}$

**215.** $y=\operatorname{arctg}\dfrac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}$.

**216.*** $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

**217.*** $y=\dfrac{1}{6}\ln\dfrac{(x-1)^2}{x^2+x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$.

**218.** $y=\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x$.

**219.** $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\dfrac{a^2}{2}\arcsin\dfrac{x}{a}$.

**220.** $y=a\ln(\sqrt{x+a}+\sqrt{x})-\sqrt{x^2+ax}$.

**221.** $y=4\ln(\sqrt{x-4}+\sqrt{x})+\sqrt{x^2-4x}$.

**222.*** $f(x)=\ln\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}+3\ln\sqrt[4]{\dfrac{x^2+1}{x^2-1}}+\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} x$.

**223.** $f(x)=\sqrt{x^2-1}-\arccos\frac{1}{x}$.

**224.** $y=\frac{x}{1+x^2}-\operatorname{arctg} x$.

**225.** $y=\operatorname{arctg} x+\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$.

**226.** $y=e^x\sqrt{1-e^{2x}}+\arcsin e^x$.

**227.*** $y=\ln\sqrt[4]{\frac{x^2+x+1}{x^2-x+1}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}(\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}})$.

**228.** $f(x)=\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x+\frac{2}{3}\operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg} x$.

**229.** $y=\ln(\sin x+\sqrt{1+\sin^2 x})$.

**230.** Dokazati da izvod sledećih funkcija ne zavisi od $x$.

a) $y=\cos^2 x+\cos^2(\frac{2\pi}{3}+x)+\cos^2(\frac{2\pi}{3}-x)$;

b) $y=\sin^2 x+\sin^2(\frac{2\pi}{3}+x)+\sin^2(\frac{2\pi}{3}-x)$;

c) $y=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x\cos^2 x$;

d) $y=2(\sin^6 x+\cos^6 x)-3(\sin^4 x+\cos^4 x)$.

**231.** Dokazati tačnost tvrđenja:

a) $(\sin^n x\cos nx)'=n\sin^{n-1}x\cos(n+1)x$;

b) $(\sin^n x\sin nx)'=n\sin^{n-1}x\sin(n+1)x$;

c) $(\cos^n x\sin nx)'=n\cos^{n-1}x\cos(n+1)x$;

d) $(\cos^n x\cos nx)'=-n\cos^{n-1}x\sin(n+1)x$.

**232.** Polazeći od identiteta:

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+\ldots+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x},$$

odrediti zbir $\sin x+3\sin 3x+5\sin 5x+\ldots+(2n-1)\sin(2n-1)x$.



**233.** Polazeći od identiteta:

$$\sin x+\sin 3x+\sin 5x+\ldots+\sin(2n-1)x=\frac{\sin^3 nx}{\sin x},$$

odrediti zbir $\cos x+3\cos 3x+5\cos 5x+(2n-1)\cos(2n-1)x$.

**234.** Pokazati da funkcija $y=\ln\frac{1}{1+x}$ zadovoljava jednačinu $xy'+1=e^y$.

Odrediti izvode implicitnih funkcija definisanim jednačinama (235–238):

**235.** a) $x^2+y^2=r^2$; b) $y^2=2px$.

**236.** a) $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$; b) $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$.

**237.** a) $x^2+xy+y^2=6$; b) $x^3+y^3-3axy=0$.

**238.** a) $y+\operatorname{arctg} y-x=0$; b) $xy-\operatorname{arctg}\frac{x}{y}=0$.

**239.** Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2=20x$, koja gradi ugao od 45° sa osom $Ox$.

**240.** Odrediti jednačinu tangente hiperbole $7x^2-2y^2=14$, koja je normalna na pravu $2x+4y-3=0$.

**241.** Odrediti ugao pod kojim prava $y=x$ seče krivu definisanu jednačinom $x^2+xy+y^2=12$.

U sledećim zadacima odrediti ugao preseka krivih definisanih jednačinama (242–251):

**242.** $x^2+y^2-4x=1$ i $x^2+y^2-2y=9$.

**243.** $x^2-y^2=5$ i $4x^2+9y^2=72$.

**244.** $y^2=4x$ i $2x^2+y^2=6$.

**245.** $x^2=4(y+1)$ i $x^2=-16(y-4)$.

**246.** $x^2-y^2=a^2$ i $x^2+y^2=2a^2$.

**247.** $y^2=4(x+1)$ i $x^2+y^2=16$.

248. $(x-\frac{p}{2})^2+y^2=p^2$ i $y^2=2px$.

249. $(x-\frac{p}{2})^2+y^2=4p^2$ i $y^2=2px$.

250. $y^2=ax$ i $x^2=ay$.

251. $x^2+y^2-8ax=0$ i $y^2(2a-x)=x^3$.

252.* Dokazati da familije krivih:
a) $y^2=4a(x+a)$ i $y^2=4b(b-x)$;
b) $xy=b^2$ i $x^2-y^2=a^2$;
c) $y^2=2(p+a)(x+\frac{a}{2})$ i $y^2=2(p+b)(\frac{b}{2}-x)$; obrazuju ortogonalnu mrežu.

253. Date su funkcije $f(x)=4-15x^2-2x^3$ i $g(x)=2x^3+18x+1$. Za koje vrednosti $x$ je tačna nejednakost

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>0?$$

254. Odrediti ugao koji sa osom $Ox$ obrazuje tangenta parabole $y=x^2+4x-17$, konstruisana u tački

$$M(\frac{5}{2}, y).$$

Napisati jednačinu te tangente.

255. Odrediti jednačinu tangente konstruisane na grafik funkcije $x\to y=-x^2+2x-1$ u tački sa apscisom $x=2$. Zatim odrediti ugao koji ta tangenta obrazuje sa pravom $y-x+1=0$.

256. Data je funkcija $x\to f(x)=2\sin(x+\frac{1}{x})$. Izračunati $f'(1)$.

257. Dokazati da ma koja tangenta krive $y=x^5+8x+1$ obrazuje sa osom $Ox$ oštar ugao.

258. Data je funkcija $x\to f(x)=1-\frac{x^2}{a^2}$. U presečnim tačkama grafika date funkcije sa osom $Ox$ odrediti jednačine tangenti, a zatim njihovu presečnu tačku.



259. Odrediti jednačinu tangente krive $y=-\frac{x^2}{2}+2$, koja sadrži tačku $A(\frac{1}{2}, 2)$ i seče grafik funkcije $y=\sqrt{4-x^2}$.

Odrediti drugi izvod funkcije (260–263):

260. a) $y=\sqrt{1+x^2}$; b) $y=e^{-x^2}$.

261. a) $y=e^x\sin x$; b) $y=e^{2x+1}$.

262. a) $y=\frac{1-x}{1+x}$; b) $y=\ln(x+1)$.

263. a) $y=\ln\sin x$; b) $y=\operatorname{arctg} x$.

264. Odrediti treći izvod funkcije:
a) $y=x^2\ln x$; b) $y=\cos^2 x$.

265. Data je funkcija $f(x)=e^x\sin x$.
a) Dokazati da je tačna jednakost
$f''(x)-2f'(x)+2f(x)=0$.
b) Izračunati $f'(0)$, $f''(0)$ i $f'''(0)$.

266. Odrediti $n$-ti izvod funkcije
a) $y=\sin x$; b) $y=\cos x$.

267. Odrediti $n$-ti izvod funkcije:
a) $y=e^{-2x}$; b) $y=\frac{1}{1+x}$; c) $y=\ln x$.

268. Odrediti drugi izvod funkcije date implicitno formulom $x^2+y^2=1$.

269. Dokazati da funkcija $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$ zadovoljava jednačinu $y''+9y=0$.

270. Dokazati da funkcija $y=e^x\cos x$ zadovoljava jednačinu $y^{(4)}+4y=0$.

271. Dokazati da funkcija $y=e^x\sin x$ zadovoljava jednačinu $y''-2y'+2y=0$.

**272.** Date su funkcije $f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+3x$ i $g(x)=\frac{x^3}{3}-2x^2+3x$.

Odrediti sve realne vrednosti $x$ za koje je tačna nejednakost

$$\frac{f'(x)}{g'(x)}>-3.$$

**273.** Date su funkcije $f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{3}-\frac{63x^2}{2}$ i $g(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+7x$.

Odrediti sve realne vrednosti $x$ za koje je tačna nejednakost $\frac{f''(x)}{g'(x)}>7$.

**274.** Data je funkcija $x\to y=2x\sin x-(x^2-2)\cos x$. Dokazati da je data funkcija rešenje jednačine $y'''+y'=2\sin x+4x\cos x$.

Odrediti diferencijale prvog reda sledećih funkcija (275–277):

**275.** a) $y=\sqrt{1+x^2}$; b) $f(x)=2x-\sin 2x$.

**276.** a) $y=\operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}$; b) $f(\varphi)=\cos(a-b\varphi)$.

**277.** a) $f(x)=\arcsin\frac{1}{x}$; b) $f(x)=\frac{a}{x}+\operatorname{arctg}\frac{x}{a}$.

**278.** Data je funkcija $x\to f(x)=5x^3+4x^2+6x-8$.

Rešiti jednačinu $f'(x)-3x^{-1}\ f(x)=0$.

**279.** Date su funkcije $f(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{7}x$ i $g(x)=2x^3-4{,}5x^2-2x$.

Odrediti sve realne vrednosti $x$ za koje je

$7f'(x)+g'(x)\geqslant 1$.

**280.** Data je funkcija $x\to f(x)=\frac{x^3}{3}-\frac{a+2}{2}x^2+3ax+a$ ($a$ realan broj).

Odrediti sve realne vrednosti $x$ za koje je $f'(x)=a$.

**281.** Data je funkcija $x\to y=\frac{1}{2}(x+\sqrt{1-x^2})\,e^{\arcsin x}$.

Rešiti jednačinu $2y-y'x=xe^{\arcsin x}$ po $x$.



**282.** Data je funkcija $x\to f(x)=x^3+ax^2+bx-1$ ($a$, $b$ realni brojevi).

a) Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ ako je $f(1)=-12\wedge f(-1)=4$.

b) Za dobijene vrednosti $a$ i $b$ odrediti $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f'(x)}{x-3}$

c) Rešiti sistem nejednačina $0<f'(x)<f''(x)$.

**283.** Data je funkcija $x\to f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(6-3a)x^2-2(a+4)x+8$ ($a$ realan broj). Odrediti realan broj $a$ tako da je tačna jednakost $\frac{1}{f(0)}(f''(-2)-f'(-1))=-0{,}125$.

**284.** Date su funkcije $x\to f(x)=\frac{ax}{a+x}$ i $x\to g(x)=ax^3-(a-1)x^2$.

Rešiti jednačinu po $x$

$$f'(x)=g'(x)+\frac{a^2}{(a+x)^2}.$$

**285.** Data je funkcija $x\to y=x^3-3ax^2+3a^2x-3x-1$ ($x$, $a\in R$). Odrediti realan broj $a$ tako da je $y_{\min}+y_{\max}=2a^3+a^2+3$.

**286.** Data je funkcija $x\to y=\frac{a}{6}x^3-bx^2+\frac{1}{3}$ ($a$ i $b$ celi brojevi). Celi brojevi $a$ i $b$ zadovoljavaju konjunkciju $3a^2+5b^2=17\wedge a+b=3$. Dokazati da je $y_{\min}=f(y_{\min})$.

**287.** Data je funkcija $x\to f(x)=(k+1)x^2+(k+3)x-5$ ($k$ je realan broj). Odrediti realan broj $k$ da izrazi: $f(1)+15$, $f'(1)$ i $f''(x)$, uzeti ovim redom obrazuju geometrijsku progresiju.

## 2.4. Primena izvoda pri određivanju granične vrednosti Lopitalovo pravilo

*Primedba* 1. Ako se pri izračunavanju granične vrednosti $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ javi neodređeni oblik »$\frac{0}{0}$« ili »$\frac{\infty}{\infty}$« tada se koristi veoma efektivno pravilo Lopitala.

*Primedba* 2. Neka su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne u tački $x=a$ i njenoj okolini, pri čemu je $f(a)=g(a)=0$ i $g'(a)\neq 0$, tada je

(1) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ (Lopitalovo pravilo).

Primenom Lopitalovog pravila izračunati granične vrednosti (288–303):

**288.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{2x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{\sin 2x}$.

**289.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^n-1}{x-1}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

**290.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\sin x}$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x}$.

**291.** a) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x-2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3}{x-\sin x}$.

**292.** a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\ln\sin x}{(\pi-2x)^2}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-b^x}{x}$.

**293.** a) $\lim\limits_{x\to 0} x^2\ln x$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{ctg} 2x$.

**294.** a) $\lim\limits_{x\to 0} x^x$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg} x}$.

**295.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{x}{\ln x}\right)$.

**296.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x-1}\right)$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

**297.*** a) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}(\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$.

**298.*** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0} x^{\sin x}$.



**299.** a) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-x^3-x+1}{x^3-x^2-x+1}$; b) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-8x^2+16}{x^3-2x^2-4x+8}$.

**300.** a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x-2-2x-x^2}{2x^3}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x-2\cos x+1}{x^2}$.

**301.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x}{x^k}$, $(k\in R^+)$; b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x^k}$, $(k\in N^+)$.

**302.** a) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t+\sin t-1}{\ln(1+t)}$; b) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{e^t\sin t-t}{3t^2+t^5}$.

**303.*** a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\cos x)^{\frac{\pi}{2}-x}$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

### 2.5. **Primena izvoda u prirodnim naukama**

**304.** Tačka se kreće pravolinijski po zakonu $s=2t^3+t^2-4$. Odrediti brzinu i ubrzanje u trenutku $t=4$.

**305.** Telo se kreće pravolinijski po zakonu $s(t)=\frac{1}{3}t^3-2t^2+3t$. Odrediti brzinu i ubrzanje kretanja. U kom trenutku telo menja smer kretanja.

**306.** Dve tačke se kreću pravolinijski po zakonima $s=100+5t$ i $s=\frac{1}{2}t^2$. Kojom se brzinom kreću ove tačke u momentu njihovog susreta?

**307.** Tačka se kreće pravolinijski po zakonu $s=\frac{1}{2}t^2-5t+8$. U kom trenutku je brzina tačke jednaka 0?

**308.** Zakon kretanja nekog tela koje se kreće pravolinijski je $s=3t^3-2t^2+t$. U kom trenutku će brzina tela biti $v=6$?

309. Zakon promene temperature $T$ tela u zavisnosti od vremena $t$ dat je jednačinom $T=0{,}2t^2$. Odrediti brzinu zagrevanja tela u trenutku $t=10$.

310. Temperatura tela $T$ menja se u funkciji vremena $t$ po zakonu $T=0{,}5t^2-2t$. Odrediti brzinu zagrevanja tela u trenutku $t=5$.

311. Sa visine od 10 m izbačeno je vertikalno uvis telo sa početnom brzinom 200 m/s. Na kojoj će se visini nalaziti posle $t$ sekundi? Posle koliko sekundi telo dostiže maksimalnu visinu i kolika je ta visina?

312. Točak radijusa $r$ kotrlja se po pravoj. Ugao $\beta$ za koji se točak okrene u toku $t$ sekundi dat je jednačinom $\beta=t+\frac{t^2}{2}$. Odrediti brzinu i ubrzanje centra točka.

313. Količina naelektrisanja $q$, koja protiče kroz jedan provodnik, menja se u zavisnosti od vremena $t$ po zakonu $q=0{,}4t^2$ ($q$ u Kulonima, $t$ u sekundama). Odrediti jačinu struje $J$ posle 8 sekundi.

314. Promena jačine struje u funkciji vremena $t$ data je jednačinom $J=2t^2-5t$. Odrediti brzinu promene jačine struje posle 10 sekundi.

315. Telo mase 10 kg kreće se pravolinijski po zakonu $s=3t^2+7t+4$. Odrediti kinetičku energiju tela $(\frac{1}{2}mv^2)$ u 4. sekundi od početka kretanja.

316. Telo mase 100 kg kreće se pravolinijski po zakonu $s=5t^2-2$. Odrediti kinetičku energiju kroz 2 sekunde.

### 2.6. Monotonost, ekstremne vrednosti, konveksnost, konkavnost prevojne tačke funkcije

*Primedba* 1. Monotonost: Ako je u intervalu $(a, b)$ izvod funkcije pozitivan, tj. $f'(x)>0$, tada funkcija raste u intervalu $(a, b)$, a ako je $f'(x)<0$, tada funkcija $f(x)$ opada.

*Primedba* 2. Ekstremne vrednosti: Za određivanje lokalnih ekstremuma diferencijabilne funkcije potrebno je najpre odrediti apscise stacionarnih tačaka rešavanjem jednačine
(1) $f'(x)=0$.



Od rešenja jednačine (1) treba izdvojiti ona koja su realna i u kojima funkcija menja znak. Funkcija će imati maksimum u tačkama u kojima izvod menja znak od $+$ na $-$, a minimum u tačkama u kojima izvod menja znak od $-$ na $+$. U tačkama u kojima izvod ne menja znak nema ni maksimuma ni minimuma.

*Primedba* 3. Ako je $x=x_0$ apscisa stacionarne tačke i ako je $f''(x_0)<0$, tada u tački sa apscisom $x=x_0$ funkcija $f(x)$ ima maksimum, a ako je $f''(x_0)>0$, funkcija $f(x)$ ima u tački sa apscisom $x=x_0$ minimum.

*Primedba* 4. Konveksnost i konkavnost: Kaže se da je funkcija $f(x)$ konveksna na intervalu $(a, b)$ ako je grafik proizvoljne tangente ispod grafika funkcije u koordinatnom sistemu $xOy$. Funkcija $f(x)$ je konkavna na intervalu $(a, b)$ ako je grafik ma koje tangente iznad grafika funkcije u koordinatnom sistemu $xOy$.

*Primedba* 5. Prevojne tačke: Ako $x=x_0$ razdvaja intervale konveksnosti i konkavnosti funkcije $f(x)$ tačka $P(x_0, f(x_0))$ se naziva prevojna tačka funkcije $y=f(x)$.

Odrediti intervale monotonosti, konveksnosti i konkavnosti kao i prevojne tačke funkcija $x\to y$ (317–319), ako je:

317. a) $y=x^3-3x$; b) $y=x^3-4x^2+4x$.

318. a) $y=\ln x$; b) $y=\operatorname{tg} x$.

319. a) $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$; b) $y=\sin x-\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$.

Odrediti ekstremne vrednosti funkcija $x\to y$ (320–324), gde je:

320. a) $y=x^3-3x+1$; b) $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

321. a) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$; b) $y=\frac{x^2}{x-2}$.

322. $y=\sin x+\cos x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$.

323. $y=\sin^2 x-2\sin x$ $(0\leq x\leq 2\pi)$.

324. a) $y=x\ln^2 x$; b) $y=x^2e^x$.

325. Pokazati da funkcija $y=x^3-3x^2+6x+10$ nema ekstremnih vrednosti.

326. U kružnici poluprečnika $r$ upisan je pravougaonik maksimalne površine. Odrediti dimenzije pravougaonika i maksimalnu površinu.

327. Odrediti stranice pravougaonika, najveće površine, upisanog u elipsi $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$.

328. Odrediti stranice jednakokrakog trougla maksimalne površine, upisanog u elipsi $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ (sl. 8).

329. Dat je lik omeđen parabolom $y^2=2px$ i pravom $x=a$. Odrediti dimenzije pravougaonika, maksimalne površine, koji je upisan u dati lik (sl. 9).

330. Od kartona oblika kvadrata stranice $a$ načiniti otvorenu kutiju maksimalne zapremine. Odrediti dimenzije kutije i maksimalnu zapreminu.

331. Od kartona oblika pravougaonika osnovice 32 cm i visine 20 cm napraviti otvorenu kutiju maksimalne zapremine. Odrediti maksimalnu zapreminu.

332. U polukružnici poluprečnika $r$ upisan je trapez, čija je veća osnovica prečnik kružnice. Odrediti visinu i manju osnovicu trapeza, tako da mu površina bude maksimalna.

333. Odrediti dimenzije pravog kružnog valjka, maksimalne zapremine, koji se može upisati u pravu kružnu kupu poluprečnika $R$ i visine $H$.

334. Odrediti dimenzije i zapreminu prave kružne kupe maksimalne zapremine, koja se može upisati u loptu datog poluprečnika $R$.

335. U pravu kružnu kupu poluprečnika $R$ i visine $H$, upisati kvadratnu prizmu osnovne ivice $a$ i visine $x$, maksimalne zapremine.

336. Među svim pravim kupama opisanim oko lopte poluprečnika $R$, odrediti onu čija je zapremina minimalna.

337. U loptu poluprečnika $R$ upisati valjak:
a) maksimalne zapremine;
b) maksimalne površine omotača.



338. U tački $M(x_0, y_0)$ elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ konstruisana je tangenta. Odrediti koordinate tačke $M$ tako da ova tangenta obrazuje sa koordinatnim osama trougao minimalne površine.

339. Tačka $A(a, b)$ $(a>0,\ b>0)$, Dekartove ravni $xOy$ pripada pravoj koja obrazuje sa koordinatnim osama trougao minimalne površine. Odrediti katete pravouglog trougla i njegovu minimalnu površinu.

340. U kružnicu poluprečnika $r$ upisan je jednakokraki trougao maksimalne površine. Odrediti stranice trougla.

341. Od svih kružnih konusa date površine $P$, odrediti onaj čija je zapremina maksimalna.

342. Odrediti osnovnu ivicu i visinu pravilne četvorostrane piramide date površine $P$, tako da ima najveću zapreminu.

343. U pravu kružnu kupu poluprečnika $R$ i visine $H$ upisan je kružni valjak maksimalne površine omotača. Odrediti dimenzije valjka.

344. Odrediti dimenzije prave kružne kupe date zapremine $V$, tako da njena površina bude minimalna.

345. Data je elipsa $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$. Konstruisati tetivu $MN$ paralelnu sa velikom osom elipse, tako da je površina trougla $OMN$ maksimalna, a tačka $O$ koordinatni početak.

346. Duž $a$ podeliti na dve duži tako da suma trostrukog kvadrata prve duži i dvostrukog kvadrata druge duži bude minimalna.

347. Na paraboli $y=x^2$ odrediti tačku najmanje udaljenu od prave $y=2x-4$.

348. U jednačini $y=x^3-1-a(x-1)$ odrediti $a$ tako da grafik krive definisane datom jednačinom dodiruje osu $Ox$.

349. Funkcija $x \to y=a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ ima prevojnu tačku u koordinatnom početku, a minimum u tački sa apscisom $x=3$. Tangenta u prevojnoj tački ima koeficijent pravca $-1$. Odrediti realne brojeve $a_3$, $a_2$, $a_1$ i $a_0$.

350. Odrediti koeficijente $a$, $b$ i $c$ polinoma $y=x^3+ax^2+bx+c$ tako da: a) za $x=-1$ funkcija ima maksimum, za $x=4$ minimum, a za

$x=-2$ vrednost 1; b) za $x=-2$ ima prevojnu tačku, a u toj tački vrednost 4, a da tangenta u prevojnoj tački bude paralelna osi $Ox$.

**351.** Komponente $F_1$ i $F_2$ sile $F$ obrazuju međusobno ugao $\beta$. Za koju vrednost ugla $\beta$ sila $F=\sqrt{F_1^2+F_2^2+2F_1F_2\cos\beta}$ ima maksimalnu vrednost.

**352.** Na telo težine $G$ koje se nalazi na strmoj ravni nagnutoj pod uglom $\beta$ prema horizontalnoj ravni, dejstvuje sila $F=\dfrac{kG}{\cos\beta+k\sin\beta}$, gde je $k$ koeficijent trenja. Odrediti ugao $\beta$ tako da sila $F$ ima najmanju vrednost.

**353.** Data je funkcija $x\to f(x)=Ax^2+x+B\ln x$.
Odrediti:

a) Realne brojeve $A$ i $B$, ako je $f(1)=2 \wedge f'(1)=4$.

b) Realne brojeve $A$ i $B$, tako da za $x=1$ i $x=2$ data funkcija ima ekstremne vrednosti.

c) Realne brojeve $A$ i $B$, tako da je data funkcija rastuća na čitavoj oblasti definisanosti.

**354.** Neka su $x_1$ i $x_2$ apscise ekstremnih vrednosti funkcija $x\to f(x)=2x^3+3(a-2)x^2-6(a+1)x+2$, gde je $a$ realan broj. Za koje vrednosti realnog broja $a$ izraz $x_1^2+x_2^2$ ima minimalnu vrednost?

**355.** Ako su $x_1$ i $x_2$ apscise minimuma i maksimuma funkcije $x\to y=-2x^3+3(1-2a)x^2+12ax-1$ $(a\in R)$. Odrediti realne vrednosti $a$ tako da je tačna jednakost $x_1^2=x_2$.

**356.** Data je funkcija $x\to f(x)=2\ln(x-2)-x^2+4x+1$. Odrediti intervale monotonosti i ekstremne vrednosti date funkcije.

**357.** Za koje je vrednosti realnog broja $a$ funkcija $x\to f(x)=(a+2)x^3-3ax^2+9ax-2$ rastuća za svako $x$ iz svog domena?

**358.** Data je funkcija $x\to y=x^2+bx+2$. U tačkama čije su apscise $x_1=-1$ i $x_2=-3$ konstruisane su tangente na grafik date funkcije. Za koje vrednosti realnog broja $b$ je obim trougla koga obrazuju tangente sa osom $Oy$ minimalan?

**359.** Data je funkcija $x\to f(x)=(c-12)x^3+3(c-12)x^2+6x+7$ gde je $c$ realan broj. Odrediti realan broj $c$ tako da data funkcija bude rastuća za svako $x$.



**360.** Data je funkcija $x\to f(x)=2x^3-6a^2x+3$.
Odrediti pozitivnu vrednost realnog broja $a$, tako da za $x=3$ funkcija ima minimalnu vrednost.

**361.** Odrediti minimalnu i maksimalnu vrednost funkcija:
a) $x\to f(x)=x^2(2x-3)-12(3x-2)$, na intervalu $[-3,\ 6]$;

b) $x\to f(x)=15-3\cos x+\cos 3x$, na intervalu $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

**362.** Dokazati da grafik krive $y=x^4+3x^2+2x$ nema zajedničkih tačaka sa pravom $y=2x-1$. Zatim odrediti rastojanje prave od tačke koja pripada krivoj i najbliža je datoj pravoj.

**363.** Odrediti maksimalnu i minimalnu vrednost funkcije:
$x\to f(x)=\dfrac{x}{3}+\dfrac{3}{x}$ na intervalu $[-5,\ -1]$.

**364.*** Data je funkcija $x\to y=x^3+px+q$, gde su $p$ i $q$ realni brojevi.

a) Ako je $M$ maksimum i $m$ minimum date funkcije, dokazati da je $Mm=q^2+\dfrac{4p^3}{27}$.

b) Odrediti realne brojeve $p$ i $q$ tako da bude $x=-2$ nula date funkcije i $M-m=4$.

**365.*** Data je funkcija $x\to f(x)=x^3-3x+2$.

a) Odrediti funkciju $x\to g(x)=ax^2+bx+c$ tako da, u tački $M(2,\ y)$ koja pripada grafiku date funkcije, ima ekstremnu vrednost; a sa $f(x)$ ima još jednu zajedničku tačku $P$ koja pripada osi $Oy$.

b) Odrediti ugao pod kojim se seku data kriva i kriva određena pod a).

**366.*** Data je funkcija $x\to y=x^2-(m-\dfrac{2}{3})x^3-mx+1$.

Odrediti realan broj $m$ tako da funkcija nema ekstremne vrednosti.

### 2.7. Ispitivanje funkcije (uz primenu izvoda). Grafik funkcije

*Primedba.* Da bi se što preciznije konstruisao grafik funkcije treba ispitati sledeća svojstva funkcije:

1° oblast definisanosti;
2° parnost;

3° periodičnost;
4° nule (i presek sa osom $Oy$);
5° znak funkcije;
6° prvi i drugi izvod;
7° intervale rašćenja i opadanja;
8° ekstremne vrednosti;
9° konkavnost i konveksnost;
10° prevojne tačke;
11° asimptote kose vertikalne, horizontalne;
12° ponašanje funkcije u okolini kritičnih tačaka (tačke u kojima nije definisana i tačke $x \to \pm\infty$).

Ispitati promene i skicirati grafik funkcija definisanih formulama (367–429):

**367.** a) $y=x^3-6x^2+9x-4$; b) $y=x^2(3-x)$.

**368.** a) $y=x^3-3x$; b) $y=x^3-6x^2+9x-2$.

**369.** a) $y=x^3-4x^2+4x$; b) $y=x^3-3x+2$.

**370.** $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$.

**371.** $y=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$.

**372.** a) $y=-4x^3+3x-1$; b) $y=(x+1)(x-1)^2$.

**373.** a) $y=x^4-2x^2$; b) $y=-x^4+2x^2+3$.

**374.** a) $y=\frac{1}{4}x^4+x^3$; b) $y=x^4-4x^2+3$.

**375.** a) $y=6x^4-x^5-9x^3$; b) $y=x^5-4x^4+4x^3$.

**376.** $y=x(x-1)(x+1)^3$.

**377.** $y=-x^6+6x^5-12x^4+8x^3$.

**378.** a) $y=\frac{x-2}{x+2}$; b) $y=\frac{2x}{1+x^2}$.



**379.** a) $y=\frac{4x}{4-x^2}$; b) $y=\frac{x^2-2x+1}{x^2+1}$.

**380.** a) $y=\frac{x}{x^2-1}$; b) $y=\frac{x^2-4}{1-x^2}$.

**381.** a) $y=\frac{(x-2)(x+2)}{(3-x)(3+x)}$; b) $y=\frac{x^2-2x-3}{2x-x^2}$.

**382.** a) $y=\frac{x^2-4x}{(x-1)(x-3)}$; b) $y=\frac{x^2-5x+7}{x-2}$.

**383.** a) $y=\frac{3x-x^2}{x-4}$; b) $y=\frac{4x-x^2-4}{x-1}$.

**384.** a) $y=\frac{x^3}{3-x^2}$; b) $y=\frac{x^2+3x}{x+4}$.

**385.** a) $y=\frac{x^2}{x-2}$; b) $y=\frac{x^2+3x-3}{x-1}$.

**386.** a) $y=\frac{x^2-4x+4}{x-1}$; b) $y=\frac{x^2-3x}{x-4}$.

**387.** a) $y=x-2-\frac{6}{x-1}$; b) $y=\frac{10}{4x^3-9x^2+6x}$.

**388.** a) $y=\frac{x-1}{x^2(x-2)}$; b) $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

**389.** a) $y=\frac{x^2+x}{x-1}$; b) $y=\frac{6x-x^2-9}{x-2}$.

**390.** a) $y=\frac{x^3}{x^2-1}$; b) $y=\frac{6-x^3}{x^2}$.

**391.** a) $y^2=x(1-x)^2$; b) $y^2=x^2(8-x^2)$.

**392.** a) $y^2=2x-3\sqrt[3]{x^2}$; b) $(y-x)^2=x^3$.

**393.** a) $y=x^2\, e^{-x}$; b) $y=x\, e^{-x^2}$.

**394.** a) $y=e^{\frac{1}{x}}$; b) $y=xe^x$; c) $xy=e^x$.

**395.** a) $y=x^2\, e^{-x^2}$; b) $y=(3-x^2)\, e^x$.

**396.*** a) $y=x\, e^{\frac{1}{x}}$; b) $y=x\, e^{\frac{1}{x-2}}$.

**397.** a) $y=x\ln x$; b) $y=x\ln^2 x$.

**398.** a) $y=\ln(x^2-1)$; b) $y=\ln\dfrac{x-2}{x+1}$.

**399.** a) $y=\dfrac{\ln x}{x^2}$; b) $y=\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

**400.** a) $y=\cos^2 x-\cos x$; b) $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$.

**401.** a) $y=\sin x\sin\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; b) $y=-4\cos x\cos\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$.

**402.** a) $y=\sin^2 x-\sin x$; b) $y=\sin^3 x+\cos^3 x$.

**403.*** a) $y=2\cos^2 x+6\cos x$; b) $y=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$.

**404.*** a) $y=\dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$; b) $y=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

**405.*** a) $|y|=2\sin(x+|x|)$; b) $y=\sin\left(x-\sqrt{x^2}\right)$.

**406.*** $y=\sin x\,|\cos x|+\cos x\,|\sin x|$.

**407.*** a) $y=|x^2-|x|-2|$; b) $y=\dfrac{(x-1)^3}{x-1}+\dfrac{|x^3|}{x}$.

**408.** $y=x^2+\dfrac{|x|^2}{x}+\dfrac{(x+1)^2}{|x+1|}$.

**409.** $y=\dfrac{x^2-x}{|x|}+\dfrac{x^2+x}{|x+1|}+\dfrac{x^2-1}{|x-1|}$.



**410.*** a) $y=x^3-ax^2+ax$; b) $y=ax^3-3x^2$ ($a$ realan broj).

**411.*** a) $y=x+\dfrac{a}{x}$; b) $y=\dfrac{x^2+a}{x-a}$ ($a$ realan broj).

**412.** a) $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$; b) $y=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1-x}$.

**413.** a) $f(x)=\dfrac{x-3}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x}$.

**414.** a) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$; b) $f(x)=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2+2}}$.

**415.*** a) $f(x)=\sqrt[3]{x^2-x^3}$; b) $f(x)=\sqrt[3]{4x^2+x^3}$.

**416.** a) $f(x)=\dfrac{x^3+x}{1-x^2}$; b) $f(x)=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$.

**417.** a) $f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

**418.*** a) $f(x)=xe^{\frac{1}{x-1}}$; b) $f(x)=(x+2)\, e^{\frac{1}{x}}$.

**419.*** a) $f(x)=(5x-1)\, e^{\frac{1}{x}}$; b) $f(x)=xe^{\frac{2}{x}}$.

**420.*** a) $f(x)=(x^2-2)\, e^{2x}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{16}(16x-3)\, e^{\frac{1}{x}}$.

**421.*** a) $f(x)=(4x^2+3)\, e^{-x}$; b) $f(x)=\dfrac{1}{3}xe^{\frac{5x-2}{x^2}}$.

**422.*** a) $y=\dfrac{x^2}{\ln^2 x-2}$; b) $y=\dfrac{5+\ln x^2}{\sqrt[3]{x}}$.

**423.*** a) $f(x)=\sqrt{x}\ln^2 x$; b) $f(x)=xe^{\frac{1}{\ln x}}$.

424.* a) $y=\frac{1}{x}+2\operatorname{arctg} x$; b) $y=\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$.

425.* a) $y=\arccos\frac{1}{x}$; b) $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

426.* a) $y=x\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; b) $y=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$.

427.* a) $y=\sqrt[3]{2ax^2-x^3}$; b) $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$.

428.* a) $y=\frac{x}{2}+\arcsin\frac{2x}{1+x^2}$; b) $y=x-\operatorname{arctg} x$.

429.* a) $y=\operatorname{arctg}(1+\frac{1}{x})$; b) $y=(x+\frac{1}{x})^x$.



# III GLAVA

## 3. APROKSIMACIJA FUNKCIJA*

### 3.1. Diferencijal. Primena kod linearnih aproksimacija

*Primedba* 1. Apsolutna greška približne jednakosti $\Delta y\approx dy$ je jednaka:

(1) $\alpha=|\Delta y-dy|$.

*Primedba* 2. Relativna greška približne jednakosti $\Delta y\approx dy$ određuje se obrascem:

(2) $\delta=\frac{|\Delta y-dy|}{\Delta y}$.

*Primedba* 3. Primenom obrasca $\Delta y\approx dy$, imamo obrazac:

(3) $f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\cdot\Delta x$.

Obrazac (3) se koristi za približno izračunavanje vrednosti funkcije.

**430.** Izračunati priraštaj i diferencijal funkcije $x\to y=3x^2-x$ za $x=1$ i $\Delta x=0{,}01$ i odrediti grešku zamene priraštaja diferencijalom.

**431.** Odrediti priraštaj i diferencijal funkcije $x\to y=x^2-x$ za $x=10$ i $\Delta x=0{,}1$. Zatim odrediti apsolutnu, relativnu i procentualnu grešku pri aproksimaciji priraštaja diferencijalom.

**432.** Data je funkcija $x\to y=x^3-3x^2+10$.

Izračunati za $x=3$ i $\Delta x=0{,}001$:

a) priraštaj i diferencijal funkcija;

b) apsolutnu, relativnu i procentualnu grešku pri aproksimaciji priraštaja diferencijalom.

* Ova metodska jedinica nije predviđena nastavnim planom i programom za gimnazije.

433. Stranica kvadrata je $x=8$ cm. Za koliko se uveća njegova površina ako se stranica uveća za 0,1 cm? Odrediti diferencijal površine ovog kvadrata i oceniti relativnu grešku pri aproksimaciji priraštaja diferencijalom.

434. Dat je obim osnog preseka pravog kružnog valjka. Obim iznosi 100 cm. Za koliko se uveća površina omotača ako se vrednost poluprečnika $r=10$ cm uveća za $r=1$ cm? Odrediti diferencijal površine omotača ovog valjka i oceniti relativnu grešku pri aproksimaciji priraštaja diferencijalom.

435. Dat je zbir dve stranice trougla ABC, $b+c=4$ cm i zahvaćeni ugao $\alpha=30°$. Za koliko se uveća površina trougla ako se stranica $b$ uveća od 1 cm na 1,1 cm? Oceniti relativnu grešku pri aproksimaciji priraštaja površine diferencijalom.

436. Data je funkcija $y=2x^3-x^2+1$. Odrediti priraštaj i diferencijal funkcije za $x=1$ i $\Delta x=0{,}1$. Zatim odrediti relativnu grešku pri zameni priraštaja diferencijalom.

437. Tačka se kreće po zakonu $s=10t+5t^2$, gde je $t$ vreme u sekundama a $s$ put u metrima. Odrediti priraštaj puta za $t=20$: a) $\Delta t=1$; b) $\Delta t=0{,}1$; c) $\Delta t=0{,}01$. Zatim odrediti relativnu grešku pri zameni priraštaja puta diferencijalom.

Odrediti približnu vrednost funkcije (438–443):

438. $x\to y=x^3-4x^2+7x+3$ za $x=1{,}03$.

439. $x\to y=3x^2+2x-1$ za $x=2{,}03$.

440. $x\to y=x^3+x^2-2x$ za $x=2{,}01$.

441. $x\to y=\frac{1}{2}x^3-5x^2+x-1$ za $x=2{,}1$.

442. $x\to y=x^3-4x^2+1$ za $x=-2{,}03$.

443. $x\to y=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ za $x=4{,}2$.



Aproksimacijom priraštaja diferencijalom izračunati približne vrednosti izraza (444–447):

444. a) $\sin 46°$; b) $\sin 60°3'$.

445. a) $\sin 31°$; b) $\cos 151°$.

446. a) $\sqrt[3]{1{,}02}$; b) $\sqrt[3]{65}$.

447. Znajući da je $\log_{10} 200=2{,}30103$, izračunati vrednost za $\log_{10} 200{,}2$.

448. a) $\log_{10} 11$; b) $\operatorname{tg} 61°$.

449. Dokazati da su za dovoljno malo $|h|$ tačne približne formule:

a) $\sqrt{1+h}\approx 1+\frac{1}{2}h$; b) $\sqrt[3]{1+h}\approx 1+\frac{1}{3}h$.

450. Primenom približnih formula a) i b) iz prethodnog zadatka izračunati:

a) $\sqrt{1{,}04}$; b) $\sqrt[3]{1{,}06}$.

451. Ako je $|h|$ dovoljno malo, tada su tačne formule:

a) $e^h\approx 1+h$; b) $\ln(1+h)\approx h$; c) $\ln\frac{1+h}{1-h}\approx 2h$. Dokazati.

452. Zamenom priraštaja funkcije $f(x)=\frac{1}{x}$ diferencijalom izračunati $\frac{1}{1{,}004}$.

453. Približno izračunati $\operatorname{arctg} 1{,}05$.

Odrediti linearnu funkciju koja aproksimira funkciju (454–457):

454. $f(x)=x^3-3x+2$, u blizini tačke $x_0=2$.

455. $f(x)=3x^2-2$, u okolini tačke $x_0=1$.

456. $f(x)=x^2-2x$, u blizini tačke $x_0=0$.

457. $f(x)=x^2+4x+4$, u blizini tačke $x_0=-1$.

458. Poznate su vrednosti funkcije $y=f(x)$ u tri čvora: $f(0)=4$, $f(1)=7$, $f(2)=9$. Odrediti Lagranžov interpolacioni polinom koji tu funkciju aproksimira na odsečku $[0, 2]$.

**459.*** Odrediti Lagranžov interpolacioni polinom $P(x)$, što je mogućе većeg stepena, koji zadovoljava uslove $f(-1)=0, f(0)=2$ i $f(2)=7$.

**460.*** Funkcija je data tabelom

| $x$ | $-2$ | $1$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | $25$ | $-8$ | $-15$ | $-23$ |

Odrediti Lagranžov interpolacioni polinom, a zatim izračunati vrednost polinoma za $x=0$.

**461.*** Lagranžovim polinomom aproksimirati funkciju $y=\sin x$ čiji grafik sadrži tačke sa apscisama

$$x_0=0,\ x_1=\frac{\pi}{2},\ x_2=\pi,\ x_3=\frac{3\pi}{2},\ x_4=2\pi.$$

### 3.2. Približno rešavanje jednačina sa jednom nepoznatom *

*Primedba* 1. Približno određivanje korena date jednačine

(1) $\qquad f(x)=0$ sastoji se od dva koraka:

1° utvrđivanje što manjeg intervala u kome se nalazi jedan i samo jedan koren jednačine (1);

2° izračunavanje približne vrednosti korena sa datim stepenom tačnosti.

*Primedba* 2. Metoda sečice (metoda tetive). Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna u intervalu $[a, b]$ i $f(a)\cdot f(b)<0$, pri čemu je $f'(x)\neq 0$ za $x\in(a, b)$, tada jednačina (1) ima jedan i samo jedan koren $\xi$ u intervalu $(a, b)$. Zamenom krive $y=f(x)$ tetivom koja sadrži tačke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ dobijamo prvu aproksimaciju korena

$$(2) \qquad x_1=a-\frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}.$$

Primenjujući dalje taj postupak na interval $(a, x_1)$ ili $(x_1, b)$, u zavisnosti od toga da li je $f(a)\, f(x_1)<0$ ili $f(x_1)\, f(b)<0$, dobija se druga približna vrednost $x_2$, itd.

$$x_n=x_{n-1}-f(x_{n-1})\cdot\frac{b-x_{n-1}}{f(b)-f(x_{n-1})}.$$

*Primedba* 3. Niz brojeva $x_n$ $(n=1,2,\dots)$ konvergira ka korenu, tj. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

*Primedba* 4. Njutnova metoda (metoda tangente): Ako je $f'(x)\neq 0$ i $f''(x)\neq 0$ u intervalu $[a, b]$ i $f(a)f''(a)>0$, onda se postupna aproksimacija $x_n$ $(n=0,1,\dots)$ korena $\xi$ jednačine (1) određuje formulama

$$(3) \qquad x_0=a,\ x_n=x_{n-1}-\frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}.$$

*Primedba* 5. Iz date pretpostavke niz $x_n$ $(n=1,2,\dots)$ je monoton i $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

*Primedba* 6. Metode iteracije: Ako se jednačina (1) može transformisati na oblik $x=\varphi(x)$, i ako se pođe od početne vrednosti $x_0$ koja pripada intervalu $[a, b]$, dobija se niz brojeva $x_1, x_2, \dots$ Na ovaj način $x_1=\varphi(x_0)$, $x_2=\varphi(x_1), \dots\ x_n=\varphi(x_{n-1}), \dots$ Ako je $a\leq x_n\leq b$ $(n=1,2,\dots)$, onda je $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\xi$.

**462.** Primenom metode sečice odrediti koren jednačine $x^3-2x^2-4x-7=0$ koji pripada intervalu $[3, 4]$, sa tačnošću 0,01.

**463.** Primenom metode tangente odrediti realni koren jednačine $2x^3+6x-1=0$.

**464.** Metodom iteracije odrediti koren jednačine $2x-\ln x-4=0$, uz početnu aproksimaciju korena $x_0=2{,}5$.

Odrediti grafički početne aproksimacije i izračunati sa tačnošću do 0,01 realne korene jednačine (465–486):

**465.** $x^3-3x+1=0$.

**466.** $x^4+2x^2-6x+2=0$.

**467.** $x^3-2x^2+3x-5=0$.

**468.** $x^4+x^2-2x-2=0$.

**469.** $5x^5-5x-1=0$.

**470.** $x\log x=1$.

**471.** $2^x-4x=0$.

**472.** $2x^3-x^2-7x+5=0$.

**473.** $\sin x+x-1=0$.

* Ova nastavna jedinica nije predviđena nastavnim planom i programom za gimnaziju.

1. $d\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)=x^n dx \Rightarrow \int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}+C \quad (n\neq -1).$

Za $n=0$ imamo $\int dx=x+C$.

2. $d(\ln|x|)=\frac{1}{x}dx \Rightarrow \int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C.$

3. $d\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)=a^x dx \Rightarrow \int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C.$

4. $d(e^x)=e^x dx \Rightarrow \int e^x dx=e^x+C.$

5. $d(\sin x)=\cos x\,dx \Rightarrow \int\cos x\,dx=\sin x+C.$

6. $d(-\cos x)=\sin x\,dx \Rightarrow \int\sin x\,dx=-\cos x+C.$

7. $d(\operatorname{tg} x)=\frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C.$

8. $d(-\operatorname{ctg} x)=\frac{dx}{\sin^2 x} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C.$

9. $d(\arcsin x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+C.$

10. $d(-\arccos x)=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=-\arccos x+C.$

11. $d(\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arctg} x+C.$

12. $d(-\operatorname{arctg} x)=\frac{dx}{1+x^2} \Rightarrow \int\frac{dx}{1+x^2}=\operatorname{arcctg} x+C.$

Na osnovu tabličnih integrala i pravila (4) i (5) izračunati sledeće integrale (488–518):

**488.** a) $\int 2x\,dx$; b) $\int x^2 dx$; c) $\int(-4t^3)\,dt$.

**489.** a) $\int\sqrt{x}\,dx$; b) $\int\frac{dx}{x^3}$; c) $\int\frac{4\,dx}{x^5}$.



**490.** a) $\int x\sqrt[3]{x}\,dx$; b) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; c) $\int\frac{x-2}{x^3}dx$.

**491.** a) $\int\left(x^2+2x+\frac{1}{x}\right)dx$; b) $\int(5x^3-4x^2-3x+5)\,dx$.

**492.** a) $\int\sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\,dx$; b) $\int\frac{6x^4+8x^{\frac{7}{2}}-5x+2}{x}dx$.

**493.** $\int\left(x^4-\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

**494.** a) $\int\frac{10x^8+3}{x^4}dx$; b) $\int\frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2}dx$.

**495.** $\int\left(x^4-\sqrt{x}+x\sqrt[3]{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$.

**496.** a) $\int\frac{(x-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{\sqrt[3]{x}}dx$; b) $\int\left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,dx$.

**497.** $\int\frac{x^4+\sqrt{x^3}+\sqrt{x}+3}{x\sqrt{x}}dx$.

**498.** a) $\int\left(at+\frac{b}{t}\right)dt$; b) $\int\frac{e^t+1}{e^t}dt$.

**499.** a) $\int e^z\left(1-\frac{e^{-z}}{z^2}\right)dz$; b) $\int a^u\left(1+\frac{a^{-u}}{\sqrt{u^3}}\right)du$.

**500.** a) $\int(3^y-e^{3+y})\,dy$; b) $\int\frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx$.

**501.** $\int\left(\frac{2}{\sqrt[3]{x}}+\sin x-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$.

**502.** a) $\int\frac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx$; b) $\int\frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$.

$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^2 x\cos^2 x}$

**503.** a) $\int \operatorname{ctg}^2 x\, dx$;  b) $\int \operatorname{tg}^2 y\, dy$.

**504.** a) $\int \frac{3-2\operatorname{ctg}^2 x}{\cos^2 x}\, dx$;  b) $\int \sin^2\frac{x}{2}\, dx$.

**505.** a) $\int\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\right)^2$;  b) $\int \cos^2\frac{x}{2}dx$.

**506.** a) $\int e^{-z}\left(1+\frac{e^z}{\cos^2 z}\right)dz$;  b) $\int \frac{4dt}{\sqrt{4-4t^2}}$.

**507.** a) $\int a^u\left(1+\frac{a^{-u}}{1+u^2}\right)du$;  b) $\int \frac{1-\sin^3 x}{\sin^2 x}\, dx$.

**508.** a) $\int\left(\frac{a}{x}-\frac{b}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx$;  b) $\int \frac{a\, dx}{b+bx^2}$.

**509.** a) $\int\left(4\cos z-\frac{5}{\sqrt{9-9z^2}}\right)dz$;  b) $\int \frac{x^4}{1+x^2}\, dx$.

**510.** $\int\left(\frac{2}{1+x^2}-\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{4}{x}\right)dx$.

**511.** a) $\int \frac{x^2+x\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}\, dx$;  b) $\int \frac{x-\sqrt[3]{x^2}-x^{-\frac{1}{2}}}{x\sqrt{x}}\, dx$.

**512.** a) $\int \frac{e^{2x}+e^x\sin x}{e^x}\, dx$;  b) $\int \frac{2\cos^2 y+1}{\cos^2 y}\, dy$.

**513.** $\int(ax^3+bx^2+cx+d)\, dx$.

**514.** $\int\left(x^3-x^2+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)dx$.

**515.** a) $\int \frac{x^2+\sqrt{x^3}+3}{\sqrt{x}}\, dx$;  b) $\int \frac{4-x}{2+\sqrt{x}}\, dx$.

**516.** a) $\int \frac{18x^2-2}{3x-1}\, dx$;  b) $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)}\, dx$.

**517.** a) $\int\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^3 dx$;  b) $\int \frac{(x^m-x^n)^2}{\sqrt{x}}\, dx$.

**518.** a) $\int(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)\, dx$;  b) $\int \frac{(x^2+1)(x^2-2)}{\sqrt[3]{x^2}}\, dx$.

Odrediti jednačinu krive $y=f(x)$ ako su poznati njen izvod i tačka $M$ koja pripada njenom grafiku i konstruisati grafik dobijene funkcije (519–526):

**519.** $y'=3x^2-1$, $M(1, 0)$.

**520.** $y'=2x-4x^3$, $M(1, 0)$.

**521.** $y'=2\left(x-\frac{1}{x^3}\right)$, $M(1, 2)$.

**522.** $y'=e^x+2x$, $M(0, -1)$.

**523.** $y'=\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4}, 2\right)$.

**524.** $y'=\frac{1}{1+x^2}$, $M\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.

**525.** $y'=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}-e^{-\frac{x}{a}}\right)$, $M(0, a)$.

**526.** $y'=\sin x+\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}, 2\right)$.

**527.** Brzina $v$ tela određena je formulom $v=(3t^2+4t)$ m/s. Za $t=2s$ telo pređe put $s=16$ m. Odrediti zakon kretanja tela.

**528.** Brzina $v$ tela data je formulom $v=\cos t$ m/s. Za $t=\frac{\pi}{4}$ $s$ telo pređe put $s=10$ m. Odrediti zakon kretanja tela.

Odrediti jednačine krive $y=f(x)$ ako su poznati drugi izvod funkcije $y''$ i tačke $M$ i $N$ koje pripadaju grafiku krive. Zatim konstruisati odgovarajuće grafike (529–531):

**529.** $y''=e^x$, $M(0,-1)$ i $N(2,e^2)$.

**530.** $y''=-\sin x$, $M(0,1)$ i $N(\frac{3\pi}{2},0)$.

**531.** a) $y''=\frac{2}{x^3}$, $M(1,2)$ i $N(-1,-2)$.

b) $y''=6x-4$, $M(1,0)$ i $N(2,2)$.

**532.** Ubrzanje $w$ tela određeno je formulom $w=(t^2+1)\ m/s^2$. U trenutku $t=0$ brzina je $v=1\text{m/s}$ a put $s=0$. Odrediti zakon kretanja tela.

### 4.2. Integracija metodom smena

Neka je $x=\varphi(t)$, gde je $t$ nova promenljiva i $\varphi$ diferencijalna funkcija $(\varphi'(t)\neq 0)$. Tada je

(1) $\int f(x)\,dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\,dt.$

Funkcija $\varphi$ određuje se tako da desna strana formule (1) dobije oblik pogodan za integraciju.

Metodom smene naći sledeće integrale (533–599):

**533.** a) $\int(5-2x)^9\,dx$; b) $\int(4x+3)^{\frac{1}{3}}\,dx$.

**534.** a) $\int\frac{dy}{3y+\text{[illegible]}}$; b) $\int\frac{x\,dx}{1+x^2}$.

**535.** a) $\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int\frac{x\,dx}{(x^2+1)^2}$.

**536.** a) $\int\frac{dx}{\sqrt[3]{(3-2x)^4}}$; b) $\int\frac{x^2dx}{x^3+1}$.

**537.** a) $\int\frac{2x+1}{x^2+x-3}\,dx$; b) $\int\sqrt{a^2+b^2x^2}\cdot x\,dx$.

**538.** a) $\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$; b) $\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx$.



**539.** a) $\int\frac{dx}{x^2+a^2}$; b) $\int\frac{dx}{x^2+3}$.

**540.** a) $\int\frac{dx}{2+3x^2}$; b) $\int\frac{dx}{25+4x^2}$.

**541.** a) $\int\frac{\cos x\,dx}{4+\sin^2 x}$; b) $\int\frac{\sin x\,dx}{a^2+\cos^2 x}$.

**542.** a) $\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$; b) $\int\frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}$.

**543.** a) $\int\frac{dx}{\sqrt{25-9x^2}}$; b) $\int\frac{7dx}{\sqrt{3-5x^2}}$.

**544.** a) $\int\frac{dz}{\sqrt{9-16z^2}}$; b) $\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{a^2-\sin^2 x}}$.

**545.** a) $\int\frac{3^x dx}{\sqrt{25-9^x}}$; b) $\int\frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

**546.** a) $\int\frac{dz}{z\sqrt{1-\ln^2 z}}$; b) $\int\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

**547.** a) $\int e^{ax+b}dx$; b) $\int\frac{e^x}{e^x+1}\,dx$.

**548.** a) $\int e^{-x^2}x\,dx$; b) $\int\frac{e^{2x}dx}{1-3e^{2x}}\,x$.

**549.** a) $\int e^{-x^3}x^2dx$; b) $\int\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$.

**550.** a) $\int 3^{5x^2}x\,dx$; b) $\int a^{2x}\cdot b^{2x}dx$.

**551.** a) $\int a^{x^4}\cdot x^3dx$; b) $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

**552.** a) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$; b) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$.

**553.** a) $\int \frac{\ln^3 x \, dx}{x}$; b) $\int \frac{\ln y}{y} dy$.

**554.** a) $\int \frac{dt}{t(1+\ln t)}$; b) $\int \frac{(2-\ln t)\, dt}{t}$.

**555.** $\int \frac{dx}{x \ln x \ln(\ln x)}$.

**556.** a) $\int \cos(ax+b)\, dx$; b) $\int \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$.

**557.** a) $\int \operatorname{ctg} x \, dx$; b) $\int \operatorname{tg} x \, dx$.

**558.** a) $\int t \sin(t^2-1)\, dt$; b) $\int x \cos(x^2+1)\, dx$.

**559.** a) $\int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx$; b) $\int \frac{3x}{\cos^2 2x^2} dx$.

**560.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x}}$; b) $\int \frac{x^2 \, dx}{\cos^2 x^3}$.

**561.** a) $\int \frac{x\, dx}{\sin^2 2x^2}$; b) $\int \frac{dt}{\sin^2 (\frac{\pi}{3} - t)}$.

**562.** a) $\int \frac{dx}{x^2 \sin^2 \frac{1}{x}}$; b) $\int \frac{dx}{x \sin^2 \ln x}$.

**563.** a) $\int \sin^2 x \cos x \, dx$; b) $\int \cos^3 x \sin x \, dx$.

**564.** a) $\int \cos^2 x \, dx$; b) $\int \sin^2 x \, dx$.

**565.** a) $\int \frac{\cos 2x}{\sin x \cos x} dx$; b) $\int \frac{\sin x \, dx}{1 + 3\cos x}$.

**566.** a) $\int \frac{\cos x \, dx}{1 + 2\sin x}$; b) $\int \frac{1 - 2\cos x}{\sin^2 x} dx$.

**567.** a) $\int \frac{dx}{\sin x}$; b) $\int \frac{dx}{\cos x}$.

**568.** a) $\int \cos^5 x \, dx$; b) $\int \sin^7 x \, dx$.

**569.** a) $\int \frac{\cos x \, dx}{\sin^5 x}$; b) $\int \frac{\sin x \, dx}{\cos^3 x}$.

**570.** a) $\int \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + 2\cos x}}$; b) $\int e^{\cos x} \sin x \, dx$.

**571.** a) $\int 5^{\sin x} \cdot \cos dx$; b) $\int \sqrt{1 + 4\sin x} \cos x \, dx$.

**572*.** a) $\int \cos^4 x \, dx$; b) $\int \sin^4 x \, dx$.

**573*.** a) $\int \operatorname{tg}^4 x \, dx$; b) $\int \operatorname{ctg}^4 x \, dx$.

**574*.** a) $\int \cos^3 x \, dx$; b) $\int \sin^5 x \, dx$.

**575*.** a) $\int \sin 5x \sin 3x \, dx$; b) $\int \cos 4x \cos x \, dx$.

**576*.** a) $\int \sin 3x \cos 5x \, dx$; b) $\int \sin \frac{x}{3} \cos \frac{2x}{3} dx$.

**577*.** $\int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x \, dx$;

**578.** a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$; b) $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx$.

**579.** a) $\int \sqrt[3]{x^3 - 8}\, x^2 dx$; b) $\int \sqrt[3]{1 - 6x^5}\, x^4 dx$.

**580.** a) $\int \frac{x \, dx}{\sqrt{3 - x^4}}$; b) $\int \frac{x^2 dx}{4 + x^6}$.

**581.** a) $\int \frac{4x - 5}{x^2 + 5} dx$; b) $\int \frac{x^4 dx}{x^2 + 2}$.

**582.** a) $\int \frac{4^x\, dx}{\sqrt{1-4^{2x}}}$; b) $\int \frac{x\, dx}{x^4+0{,}25}$.

**583.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$; b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

**584.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$; b) $\int \frac{dx}{b^2+a^2x^2}$.

**585.** a) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{5x^2+1}}\, dx$; b) $\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4}}\, dx$.

**586.** a) $\int \frac{\operatorname{arctg} y}{1+y^2}\, dy$; b) $\int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}\, dx$.

**587.*** a) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int \frac{(\arcsin x)^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

**588.*** a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$; b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2}}$.

**589.*** $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}}\, dx$.

**590.*** $\int \frac{e^{\operatorname{arctg} x}+x\ln(1+x^2)+1}{1+x^2}\, dx$.

**591.*** a) $\int \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{2-\sin^4 x}}\, dx$; b) $\int \frac{\arcsin x + x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$.

**592.** a) $\int \frac{\arccos x - x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$; b) $\int \frac{x-\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\, dx$.

**593.*** a) $\int \frac{dx}{2\sin^2 x+3\cos^2 x}$; b) $\int a^x e^x\, dx$.

**594.*** a) $\int \frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$; b) $\int \sqrt{a^2-x^2}\, dx$.



**595.*** a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}}$; b) $\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{9-x^2}}$.

**596.*** $\int x\sqrt{a-x}\, dx$.

**597.*** a) $\int \frac{\sin^5 x}{\cos^2 x}\, dx$; b) $\int \frac{\cos^5 x\, dx}{\sin^2 x}$.

**598.*** a) $\int \frac{\sin 2x}{\operatorname{ctg}^4 x}\, dx$; b) $\int \sin 2x \cdot \operatorname{ctg}^4 x\, dx$.

**599.*** a) $\int \frac{\cos^3 x\, dx}{4\sin^2 x-1}$; b) $\int \frac{\sin x+\sin^3 x}{\cos^2 x-\sin^2 x}\, dx$.

### 4.3. Parcijalna integracija

*Primedba* 1. Ako se integriše formula za diferencijal proizvoda

(1) $d(uv)=u\, dv+v\, du$,

dobija se obrazac za parcijalnu integraciju

(2) $\int u\, dv = uv - \int v\, du$.

*Primedba* 2. Parcijalna integracija se najčešće koristi ako je podintegralna funkcija $u\, dv$ proizvod algebarske i transcedentne funkcije. Npr. $\int Pn(x)e^{ax}dx$, $\int Pn(x)\sin(ax)\,dx$, $\int Pn(x)\ln x\, dx$, $\int e^{ax}\sin bx\, dx$ itd., gde je $Pn(x)$ polinom $n$-tog stepena.

Primenom obrasca (2) za parcijalnu integraciju izračunati sledeće integrale (600–623):

**600.** a) $\int x\cos x\, dx$; b) $\int x^n \ln x\, dx$ $(n \neq -1)$.

**601.** a) $\int xe^x dx$; b) $\int x^2\cos x\, dx$.

**602.** a) $\int \operatorname{arctg} x\, dx$; b) $\int x\ln x\, dx$.

**603.** a) $\int (1-x)\sin x\, dx$; b) $\int x\ln|x-1|\, dx$.

**604.** a) $\int x\cdot 2^{-x}dx$; b) $\int \frac{x}{e^x}\, dx$.

**605.** a) $\int (x^2-2x+5)e^{-x}dx$;  b) $\int \frac{x\ dx}{\sin^2 x}$.

**606.** a) $\int (x^2+5x+6)\cos 2x\ dx$;  b) $\int \frac{x\ dx}{\cos^2 x}$.

**607.** a) $\int \frac{\ln x}{x^3}\ dx$;  b) $\int \ln^2 x\ dx$.

**608.** a) $\int e^x \sin x\ dx$;  b) $\int e^x \cos x\ dx$.

**609.** a) $\int x^3 \cos 3x\ dx$;  b) $\int x^3 e^{ax} dx$.

**610*.** a) $\int \sqrt{x^2-a^2}\ dx$;  b) $\int \sqrt{x^2+a^2}\ dx$.

**611.** $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ dx$.

**612.** a) $\int x\ \mathrm{arctg}\ x\ dx$;  b) $\int x \arcsin x\ dx$.

**613.** a) $\int x^3 e^{-x^2} dx$;  b) $\int x^3 \ln x\ dx$.

**614.** a) $\int 3^x \cos x\ dx$;  b) $\int \frac{x \cos x}{\sin^2 x}\ dx$.

**615*.** a) $\int x^3 \cdot 5^{x^2} dx$;  b) $\int x \sin x \cos x\ dx$.

**616*.** a) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\ dx$;  b) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}\ dx$.

**617*.** a) $\int \sin(\ln x)\ dx$;  b) $\int \cos(\ln x)\ dx$.

**618*.** a) $\int e^x \cdot \sin^2 x\ dx$;  b) $\int e^x \cos^2 x\ dx$.

$\frac{1-\cos 2x}{2}$

**619*.** a) $\int x \ln(x^2-1)\ dx$;  b) $\int x^2 \ln\frac{1-x}{1+x}\ dx$.

**620*.** a) $\int (x^2+x)\ln(x+1)\ dx$;  b) $\int e^{x+\ln x} dx$.

**621*.** a) $\int e^{ax}\cos bx\ dx$;  b) $\int e^{ax}\cdot \sin bx\ dx$.



**622*.** a) $\int x(\mathrm{arctg}\ x)^2\ dx$;  b) $\int x^2\ \mathrm{arctg}\ 3x\ dx$.

**623*.** $\int (3x^2+6x+5)\ \mathrm{arctg}\ x\ dx$.

**624*.** Dokazati da je:

a) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$;

b) $\int \frac{dx}{k^2-x^2} = \frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+x}{k-x}\right| + C$.

Izračunati (625–634):

**625.** a) $\int \frac{dx}{x^2-6x+13}$;  b) $\int \frac{dx}{x^2-4x+3}$.

**626.** a) $\int \frac{dx}{x^2+6x+9}$;  b) $\int \frac{dx}{x^2+4x+13}$.

**627.** a) $\int \frac{dx}{x^2-4x}$;  b) $\int \frac{dx}{x^2+x+1}$.

**628.** a) $\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$;  b) $\int \frac{dx}{3x^2-2x+4}$.

**629.** a) $\int \frac{dx}{x^2-6x+5}$;  b) $\int \frac{dz}{2z^2-2z+1}$.

**630.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$;  b) $\int \frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}$.

**631.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x}}$;  b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$.

**632.** a) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-3x-x^2}}$;  b) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-6x+5}}$.

**633*.** a) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}}}$;  b) $\int \frac{\cos x}{\sin^2 x - 6\sin x + 12}\ dx$.

**634.*** a) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{\cos^2 x + 4\cos x + 1}}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-4\ln x - \ln^2 x}}$.

### 4.4. Integracija racionalnih funkcija *

*Primedba*: Integracija racionalne funkcije posle izdvajanja celog dela svodi se na integraciju pravog racionalnog razlomka:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{1}$$

gde su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi, pri čemu je izložilac brojioca $P(x)$ manji od izložioca imenioca $Q(x)$.

Ako je:

$$Q(x) = (x-a)^k (x^2+px+q)^e,$$

gde je $a$ realan višestruki koren polinoma $Q(x)$, a $\alpha \pm \beta i$ višestruki kompleksni koreni, onda se razlomak (1) rastavlja na parcijalne razlomke:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{M_1+N_1x}{x^2+px+q} + \ldots + \frac{M_e+N_ex}{(x^2+px+q)^e}. \tag{2}$$

Nepoznati koeficijenti $A_1, A_2, \ldots A_k, M_1, M_2 \ldots M_e, N_e$ se određuju metodom neodređenih koeficijenata.

Izračunati sledeće integrale (635–653):

**635.** a) $\displaystyle\int \frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{2x^2}{x^4-1}\,dx$.

**636.** $\displaystyle I = \int \frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}\,dx$.

**637.** a) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x-2}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^4}{x^2+a^2}\,dx$.

**638.** a) $\displaystyle\int \frac{x^2+2}{(x-2)(x+1)^3}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^2+3}{x^3-x^2-6x}\,dx$.

* Ova nastavna jedinica nije predviđena nastavnim planom i programom za gimnazije.



**639.** a) $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x-1)(x^2+1)}$; b) $\displaystyle\int \frac{x-3}{x^3-x}\,dx$.

**640.** a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$; b) $\displaystyle\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx$.

**641.** a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4+x^2}$; b) $\displaystyle\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx$.

**642.** a) $\displaystyle\int \frac{3x^2+2x-3}{x^3-x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3-2x+2}{(x-1)^2(x^2+1)}\,dx$.

**643.** a) $\displaystyle\int \frac{(x+1)^3}{x^2-x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{3x-2a}{x^4-ax^3}\,dx$.

**644.** a) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2-3)(x^2+2)}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^4-x^2}$.

**645.** a) $\displaystyle\int \frac{x-1}{x^3+x^2-6x}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1}\,dx$.

**646.** a) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3-1}$; b) $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+1}$.

**647.** a) $\displaystyle\int \frac{2x-3}{x^2-5x+9}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+3x+6}\,dx$.

**648.*** a) $\displaystyle\int \frac{x^5+2}{x^3-1}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{1-x^4}$.

**649.** a) $\displaystyle\int \frac{3x-1}{x^2-x+1}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{7x+1}{6x^2+x-1}\,dx$.

**650.** a) $\displaystyle\int \frac{x^3-6}{x^4+6x^2+8}\,dx$; b) $\displaystyle\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}\,dx$.

**651.*** a) $\displaystyle\int \frac{4\,dx}{x^4+1}$; b) $\displaystyle\int \frac{x^3+x-1}{(x^2+2)^2}\,dx$.

**652.*** a) $\int \frac{x^3+10x^2+4x+16}{x^3+4x}\,dx$; b) $\int \frac{2x^3-2x^2+3x-1}{x^2-x}\,dx$.

**653.*** a) $\int \frac{2x^3+2x^2+12x+8}{x^3+4x}\,dx$; b) $\int \frac{3x^5+3x^3-x^2-2}{x^3+x}\,dx$.

## 3.5. Određeni integral

*Primedba* 1. Neka je funkcija $x \to y = f(x)$ definisana na segmentu $[a, b]$. Segment $[a, b]$ podeli se na $n$ delova tačkama: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$. Na svakom segmentu $(x_{i-1}, x_i)$ uzimamo proizvoljnu tačku $\xi_i$ i uočimo zbir $\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)x$, gde je $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Ako postoji $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$ i ako je konačan za ma kakvu podelu segmenta $[a, b]$, naziva se *određeni integral* funkcije $f(x)$ u granicama od $a$ do $b$ u oznaci

$$\text{(1)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$

*Primedba* 2. Suma $\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ naziva se Rimanova integrabilna suma funkcije $y = f(x)$ (B. Riemann, 1826–1866).

*Primedba* 3. Ako za funkciju $f(x)$ važi (1), kaže se da je integrabilna na segmentu $[a, b]$. Da bi funkcija bila integrabilna na segmentu $[a, b]$, dovoljno je da je neprekidna ili da ima konačan broj prekida prvog reda.

*Primedba* 4. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, tada ona ima primitivnu funkciju $\int f(x)\,dx = F(x) + C$ i važi jednakost:

$$\text{(2)} \qquad \int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Jednakost (2) se zove Njutn-Lajbnicova formula i daje vezu između određenog i neodređenog integrala. Formula (2) je osnovna formula integralnog računa (I. Newton 1643–1727, G. W. Laibniz 1646–1716).

Primenom definicije određenog integrala izračunati sledeće integrale (654–656):

**654.** a) $\int_a^b k\,dx$; b) $\int_a^b x\,dx$.

**655.** a) $\int_a^b x^2 dx$; b) $\int_a^b e^x dx$.

**656.** a) $\int_0^\pi \sin x\,dx$; b) $\int_a^b \cos x\,dx \quad (a<b)$.

Primenom Njutn-Lajbnicove formule izračunati sledeće određene integrale (657–673):

**657.** a) $\int_1^3 x^3 dx$; b) $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^4}\right)dx$; c) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$.

**658.** a) $\int_{-1}^3 (1-2x+3x^2)\,dx$; b) $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}\,dx$; c) $\int_8^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$.

**659.** a) $\int_1^4 \left(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; b) $\int_1^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}}\,dx$.

**660.** a) $\int_{-1}^1 e^x\,dx$; b) $\int_1^3 e^{2x}\,dx$; c) $\int_0^1 e^{3x}\,dx$.

**661.** a) $\int_1^e \frac{dx}{x}$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{x+2}$; c) $\int_2^3 \frac{dx}{x-1}$.

**662.** a) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,dx$; b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x-\sin x)\,dx$.

**663.** a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$; b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

**664.** a) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\sin x\right)dx$; b) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\cos x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$.

665. a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; c) $\int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}$.

666. a) $\int_2^3 (2x-1)^3 dx$; b) $\int_0^1 (2x^3+1)^4 x^2 dx$.

667. a) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; b) $\int_0^{a\sqrt{3}} \frac{dx}{x^2+a^2}$; c) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\, dx$.

668.* a) $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\, dx$; b) $\int_0^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\, dx$.

669.* a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \cdot \cos^2 x\, dx$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos^2 x\, dx$.

670.* a) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^3}$; b) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

671.* a) $\int_1^2 (3x+2)\ln x\, dx$; b) $\int_{-2}^2 \ln(x+\sqrt{x^2+1}\,)\, dx$.

672.* a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\, dx}{\sin^2 x}$; b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos dx$.

673.* a) $\int_0^1 x \ln(1+x^2)\, dx$; b) $\int_{\frac{1}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

674.* Za koje vrednosti $c$ važi jednakost:

$$\int_a^b f(x)\, dx = f(c)(b-a) \quad (a<c<b),$$

ako je

a) $f(x)=2x-\frac{3}{4}x^2$, $a=0$, $b=2$;

b) $f(x)=\ln x$, $a=1$, $b=e^2$?



675.* Odrediti sva rešenja po $a$ jednačine $\int_0^a \cos(x+a^2)\, dx = \sin a$ na segmentu $[2, 3]$.

676.* Odrediti sve vrednosti realnog broja $a$ na segmentu $[0, 2\pi]$, koje zadovoljavaju jednačinu:

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^a \sin x\, dx = \sin 2a.$$

677.* Odrediti skup pozitivnih vrednosti realnog broja $a$ koje zadovoljavaju jednačinu:

$$\int_0^a (3x^2+4x-5)\, dx = a^3-2.$$

678.* Za koje je vrednosti realnog broja $a$ tačna nejednakost:

$$\frac{1}{\sqrt{a}} \int_1^a \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx < 4\,?$$

679.* Data je funkcija $x \to f(x) = Ax^2+Bx+C$ $(A, B, C \in R)$. Odrediti brojeve $A$, $B$ i $C$ tako da je

$$f'(1)=8 \wedge f(2)+f''(2)=33 \wedge \int_0^1 f(x)\, dx = \frac{7}{3}.$$

680.* Za sve vrednosti iz oblasti definisanosti logaritama odrediti $x$ iz jednačine:

a) $\int_0^{2^x} (t-\log_2 a)\, dt = 2\log_2 \frac{2}{a}$;

b) $4 \int_0^{\log_{2-a} x} (t^3-2at)\, dt = 5a^2$.

681. Izračunati: (681–683):

a) $\int_0^1 \frac{\operatorname{arc\,tg} x}{1+x^2}\, dx$; b) $\int_1^e x^3 \ln x\, dx$.

682. a) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$; b) $\int_0^1 (x^2-2x+2)\, e^x\, dx$.

**683.** $\int\limits_0^1 \ln(1+x^3)\, dx$.

Rešiti jednačine po $x$ (684—688):

**684.*** $\int\limits_1^x \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}=\frac{\pi}{3}$.

**685.*** $\int\limits_{-1}^x \frac{\arcsin\ t\ dt}{\sqrt{t\ +1}}=2\sqrt{x+1}\ \arcsin\ x+4\sqrt{2}$.

**686.*** $\int\limits_0^x \frac{t\ \mathrm{arctg}\ t\ dt}{\sqrt{1+t^2}}=\sqrt{1+x^2}\cdot \mathrm{arctg}\ x$.

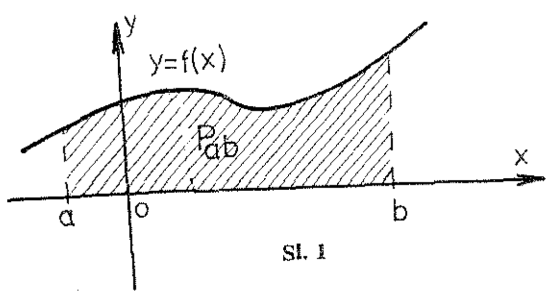
**687.*** $\int\limits_{\ln 4}^x \frac{dt}{\sqrt{e^t-4}}=\frac{\pi}{4}$.

**688.*** $\int\limits_x^2 (t^4-t^2)^{-\frac{1}{2}}\, dt=\frac{\pi}{3}$.

### 4.6. **Primena određenog integrala za izračunavanje površina ravnih figura**

*Primedba* 1. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i ako je $f(x)\geqslant 0$, tada je površina krivolinijskog trapeza ograničenog lukom krive, pravama $x=a$, $x=b$ i odsečkom $x$-ose za $x\in[a, b]$ data obrascem (sl. 1):

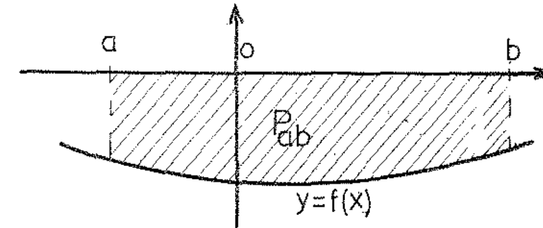
(1) $P_{\mathrm{ab}}=\int\limits_a^b f(x)\, dx$.




Sl. 1

*Primedba* 2. Ako je funkcija $f(x)$ neprekidna na segmentu $[a, b]$ i ako je $f(x)\leqslant 0$, tada je površina krivolinijskog trapeza (sl. 2) data obrascem:

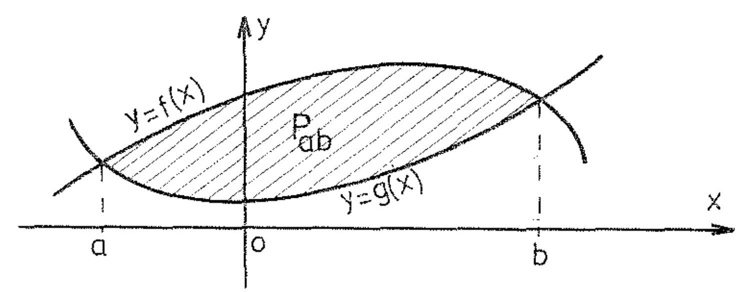
(2) $P_{\mathrm{ab}}=\left|\int\limits_a^b f(x)\, dx\right|$.




Sl. 2

*Primedba* 3. Neka su date dve funkcije $y=f(x)$ i $y=g(x)$ čiji se grafici seku u tačkama sa apscisama $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$ i neka je ispunjena nejednakost $f(x)\geqslant g(x)$ za svako $x$ iz segmenta $[a, b]$. Površina lika ograničenog graficima datih funkcija na segmentu $[a, b]$ (sl. 3) data je formulom:

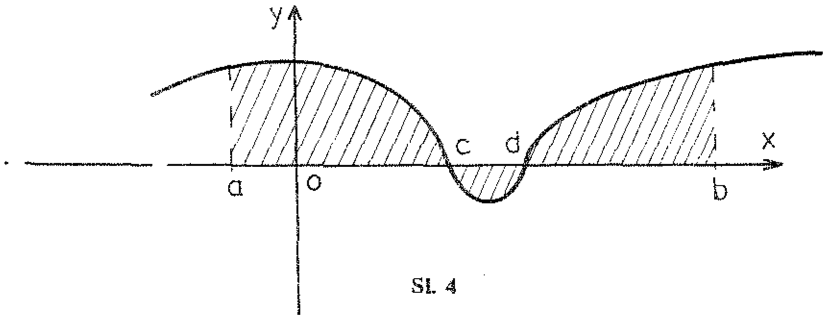
(3) $P_{\mathrm{ab}}=\int\limits_a^b f(x)\, dx-\int\limits_a^b g(x)\, dx=\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\, dx$.




Sl. 3

*Primedba* 4. Ako neprekidna funkcija $f(x)$ na segmentu $[a, b]$ menja znak, tj. seče $x$ osu u tačkama sa apscisama $x=c$ i $x=d$ $(a<c<d<b)$, tada je površina lika ograničenog grafikom funkcije $y=f(x)$ i osom $Ox$ (sl. 4) data obrascem:

(4) $P_{ab}=\int\limits_a^c f(x)\,dx+\left|\int\limits_c^d f(x)\,dx\right|+\int\limits_d^b f(x)\,dx.$




Sl. 4

**689.** Izračunati površinu figure ograničene lukom krive $y=-x^2+2x$ i pravom $y=0$.

**690.** Izračunati površinu dela ravni koji ograničavaju parabole $7x^2-9y+9=0$ i $5x^2-9y+27=0$.

**691.** Izračunati površinu dela ravni ograničenog pravom $y=x$ i parabolom $y=2-x^2$.

**692.** Izračunati površinu dela ravni ograničenog parabolom $y^2=2x+1$ i pravom $x-y-1=0$.

**693.** Odrediti površinu lika ograničenog lukom krive $y^2+y+x=6$ i osom $Oy$.

**694.** Odrediti površinu lika omeđenog lukom krive $y=2x^3+3x^2+2$, $Ox$-osom i ordinatama maksimuma i minimuma.

**695.** Primenom integrala izvesti obrazac za površinu: a) kruga; b) elipse.

**696.** Izračunati površinu dela ravni ograničenog parabolama $y^2=2px$ i $x^2=2py$.

**697.** Izračunati površinu dela ravni ograničenog lukom krive: $y=\frac{1}{x^2}$ i pravama $x=1$, $x=a$ $(a>1)$ i $y=0$.

Izračunati površinu figure koja je ograničena linijama (698–734):

**698.** $y=2x^2+1$ i $y=x^2+10$.



**699.** $y=\frac{1}{2}x^2+2x+4$ i $y=x+8$.

**700.** $y=x^2-8x+18$ i $y=-2x^2+18$.

**701.** $y=-x^2+10x-16$ i $y=x+2$.

**702.** $y=x^2+4x$ i $y=x+4$.

**703.** $y=6x-x^2$ i $y=x^2-2x$.

**704.** $x^2+y^2=16$ i $y^2=4(x+1)$ $(-1\leqslant x\leqslant 4)$.

**705.** $x^2+y^2=16$ i $y^2=6x$ $(0\leqslant x\leqslant 4)$.

**706.** $x^2+y^2=4$ i $y^2=3x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

**707.** $x^2+4y^2=4$ i $4y^2=3x$ $(0\leqslant x\leqslant 2)$.

**708.** $y=-x^2+3x+1$ i $xy=3$.

**709.** $y=\frac{1}{1+x^2}$ i $y=\frac{1}{2}x^2$.

**710.** $y=e^x$, $y=e^{-x}$ i $x=2$.

**711.** $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=0$ i $x=a$ $(a>0)$.

**712.** $y=2-x^2$ i $y=|x|$.

**713.** $y=|x^3|$ i $y=2-x^2$.

**714.** $y=\sin x$ i $y=\frac{1}{2}$.

**715.** $y=\operatorname{tg}x$, $y=\frac{2}{3}\cos x$ i $y=0$.

**716.** $y=\sin^2 x$ i $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

**717.** $y=\operatorname{tg}x$ i $y=0$ $(0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4})$.

718. $y=x^2-2x+2$ i $y=2+4x-x^2$.

719. $y=4x^{-2}$ i $y=7-3x$.

720. $y=x^3$ i $y=8$.

721. $y=x^3$, $y=2x$ i $y=x$.

722. $y=5^x$, $y=3^{-x}$ i $x=2$.

723. $y=\frac{3}{x}$ i $x+y=4$.

724. $y=\frac{\ln^2 x}{x}$ i $x=e$.

725. $y^3=x$, $y=1$ i $x=8$.

726. $y=2x-x^2$ i $y=-x$.

727. $y=x^2$ i $y=3-2x$.

728. $y=x^2$, $y=\frac{x^2}{2}$ i $y=2x$.

729. $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ i $x=2a$.

730. $xy=m^2$, $x=a$, $x=3a$ i $y=0$ $(a>0)$.

731. $x^2+4y^2=8$ i $4y^2=x+2$ $(-2\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2})$.

732. $x^2+4y^2=16$, $4y^2=3x+6$ $(-2\leqslant x\leqslant 4)$.

733. $x=2-y-y^2$ i $x=0$.

734. $y=2-x^2$ i $y^3=x^2$.

735.* Odrediti površinu dela ravni ograničenog elipsom $x^2+4y^2=20$ i hiperbolom $xy=4$ u prvom kvadrantu.

736.* Izračunati površinu lika omeđenog krivom $y=x(x-1)(x-2)$ i osom $Ox$.

737. Odrediti površinu lika ograničenog hiperbolom $x^2-y^2=9$, osom $Ox$ i radijus vektorom koji sadrži tačku $A(5, 4)$.

738.* Izračunati površinu oba dela na koje parabola $y^2=2x$ deli krug $x^2+y^2=8$.

739.* Izračunati površinu oba dela na koje parabola $x^2=12(y-1)$ deli krug $x^2+y^2=16$.

740.* Odrediti površinu dela ravni koji je ograničen lukom krive $y=\frac{2x}{1+x^2}$, ordinatom maksimuma i osom $Ox$.

741.* Izračunati površinu dela ravni koji je ograničen lukom zatvorene krive

$$y^2=x^2-x^4.$$

Izračunati površinu dela ravni koji je ograničen linijama (742–748):

742. $y^2=8x$ i $2x-3y+8=0$.

743. $x^2=9y$ i $x-3y+6=0$.

744. $4x^2-8x-y+5=0$ i $2x-y+1=0$.

745. $x^2-6x-4y+13=0$ i $x-2y-1=0$.

746. $6y^2-25x-50=0$ i $5x-6y+10=0$.

747. $4x^2-9y+18=0$ i $2x^2-9y+36=0$.

748. $3y=x^2$ i $x^2+y^2+6x=0$.

Data je funkcija $x\to y=f(x)$
a) ispitati i grafički predstaviti datu funkciju;
b) odrediti površinu dela ravni ograničenog lukom krive i osom $Ox$ (749—752).

749. $y=\frac{x^2-5x+4}{x-5}$.

750. $y=\frac{x^2-11x+28}{x-8}$.

751. $y=\frac{x^2-5x+4}{x+1}$.

752. $y=\dfrac{x^2+7x+10}{x+1}$.

753.* Odrediti sve vrednosti parametra $a$ $(a\geqslant 1)$ za koje površ lika ograničenog pravama $y=1$ i $y=2$ i parabolama $y=ax^2$ i $y=\frac{1}{2}ax^2$ $(x\geqslant 0)$ ima maksimalnu vrednost.

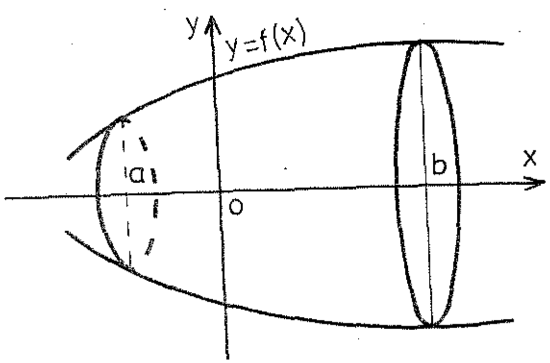
754* Parabola $y^2=2px$ seče kružnicu $x^2+y^2-2rx=0$ u tačkama A i B. Odrediti parametar $p$ tako da površina površi koja je ograničena parabolom i tetivom AB bude maksimalna.

755* Napisati jednačinu sečice parabole $y^2=4x$ koja sadrži koordinatni početak i od date parabole odseca odsečak površine 9.

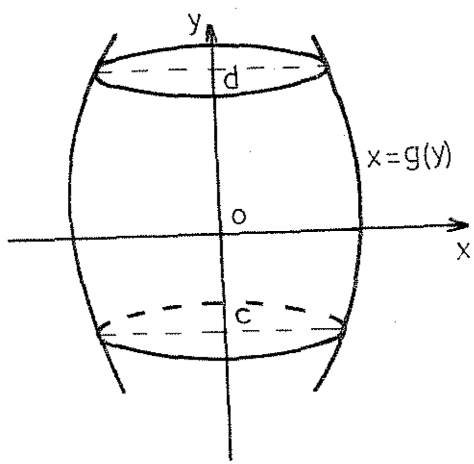
### 4.7. Primena određenog integrala za izračunavanje zapremine rotacionih tela

*Primedba* 1. Zapremina tela nastalog rotacijom krivolinijskog trapeza omeđenog krivom $y=f(x)$, osom $Ox$, pravama $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$ oko ose $Ox$ (sl. 5) izračunava se obrascem

(1) $\quad V_x=\pi\int\limits_a^b y^2\,dx$.




Sl. 5




Sl. 6

*Primedba* 2. Zapremina tela nastalog rotacijom oko ose $Oy$ lika omeđenog krivom $x=g(y)$, pravama $x=0$, $y=c$, $y=d$ $(c<d)$ (sl. 6) izračunava se obrascem

(2) $\quad V_y=\pi\int\limits_c^d x^2\,dy$.



*Primedba* 3. Zapremina tela nastalog rotacijom lika omeđenog krivama $y_1=f_1(x)$ i $y_2=f_2(x)$ $(f_1(x)\leqslant f_2(x))$ i pravama $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$ oko ose $Ox$ izračunava se obrascem

(3) $\quad V_x=\pi\int\limits_a^b (y_2^2-y_1^2)\,dx$.

756. Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko ose $Ox$ dela površi ograničenog lukom krive $y=4x-x^2$ i osom $Ox$.

757. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog krivom $y=\sin x$ i pravom $y=0$, u intervalu $[0, \pi]$ oko ose $Ox$.

758. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog lukom krive $y=\operatorname{tg} x$ i pravom $y=0$ oko ose $Ox$ u intervalu $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

759. Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog lukom krive $y=a^x$ i pravom $y=0$ oko ose $Ox$ u intervalu $[0, 1]$.

760. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog lukom krive $y=\ln x$ i pravom $x=0$ oko ose $Oy$ u intervalu $[0, 1]$.

761. Primenom određenog integrala izvesti obrasce za zapreminu: a) pravog kružnog valjka; b) prave kružne kupe; c) prave kružne zarubljene kupe.

762. Metodom integralnog računa izvesti obrazac za zapreminu: a) lopte poluprečnika $R$; b) lopte odsečka visine $h$; c) loptinog sloja visine $h$.

763. Izračunati zapreminu (paraboloida) tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog parabolom $y^2=2px$ i pravom $x=a$ $(a>0)$ oko ose $Ox$.

764. Izračunati zapreminu (elipsoida) tela koje nastaje rotacijom površine ograničene elipsom $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ oko: a) ose $Ox$; b) ose $Oy$.

765. a) Izračunati zapreminu (dvokrilnog hiperboloida) obrtnog tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog hiperbolom $b^2x-a^2y^2=a^2b^2$ i pravama $x=-2a$ i $x=2a$ oko ose $Ox$.
b) Izračunati zapreminu (jednokrilnog hiperboloida) obrtnog tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog hiperbolom $b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2$ i pravama $y=-b$ i $y=b$ oko ose $Oy$.

766.* Odrediti zapreminu (torusa) tela nastalog rotacijom kruga $x^2+(y-b)^2=r^2$ oko ose $Ox$ $(b>r)$.

Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi koji je ograničen krivama (767—790):

767. $3y=x^2$ i $x^2+y^2+6x=0$, oko ose $Ox$.

768. $y=-x^2+2$ i $y=|x|$, oko ose $Ox$.

769. $x^2+y^2=4$ i $y^2-3x=0$, oko ose $Ox$.

770. $x^2-y^2=4$ i $y^2-3x=0$, oko ose $Ox$.

771. $y=x^2$ i $y^2=x$, oko ose $Ox$.

772. $x^2+4y^2=4$ i $4y^2-3x=0$, oko ose $Ox$.

773. $y=|x^3|$ i $y=-x^2+2$, oko ose $Ox$.

774. $x^2+y^2=8$ i $x^2-2y=0$, oko ose $Ox$.

775. $y=\frac{1}{1+x^2}$, $x=\pm 1$ i $y=0$, oko ose $Oy$.

776. $y^2=4x$ i $x=0$, oko ose $Oy$.

777. $x^2+ay=a^2$ i $x+y=a$, oko ose $Oy$.

778. $y=x^3$, $y=8$ i $x=0$, oko ose $Oy$.

779. $y=x^2(1-x^2)$ i $y=0$, oko ose $Ox$.

780. $y^2=x^4(1+x)$, oko ose $Ox$.

781. $y=5^x$, $y=3^{-x}$ i $x=2$, oko ose $Ox$.

782. $y=\frac{2}{x}$, $y=x+1$ i $x=3$, oko ose $Ox$.

783. $y=\frac{3}{x}$ i $x+y=4$, oko ose $Ox$.

784. $x^2+y^2=16$ i $y^2=4(x+1)$, oko ose $Ox$.

785. $y=x^2$ i $y=\sqrt{x}$, oko ose $Ox$.

786. $y=e^x$, $x=0$ i $y=0$ oko: a) ose $Ox$; b) ose $Oy$.

787. $y=\sin^2 x$, $x=0$ i $x=\pi$, oko ose $Ox$.

788. $y^2=4ax$ i $x=a$, oko ose $Oy$.

789. $y=\cos(x-\frac{\pi}{3})$, $y=0$, $x=0$ $(x>0)$, oko ose $Ox$.

790. $y=\cos x+\cos 2x$, $x=0$, $x=\frac{\pi}{3}$ i $y=0$, oko ose $Ox$.

791. Figura ograničena lukom elipse $x^2+5y^2=5$, odsečkom ose $Ox$ između žiža i ordinatama u žižama rotira oko ose $Ox$. Izračunati zapreminu nastalog rotacionog tela.

792. Data je kružnica $x^2+y^2=16$ i prava $x=2$:
a) odrediti jednačine tangenti kružnice u presečnim tačkama sa datom pravom;
b) izračunati površinu lika ograničenog kružnicom i tangentama;
c) izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom tog lika oko ose $Ox$.

793. Odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog krivom $ay^2=x^3$ i pravama $x=0$, $x=a$ $(a>0)$ oko ose $Ox$.

794. Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom lika ograničenog krivom $ay^2=x^3$ i pravom $y=x$ oko ose $Ox$.

795. Data je parabola $y^2=8(x-2)$ i tačka $P(4, y)$ parabole:
a) odrediti jednačinu tangente u tački $P$;
b) izračunati zapreminu tela nastalog rotacijom oko ose $Ox$ figure ograničene tangentom, lukom krive i osom $Ox$.

796. Prava dodiruje parabolu $y^2=9(1-x)$ u tački $M(-3, y>0)$. Izračunati zapreminu tela nastalog rotacijom oko ose $Ox$ figure ograničene pravom i parabolom.

797. Data je kriva $y^2=6(2-x)$ i tačka $M(-4, y>0)$ koja pripada krivoj:
a) odrediti jednačinu tangente u tački $M$;
b) odrediti zapreminu tela koje nastaje rotacijom oko ose $Ox$ figure ograničene tangentom, krivom i osom $Ox$.

798. Prava dodiruje parabolu $y^2=12(x-3)$ u tački $P(6, y)$. Izračunati zapreminu tela nastalog rotacijom oko ose $Ox$ figure ograničene pravom, parabolom i osom $Ox$.

**799*.** Data je tačka $M(9, 0)$, parabola $y^2=8x$ i tačka $N(x<9, y)$ koja pripada paraboli. Deo površi ograničen lukom parabole, osom parabole i duži $MN$ rotira oko ose $Ox$. Odrediti koordinate tačke $N$ tako da zapremina nastale kupe bude maksimalna, kao i odnos zapremine nastale kupe prema zapremini nastalog rotacionog paraboloida.

**800.** U tački $P(3, y>0)$ parabole $y^2=2(x-1)$ konstruisana je tangenta. Izračunati:
a) površinu figure koja je ograničena tom tangentom, parabolom i osom $Ox$;
b) zapreminu tela koje nastaje rotacijom iste figure oko ose $Ox$.

**801.** Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom dela površi ograničenog lukovima krivih $y^2=x^3$ i $y^2=4x$ oko ose $Ox$.

**802.** Izračunati zapreminu torusa koji nastaje obrtanjem kruga $x^2+(y-2)^2=1$ oko ose $Ox$.

**803*.** Izračunati zapreminu tela nastalog obrtanjem, oko ose $Ox$, figure omeđene linijama: $y=\arcsin x$, $y=0$ i $x=1$.

**804*.** Izračunati zapreminu tela nastalog obrtanjem, oko ose $Ox$, figure omeđene krivom $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-4}}$ i pravama $x=3$, $x=4$ i $y=0$.

**805*.** Izračunati zapreminu tela nastalog obrtanjem, oko ose $Ox$, figure ograničene grafikom krive $f(x)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+4}}$ i pravama $x=0$, $x=1$ i $y=0$.

### 4.8. Primena određenog integrala za izračunavanje dužine luka krive

*Primedba* 1. Dužina $s$ luka glatke krive $y=f(x)$, između dve tačke sa apscisama $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$, iznosi

(1) $$s=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx\,.$$

*Primedba* 2. Ako je kriva data jednačinama u parametarskom obliku $x=\varphi(t)$ i $y=g(t)$ ($\varphi(t)$ i $g(t)$ su neprekidne diferencijabilne funkcije), onda je dužina luka $s$ krive



(2) $$s=\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2+y'^2}\,dt,$$

gde su $t_1$ i $t_2$ vrednosti parametra koje odgovaraju krajevima luka $(t_1<t_2)$.

**806.** Primenom integralnog računa izvesti obrazac za obim kružne linije $x^2+y^2=r^2$.

**807.** Izračunati dužinu luka parabole $y=\frac{1}{2}x^2$ između tačaka $O(0, 0)$ i $M\left(\sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$.

**808.** Izračunati dužinu luka parabole $y=4-x^2$ između presečnih tačaka sa osom $Ox$.

**809.** Odrediti dužinu luka krive $9y^2=4x^3$ između njenih tačaka $O(0, 0)$ i $A(3, 2\sqrt{3})$.

**810.** Odrediti dužinu astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$.

**811.** Izračunati dužinu luka parabole $y=2\sqrt{x}$ od $x=0$ do $x=1$.

**812.** Izračunati dužinu luka parabole $y=\ln x$ od $x=\sqrt{3}$ do $x=\sqrt{8}$.

**813.** Odrediti dužinu lančanice $y=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$ između tačaka sa apscisama $x=0$ i $x=1$.

**814*.** Odrediti dužinu luka cikloide $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

**815.** Data je kriva linija $y=\ln(1-x^2)$. Izračunati dužinu luka krive linije od koordinatnog početka do tačke $A$ na datoj krivoj sa apscisom 0,5.

**816.** Izračunati dužinu luka krive
$y=\frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$ između njenih nula.

**817*.** Izračunati dužinu luka parabole $y=x^2+2x$ koji se nalazi ispod ose $Ox$.

**818*.** Izračunati dužinu luka parabole $y=x^2-2x-1$ između tačaka $A(-1, 2)$ i $B(2, -1)$.

819.* Izračunati dužinu krive linije $\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$.

820.* Izračunati dužinu luka krive $y=\arcsin\sqrt{x}-\sqrt{x-x^2}$ od tačke $A(0, f(0))$ do tačke $B(1, f(1))$.

821.* Izračunati dužinu luka krive $x=\frac{1}{4}y^2-\frac{1}{2}\ln y$ između pravih $y=1$ i $y=e$.

822. Ako je $s$ dužina luka krive $y=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ od tačke $A$ (0,1) do tačke $B$ $(x,y)$ dokazati da je $y^2-s^2=1$.

## 4.9. Primena integrala na izračunavanje površine rotacione površi

*Primedba* 1. Površina površi koja nastaje rotacijom oko ose $Ox$ luka glatke krive $y=f(x)$, između tačaka čije su apscise $x=a$ i $x=b$ $(a<b)$, izračunava se obrascem

$$(1) \qquad P_x=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

*Primedba* 2. Ako luk glatke krive rotira oko ose $Oy$, imamo analogni obrazac

$$(2) \qquad P_y=2\pi\int_c^d x\sqrt{1+x'^2}\,dy.$$

823. Primenom određenog integrala izvesti obrazac za površinu sfere poluprečnika $R$.

824. $1^0$ Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom krive $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ oko: a) ose $Ox$ b) ose $Oy$.
$2^0$ Primenom određenog integrala izvesti obrasce za površinu: a) omotača valjka; b) omotača kupe; c) omotača zarubljene kupe.

825. Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom luka krive $y=\sin x$, oko ose $Ox$, na segmentu $[0, \pi]$.

826. Izračunati površinu površi nastale rotacijom luka krive $y=\operatorname{tg} x$, oko ose $Ox$, na segmentu $[0, \frac{\pi}{4}]$.

827. Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom astroide $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ oko ose $Oy$.



828. Izračunati površinu površi nastale rotacijom, oko ose $Ox$, luka krive

$$y=\frac{1}{3}x^3, \text{ od } x=-2 \text{ do } x=2.$$

829. Izračunati površinu površi nastale rotacijom, oko ose $Ox$, luka krive: a) $y^2=4+x$ koji odseca prava $x=2$; b) $y^2=4-x$; $-2\leq x\leq 4$.

830. Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom krive $4x^2+y^2=4$ oko ose $Oy$.

831.* Odrediti površinu površi nastale rotacijom, oko ose $Ox$, petlje krive $9y^2=x(3-x)^2$.

832.* Odrediti površinu površi koja nastaje rotacijom krive

$y=\frac{1}{6}\sqrt{x}(12-x)$, oko $x$-ose, između njenih nula.

833.* Odrediti površinu paraboloida nastalog rotacijom, oko ose $Ox$, luka parabole $y^2=2px$, na segmentu $[0, a]$.

834. Izračunati površinu površi koja nastaje rotacijom luka parabole $y^2=4x$, oko ose $Ox$, na segmentu $[0, 3]$.

835.* a) Izračunati površinu torusa nastalog rotacijom kružnice $x^2+(y-2)^2=1$ oko ose $Ox$.
b) Izračunati površinu elipsoida nastalog rotacijom elipse $x^2+4y^2=4$ oko ose $Ox$.

## 4.10. Primena integrala u prirodnim naukama

*Primedba* 1. Put koji pređe tačka pri neravnomernom kretanju po pravoj, sa promenljivom brzinom $v=f(t)\geqslant 0$, u intervalu $[t_1, t_2]$, izračunava se po formuli:

$$(1) \qquad s=\int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt.$$

*Primedba* 2. Rad koji vrši promenljiva sila $f(x)$, pri premeštanju materijala tačke duž ose $Ox$, od $x=a$ do $x=b$, određuje se po formuli

$$(2) \qquad A=\int_a^b f(x)\,dx.$$

*Primedba* 3. Pri rešavanju zadataka za izračunavanje rada sile koristi se Hukov zakon

(3) $F = kx$,

gde je $F$ – sila (u N), $x$ – apsolutno udaljenje (u m) izazvano silom $F$, a $k$ – koeficijent proporcionalnosti (u N/m).

36. Brzina kretanja tačke menja se po zakonu $v=(3t^2+2t-1)$ m/s. Odrediti put pređen za 10 sekundi od početka kretanja.

37. Brzina kretanja tačke je $v=(6t^2+4)$ m/s. Odrediti put koji prolazi tačka za 5 sekundi od početka kretanja.

38. Brzina kretanja tačke je $v=(9t^2-8t)$ m/s. Izračunati pređeni put u toku 4 sekunde.

39. Tačka se kreće brzinom $v=(2t+8t^{-2})$m/s. Odrediti pređeni put u toku 2 sekunde.

40. Tačka se kreće brzinom $v=(12t-3t^2)$ m/s. Odrediti pređeni put tačke od početka kretanja pa do njegovog prestanka.

41. Tačka se kreće brzinom $v=(24t-6t^2)$ m/s. Odrediti:
a) pređeni put u toku prve 3. sekunde;
b) pređeni put u toku 3. sekunde;
c) pređeni put tačke od početka kretanja pa do njegovog prestanka.

42. Dva tela polaze istovremeno iz jedne tačke, u istom smeru jedne prave. Prvo telo se kreće brzinom $v_1=(6t^2+2t)$ m/s, a drugo brzinom $v_2=(4t+5)$ m/s. Na kom rastojanju se tela nalaze, jedno od drugog, kroz 5 sekundi?

43. Dva tela polaze istovremeno iz jedne tačke, u istom smeru jedne prave. Prvo telo se kreće brzinom $v_1=3t^2$ m/s, a drugo brzinom $v_2=(6t^2-10)$ m/s. Na kom rastojanju se tela nalaze, jedno od drugog, kroz 10 sekundi?

44. Telo je bačeno sa zemlje vertikalno uvis brzinom $v=(39{,}2-9{,}8t)$ m/s. Izračunati maksimalnu visinu koju postiže telo.

45.* Sabijanje $x$ opruge proporcionalno je sili $F$. Odrediti rad sile $F$ pri sabijanju opruge na 0,04 m, ako je za sabijanje na 0,01 m potrebna sila od 10N.



**846.*** Za sabijanje spiralne opruge na 0,05 m utrošen je rad 25 J. Odrediti rad koji je potreban da se opruga sabije na 0,1 m.

**847.*** Spiralna opruga rastegnuta je na 0,02 m, pod dejstvom sile od 60 N. Odrediti rad koji proizvodi sila pri rastezanju opruge na 0,12 m.

# V GLAVA

## 5. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG I* DRUGOG REDA

### 5.1. Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivima

*Primedba* 1. U diferencijalnoj jednačini

(1) $y' = f(x)\,g(x)$

promenljive se mogu razdvojiti.

*Primedba* 2. Za rešavanje diferencijalne jednačine (1) potrebno je najpre razdvojiti promenljive na sledeći način:

(2) $\dfrac{dy}{g(y)} = f(x)\,dx.$

*Primedba* 3. Opšte rešenje diferencijalne jednačine (1) dobija se integracijom leve i desne strane jednačine (2):

(3) $\displaystyle\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\,dx + C.$

Odrediti opšti integral sledećih diferencijalnih jednačina (848–853):

**848.** a) $x(1+y^2) = yy'$; b) $x^2 = 3y^2y'$.

**849.** a) $\sqrt{x}\,dy = \sqrt{y}\,dx$; b) $\dfrac{dy}{\sqrt{x}} = \dfrac{3dx}{\sqrt{y}}$.

**850.** a) $(1+y)\,dx = (x-1)\,dy$; b) $xydx = (1+x^2)\,dy$.

**851.** a) $y^2dx + (x-2)\,dy = 0$; b) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$.

**852.** a) $(1+y^2)\,dx - \sqrt{x}\,dy = 0$; b) $\sqrt{1-x^2}\,dy - x\sqrt{1-y^2}\,dx = 0$.

**853.** a) $y' = 10^{x+y}$; b) $y'\operatorname{tg} x - y = a$.

* Ova tema nije predviđena nastavnim planom i programom za gimnazije.



Odrediti partikularna rešenja koja zadovoljavaju date početne uslove za sledeće diferencijalne jednačine (854–859):

**854.** $ydy = xdx$, $y = 4$ za $x = -2$.

**855.** $s\operatorname{tg} t\,dt + ds = 0$, $s = 4$ za $t = \dfrac{\pi}{3}$.

**856.** $s' = 3t^2 - 2t$, $s = 4$ za $t = 2$.

**857.** $\dfrac{dy}{x-1} = \dfrac{dx}{y-2}$, $y = 4$ za $x = 0$.

**858.** $(1+x)\,ydx + (1-y)\,xdy = 0$, $y = 1$ za $x = 1$.

**859.** $\dfrac{dx}{\cos^2 x \cos y} = \operatorname{ctg} x \sin y\,dy$, $y = \pi$ za $x = \dfrac{\pi}{3}$.

**860.** Odrediti zakon kretanja tela duž ose $Ox$ koje počinje iz tačke $M$ brzinom $v$:

a) $M(4, 0)$, $v = 2t + 3t^2$; b) $M(0, 6)$, $v = 4t - 6t^2$.

**861.** Odrediti jednačinu krive čiji grafik sadrži tačku $M$ ako je dat koeficijent pravca tangente:

a) $M(2, -3)$, $k = 4x - 3$;

b) $M(2, -1)$, $k = \dfrac{1}{2y}$.

**862.** Odrediti diferencijalnu jednačinu datog skupa krivih

$\ln y = C\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$.

**863.*** Odrediti diferencijalnu jednačinu datog skupa krivih $(1+x^2)(1+y^2) = Cy^2$.

**864.*** Odrediti ortogonalne trajektorije skupa parabola $y = ax^2$.

**865.*** Dokazati da su ortogonalne trajektorije kružnice $x^2 + y^2 = 2ax$ takođe kružnice.

**866.*** Dokazati da su ortogonalne trajektorije krivih $y = ax^n$ elipse.

**867.*** Odrediti ortogonalne trajektorije skupa krivih $x^2 - y^2 = a^2$.

**868.*** Eksperimentalno je utvrđeno da je brzina raspadanja radioaktivne materije u svakom trenutku vremena proporcionalna početnoj količini urana. U početnom trenutku vremena ($t=0$) bilo je $R_0$ grama urana. Odrediti formulu za izračunavanje količine urana u ma kom trenutku vremena $t$.

### 5.2. Homogene diferencijalne jednačine prvog reda

*Primedba* 1. Jednačina oblika

(1) $\quad f(x,y)\,dx = g(x,y)\,dy,$

gde su $f(x,y)$ i $g(x,y)$ homogene funkcije istih izložilaca, naziva se homogena diferencijalna jednačina prvog reda.

*Primedba* 2. Jednačina (1) se uvek može transformisati u oblik

(2) $\quad y' = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right).$

*Primedba* 3. Homogena jednačina, smenom $y = ux$, svodi se na jednačinu koja razdvaja promenljive.

Odrediti opšti integral sledećih diferencijalnih jednačina (867–876):

**869.** a) $(x+y)\,dx - x\,dy = 0$; b) $x + y + (y-x)\,y' = 0$.

**870.** a) $(x-y)\,dx + (x+y)\,dy = 0$; b) $(x-y) + xy' = 0$.

**871.** a) $(2\sqrt{xy} - x)\,dy + y\,dx = 0$; b) $y' - \dfrac{y}{x} = \operatorname{tg} \dfrac{y'}{x}$.

**872.** a) $(t-s)\,dt + t\,ds = 0$; b) $xy^2\,dy = (x^3 + y^3)\,dx$.

**873.** a) $x\,dy = (2x+y)\,dx$; b) $(x-2y)\,dy = (x-y)\,dx$.

**874.** $x(x+2y)\,dx + (x^2 - y^2)\,dy = 0$.

**875.** $(x^2 - 2y^2)\,dx + 2xy\,dy = 0$.

**876.** $y' = \dfrac{y^2}{x^2} - \dfrac{y}{x} + 1$.



Odrediti partikularna rešenja sledećih diferencijalnih jednačina (877–880):

**877.** $y' = \dfrac{2x+y}{2x}$, ako je $y=0$ za $x=1$.

**878.** $y' = \dfrac{xy+y^2}{x^2}$, ako je $y=1$ za $x=1$.

**879.** $(y + \sqrt{x^2+y^2})\,dx - x\,dy = 0$, ako je $y=0$ za $x=1$.

**880.** $y' = \dfrac{y}{x} \ln \dfrac{y}{x}$, ako je $y=1$ za $x=1$.

### 5.3. Linearna diferencijalna jednačina

*Primedba* 1. Jednačina oblika

(1) $\quad y' + yp(x) + q(x) = 0,$

gde su $p(x)$ i $q(x)$ funkcije argumenta $x$, naziva se linearna diferencijalna jednačina prvog reda.

*Primedba* 2. Ako se u jednačini (1) uvede smena $y = uv$ ($u$ i $v$ funkcije promenljive $x$) dolazi se do opšteg rešenja diferencijalne jednačine (1) u obliku

(2) $\quad y = e^{-\int p\,dx}\left(C - \int q e^{\int p\,dx}\,dx\right).$

Odrediti opšte integrale datih diferencijalnih jednačina (881–890):

**881.** a) $y' - 2y - 3 = 0$; b) $y' = y + 1$.

**882.** a) $xy' - x^2 + 2y = 0$; b) $y' + xy = x$.

**883.** $y' - \dfrac{2y}{x+1} - (x+1)^3 = 0$.

**884.** $y' + \dfrac{2xy}{1-x^2} - \dfrac{4x}{1-x^2} = 0$.

**885.** $y' - y \operatorname{ctg} x - \sin x = 0$.

**886.** $s' \cos t + s \sin t - 1 = 0$.

**887.*** $y'-\dfrac{1+2x}{x+x^2}\,y=\dfrac{1+2x}{x+x^2}$.

**888.*** $y'+2xy=2x\,e^{-x^2}$.

**889.*** $y'-2xy=(x-x^3)\,e^{x^2}$.

**890.*** $y'+y\cos x=0{,}5\,\sin 2x$.

Odrediti partikularna rešenja koja zadovoljavaju postavljene početne uslove u sledećim zadacima (891–896):

**891.** $y'+y\,\mathrm{tg}\,x=\dfrac{1}{\cos x}$ ako je $y=1$ za $x=0$.

**892.** $y'-\dfrac{xy}{1+x^2}-\dfrac{2}{1+x^2}=0$ ako je $y=3$ za $x=0$.

**893.** $y'-\dfrac{3y}{x}=x^3e^x$ ako je $y=e$ za $x=1$.

**894.** $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{1}{x^2}$ ako je $y=1$ za $x=2$.

**895.** $y'\cos^2 x=\mathrm{tg}\,x-y$ ako je $y=0$ za $x=0$.

**896.** $y'+\dfrac{3}{x}\,y=\dfrac{2}{x^2}$ ako je $y=1$ za $x=1$.

### 5.4. Nepotpune diferencijalne jednačine drugog reda

*Primedba* 1. Jednačina koja sadrži drugi izvod ili diferencijal drugog reda naziva se diferencijalna jednačina drugog reda.

*Primedba* 2. Najjednostavnija diferencijalna jednačina drugog reda ima oblik

$$y''=f(x),$$

a njeno opšte rešenje se određuje dvostrukom integracijom.

**897.** Odrediti opšte rešenje jednačine

$$y''=1-2x.$$



**898.** Odrediti opšti integral jednačine:
a) $y''=0$; b) $y''=4$; c) $y''=\cos x$.

Odrediti partikularna rešenja koja zadovoljavaju postavljene početne uslove (899–904):

**899.** $y''=5$ ako je $y=5$ za $x=2$ i $y=11$ za $x=4$.

**900.** $y''=x$ ako je $y=0$ za $x=1$ i $y=2$ za $x=2$.

**901.** $\dfrac{d^2s}{dt^2}=12t$ ako je $s=2$ i $\dfrac{ds}{dt}=20$ za $t=0$.

**902.** $\dfrac{d^2\theta}{d\omega^2}=\omega^2$ ako je $\theta=0$ i $\dfrac{d\theta}{d\omega}=12$ za $\omega=0$.

**903.** $y''=2y'$ ako je $y=1{,}5$ i $y'=1$ za $x=1$.

**904.** $y''=-12x^2+8$, ako je $y=0$ za $x=0$ i $y=1$ za $x=2$.

Ispitati precizno promene i konstruisati grafik partikularnog rešenja (905–907):

**905.** $y''=12x^2-4$ ako je $y=0$ za $x=0$ i $y=8$ za $x=2$.

**906.** $y''=12x^2-8$ ako je $y=3$ za $x=0$ i $y=0$ za $x=1$.

**907.** $y''=-12x^2+4$ ako je $y=3$ za $x=0$ i $y=4$ za $x=1$.

Ispitati promene i skicirati grafik partikularnog rešenja.

**908.** Odrediti opšti integral jednačine

$$y''+a^2y=0.$$

Odrediti opšti integral jednačine (909–916):

**909.** a) $y''+4y=0$; b) $y''+9y=0$.

**910.** a) $y''+5y=0$; b) $y''-9y'=0$.

**911.** a) $y''+3y'=0$; b) $y''-y'=0$.

**912.*** a) $y''-9y=0$; b) $y''+16y=0$; c) $y''-y=0$.

**913.*** a) $y''-6y'+9y=0$; b) $y''-3y'+2y=0$.

**914.*** a) $y''-2y'+5y=0$; b) $y''+4y'+7y=0$.

**915.*** a) $y''-6y'+13y=0$; b) $y''-y'-6y=0$.

**916.*** a) $y''-4y'+3y=0$; b) $y''-2y'+2y=0$.

# VI GLAVA

## 6. KOMBINATORIKA

### 6.1. Varijacije

Varijacije bez ponavljanja

*Primedba* 1. Neka je dat skup $E=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$ od $n$ elemenata.

**Definicija 1.** Varijacije bez ponavljanja klase $k$ od $n$ $(n \geqslant k)$ elemenata skupa $E$ su uređene $k$-atorke sastavljene iz različitih elemenata skupa $E$. Ekvivalentna definicija ovoj je:

**Definicija 2.** Varijacije klase $k$ od $n$ elemenata $(n \geqslant k)$ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ su sva biunivoka preslikavanja skupa $E_k=\{1, 2, 3, \ldots, k\}$ u skup $E=\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.

*Stav* 1. Broj varijacija od $n$ elemenata klase $k$ $(k \leqslant n)$ iznosi

$$V_k^n = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{1}$$

Varijacije sa ponavljanjem

*Primedba* 2. Posmatrajmo sada $n$ različitih elemenata $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ i pretpostavimo da je svaki od njih u dovoljnom broju.

**Definicija 3.** Varijacije sa ponavljanjem klase $k$, od $n$ elemenata $(n \geqslant k)$ $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ su uređene $k$-atorke sastavljene od elemenata skupa $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\}$.

*Stav* 2. Broj varijacija sa ponavljanjem klase $k$ od $n$ elemenata dat je formulom:

$$\overline{V}_k^n = n^k. \tag{2}$$



**917.** Dat je skup $A=\{1, 2, 3, 4\}$. Formirati sve varijacije druge i treće klase bez ponavljanja od elemenata skupa $A$ i izračunati njihov broj.

**918.** Koliko se različitih četvorocifrenih brojeva može formirati od 10 cifara a da se cifre ne ponavljaju?

**919.** Dat je skup $E=\{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Prikazati sve varijacije druge klase skupa $E$ grafom.

**920.** Dat je skup $E=\{1, 2, 3, 4\}$. Formirati sve dvocifrene brojeve od elemenata datog skupa i odrediti njihov broj.

**921.** Na koliko različitih načina se mogu izabrati četiri osobe na četiri različite funkcije (dužnosti) od devet kandidata?

**922.** Odeljenje jednog razreda broji 35 učenika. Oni su međusobno razmenili fotografije. Koliko je ukupno podeljeno fotografija?

**923.** Koliko se brojeva između 3000 i 6000 može formirati od cifara 0, 1, 2,... 7, ako se nijedna cifra ne može ponoviti u jednom broju?

**924.** Izračunati $V_1^5+V_2^5+V_3^5+V_4^5$.

**925.** Od koliko različitih elemenata možemo formirati 210 varijacija druge klase?

**926.** Koliko se brojeva može formirati pomoću elemenata skupa $M$, koji čine svi prosti činioci broja 2310, ako traženi brojevi sadrže po dva različita prosta činioca?

**927.** Koliko se brojeva može napisati pomoću elemenata skupa $M$, koji čine prosti činioci broja 3570, ako traženi brojevi sadrže po tri prosta činioca?

**928.** Odrediti broj reči, od 5 slova, koje se mogu napisati pomoću azbuke od 30 slova, bez obzira da li se u rečima ponavljaju sva slova i da li se dobijaju reči bez značenja.

**929.** Koliko se petocifrenih brojeva može obrazovati od cifara 0, 1, 3, 5, 7, 9, ako se 0 ne nalazi ni na prvom ni na poslednjem mestu i ako se nijedna cifra ne ponavlja?

**930.** Dat je skup $A=\{3, 4, 5, 6, 7\}$. Odrediti broj trocifrenih brojeva koji se mogu obrazovati od elemenata skupa $A$.

**931.*** Dat je skup $E=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti sve različite prirodne brojeve veće od 1000, koji se mogu formirati od elemenata skupa $E$, tako da cifre budu različite.

**932.*** Odrediti broj različitih prirodnih brojeva, manjih od 100 000 koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5.

**933.** Broj varijacija od $n$ elemenata treće klase jednak je $\frac{5}{12}$ od broja varijacija treće klase od $n+2$ elemenata. Odrediti broj elemenata.

Rešiti jednačine (934–936):

**934.** a) $V_2^x=380$; b) $V_2^x=72$.

**935.** a) $V_2^x=56x$; b) $V_3^{2x+4} : V_4^{x+4}=2:3$.

**936.** a) $V_4^x : V_5^{x-1}=1:3$; b) $7V_3^x=6 \cdot V_3^{x+1}$.

**937.** Ako je broj varijacija četvrte klase bez ponavljanja od $x$ elemenata 1680, odrediti broj elemenata $x$.

**938.** Broj varijacija četvrte klase sa ponavljanjem od $x$ elemenata iznosi 50 625. Odrediti broj elemenata $x$.

**939.** Broj elemenata odnosi se prema broju varijacija 3. klase bez ponavljanja kao 1:20. Odrediti broj elemenata.

**940.** Broj varijacija treće klase sa ponavljanjem od $x$ elemenata veći je za 408 od broja varijacija treće klase bez ponavljanja od istog broja elemenata. Odrediti broj elemenata $x$.

**941.** Koliko se Morzeovih znakova može formirati iz oba osnovna znaka . i —, ako se jedan znak sastoji najviše od pet elementarnih znakova?

**942.** Na tiketu sportske prognoze nalazi se 12 susreta. Koliko različito popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka?

**943.** Na tiketu sportske prognoze nalazi se 12 susreta:

a) koliko kolona tiketa treba popuniti ako se »znaju« rezultati pet susreta da bi imali 12 tačnih pogodaka;

b) koliko kolona treba popuniti ako se »zna« da 7 susreta neće biti nerešeno da bismo imali 12 pogodaka?



**944.** Dokazati da je $V_{n-1}^n=V_n^n=n!$

**945.** Odrediti broj različitih šestocifrenih brojeva koji se mogu formirati od elemenata skupa $E=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$, tako da se cifre ne ponavljaju a da krajnje cifre budu parne.

**946.** Koliko se različitih petocifrenih brojeva može sastaviti od elemenata skupa $E=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, tako da se cifre ne ponavljaju i da je zbir krajnjih cifara paran broj?

### 6.2. Permutacije

*Permutacije bez ponavljanja*

**Definicija 1.** Permutacije od $n$ elemenata su varijacije klase $n$ od $n$ elemenata.

**Definicija 2.** Permutacije su biunivoka preslikavanja skupa $E$ u samog sebe.

*Stav* 1. Broj permutacija od $n$

(1) $P(n)=n(n-1)(n-2)\ldots 3.\ 2.\ 1=n!$

*Permutacije sa ponavljanjem*

*Primedba* 1. Neka je dat skup od $n$ elemenata, od kojih ima: $k_1$ jednakih jedne vrste, $k_2$ jednakih druge vrste itd; $k_m$ jednakih $m$-te vrste; pri čemu je $m\leqslant n$ i $k_1+k_2+\ldots+k_m\leqslant n$.

**Definicija 3.** Svaki linearni raspored koji se sastoji od svih elemenata zove se permutacija sa ponavljanjem.

*Stav* 2. Broj različitih permutacija sa ponavljanjem od $n$ elemenata, gde je $k_1$ međusobno jednakih, $k_2$ međusobno jednakih, ..., $k_m$ međusobno jednakih, jednak je

$$P_{k_1,\,k_2 \ldots k_m}(n)=\frac{n!}{k_1!.\ k_2!\ \ldots\ k_m!}.$$

**947.** Na koliko različitih načina mogu da sednu četiri osobe ako su postavljene četiri stolice?

**948.** Koliko različitih petocifrenih brojeva se može napisati pomoću cifara 0, 2, 4, 5, 7 ako se cifre ne ponavljaju?

**949.** Formirati sve permutacije bez ponavljanja od elemenata skupa $A=\{a, b, c, d\}$, a zatim rešenje prikazati grafom.

**950.** Obrazovati sve permutacije skupa $E=\{1, 2, 3\}$, a zatim ih prikazati kao preslikavanje skupa $E$ u samog sebe.

**951.** Dat je skup $E=\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. Koliko permutacija, koje se mogu obrazovati od elemenata skupa $E$ počinje:

a) sa 5; b) sa 123; c) sa 8642?

**952.** Dat je skup $E=\{1, 2, 3, \ldots, 8\}$. U koliko su permutacija, koje se mogu formirati od elemenata skupa $E$, elemenata 2, 4, 5, 6, jedan pored drugog, i to:

a) u datom poretku; b) u proizvoljnom poretku?

**953.** Dat je skup $S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$:

a) koliko se različitih šestocifrenih prirodnih brojeva manjih od 600 000 može obrazovati od elemenata skupa $S$, tako da se u njima cifre ne ponavljaju;

b) koliko ima neparnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

**954.** Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva čiji je zbir cifara jednak 5?

**955.** Dat je skup $S=\{0, 1, 2, 3, 4\}$:

a) koliko se različitih petocifrenih prirodnih brojeva može formirati od elemenata skupa $S$, tako da se u njima cifre ne ponavljaju;

b) koliko ima parnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

**956.** Dat je skup $S=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$:

a) odrediti broj različitih šestocifrenih prirodnih brojeva koji se mogu formirati od elemenata skupa $S$;

b) odrediti broj parnih prirodnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

**957.** Dat je skup $E=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Koliko se različitih petocifrenih brojeva, deljivih sa 6, može formirati od elemenata skupa $E$?

**958.** Odrediti broj različitih petocifrenih brojeva koji se mogu formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4 i 5, i koji su deljivi sa 15, a da se cifre u njima ne ponavljaju.



**959.** Odrediti vrednost izraza:

a) $8!+9!$; b) $\dfrac{102!}{100!}$; c) $\dfrac{6!-5!}{120}$.

**960.** Uprostiti izraze:

a) $\dfrac{1}{n!}-\dfrac{1}{(n+1)!}$; b) $\dfrac{1}{(k-1)!}-\dfrac{1}{k!}$.

**961.** Dokazati sledeće identitete:

a) $\dfrac{(m+3)!}{m!}=(m+1)(m+2)(m+3)$;

b) $\dfrac{n!}{(n-k)!}=n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) \quad (n>k)$.

Skratiti razlomke (962–963):

**962.** a) $\dfrac{(n-2)!}{(n-4)!}$; b) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$.

**963.** a) $\dfrac{(n-3)!}{n!}$; b) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}$.

Rešiti jednačine (964–965):

**964.** a) $\dfrac{(n+2)!}{n!}=72$; b) $\dfrac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$.

**965.** a) $\dfrac{(2x)!}{(2x-3)!}=\dfrac{20x!}{(x-2)!}$; b) $\dfrac{y}{(y-4)!}=\dfrac{12y}{(y-2)!}$.

Rešiti nejednačine u skupu prirodnih brojeva (966–967):

**966.** a) $\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}<72$; b) $\dfrac{(2x-1)!}{(2x-3)!}>420$.

**967.** a) $\dfrac{(y+2)!}{(y+1)(y+2)}<100$; b) $\dfrac{(m-2)(m-3)}{(m-1)!}>0{,}00002$.

**968.** Koliko elemenata sadrži skup kada broj svih permutacija od njegovih elemenata:

a) nije veći od 1000; b) nije manji od 500?

969. Koja je po redu permutacija 3421 od osnovne 1234?

970. Koja je po redu permutacija 7345612 od osnovne 1234567?

971. Koja je po redu permutacija beograd u leksikografskom poretku, načinjena od elemenata a, b, d, g, e, o, r?

972. Odrediti indeks permutacije radin koja je napisana od osnovne drina.

973. Formirati 68-u permutaciju skupa koji se sastoji od elemenata a, i, l, m, n, ako se za osnovnu permutaciju uzme ailmn.

974. Kako glasi 119. permutacija od osnovne permutacije ehpsu.

975. Formirati sve različite permutacije od elemenata abbc.

976. Odrediti broj permutacija od elemenata a, a, a, b, b, c.

977. Koliko ima sedmocifrenih brojeva obrazovanih od cifara 0, 0, 0, 0, 1, 2, 3, ne uzimajući u obzir, razume se, one koji počinju nulom (ili nulama)?

978. Koliko permutacija od elemenata a, a, a, a, a, b, b, b, c počinje: a) sa a; b) sa b; c) sa c?

979. Koliko permutacija od elemenata 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, počinje: a) sa 22; b) sa 313; c) sa 1234?

980.* Odrediti indeks permutacije matematika među leksikografski uređenim permutacijama skupa koji se sastoji od elemenata a, a, a, e, i, k, m, m, t, t.

981.* Formirati 58293. permutaciju među leksikografski uređenim permutacijama početne permutacije vdeeemors.

982. Odrediti broj permutacija koje se mogu formirati od svih činilaca proizvoda $a^5 \cdot b^3$.

983. Na koliko se različitih načina može prikazati $a^3b^2c^3$ kao proizvod od osam činilaca a, a, a, b, b, c, c, c? Kako glasi 30. raspored?

984. Formirati 232. permutaciju među leksikografski uređenim permutacijama ako je osnovna aaajjkm.



985. Odrediti indeks permutacije carinarnica među leksikografski uređenim permutacijama koje se sastoje od elemenata a, a, a, i, i, n, n, r, r, c, c.

986. Broj permutacija od $n$ elemenata odnosi se prema broju permutacija od $n+2$ elemenata kao 0,1:3. Odrediti $n$.

987. Broj permutacija od $n+2$ elemenata je 56 puta veći od broja permutacija od $n$ elemenata. Odrediti $n$.

988.* Dokazati da je
$1!.1+2!.2+3!.3+\ldots+n!.n=(n+1)!-1$, gde je $n$ ma koji prirodan broj.

### 6.3. **Kombinacije**

*Kombinacije bez ponavljanja*

**Definicija 1.** Kombinacije klase $k$ od $n$ $(n \geqslant k)$ elemenata su one varijacije klase $k$ od tih elemenata za koje se smatra da su jednake ako su sastavljene od istih elemenata.

Umesto definicije 1 može se uzeti njoj ekvivalentna:

**Definicija 2.** Kombinacija klase $k$ od $n$ $(n \geqslant k)$ elemenata skupa $E$ je svaki njegov podskup koji se sastoji od $k$ i samo $k$ elemenata.

*Stav* 1. Broj kombinacija klase $k$ od $n$ $(n \geqslant k)$ elemenata je

$$(1) \qquad C_k^n=\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

*Kombinacije sa ponavljanjem*

**Definicija 3.** Kombinacija $k$-te klase od $n$ elemenata, kod kojih se jedan element može do $km$ puta ponavljati, nazivaju se kombinacije sa ponavljanjem $k$-te klase od $n$ elemenata.

*Stav* 2. Broj kombinacija sa ponavljanjem od $n$ elemenata klase $k$ je

$$(2) \qquad \bar{C}_k^n=\binom{n+k-1}{k}.$$

**989.** Dat je skup $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Formirati sve tročlane podskupove skupa $A$.

**990.** Koliko se različitih grupa po 4 učenika može izabrati od 12 kvalifikovanih učenika koji će reprezentovati školu na takmičenju?

**991.** Na jednom šahovskom turniru učestvuje petnaest šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će biti odigrano partija na turniru?

**992.** Koliko nastaje trouglova konstrukcijom svih dijagonala konveksnog dvanaestougla ako im se temena poklapaju sa temenima dvanaestougla?

**993.** Odrediti broj dijagonala:

a) konveksnog petougla;

b) konveksnog dvanaestougla;

c) konveksnog dvadesetougla;

d) konveksnog $n$-tougla.

**994.** Dokazati tačnost jednakosti:

a) $C_0^6+C_1^6+C_2^6+C_3^6+C_4^6+C_5^6+C_6^6=2^6$;

b) $C_0^7+C_1^7+C_2^7+C_3^7=C_4^7+C_5^7+C_6^7+C_7^7$.

**995.** U skupu od 12 tačaka postoji tačno 6 četvorki komplanarnih tačaka. Koliko različitih ravni određuje ovih 12 tačaka?

**996.** U odeljenju ima 16 devojčica i 20 dečaka. Za odeljensku zaje nicu treba izabrati četiri učenika od kojih je bar jedna devojčic . Na koliko načina se može načiniti izbor?

**997.** Dat je skup $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$. Odrediti sve podskupove skupa A koji:

a) ne sadrže elemente $a_4$, $a_5$, i $a_6$;

b) ne sadrže elemente $a_5$ i $a_6$;

c) ne sadrže elemenat $a_6$;

d) sadrže sve elemente skupa $A$.

**998.** Odrediti broj svih podskupova skupa koji ima $n$ elemenata.



**999.** U ravni je dato 10 različitih tačaka od kojih nijedna trojka nije kolinearna. Odrediti broj svih pravih koje su određene datim tačkama.

**1000.** U ravni je dato 10 različitih tačaka od kojih nijedna četvorka ne pripada istoj kružnici i nijedna trojka nije kolinearna. Odrediti broj kružnica koje su određene datim tačkama.

**1001.** Skup od 40 osoba treba da izabere predsednika, sekretara i tri člana predsedništva. Na koliko načina se može obaviti ovaj izbor?

**1002.** Za delegaciju škole treba izabrati, od 10 učenika koji govore ruski i 15 koji govore engleski jezik, pet učenika od kojih bar jedan govori ruski. Na koliko načina se može obaviti izbor?

**1003.** Na jednom šahovskom turniru odigrano je 210 partija. Odrediti broj učesnika ako se zna da je svaki učesnik odigrao partiju sa svakim.

**1004.** Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko načina se može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da igraju bar 2 beka i bar jedan centar?

Rešiti jednačine (1005–1011):

**1005.** a) $5C_3^x=C_4^{x+2}$; b) $3C_{n-1}^{2n}=5C_n^{2n-1}$.

**1006.** $C_{n-2}^{n+1}+2C_3^{n-1}=7(n-1)$.

**1007.** $23V_4^n=24\,(V_3^{n+1}-C_{n-4}^n)$.

**1008.** a) $V_3^n+C_{n-2}^n=14n$; b) $P(x+2)=210\cdot V_{x-4}^{x-1}\,P(3)$.

**1009.** $C_{n-1}^n+C_{n-2}^n+C_{n-3}^n+\ \ldots\ +C_{n-9}^n+C_{n-10}^n=1023$.

**1010.** $V_2^{x+3}=C_3^{x+2}+20$.

**1011.** $\dfrac{1}{C_4^x}=\dfrac{1}{C_6^x}+\dfrac{1}{C_5^x}$.

**1012.** Rešiti sistem jednačina:

a) $C_2^x=66\ \land\ C_y^x=C_{y+2}^x$; b) $C_4^x=1820\ \land\ C_y^x=C_{y+4}^x$;

c) $V_2^m=20\ \land\ C_k^m=C_{k+1}^m$; d) $V_k^n:P(k-1)+C_{n-k}^n=$ $=126\ \land\ P(k+1)=720$.

**1013.*** Rešiti u skupu prirodnih brojeva nejednačine:

a) $C_5^n<C_3^n$; b) $C_7^{2n}>C_5^{2n}$; c) $C_{k-1}^{19}>C_k^{19}$;

d) $2C_5^n > 11\, C_3^{n-2}$;  e) $C_{n-2}^n + C_{n-1}^{n+1} \leqslant 100$.

**1014.** Za koje je vrednosti $n$ i $k$ tačna konjunkcija
$$(V_k^n : V_{k-1}^n = 10:1) \wedge (C_k^n : C_{k-1}^n = 5:3)?$$

**1015.** Kako glasi 197. kombinacija 5. klase od prvih 12 slova abecede uzimajući te kombinacije u leksikografskom poretku?

**1016.** Koji indeks u leksikografskom poretku ima kombinacija moos među kombinacijama 4. klase od elemenata m, n, o, p, q, r, s?

**1017.** Broj kombinacija druge klase od $x$ elemenata sa ponavljanjem iznosi 276. Odrediti broj elemenata $x$.

**1018.** Broj kombinacija treće klase bez ponavljanja od $x$ elemenata odnosi se prema broju kombinacija treće klase od istog broja elemenata sa ponavljanjem kao 7 : 15. Odrediti broj elemenata.

**1019.** Broj kombinacija četvrte klase bez ponavljanja od $n$ elemenata je 70. Odrediti $n$.

**1020.** Ako je $C_8^n = C_{12}^n$ izračunati $C_{17}^n$.

Odrediti $n$ i $k$ ako je (1021–1024):

**1021.** $V_k^n = 24 \ \wedge \ C_k^n = 4$.

**1022.** $V_k^n = 60 \ \wedge \ C_k^n = 10$.

**1023.** $P(k) = 24 \ \wedge \ C_k^n = 15$.

**1024.** $V_k^n = 120 \ \wedge \ P(k) = 6$.

Dokazati da za ma koji prirodni broj $n$ i prirodni broj $k$ $(k \leqslant n)$ važi (1025–1029):

**1025.** $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$.

**1026.** $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

**1027.** $C_{k+1}^n + C_{k-1}^n + 2C_k^n = C_{k+1}^{n+2}$.



**1028.** $C_k^{n-2} + C_{k-2}^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2} = C_k^n$.

**1029*.** $C_{m+1}^{n+2} + 2C_{m+2}^{n+2} + C_{m+3}^{n+2} = C_{m+3}^{n+4}$.

Izračunati $n$ i $k$ ako je (1030–1033):

**1030*.** $C_k^{n+1} : C_{k+1}^n : C_{k-1}^n = 6:5:2$.

**1031.** $C_k^{n+2} : C_{k+1}^{n+2} : C_{k+2}^{n+2} = 0{,}6:1:1$.

**1032.** $C_{k+1}^{n+1} : C_k^{n+1} : C_{k-1}^{n+1} = 5:5:3$.

**1033*.** $C_{k-1}^n : (C_k^{n-2} + C_{k-2}^{n-2} + 2C_{k-1}^{n-2}) : C_{k+1}^n = 3:5:5$.

### 6.4. Binomni obrazac

*Stav* 1. Za svaki prirodan broj $n$ važi formula

$$(1) \quad (a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots$$
$$\ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n} b^n.$$

Opšti član u razvijenom obliku binoma $(a+b)^n$ dat je formulom

$$(2) \quad T_{k+1} = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

**1034.** Metodom matematičke indukcije dokazati formulu (1).

Primeniti binomnu formulu na sledeće binome (1035–1037):

**1035.** a) $(3+2x)^5$;  b) $(2x+5)^4$.

**1036.** a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^5$;  b) $(x^2+x-3)^4$.

**1037.** a) $(1+i)^3-(1+i)^5$;  b) $(e^x-e^{-x})^7$.

**1038.** Koristeći binomni obrazac izračunati sa tačnošću na pet decimalnih mesta:

a) $0{,}98^6$;  b) $2{,}1^6$;  c) $1{,}005^6$.

**1039.** Odrediti peti član u razvijenom obliku binoma

$$(x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^{12}.$$

**1040.** Odrediti član koji ne sadrži $x$ u razvijenom obliku binoma

$$(x+x^{-2})^{12}.$$

**1041.** U razvijenom obliku binoma $(x^{\frac{1}{3}}+x^{\frac{1}{2}})^{11}$ odrediti član koji posle sređivanja sadrži $x$ sa izložiocem pet.

**1042.** Odrediti član koji ne sadrži $x$ u razvijenom obliku binoma

$$\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^9.$$

**1043.** Odrediti srednji član u razvijenom obliku binoma

$$\left(\frac{a}{x}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{16}.$$

**1044.** Odrediti trinaesti član u razvijenom obliku binoma $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$, ako je binomni koeficijent trećeg člana jednak 105.

**1045.** U razvijenom obliku binoma $\left(x^2+\frac{a}{x}\right)^n$ koeficijenti četvrtog i trinaestog člana su jednaki.
Odrediti član koji ne sadrži $x$.

**1046.** Zbir koeficijenata prvog, drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(x^2+\frac{1}{x}\right)^n$ jednak je 46. Odrediti član koji ne sadrži $x$.

**1047.** U razvijenom obliku binoma

$$\left(x\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$$

binomni koeficijenti petog i desetog člana su jednaki. Odrediti član koji ne sadrži $x$.

**1048.** Odrediti $x$ u izrazu $\left(\frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[x]{a^{x-1}}}+a\ \sqrt[x+1]{a^{x-1}}\right)^8$, tako da četvrti član u razvijenom obliku iznosi $56a^{5,5}$.



**1049.** Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma

$$(x^{-\frac{3}{2}}+x^{\frac{2}{3}})^n$$

jednak je 136. Odrediti član koji sadrži $x^{8,5}$.

**1050.** Binomni koeficijent trećeg člana u razvijenom obliku binoma

$$(x\sqrt{x}+x^{-5})^n$$

jednak je 78. Odrediti član koji ne sadrži $x$.

**1051.** Dokazati da je:

a) $1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$;

b) $1+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\ldots=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\ldots$

**1052.*** Ako je u razvijenom obliku binoma $(x+y)^n$ drugi član jednak 240, treći 720, a četvrti 1080, odrediti $x$, $y$ i $n$.

Polazeći od jednakosti $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_nx^n$, odrediti zbirove (1053–1060):

**1053.*** $C_1+2C_2+3C_3+\ \ldots\ +nC_n$.

**1054.*** $C_0+2C_1+3C_2+\ \ldots\ +(n+1)C_n$.

**1055.*** $C_2+2C_3+3C_4+\ \ldots\ +(n-1)C_n$.

**1056.*** $C_0+3C_1+5C_2+7C_3+\ \ldots\ +(2n+1)C_n$.

**1057.*** $3C_1+7C_2+11C_3+\ \ldots\ +(4n-1)C_n$.

**1058.*** $\frac{C_0}{1}+\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}+\ \ldots\ +\frac{C_n}{n+1}$.

**1059.*** $C_0-2C_1+3C_2-4C_3+\ \ldots\ +(-1)^n(n+1)\,C_n$.

**1060.*** $\frac{C_0}{1}-\frac{C_1}{2}+\frac{C_2}{3}-\ \ldots\ +(-1)^n\cdot\frac{C_n}{n+1}$.

**1061.** Ako je zbir binomnih koeficijenata na neparnim mestima u binomu

$$\left(a\sqrt[5]{\frac{a}{3}}-\frac{b}{\sqrt[7]{a^3}}\right)^n$$

jednak 2048, odrediti član koji sadrži $a^3$ .

**1062.** Izložilac jednog binoma je za 3 veći od izložioca drugog. Odrediti ove izložioce ako je zbir binomnih koeficijenata oba razvijena binoma, po binomnoj formuli, 144.

**1063.** Odrediti $x$ u izrazu $\left(\sqrt[3]{2}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^x$, ako je odnos sedmog člana od početka prema sedmom članu od kraja $1:6$ .

**1064.** Treći član u razvijenom obliku binoma $(x+x^{\log x})^5$ jednak je 1 000 000. Odrediti $x$.

**1065.** Četvrti član u razvijenom obliku binoma $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ jednak je 200. Odrediti $x$.

**1066.** Dat je binom $\left(\sqrt{2^x}+\frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$.

a) Odrediti $n$ tako da je zbir binomnih koeficijenata poslednja tri člana 22.

b) Odrediti onu vrednost $x$ za koju je zbir trećeg i petog člana datog binoma jednak 135.

**1067.** Šesti član u razvijenom obliku binoma

$$\left(\frac{1}{x^2\sqrt[3]{x^2}}+x^{2\log x}\right)^8$$

jednak je 5600. Odrediti $x$.

**1068.** Koeficijenti petog, šestog i sedmog člana binoma $(1+x)^n$ obrazuju aritmetičku progresiju. Odrediti izložilac $n$.

**1069.** Dat je binom $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt[4]{x}}\right)^n$.

a) Odrediti $n$ tako da prva tri koeficijenta u razvijenom obliku datog binoma obrazuju aritmetički niz.

b) Za nađene vrednosti $n$ odrediti sve racionalne članove u razvijenom obliku datog binoma.

**1070.** Četvrti član u razvijenom obliku binoma

$$(10^{\log\sqrt{x}}+10^{-\frac{1}{\log x}})^7$$

jednak je 3 500 000. Odrediti $x$.

**1071.** Koeficijenti petog i trećeg člana, u razvijenom obliku binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)^n$, odnose se kao $7:2$. Odrediti član koji sadrži $x$.

**1072.** Koeficijenti četvrtog i šestog člana u razvijenom obliku binoma

$$\left(\frac{1}{z}+\sqrt{z}\right)^n$$

odnose se kao $5:18$. Odrediti član koji ne zavisi od $z$.

**1073.** Zbir koeficijenata drugog i trećeg člana u razvijenom obliku binoma $\left(a\sqrt{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}\right)^n$ jednak je 28. Odrediti član koji sadrži $a^5$.

**1074.** Razlika binomnih koeficijenata trećeg i drugog člana u razvijenom obliku binoma

$\left(\frac{2}{a}-\frac{a}{2}\sqrt[3]{a}\right)^n$ jednaka je 5. Odrediti član koji sadrži $a^2$.

**1075.*** Odrediti koeficijent uz $x^8$ u razvijenom obliku stepena $(1+x^2-x^3)^9$ .

**1076.*** Odrediti koeficijent uz $x^7$ u razvijenom obliku stepena $(x^2-x+1)^7$ .

**1077.** Odrediti racionalne članove u razvijenom obliku binoma:

a) $\left(\sqrt{x}-\sqrt[4]{2}\right)^5$; b) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^{10}$; c) $\left(1+\sqrt[4]{2}\right)^{15}$.

**1078.** Odrediti sve racionalne članove u razvijenom obliku binoma

$$\left(\sqrt[4]{x^3}+\sqrt[3]{x}\right)^{10}.$$

**1079.*** Koliko racionalnih članova ima u razvijenom obliku stepena

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{100}\ ?$$

**1080.*** Odrediti sve racionalne članove u razvijenom obliku binoma

$$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt[3]{x}\right)^{12}.$$

**1081.*** Dat je binom $\left(\sqrt{2^{\log(10-3^x)}}+\sqrt[5]{2^{(x-2)\log 3}}\right)^n$.

a) Odrediti $n$ tako da binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana u razvijenom obliku binoma budu prvi, treći i peti član aritmetičke progresije.

b) Odrediti $x$ tako da je šesti član u razvoju jednak 21.

**1082.**** Izračunati $k$-ti član u razvijenom obliku binoma $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^n$ ako je $T_{k+2} : T_{k+1} : T_k = 28 : 8\sqrt{6} : 9$.

**1083.**** U razvijenom obliku binoma $(\sqrt[6]{x}+\sqrt{x^{-1}})^{12}$ razlika uzastopnih članova $T_{k+1}$ i $T_k$ je 30.
Izračunati $x$, ako se zna da stepen sa osnovom $x$ u članu $T_{k+1}$ ima dva puta manji izložilac nego stepen sa istom osnovom $x$ u članu $T_k$.

**1084.** Na železničku stanicu treba da stigne iz istog pravca $n$ ljudi. Na koliko mogućih načina, s obzirom na vreme dolaska, mogu da stignu na stanicu?

**1085.** Izračunati zbir kvadrata koeficijenata u razvijenom obliku Njutnovog binoma.

**1086.*** Ako su $a_1$, $a_2$, $a_3$, i $a_4$ uzastopni koeficijenti nekog binoma, dokazati da je

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$

**1087.*** Primenom binomne formule odrediti ostatak deljenja broja $43^{17}$ sa 6.

**1088.*** Elementi Paskalovog trougla

$$\begin{array}{llllll}
1 \\
1 & 1 \\
\mathbf{1} & 2 & 1 \\
1 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\
1 & 4 & \mathbf{6} & 4 & 1 \\
1 & 5 & 10 & \mathbf{10} & 5 & 1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}$$

imaju osobinu da je razlika kvadrata ma koja dva uzastopna broja koji pripadaju trećoj hipotenuzi (elementi odštampani polucrno) kub jednog prirodnog broja. Dokazati.

**1089.*** Dokazati da je broj $11^{10}-1$ deljiv sa 100.

**1090.*** Dokazati da je broj $23^n-1$ deljiv sa 22 $(n\in N)$.

**1091.*** Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ važi nejednakost

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}<2^n.$$

**1092.*** Dokazati da za svaki prirodan broj $n$ važi jednakost

$$\binom{2n}{0}+\binom{2n}{2}+\ldots+\binom{2n}{2n}=\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+\ldots+\binom{2n}{2n-1}.$$

# VII GLAVA

## 7. VEROVATNOĆA I STATISTIKA

### 7.1. Verovatnoća

*Primedba* 1. Neka je $S$ polje događaja vezano za posmatrani eksperiment.

**Definicija 2.** Verovatnoća je funkcija $P$, definisana na polju događaja $S$, koja zadovoljava aksiome:

*Aksioma* 1. $\forall A \in S$ važi $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

*Aksioma* 2. Verovatnoća pouzdanog događaja je jednaka 1, tj. $P(\Omega)=1$ ($\Omega$ je prostor elementarnih događaja).

*Aksioma* 3. Ako je $A, B \in S$ i $A \cap B = \emptyset$, tada je

$$(1) \qquad P(A+B)=P(A)+P(B).$$

*Primedba* 2. Aksioma 3 može se proširiti na $n$ nezavisnih događaja: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, tj.

$$(2) \qquad P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n).$$

*Primedba* 3. Verovatnoća proizvoda dva nezavisna događaja $A$ i $B$ jednaka je proizvodu njihovih verovatnoća, tj.

$$(3) \qquad P(AB)=P(A)\cdot P(B).$$

*Primedba* 4. Verovatnoća proizvoda dva zavisna događaja $A$ i $B$ jednaka je proizvodu bezuslovne verovatnoće prvog i uslovne verovatnoće drugog, pod uslovom da se prvi događaj realizovao:

$$(4) \qquad P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A).$$

*Primedba* 5. Neka je dat događaj $A$ i događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$, koji se među sobom isključuju i čine potpun sistem događaja.



Pretpostavimo da se događaj $A$ može realizovati istovremeno sa jednim od događaja $H_1, H_2, \ldots, H_n$. Tada je:

$$(5) \qquad P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A).$$

Obrazac (5) se naziva formula totalne verovatnoće.

*Primedba* 6. Neka je dat događaj $A$ i događaji $H_1, H_2, \ldots, H_n$ koji čine potpun sistem događaja i među sobom se isključuju. Verovatnoća realizacije jednog od događaja $H_1, H_2, \ldots H_n$, ako znamo da se realizovao događaj $A$, data je obrascem:

$$(6) \qquad P_A(H_i)=\frac{P_{H_i}(A)\,P(H_i)}{P(H_1)\,P_{H_1}(A)+P(H_2)\,P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)P_{H_n}(A)}.$$

Ova formula se zove Bajesova formula.

*Primedba* 7. Za slučajnu promenljivu $x$ poznate su sve njene vrednosti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, koje ona može da uzme i sve verovatnoće $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sa kojima uzima te vrednosti, što se šematski prikazuje:

$$(7) \qquad X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}; \quad (p_1+p_2+\ldots+p_n=1)$$

i naziva se zakon raspodele verovatnoće.

*Primedba* 8. Ako je $X$ diskretna slučajna promenljiva čija je raspodela data u obliku (7), onda je matematičko očekivanje dato obrascem:

$$(8) \qquad M(X)=x_1p_1+x_2p_2+\ldots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

*Primedba* 9. Ako je data raspodela (7) slučajne promenljive $X$, tada se njena disperzija $D(X)$ određuje formulom:

$$D(X)=(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+\ldots+(x_n-M(X))^2p_n.$$

**1093.** Baci se dinar jedanput. Odrediti prostor elementarnih događaja.

**1094.** Ogled se sastoji od jednostrukog bacanja kocke. Odrediti prostor elementarnih događaja ovog ogleda.

**1095.** U kutiji se nalazi 5 kuglica, od kojih su 2 bele ($k_1, k_2$), 2 crvene ($k_3, k_4$) i 1 žuta ($k_5$). Izvlače se odjednom tri kuglice. Odrediti:

a) broj mogućih ishoda;
b) broj ishoda da se izvuku tri kuglice različitih boja,
c) broj ishoda da se izvuku tri kuglice od kojih su dve crvene.

**1096.** Ogled se sastoji u bacanju dve kocke. Odrediti:

a) skup elementarnih događaja,
b) skup $A$ događaja da se na gornjoj strani ove kocke pojavi isti broj tačaka;
c) skup $B$ događaja da se na gornjoj strani pojavi 7 tačaka.

**1097.** Bacaju se dve kocke odjednom. Neka je $A$ događaj da kocke pokažu brojeve čiji je zbir 8 i $B$ događaj da pokažu brojeve čiji je proizvod 12. Odrediti događaje:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $\bar{A}$.

**1098.** Ako se eksperiment sastoji od bacanja kocke za igru i ako je događaj $A$ pojava parnog broja tačaka, odrediti suprotan događaj $\bar{A}$.

**1099.** Ako je $A$ proizvoljan događaj, tada je:

a) $A\emptyset=\emptyset$; b) $AA=A$; c) $A\Omega=A$; d) $A\bar{A}=\emptyset$.

Dokazati.

**1100.** Ako je $A$ proizvoljan događaj, tada je:

a) $A+\emptyset=A$; b) $A+A=A$; c) $A+\bar{A}=\Omega$; d) $A+\Omega=\Omega$.

Dokazati.

**1101.** Ako su $A$, $B$ i $C$ proizvoljni događaji, tada je:

a) $A+B=B+A$; b) $A+(B+C)=(A+B)+C=A+B+C$;
c) $A(BC)=(AB)C=(AC)B=ABC$;
d) $A(B+C)=AB+AC$. Dokazati.

**1102.** Slučajni ogled se sastoji od bacanja kocke za igru. Neka je $A$ događaj da kocka pokaže broj ne manji od 3 i ne veći od 6, a $B$ događaj da pokaže broj veći od 1 i ne veći od 4. Odrediti razliku događaja $A$ i $B$.

**1103.** Za proizvoljne događaje $A$ i $B$ važe de Morganova pravila:

a) $\overline{A+B}=\bar{A}\cdot\bar{B}$; b) $\overline{A\cdot B}=\bar{A}+\bar{B}$. Dokazati.

**1104.** Da li se događaji $A$ i $\overline{A+B}$ isključuju?

**1105.** Dokazati da događaji: a) $A$ i $\bar{A}$; b) $A$, $\bar{A}$ $B$ i $\overline{A+B}$, obrazuju potpun sistem događaja.

**1106.** Data su tri događaja $A$, $B$ i $C$. Pomoću simboličkih operacija sa datim događajima odrediti sledeće događaje:

a) realizovan je događaj $A$, a nisu realizovani događaji $B$ i $C$;



b) realizovana su sva tri događaja;
c) nije realizovan nijedan događaj;
d) realizovan je najmanje jedan od ovih događaja;
e) realizovan je jedan i samo jedan od ovih događaja;
f) realizovano je ne više od dva događaja.

**1107.** Odrediti slučajan događaj $X$ iz jednakosti $\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B$.

**1108.** Uprostiti složene događaje:

a) $(B+C)(B+\bar{C})(\bar{B}+C)$;
b) $(A+B)(A+\bar{B})$;
c) $(A+B)B+A(AB)$.

**1109.** Odrediti potpun sistem događaja za sledeće oglede:

a) bacanje jednog dinara;
b) bacanje dva dinara;
c) bacanje kocke i dinara;
d) bacanje dve kocke;
f) bacanje tri kocke.

**1110.** Odrediti verovatnoću da dve bačene kocke pokažu brojeve čiji je zbir 8.

**1111.** U posudi se nalazi 3 bele, 7 crvenih i 8 bezbojnih kuglica. U geometrijskom i fizičko-hemijskom smislu kuglice su potpuno jednake. Odrediti verovatnoću da će se pri istovremenom izvlačenju dve kuglice izvući 1 bela i 1 crvena kuglica.

**1112.** Među prvih 4000 prirodnih brojeva nalazi se 551 prost broj. Odrediti verovatnoću pojave prostog broja.

**1113.** Među 1000 novorođene dece 512 je muške dece. Odrediti verovatnoću rađanja muškog deteta.

**1114.** Odrediti verovatnoću da bačena kocka za igru pokaže na gornjoj strani paran broj.

**1115.** U posudi se nalazi 12 belih, 23 crvene i 27 crnih kuglica. Odrediti verovatnoću da izvučemo crvenu kuglicu, pod uslovom da su sve mogućnosti podjednako verovatne.

**1116.** Nepismeno dete sastavlja reči od sledećih slova: a, a, a, e, i, k, m, m, t, t. Odrediti verovatnoću da će sastaviti reč »matematika«.

1117. Automat je za jedan čas proizveo 500 predmeta, među kojima je bilo 8 neispravnih. Odrediti verovatnoću pojavljivanja neispravnih proizvoda.

1118. Na pisaćoj mašini postoji 48 znakova. Odrediti verovatnoću da će nasumice otkucani znak biti broj 9.

1119. U posudi se nalazi 80 cedulja. Na ceduljama su ispisani brojevi od 1 do 80. Izvlačimo cedulju:

a) odrediti verovatnoću da ćemo izvući cedulju na kojoj je napisan broj koji nije manji od 45;

b) odrediti verovatnoću da ćemo izvući broj koji je deljiv sa 3.

1120. U posudi se nalazi 5 jednakih kocki. Na svakoj strani svake kocke nalazi se jedno od sledećih slova: o, p, r, s, t. Kocke se pojedinačno izvade iz posude i poređaju u jednoj liniji, jedna pored druge. Odrediti verovatnoću da će na gornjim stranama kocki biti ispisana reč sport.

1121. Telefonski broj sastoji se od šest cifara. Ako se pretpostavlja da postoje svi telefonski brojevi od 000 000 do 999 999, koja je verovatnoća da u proizvoljno izabranom broju sve cifre budu različite?

1122. Na deset cedulja ispisana su slova a, b, e, i, l, o, p, r, h. Cedulje se slučajno poređaju jedna za drugom. Odrediti verovatnoću da na taj način napisana reč bude hiperbola.

1123. U posudi se nalazi 12 belih i 8 crnih loptica. Izvlačimo dve loptice odjednom. Odrediti verovatnoću da obe izvučene kuglice budu crne.

1124. Na usmenom ispitu postoji 25 cedulja sa po dva pitanja. Kandidat zna odgovore na samo 45 pitanja. Koja je verovatnoća da će na cedulji koju je kandidat izvukao biti oba pitanja na koja on zna da odgovori?

1125. Šest strelaca gađa u 10 predmeta. Ako svaki strelac nasumice bira cilj, koja je verovatnoća da će svi strelci gađati u različite ciljeve?

1126. Bacamo dve kocke. Neka je $P(A)$ verovatnoća da će se bacanjem dobiti dva broja čiji je zbir 7, a $P(B)$ verovatnoća da će to biti dva broja čiji je zbir 9. U kojoj razmeri stoje ove verovatnoće?



1127. Lutrija ima 200 000 srećaka i 50 dobitaka po 3 000 dinara. Odrediti verovatnoću da srećka dobije 3 000 dinara pod uslovom da su sve mogućnosti podjednako verovatne.

1128. Jedna robno-novčana lutrija od 10 000 srećaka ima 150 robnih i 50 novčanih zgoditaka. Odrediti verovatnoću da jedna srećka dobije zgoditak (bez obzira da li je robni ili novčani).

1129. Radovan, Ivan, Petar, Milka, Dragana i Mirjana su kupili ulaznice za bioskopsku predstavu. Ako su sve kupljene ulaznice u jednom redu i ako su one nasumice podeljene, koja je verovatnoća da će oni u bioskopu sedeti gledano sleva nadesno u sledećem rasporedu: Petar, Mirjana, Radovan, Milka, Dragana i Ivan?

1130. U jednoj fabrici u toku dana proizvedeno je $n$ proizvoda određenog tipa. Kontrolor nasumice odabira $m$ predmeta, koje podvrgava proveri. Ako je među njima bar jedan neispravan, celokupna partija se podvrgava dopunskoj kontroli. Koja je verovatnoća da dnevna proizvodnja bude prihvaćena, ako je tog dana bilo $k$ neispravnih proizvoda?

1131. Od $a$ elemenata prvog tipa i $b$ elemenata drugog tipa odabiramo nasumice $m$ elemenata. Odrediti verovatnoću da je od izabranih elemenata $p$ elemenata prvog tipa i $q$ elemenata drugog tipa, pod uslovom da su sve kombinacije podjednako verovatne.

1132. Od 32 karte igrač dobije 10 karata. Odrediti verovatnoću da dobije 2 pika, 4 trefa, 3 karoa i 1 srce.

1133. U posudi se nalazi 5 belih i 7 crvenih kuglica. Nasumice se izvlači 8 kuglica. Odrediti verovatnoću da su izvučene 2 bele i 6 crvenih kuglica.

1134. Neko lice zaboravilo je poslednje dve cifre broja nekog telefona i jedino se seća da su te dve cifre različite. Odrediti verovatnoću da to lice pogodi potrebne cifre.

1135. Događaji $A$, $B$, $C$ i $D$ obrazuju potpun sistem. Ako je $P(A)=0{,}2$, $P(B)=0{,}3$, $P(C)=0{,}4$, odrediti verovatnoću događaja $D$.

1136. U kontejneru je proizvoljno složeno 20 proizvoda određenog tipa, pri čemu je 5 standardnih. Radnik nasumice bira tri proizvoda. Odrediti verovatnoću da bar jedan od njih bude standardni.

1137. Ako su $A$ i $B$ dva proizvoljna događaja, tada je:

(1) $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)$. Dokazati.

**1138.** Ako su $A$, $B$ i $C$ tri proizvoljna događaja, tada je $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$. Dokazati.

**1139.** Iz skupa dvocifrenih brojeva nasumice biramo jedan broj. Odrediti verovatnoću da on bude deljiv ili sa 3 ili sa 5 ili sa oba istovremeno.

**1140.** Bacamo dve kocke. Kada je verovatnoća da će one pokazati ili dva jednaka broja, ili dva broja čiji je zbir 7, ili dva broja čiji je zbir 9?

**1141.** Dva strelca gađaju cilj: prvi je bolji i pogađa cilj sa 70% hitaca. Drugi je slabiji, te pogađa cilj samo sa 40%. Obojica istovremeno opale prema cilju. Odrediti verovatnoću da će cilj biti pogođen.

**1142.** Tri strelca opale prema cilju. Verovatnoća da prvi strelac pogodi cilj iznosi 0,8, da ga pogodi drugi iznosi 0,3, a da ga pogodi treći 0,2. Odrediti verovatnoću da cilj bude pogođen.

**1143.** Data je verovatnoća događaja $A$, $P(A)=\frac{1}{3}$ i verovatnoća događaja $B$, $P(B)=\frac{1}{2}$. Odrediti $P(B\bar{A})$ ako za događaje $A$ i $B$ važi:

a) $A$ i $B$ se isključuju;
b) $A \subseteq B$;
c) $P(AB)=\frac{1}{8}$.

**1144.** Date su verovatnoće događaja $A$ i $B$ koji se međusobno isključuju: $P(A)=0{,}33$ i $P(B)=0{,}55$. Odrediti sledeće verovatnoće:
a) $P(\bar{A})$; b) $P(A+B)$; c) $P(AB)$; d) $P(\bar{A}\,\bar{B})$.

**1145.** Verovatnoća da će se dogoditi dva nezavisna događaja $A$ i $B$ su $P(A)=p_1$ i $P(B)=p_2$.

Odrediti sledeće verovatnoće:

a) da će se dogoditi oba događaja;
b) da se neće dogoditi nijedan od tih događaja;
c) da će se dogoditi $A$, a ne $B$;
b) da će se dogoditi $B$, a ne $A$;
e) da će se dogoditi bar jedan od njih;
f) da se bar jedan od njih neće dogoditi.



**1146.** Dat je proizvoljan događaj $A$. Odrediti sledeće verovatnoće:

a) da se događaj $A$ realizuje uzastopno $n$ puta;
b) da događaj $A$ ne nastupi $n$ puta;
c) da se događaj $A$ realizuje bar jedanput u $n$ pokušaja.

**1147.** Koliko se puta mora bacati kocka da se broj 5 pojavi bar jedanput sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$?

**1148.** Odrediti broj bacanja kocke da bi se broj 4 pojavio bar jedanput sa verovatnoćom 0,5.

**1149.** Koliko se puta moraju baciti dve kocke da se bar jedanput na obe kocke pojavi isti broj 4, sa verovatnoćom 0,5?

**1150.** Odrediti verovatnoću da iz 32 karte za igru izvučemo ili kralja ili asa.

**1151.** U kutiji se nalazi 60 cedulja na kojima su redom ispisani brojevi od 1 do 60. Vučemo cedulju. Odrediti verovatnoću da broj koji smo izvukli nije deljiv ni sa dva ni sa tri.

**1152.** Kolika je verovatnoća da od 32 karte za igru izvučemo ili karo ili asa ili figuru ispod 10?

**1153.** U kutiji se nalazi 80 cedulja. Na ceduljama su ispisani brojevi od 1 do 80. Izvlačimo cedulju. Odrediti verovatnoću da ćemo izvući cedulju na kojoj je broj koji nije manji od 45 ili broj koji je deljiv sa 3.

**1154.** Bačene su dve kocke i imamo posudu u kojoj se nalaze 3 bele i 4 crne kuglice. Šta je verovatnije: da bačene kocke pokažu dva jednaka broja ili dva broja čiji je zbir 5, ili da iz posude odjednom izvučemo 1 belu i 1 crnu ili dve crne kuglice?

**1155.** U jednoj kutiji nalaze se 4 bele i 8 crnih kuglica, a u drugoj 3 bele i 9 crnih. Izvlačimo iz svake kutije po jednu kuglicu. Odrediti verovatnoću da je iz obe kutije izvučena bela kuglica.

**1156.** U kontejneru se nalazi 12 proizvoda, od kojih je 8 standardnih. Radnik bira nasumice dva proizvoda, prvo jedan, zatim drugi. Odrediti verovatnoću da su oba izvučena proizvoda standardna.

**1157.** Kolika je verovatnoća da će se na dvema bačenim kockama dobiti zbir tačaka 9 ili, ako se to ne dogodi, da se pri ponovljenom bacanju dobije zbir tačaka 7?

**1158.** Radnik opslužuje dve automatske mašine. Verovatnoća da u toku jednog sata rada prva mašina ne zahteva intervenciju radnika iznosi 0,8, za drugu mašinu 0,7. Odrediti verovatnoću da u toku jednog sata nijedna mašina ne zahteva intervenciju radnika.

**1159.** Radnik opslužuje tri mašine koje rade automatski nezavisno jedna od druge. Verovatnoća da u toku jednog sata rada ne zahteva intervenciju iznosi za prvu mašinu 0,9, a za drugu mašinu 0,8 i za treću 0,85. Izračunati verovatnoću:

a) da u toku jednog sata nijedna od tri mašine ne zahteva intervenciju radnika;

b) da makar nijedna mašina ne zahteva intervenciju radnika u toku sata.

**1160.** Bacamo dinar deset puta. Koja je verovatnoća da se 10 puta pojavi grb?

**1161.** Verovatnoća da strelac pogodi cilj iznosi 0,85. Koja je verovatnoća da ne pogodi cilj ako gađa tri puta?

**1162.** Učenik učestvuje na takmičenjima iz matematike, fizike i hemije. Verovatnoća da osvoji prvu nagradu, za svaki predmet, iznosi 0,4. Odrediti verovatnoću da će učenik osvojiti nagradu bar iz jednog predmeta.

**1163.** U televizijskom studiju su 3 kamere. Verovatnoća da je kamera uključena iznosi za svaku kameru 0,6. Odrediti verovatnoću da je u datom trenutku uključena bar jedna kamera.

**1164.** Bačene su tri kocke za igru. Koja je verovatnoća da se pojavi šestica bar na jednoj kocki?

**1165.** Verovatnoća da protivavionski top pogodi neprijateljski avion iznosi kod svakog hica 0,04. Top opali prema avionu sto puta. Odrediti verovatnoće: a) da avion ostane nepogođen; b) da avion bude pogođen.

**1166.** Radnik upravlja sa deset jednakih mašina. Verovatnoća da kod neke mašine mora da opravlja kvar u roku od jednog časa iznosi za sve mašine 0,12. Izračunati sledeće verovatnoće:

a) da u roku od jednog časa ne bude potrebna opravka ni jedne mašine;



b) da će biti potrebno opravljati bar jednu mašinu;
c) da će biti potrebna popravka svih mašina.

**1167.** U posudi se nalaze 4 bele, 5 crvenih i 6 zelenih kuglica:

a) odrediti verovatnoću da će se pri istovremenom izvlačenju dve kuglice izvući 1 bela i 1 crvena kuglica;
b) odrediti verovatnoću da nećemo odjednom izvući dve zelene kuglice;
c) odrediti verovatnoću da ćemo izvući ili 1 belu i 1 crvenu ili 1 zelenu i 1 crvenu kuglicu;
d) odrediti verovatnoću da ćemo četiri puta uzastopce izvući zelenu kuglicu ne vraćajući izvučenu kuglicu.

**1168.** U posudi se nalaze 4 bele, 3 crvene i 5 žutih kuglica:

a) odrediti verovatnoću da se pri istovremenom izvlačenju dve kuglice odjednom izvuče 1 bela i 1 crvena kuglica;
b) odrediti verovatnoću da nećemo odjednom izvući dve žute kuglice;
c) odrediti verovatnoću da ćemo izvući ili 1 belu i 1 crvenu ili 1 žutu i 1 crvenu kuglicu;
d) odrediti verovatnoću da ćemo tri puta uzastopno izvući žutu kuglicu ne vraćajući izvučenu kuglicu.

**1169.** Odrediti verovatnoću da slučajno izabran prirodni broj, koji nije veći od 100, bude stepen sa izložiocem većim od 1 drugog prirodnog broja.

**1170.** Data je kvadratna jednačina $x^2-4x+a=0$. Bačena je kocka i za broj $a$ je uzet broj koji se pojavio na gornjoj strani bačene kocke. Odrediti verovatnoću da će za tako dobijeno $a$ data jednačina imati realna rešenja.

**1171.** Iz špila od 52 karte na slučajan način se izvlače tri karte. Odrediti verovatnoću da to budu tri različite slike.

**1172.** U jednoj zgradi stanuje pet porodica sa po jednim detetom, tri porodice sa po troje dece i dve porodice sa po petoro dece. Radi anketiranja, na slučajan način se biraju tri porodice. Odrediti verovatnoću da:

a) makar dve izabrane porodice imaju isti broj dece;
b) sve tri izabrane porodice imaju ukupno sedmoro dece.

**1173.** Kocka, čije su sve strane obojene, rasečena je na 1000 kockica istih dimenzija. Dobijene kockice su zatim stavljene u kutiju i izmešane. Odrediti verovatnoću da slučajno izvučena kockica ima:

a) tri obojene strane;
b) dve obojene strane;
c) jednu obojenu stranu.

**1174.** Telefonska linija koja povezuje dva mesta ($A$ i $B$) udaljena međusobno 2 km, prekinuta je na nepoznatom mestu. Odrediti verovatnoću da je prekinuta na mestu koje od $A$ nije udaljeno više od 500 m.

**1175.** Sredine stranica kvadrata, stranice $a$, spajanjem daju ponovo kvadrat. Tačka $M$ je na slučajan način izabrana. Odrediti verovatnoću da je izabrana tačka $M$ iz drugog (manjeg) kvadrata.

**1176.** U kvadratu je upisan krug. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka u kvadratu pripada i krugu.

**1177.** Tačka $M(x, y)$ je na slučajan način izabrana u kvadratu čije tačke $M(x, y)$ zadovoljavaju uslove $0 \leqslant x \leqslant 2$, $0 \leqslant y \leqslant 2$. Odrediti verovatnoću da će slučajno izabrana tačka $M(x, y)$ pripadati i podskupu određenim sledećim uslovima:

a) $(x-1)^2+(y-1)^2=1$ ;
b) $1<x+y<3$ ;
c) $y=x$.

**1178.** U datu kocku upisana je lopta. Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tačka pripada i unutrašnjosti lopte.

**1179.*** Dve osobe zakazale su sastanak u toku jednog sata, na određenom mestu, uz obavezu čekanja 20 minuta ($\frac{1}{3}$ sata).

Odrediti verovatnoću susreta ako je dolazak svake od osoba jednako moguć u proizvoljnom momentu naznačenog vremena.

**1180.*** Duž dužine $a$ podeljena je na tri dela. Odrediti verovatnoću da se od dobijenih delova može konstruisati trougao.

**1181.** U krug je upisan jednakostraničan trougao. Slučajno biramo tačku u krugu. Odrediti verovatnoću da tačka bude izabrana unutar trougla.

**1182.** U krugu poluprečnika $r$, dat je kružni isečak sa centralnim uglom $\alpha=150°$. Slučajno biramo tačku u krugu. Odrediti verovatnoću da izabrana tačka bude unutar isečka.



**1183.** Odrediti verovatnoću da slučajno izabrana tetiva kružnice bude veća od stranice jednakokrakog trougla koji je upisan u tu kružnicu.

**1184.** Dve kocke su bačene. Kolika je verovatnoća da zbir dobijenih brojeva bude 7, ako se zna da je bar jedan od dobijenih brojeva 5?

**1185.** Kocka je bačena i poznato je da je rezultat paran broj. Odrediti verovatnoću da taj broj bude deljiv sa 3.

**1186.** U šeširu se nalazi 5 belih, 4 crnih i 6 crvenih kuglica. Ako se slučajno izvuku 3 kuglice, kolika je verovatnoća da sve budu bele?

**1187.** Fabrika televizora dobije 30% lampi iz pogona $P_1$ i 70% iz pogona $P_2$. Pogon $P_1$ proizvodi 10% neispravnih lampi, a pogon $P_2$ 15% neispravnih. Između 1000 lampi izabrana je jedna. Odrediti verovatnoću, ako je lampa neispravna, da je proizvedena u pogonu $P_1$.

**1188.*** Dat je događaj $A$ i događaji $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, koji se međusobno isključuju i čine potpun sistem događaja. Pretpostavljamo da se događaj $A$ može realizovati istovremeno sa jednim od događaja $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$. Tada se verovatnoća događaja $A$ određuje obrascem:

(F) $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)$.
Dokazati.

**1189.*** Na stovarištu se nalaze proizvodi iste vrste proizvedeni u tri različita pogona, i to:

20% iz I pogona, 40% iz II pogona i 40% iz III pogona. Verovatnoća da su proizvodi neispravni su: 0,01 za I pogon, 0,02 za II pogon i 0,04 za III pogon. Odrediti verovatnoću da slučajno izabran proizvod na stovarištu bude neispravan.

**1190.** U prodavnici automobilskih delova stigli su akumulatori proizvedeni u 4 različite fabrike, i to:

500 akumulatora iz I fabrike,
1050 akumulatora iz II fabrike,
550 akumulatora iz III fabrike,
1900 akumulatora iz IV fabrike.
Verovatnoća da akumulator traje više od 5 godina za I fabriku

iznosi 0,20, za II 0,25, za III 0,30 i za IV fabriku 0,10. Slučajno biramo akumulator.
Odrediti verovatnoću da će trajati duže od 5 godina.

**1191.*** U jednoj školi 4 odeljenja su završnog razreda. U I odeljenju ima 20%, u II 30% odličnih, u III 30%, i u IV 20% odličnih učenika. Verovatnoće da odličan učenik bude nagrađen su: 0,03 za prvo, 0,08 za drugo, 0,06 za treće i 0,05 za četvrto odeljenje. Kolika je verovatnoća da slučajno izabran učenik bude i nagrađen?

**1192.** U prodavnici se nalaze sijalice proizvedene u četiri različite fabrike $H_1$, $H_2$, $H_3$ i $H_4$, i to: iz fabrike $H_1$ 250 , iz fabrike $H_2$ 525 , iz fabrike $H_3$ 275 i iz fabrike $H_4$ 950 sijalica. Verovatnoća da sijalica gori više od 1500 časova iznosi: za $H_1$ 0,15, za $H_2$ 0,30, za $H_3$ 0,20 i za $H_4$ 0,10. Kupljena sijalica je slučajno izabrana. Odrediti verovatnoću da ona gori više od 1500 časova.

**1193.** Dva različita proizvoda, jedan iz jedne, drugi iz druge fabrike nalaze se u različitim kontejnerima. Ako je verovatnoća da su proizvodi iz prvog kontejnera ispravni 0,90, a verovatnoća da su ispravni proizvodi iz drugog kontejnera 0,80, odrediti verovatnoću da se, nasumice birajući kontejnere, izvuče ispravan proizvod.

**1194.** U jednoj kutiji nalazi se 20 lampi za radio-aparate, od kojih je 18 standardnih, a u drugoj kutiji nalazi se 10 radio-lampi od kojih je 9 standardnih. Iz druge kutije nasumice se bira radio-lampa i prebacuje u prvu kutiju. Odrediti verovatnoću da je nasumice izvučena radio-lampa, iz prve kutije, standardna.

**1195.** U prvoj posudi nalazi se 20 proizvoda, od njih je 15 standardnih; u drugoj posudi nalazi se 30 proizvoda, od njih je 24 standardnih; i u trećoj 10 proizvoda, od kojih je 6 standardnih. Odrediti verovatnoću, ako nasumice biramo proizvod i posudu, da on bude standardan.

**1196.** Na stovarištu se nalaze delovi proizvedeni na tri različite mašine. Prva mašina proizvela je 40% delova od ukupne količine, druga mašina 35% a treća 25%. Na prvoj mašini od proizvedenih delova je 90% prve klase, na drugoj 80% i na trećoj 70%. Odrediti verovatnoću da je izabrani deo prve klase.

**1197.*** Neka je dat događaj $A$ i događaji $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, koji se međusobno isključuju i čine potpun sistem događaja. Verovatnoća realizacije jednog od događaja $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_n$, ako znamo da se realizovao događaj $A$, data je obrascem:

(B) $$P_A(H_i)=\frac{P_{H_i}(A)\cdot P(H_i)}{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\cdot P_{H_n}(A)}$$

Dokazati.

**1198.** U prvoj posudi nalazi se 8 belih i 6 crnih kuglica, a u drugoj 10 belih i 4 crne. Slučajno je izabrana kuglica i posuda. Izvučena kuglica je crna. Odrediti verovatnoću: a) da je izabrana prva posuda; b) da je izabrana druga posuda.

**1199.** Dva automata proizvode isti predmet i lageruju u isti kontejner. Proizvodnja prvog automata dva puta je veća od proizvodnje drugog automata. Prvi automat proizvodi prosečno 60% predmeta odličnog kvaliteta, a drugi 84%, takođe odličnog kvaliteta. Odrediti verovatnoću da je izabrani predmet proizveden u prvom automatu i da je odličnog kvaliteta.

**1200.*** Od tri jednake puške bira se slučajno jedna:

a) odrediti verovatnoću da je cilj pogođen ako ona za prvu pušku iznosi 0,75, drugu 0,85 i treću 0,05;

b) ako je cilj pogođen, odrediti verovatnoću da je pogođen prvom, odnosno drugom, odnosno trećom puškom.

**1201.*** Fabrika proizvodi automobilske gume. Tri pogona proizvode respektivno 25%, 35% i 40% celokupne proizvodnje. Pogoni redom daju 5%, 4% i 2% škartova. Slučajno izabrana guma iz produkcije pokazala se defektnom. Koja je verovatnoća da je defektna guma proizvedena u prvom, drugom ili trećem pogonu?

**1202.** Imamo dve posude. U prvoj posudi se nalaze 2 bele i 1 crna kuglica, a u drugoj posudi 1 bela i 5 crnih kuglica. Premestimo jednu kuglicu iz prve posude u drugu. Zatim izvucimo jednu kuglicu iz druge posude. Ako je ona bela, odrediti verovatnoću da je premeštena kuglica bila crna.

**1203.** Imamo tri posude. U prvoj posudi se nalaze 1 bela, 2 crne i 3 crvene kuglice. U drugoj posudi nalaze se 2 bele, 1 crna i 1 crvena kuglica, a u trećoj posudi 4 bele, 5 crnih i 3 crvene kuglice. Jedna posuda izabrana je slučajno i izvučene su dve kuglice, i to bela i crvena. Odrediti verovatnoću da su one uzete iz prve posude, odnosno druge, odnosno treće posude.

**1204.** Verovatnoća pogodaka cilja u jednom hicu jednaka je 0,6. Odrediti verovatnoću da od 8 hitaca bude 5 pogodaka.

**1205.** Verovatnoća da potrošnja električne energije, u jednom mestu, u toku dana, ne prelazi postavljenu normu je $\frac{2}{3}$. Kolika je verovatnoća da u narednih 7 dana potrošnja električne energije ne prelazi normu ako za 4 dana nije prelazila tu normu?

**1206.*** Metalni novčić baci se 100 puta. Koja je verovatnoća da se grb pokaže 47 ili 48 puta?

**1207.** Nepravilan novčić, kod koga je verovatnoća da se pojavi grb $p = P(\text{grb}) = \frac{2}{3}$, bačen je 100 puta. Koja je verovatnoća da se grb pojavi 47 ili 48 puta?

**1208.** U jednoj opštini statistički je utvrđeno da je od 100 novorođene dece 48 dečaka a 52 devojčice. Ako se zna da jedna porodica ima petoro dece, odrediti verovatnoću da među decom ove porodice budu: a) 2 devojčice; b) ne više od 3 devojčice.

**1209.** Novčić je bačen 2 puta. Odrediti zakon raspodele slučajne veličine broja pojave grba.

**1210.** Odrediti zakon raspodele verovatnoće broja realizacija događaja $A$ u tri nezavisna ogleda, ako je verovatnoća realizacije događaja u svakom ogledu 0,6.

**1211.** Kocka za igru bačena je tri puta. Odrediti zakon raspodele broja pojave šestice na gornjoj strani kocke.

**1212.** Bačena su tri novčića. Odrediti zakon raspodele slučajno promenljive pojave grbova na novčićima.

**1213.** Slučajna veličina $x$ može uzeti sledeće vrednosti: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$ sa verovatnoćom $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}15$ i $p_3$. Odrediti verovatnoću $p_3$.

**1214.** Kocka se baca dva puta. Ako se sa $x$ označi zbir tačaka dobijenih iz oba bacanja, odrediti raspodelu verovatnoća slučajne promenljive $x$.

**1215.** Strelac koji ima četiri metka gađa u metu dok ne pogodi ili ne utroši sve metke. Broj utrošenih metaka je slučajna promenljiva $x$. Odrediti raspodelu verovatnoća pod uslovom da je verovatnoća pogodaka pri svakom gađanju jednaka 0,8.

**1216.** Odrediti matematičko očekivanje slučajne veličine $x$, ako je njen zakon raspodele:

$$x = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

**1217.** Odrediti matematičko očekivanje diskretne veličine $x$ ako je poznat zakon raspodele

$$x = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$

**1218.** Odrediti matematičko očekivanje broja pojava događaja $A$, u jednom ogledu ako je verovatnoća događaja $A$ jednaka $p$.

**1219.** Matematičko očekivanje konstante jednako je samoj konstanti, tj. $M(C) = C$. Dokazati.

**1220.** Matematičko očekivanje proizvoda konstante i promenljive jednako je proizvodu konstante i matematičkog očekivanja promenljive:

$M(CX) = C \cdot M(X)$. Dokazati.

**1221.** Matematičko očekivanje proizvoda nezavisnih slučajnih veličina jednako je proizvodu njihovih matematičkih očekivanja:

$M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$. Dokazati.

**1222.** Matematičko očekivanje zbira dve nezavisne slučajne veličine jednako je zbiru matematičkih očekivanja sabiraka:

$M(X+Y) = M(X) + M(Y)$. Dokazati.

**1223.** Diskretne nezavisne slučajne veličine date su zakonima raspodele:

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 1 \\ 0{,}3 & 0{,}7 \end{pmatrix}.$$

a) odrediti matematičko očekivanje proizvoda $XY$ na dva načina: 1° Određivanje zakona raspodele $XY$; 2° koristeći dokazane formule.

b) Odrediti matematičko očekivanje zbira $X+Y$ na dva načina: 1° određivanje zakona raspodele veličine $X+Y$; 2° korišćenjem dokazane formule.

**1224.** Bačena su tri novčića. Odrediti zakon raspodele slučajne promenljive pojava grbova na novčićima, zatim izračunati matematičko očekivanje slučajne veličine $x$.

**1225.** Zbir tačaka koje se dobijaju na gornjim stranama dve kocke posle bacanja, je slučajno promenljiva $x$. Odrediti zakon raspodele verovatnoće slučajne promenljive $x$ i njeno matematičko očekivanje.

**1226.** Odrediti disperziju slučajne veličine $X$ čiji je zakon raspodele:

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

**1227.** Dokazati da je $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

**1228.** Neka je $X$ broj tačaka koji se pojavljuje na gornjoj strani kocke posle bacanja. Odrediti $M(X)$ i $D(X)$.

**1229.** Izračunati disperziju slučajne veličine $x$ ako je njen zakon raspodele:

$$X=\begin{pmatrix} 0{,}1 & 2 & 10 & 20 \\ 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}15 & 0{,}25 \end{pmatrix}.$$

**1230.** Ako su $X$, $Y$ i $Z$ nezavisne slučajne veličine, $C$ konstanta, a $D(X)$, $D(Y)$ i $D(Z)$ disperzije veličina $X$, $Y$ i $Z$, dokazati:

a) $D(C)=0$; b) $D(CX)=C^2D(X)$; c) $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$;
d) $D(X+Y+Z)=D(X)+D(Y)+D(Z)$; e) $D(C+X)=D(X)$;
f) $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

**1231.** Disperzija slučajne veličine $X$ jednaka je 5. Odrediti disperzije sledećih veličina:

a) $X-1$; b) $2X$; c) $-3X+6$.

**1232.** Slučajna veličina $X$ data je zakonom raspodele

$$X=\begin{pmatrix} C & -C \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{pmatrix}.$$ Odrediti disperziju $D(X)$.

**1233.*** Diskretna slučajna promenljiva $x$ ima samo dve moguće vrednosti, $x_1$ i $x_2$, pri čemu je $x_2>x_1$. Verovatnoća da $X$ uzme vrednost $x_1$ je 0,6. Odrediti zakon raspodele promenljive $X$, ako je $M(X)=1{,}4$, $D(X)=0{,}24$.

**1234.*** Slučajna veličina $X$ ima dve vrednosti: $x_1$ sa verovatnoćom $p_1=0{,}3$ i $x_2$ sa verovatnoćom 0,7, pri čemu je $x_2>x_1$. Odrediti $x_1$ i $x_2$ ako je $M(X)=2{,}7$ i $D(X)=0{,}21$.

**1235.*** Diskretna slučajna veličina uzima tri moguće vrednosti: $x_1$, $x_2$ i $x_3$, pri čemu je $x_1<x_2<x_3$. Verovatnoća da $X$ uzme vrednost $x_1$ je $p_1=0{,}1$, a vrednost $x_2$ $p_2=0{,}6$. Odrediti zakon raspodele promenljive $X$, ako je $M(X)=3{,}5$, $D(X)=1{,}05$ i $x_3=5$.

## 7.2. Matematička statistika

Obrasci:

**Aritmetička sredina** $A=\bar{X}$, brojeva $x_1, x_2, \ldots x_n$ je:

(1) $$\bar{X}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}.$$

**Geometrijska sredina** $G$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je:

(2) $$G=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\ldots x_n}.$$

**Harmonijska sredina** $H$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je:

(3) $$H=\frac{n}{\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}}.$$

**Kvadratna sredina** $K$ brojeva $x_1, x_2, \ldots, x_n$ je

(4) $$K=\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2}{n}}.$$

**Srednja vrednost** $E(X)=\bar{X}$, obeležja $X$ je:

(5) $$\bar{X}=E(X)=\frac{f_1x_1+f_2x_2+\ldots+f_nx_n}{N}, \quad (f_1+f_2+\ldots+f_n=N),$$

gde je $x_n$ oznaka za obeležje, a $f_n$ oznaka za frekvenciju.

**Disperzija,** $D(X)=s^2$, obeležja $X$ je:

(6) $$s^2=\frac{1}{N}\left((x_1-\bar{x})^2f_1+(x_2-\bar{x})^2f_2+\ldots+(x_n-\bar{x})^2f_n\right).$$

**Standardno odstupanje,** $s=\sqrt{D(X)}$, je:

(7) $$s=\sqrt{\frac{1}{N}((x_1-x)^2 f_1+(x_2-x)^2 f_2+\ldots+(x_n-x)^2 f_n)}.$$

**Koeficijent varijacije** $K_v$ je

(8) $$K_v=\frac{s}{\bar{x}}.$$

**Koeficijent korelacije** $r$ obeležja $x_i$, $y_i$ je:

(9) $$r=\frac{\sum X_i Y_i}{\sqrt{(\sum X_i^2)\ (\sum Y_i^2)}},$$

gde je $X_i=x_i-\bar{x}$ i $Y_i=y_i-\bar{y}$.

**1236.** Iz dnevnika rada jednog odeljenja može se za svakog učenika pročitati ocena iz jednog predmeta, na primer matematike. U odeljenju ima 30 učenika i njihove ocene iz matematike su:
4, 3, 5, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 2, 2, 1, 3, 2, 4, 1, 5, 4, 3, 3, 4, 2, 1, 3, 2, 3, 4, 3, 5.
Sastaviti raspodelu frekvencije i grafički je prikazati poligonom raspodele.

**1237.** Odrediti kumulativne relativne frekvencije iz prethodnog zadatka i prikazati grafički kumulativnu raspodelu relativnih frekvencija.

**1238.** Odrediti aritmetičku sredinu brojeva: 2, 5, 8, 4.

**1239.** Odrediti kvadratnu sredinu brojeva: 6, 6, 7, 8, 8, 8, 11, 11, 12.

**1240.** Odrediti geometrijsku sredinu brojeva: 243, 81, 27, 9, 3.

**1241.** Odrediti harmonijsku sredinu brojeva: 4, 5, 7, 10.

**1242.** Odrediti medijanu brojeva: a) 10, 7, 7, 6, 13, 12, 8, 14;
b) 17, 31, 15, 28, 35, 30, 29, 19, 19.

**1243.** Odrediti modu za sledeće podatke:
a) 3, 5, 5, 7, 8, 8, 8, 10, 10, 12; b) 6, 7, 10, 12, 14.

**1244.** Dati su brojevi: 2, 3, 5, 6, 8. Odrediti aritmetičku, geometrijsku, harmonijsku i kvadratnu sredinu.

**1245.** Odrediti modu, medijanu i aritmetičku sredinu sledećih raspodela učestanosti:



a)

| Broj | Učestanost |
|---|---|
| 24 | 2 |
| 23 | 3 |
| 22 | 5 |
| 21 | 8 |
| 20 | 4 |
| 19 | 3 |
| 18 | 1 |

b)

| Interval | Sredina intervala | Učestanost |
|---|---|---|
| 10–14 | 12 | 1 |
| 15–19 | 17 | 0 |
| 20–24 | 22 | 3 |
| 25–29 | 27 | 4 |
| 30–34 | 32 | 7 |
| 35–39 | 37 | 10 |
| 40–44 | 42 | 8 |
| 45–49 | 47 | 5 |
| 50–54 | 52 | 2 |
| 55–59 | 57 | 3 |
| 60–64 | 62 | 1 |

**1246.** Na jednoj tački puta Beograd – Niš izvršeno je radarsko merenje brzina vozila i dobijeni su sledeći podaci (u km/h):

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 71 | 92 | 103 | 111 | 105 | 93 | 74 | 83 | 76 | 51 |
| 30 | 65 | 78 | 86 | 94 | 106 | 95 | 82 | 55 | 66 |
| 113 | 108 | 96 | 83 | 68 | 84 | 75 | 69 | 42 | 54 |
| 85 | 89 | 98 | 121 | 99 | 88 | 72 | 58 | 60 | 78 |
| 77 | 79 | 83 | 100 | 73 | 97 | 130 | 45 | 78 | 89 |

a) Formirati raspodelu frekvencija uzimajući 10 klasa dužine 20 km/h; b) Konstruisati histogram i poligon raspodele frekvencija.

**1247.** Pet novčića bačeno je dvadeset puta uvis i posle svakog bacanja izbrojan je broj grbova. Dobijeni podaci prikazani su u obliku statističkog niza:

| Broj grbova $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Frekvencija $f_n$ | 1 | 4 | 5 | 6 | 3 | 1 | 20 |

Konstruisati poligone i histograme apsolutne i relativne frekvencije.

**1248.** Prijemni ispit je polagalo 897 kandidata. Maksimalan broj mogućih poena je 100. Između svih kandidata koji su polagali prijemni ispit izabran je slučajan uzorak od 100 učenika. Broj osvojenih poena prikazan je u sledećoj tabeli:

| Broj poena | Sredina intervala | Broj kandidata |
|---|---|---|
| [ 0,10 ) | 5 | 9 |
| [10, 20 ) | 15 | 7 |
| [20, 30 ) | 25 | 10 |
| [30, 40 ) | 35 | 16 |
| [40, 50 ) | 45 | 14 |
| [50, 60 ) | 55 | 24 |
| [60, 70 ) | 65 | 12 |
| [70, 80 ) | 75 | 5 |
| [80, 90 ) | 85 | 2 |
| [90, 100) | 95 | 1 |
| Ukupno | – | 100 |

Izračunati relativne frekvencije. Konstruisati histograme i poligone za apsolutnu i relativnu frekvenciju.

**1249.** Prilikom popisa stanovništva u SFRJ, koji je izvršen 1971. godine, u SR Srbiji su dobijeni sledeći podaci o broju nepismenih:

| Starost | | Broj nepismenih |
|---|---|---|
| 1. | 10–14 | 34512 |
| 2. | 15–19 | 20783 |
| 3. | 20–24 | 20090 |
| 4. | 25–29 | 25044 |
| 5. | 30–34 | 48797 |
| 6. | 35–39 | 101097 |
| 7. | 40–44 | 117775 |
| 8. | 45–49 | 105608 |
| 9. | 50–54 | 87672 |
| 10. | 55–59 | 121008 |
| 11. | 60–64 | 168706 |
| 12. | 65–69 | 140622 |
| 13. | 70–74 | 100534 |
| 14. | 75– i više | 103733 |
| 15. | nepoznato | 22375 |
| Ukupno | | 1218353 |



Odrediti: a) apsolutne frekvencije datih obeležja; b) relativne frekvencije istih obeležja; c) grafik apsolutne frekvencije; d) grafik relativne frekvencije; e) histogram i poligon apsolutne frekvencije; i) histogram i poligon relativne frekvencije.

**1250.** Dokazati da je ukupna površina pravougaonika, koji čine histogram raspodele, jednaka ukupnoj površini ograničenoj apscisnom osom i poligonom raspodele frekvencije.

**1251.** Na atletskom prvenstvu takmičari se takmiče u 4 discipline. U svakoj disciplini takmičar može da osvoji maksimalno 25 poena. Raspodela 100 takmičara prema broju osvojenih poena data je tabelom:

| Klase | 0–20 | 20–40 | 40–60 | 60–80 | 90–100 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Sredine klase $x_i$ | 10 | 30 | 50 | 70 | 90 | |
| Broj takmičara $f_i$ | 4 | 25 | 50 | 15 | 6 | $n$-100 |

a) konstruisati poligon i histogram raspodele frekvencije;
b) odrediti kumulativnu relativnu frekvenciju i konstruisati njihov poligon raspodele;
c) odrediti srednju vrednost, modu, medijanu, standardno odstupanje i koeficijent varijacije.

**1252.** Na pismenom ispitu iz matematike data su tri zadatka i svaki je ocenjen maksimalno sa 25 poena. Raspodela 60 učenika prema broju osvojenih poena data je sledećom tabelom:

| Klase | 15–25 | 25–30 | 35–45 | 45–55 | 55–65 | 65–75 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sredine klase $x_i$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | |
| Broj učenika $f_i$ | 8 | 12 | 20 | 10 | 6 | 4 | $n=60$ |

Konstruisati poligon i histogram raspodele frekvencije. Odrediti kumulativne relativne frekvencije. Konstruisati poligon raspodele kumulativnih relativnih frekvencija. Odrediti medijanu i modu.

**1253.** U 100 porodica, izabranih na slučajan način u jednoj opštini, popisan je broj dece. Raspodela frekvencija porodica prema broju dece data je tabelom:

| Broj dece $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj porodica $f_i$ | 3 | 25 | 50 | 15 | 5 | 2 | $n=100$ |

Oceniti srednji broj dece u porodicama u posmatranoj opštini.

**1254.** Na pismenom ispitu iz matematike 60 učenika je dobilo sledeći broj poena:

| Poeni $x$ | 15–25 | 25–35 | 35–45 | 45–55 | 55–65 | 65–75 | Ukupno |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Sredina klase $x_i$ | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | – |
| Broj učenika $f_i$ | 8 | 12 | 20 | 10 | 6 | 4 | $n=60$ |

Odrediti prosečan broj poena iz matematike po učeniku.

**1255.** Prosečna mesečna zarada 50 visoko kvalifikovanih radnika je 5800 dinara, a prosečna mesečna zarada 40 administrativnih službenika je 3600 dinara. Odrediti prosečan lični dohodak u celom preduzeću.

**1256.** Dati su statistički nizovi:

a) $\begin{matrix} X & -5 & 1 & 3 & 4 \\ f & 1 & 1 & 4 & 2 \end{matrix}$;  b) $\begin{matrix} X & 1 & 2 & 5 \\ f & 6 & 3 & 2 \end{matrix}$.

Odrediti srednje vrednosti, standardna odstupanja i koeficijent varijacije.

**1257.** U jednom odeljenju IV razreda srednje škole, od 30 učenika, na kraju školske godine učenici su ocenjeni iz grupe prirodnih predmeta na način kako pokazuje sledeća tabela:

| | Odlični | Vrlo dobri | Dobri | Dovoljni | Nedovoljni |
|---|---|---|---|---|---|
| Geografija | 12 | 13 | 6 | 1 | – |
| Matematika | 4 | 8 | 12 | 6 | 2 |
| Fizika | 5 | 6 | 11 | 9 | 1 |
| Hemija | 6 | 7 | 15 | 4 | – |
| Biologija | 9 | 8 | 12 | 3 | – |
| Programiranje | 15 | 12 | 5 | – | – |

a) odrediti srednje ocene iz svakog predmeta;
b) odrediti srednju ocenu za grupu predmeta;



c) izračunati standardno odstupanje svakog predmeta i grupe predmeta, zatim utvrditi koji je predmet učenicima lakši, kada su im srednje ocene jednake.

**1258.** Dat je statistički niz

$\begin{matrix} X & 1 & 2 & 3 & 5 \\ f & 20 & 15 & 10 & 4 \end{matrix}$.

Odrediti srednju vrednost, disperziju, standardno odstupanje i koeficijent varijacije.

**1259.** Dati su statistički nizovi:

a) $\begin{matrix} X & 2 & 4 & 5 \\ f & 1 & 7 & 2 \end{matrix}$;  b) $\begin{matrix} X & 3 & 8 \\ f & 2 & 3 \end{matrix}$.

Odrediti srednje vrednosti, disperziju, standardna odstupanja i koeficijent varijacije.

**1260.** Data su dva uzorka: 1° 2, 5, 8, 11, 14 i 2° 2, 8, 14.

Odrediti: a) aritmetičke sredine $\bar{x}_1$ i $\bar{x}_2$ oba uzorka; b) $D(x_1)$ i $D(x_2)$ disperzije oba uzorka; c) aritmetičku sredinu uzoraka dobijenih kombinovanjem data dva uzorka; d) disperziju uzoraka dobijenih kombinovanjem data dva uzorka.

**1261.** Radi ocenjivanja prosečne težine i visine svih učenika jedne škole izabran je skup od 30 učenika i učenica i na osnovu zdravstvenih kartona učenika sastavljene su sledeće tabele:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Težina u kg | 45 | 44 | 48 | 52 | 54 | 60 | 68 | 72 |
| Broj učenica | 1 | 2 | 3 | 7 | 7 | 2 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visina u cm | 154 | 156 | 158 | 165 | 166 | 167 | 168 | 170 | 175 | 178 |
| Broj učenica | 1 | 2 | 3 | 2 | 6 | 5 | 5 | 3 | 1 | 1 |

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Težina u kg | 60 | 61 | 62 | 64 | 65 | 68 | 71 | 76 | 77 | 78 | 80 | 82 |
| Broj učenika | 1 | 2 | 1 | 3 | 8 | 6 | 2 | 2 | 1 | 1 | 1 | 2 |

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Visina u cm | 171 | 173 | 174 | 175 | 176 | 177 | 178 | 179 | 181 | 183 | 185 |
| Broj učenika | 2 | 1 | 1 | 3 | 8 | 6 | 3 | 3 | 1 | 1 | 1 |

Odrediti: a) prosečnu težinu i prosečnu visinu;
b) standardno odstupanje i na osnovu njega zaključiti o visini disperzije kod učenika u odnosu na disperziju kod učenica;
c) konstruisati približno histograme i poligone frekvencija.

**1262.** Izvršeno je 16 merenja početne brzine metka. Rezultati u metrima po sekundi prema rednom broju merenja dati su u sledećoj tabeli:

| | |
|---|---|
| 1. | 1235,6 |
| 2. | 1237,5 |
| 3. | 1232,9 |
| 4. | 1236,2 |
| 5. | 1238,5 |
| 6. | 1234,2 |
| 7. | 1235,9 |
| 8. | 1233,3 |
| 9. | 1234,5 |
| 10. | 1236,8 |
| 11. | 1237,6 |
| 12. | 1233,1 |
| 13. | 1234,3 |
| 14. | 1237,5 |
| 15. | 1235,4 |
| 16. | 1234,7 |

Izvršiti procene: a) srednje brzine; b) disperzije i standardnog odstupanja brzine.

**1263.** Neka su pri 40 bacanja kocke, čije su strane obeležene brojevima od 1 do 6, dobijeni sledeći rezultati:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 5 | 3 | 6 | 5 | 1 | 3 |
| 5 | 2 | 4 | 3 | 1 | 4 | 5 | 3 |
| 3 | 5 | 6 | 1 | 6 | 2 | 1 | 6 |
| 3 | 1 | 2 | 4 | 5 | 4 | 5 | 3 |
| 6 | 6 | 3 | 5 | 2 | 6 | 1 | 4 |

Iz ove populacije izdvojena su tri slučajna uzorka na sledeće načine:

1° uzeti rezultati dobijeni u sledećim bacanjima
1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, 29, 33, 37;

2° uzeti su rezultati dobijeni u prvih deset bacanja;

3° uzeti su rezultati dobijeni u poslednjih osam bacanja.

Odrediti srednje vrednosti ovih uzoraka, kao i srednju vrednost osnovne populacije i videti na osnovu ovoga koji slučajni uzorak bolje reprezentuje osnovnu populaciju.

**1264.** Za populaciju iz zadatka 1224 proceniti disperziju na osnovu disperzije navedenih slučajnih uzoraka.

**1265.** Odrediti koeficijent korelacije između obeležja $x$ i $y$ čije su vrednosti date tabelom:

| $x$ | 1 | 3 | 4 | 6 | 8 | 9 | 11 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 1 | 2 | 4 | 4 | 5 | 7 | 8 | 9 |

**1266.** Odrediti koeficijent korelacije između ocene iz matematike $(x)$ i ocene iz fizike $(y)$ u jednom odeljenju na kraju školske godine, ako su ocene date tabelom:

| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 1 | 5 | 5 | 3 | 2 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 4 | 4 | 2 | 4 | 3 | 5 | 4 | 5 | 4 | 5 |

**1267.** U sedam opština SR Srbije uočen je procenat industrijskog stanovništva $(x)$ i nacionalni dohodak po stanovniku $(y)$ u hiljadama dinara:

| $x$ | 35 | 13 | 12 | 30 | 8 | 22 | 20 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 82 | 42 | 22 | 62 | 26 | 58 | 38 |

Odrediti koeficijent korelacije ovih obeležja.

**1268.** Sledeća tabela pokazuje godine $(x)$ i maksimalni arterijski krvni pritisak $(y)$ 12 osoba.

| Godine $x$ | 56 | 42 | 72 | 36 | 63 | 47 | 55 | 49 | 38 | 42 | 68 | 60 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Maksimalni pritisak $y$ | 147 | 125 | 160 | 118 | 149 | 128 | 150 | 145 | 115 | 140 | 152 | 155 |

Odrediti koeficijent korelacije ovih obeležja.

# VIII GLAVA

## 8. RAZNI ZADACI*)

1269.* Odrediti površinu koja je ograničena graficima krivih $x^2+4y^2=20$ i $xy=4$ u prvom kvadrantu.

1270.* Data je funkcija $x \to y=(x^2+ax+b)e^{-x}$.

a) Odrediti realne brojeve $a$ i $b$ tako da data funkcija u tački $A(0, 1)$ ima lokalni minimum.

b) Ispitati funkciju i konstruisati njen grafik za nađene vrednosti $a$ i $b$.

c) Izračunati površinu lika ograničenog grafikom date funkcije, ordinatama maksimuma i minimuma, i osom $Ox$.

1271.* Odrediti površinu figure koja je ograničena elipsom

$$\frac{(x-5)^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1 \text{ i hiperbolom } x^2-y^2=16 \quad (x \geqslant 4).$$

1272.* Data je funkcija $x \to y=\sqrt{x}\ln^2 x$.

a) Ispitati datu funkciju i grafički je predstaviti.

b) Izračunati površinu figure koju ograničava luk krive $y=f(x)$ od tačke maksimuma do tačke minimuma, ordinata u tački maksimuma i osa $Ox$.

1273. Data je funkcija $x \to f(x)=\dfrac{(x-3)^2}{x-1}$.

a) Ispitati i grafički predstaviti datu funkciju.

b) Izračunati površinu dela ravni $xOy$ između krive $y=f(x)$, prave $x=2$ i ose $Ox$.

*) Ovi zadaci služe za ponavljanje, utvrđivanje, produbljivanje, sistematizaciju celokupnog nastavnog gradiva, pripremu pismenog i usmenog maturskog ispita kao i za pripreme prijemnih ispita za upis na fakultet. Uglavnom su korišćeni na pismenim ispitima iz matematike 1 na tehničkim fakultetima, maturskim pismenim ispitima, prijemnim ispitima i raznim takmičenjima.



1274. Data je funkcija $x \to f(x)=\dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

a) Ispitati i grafički predstaviti datu funkciju.

b) Izračunati površinu figure ograničene osom $Ox$; delom krive $y=f(x)$, od njenog preseka sa osom $Ox$ do kose asimptote, i ordinatom presečne tačke krive i kose asimptote.

Izračunati (1275–1278):

1275.* $\displaystyle\int_0^2 x\sqrt{4+x^2}\,\operatorname{arctg}\frac{x}{2}\,dx$.

1276.* $\displaystyle\int_0^{0,5} x\sqrt{1+4x^2}\,\operatorname{arctg} 2x\,dx$.

1277.* $\displaystyle\int_0^{\pi/4} (\sqrt{\cos x}+\sqrt{\sin x})^2 \cos 2x\,dx$.

1278.* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1+\ln x}{x(1-\ln x)}\,dx$.

1279.* Odrediti realne brojeve $p$ i $q$ tako da su tačna tvrđenja:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{px^2+1}{qx+2}+x-2\right)=-1$;

b) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x+1}+px+q\right)=1$.

1280. Za koje vrednosti $x$ je tačna jednakost

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{x^2-3x+2}{x^2-2x+1}, \text{ ako je } 0<\alpha<45°?$$

1281. Rešiti nejednačinu

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}>\frac{x}{2}.$$

1282. Data je jednačina $\sin^4 x+\cos^4\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)=a$. Odrediti realan broj $a$ tako da data jednačina ima realna rešenja.

**1283.** Rešiti nejednačinu

$$4\log_{16}\cos 2x+2\log_4\sin x+\log_2\cos x+3<0,$$

ako je $0<x<\frac{\pi}{4}$.

Rešiti jednačine (1284–1291):

**1284.*** $20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\left(\frac{x^2-4}{x^2-1}\right)=0.$

**1285.*** $2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$

**1286.** $2\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[6]{x^2-1}.$

**1287.** $4^x=2\cdot 14^x+3\cdot 49^x.$

**1288.** $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}.$

**1289.*** $27(3^x+3^{-x})+81\left(3^{\frac{x}{3}}+3^{-\frac{x}{3}}\right)=1000.$

**1290.*** $\left(x-\log\frac{x}{2}\right)^{\log^2 2x-\log\frac{x}{5}-1}=1.$

**1291.** $\log_{\frac{1}{8}}\left(2^{x+1}+\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\right)+\log_{\frac{1}{8}}\left(2^x+\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}\right)=\frac{5}{3}+3\log_{\frac{1}{8}}5.$

**1292.** Ako su $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitivni brojevi i ako je $a_1\cdot a_2\dots a_n=1$, onda je

$(1+a_1)(1+a_2)\dots(1+a_n)\geqslant 2^n$. Dokazati.

**1293.** Ako je $a_1+a_2+\dots+a_n=1$ i $a_i>-\frac{1}{4}$, $i=1, 2, \dots n$, tada je

$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\dots+\sqrt{4a_n+1}<n+2$. Dokazati.

**1294.** Ako je $n$ prirodan broj, tada je

$\sqrt[n]{n!}\leqslant\frac{n+1}{2}$. Dokazati.

**1295.** Za koje su vrednosti realnog broja $x$ tačne jednakosti:

a) $\sin\alpha=\frac{x^2-4x-4}{x^2+1}$, ako je $\frac{\pi}{6}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$;

b) $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{2x^2-2x}{x^2-8x+16}$, ako je $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}$?

**1296.** Ako je $\operatorname{tg}\alpha=3^x$, $\operatorname{tg}\beta=3^{-x}$ i $\alpha-\beta=\frac{\pi}{6}$, izračunati $x$.

**1297.** Date su funkcije $y=a\cdot 2^x+b$ i $y=b\cdot 2^{-x}+a$, gde su $a$ i $b$ realni brojevi. Koji uslov treba da zadovoljavaju $a$ i $b$ da:

a) grafici datih funkcija imaju jednu zajedničku tačku (odrediti koordinate tačke);

b) grafici datih funkcija imaju dve zajedničke tačke (odrediti te tačke)?

**1298.** Date su funkcije $f(x)=\sin x+\cos x$ i $g(x)=\sin x\cos x$.

a) Ako je $x+t=\frac{\pi}{4}$ odrediti $f(t)$ i $g(t)$.

b) Rešiti jednačinu $f(t)+2\sqrt{2}\,g(t)=0$.

c) Izračunati površinu koja je ograničena $x$-osom i krivom $f(x)$ između dve uzastopne nule.

**1299.** Date su krive $x^2+y^2=16$ i $y^2=4(x+1)$.

a) Odrediti ugao preseka datih krivih.

b) Izračunati površinu lika koji je ograničen ovim krivama u intervalu $[-1, 4]$.

**1300.** Dokazati relacije:

a) $\frac{1}{\log_a N}+\frac{1}{\log_{a^2} N}+\dots+\frac{1}{\log_{a^k} N}=\frac{k(k+1)}{2}\log_N a$

$(k\in N;\ n,\ a\in R^+\setminus\{1\})$.

b) $\frac{1}{\log_x 2\ \log_x 4}+\frac{1}{\log_x 4\ \log_x 8}+\dots+\frac{1}{\log_x 2^{n-1}\log_x 2^n}=\frac{n-1}{n}\log_2^2 x.$

$(n\in N,\ x\in R^+\setminus\{1\})$.

**1301.** Izračunati dužine stranica trougla znajući da one obrazuju aritmetički niz, sa diferencijom $\frac{r}{4}$, gde je $r$ poluprečnik upisane kružnice u trouglu.

**1302.** Ako su $a$, $b$ i $c$ realni brojevi i zadovoljavaju relaciju $a+b+c=6$, tada je $a^2+b^2+c^2 \geqslant 12$. Dokazati.

**1303.** Ako je $a+b+c=k$, tada je $3(a^2+b^2+c^2) \geqslant k^2$. Dokazati.

**1304.** Dokazati da aritmetička sredina ma koja četiri broja, $a$, $b$, $c$, i $d$ nije manja od njihove geometrijske sredine, tj.

$$\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}.$$

**1305.** Dokazati da aritmetička sredina ma koja tri pozitivna broja $a$, $b$ i $c$ nije manja od njegove geometrijske sredine, tj.

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}.$$

**1306.** Ako su $a$, $b$ i $c$ merni brojevi stranica trougla, tada je $abc \geqslant (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$. Dokazati.

**1307.** Ako je $a^2+b^2=1$, onda je $-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}$. Dokazati.

**1308.** Ako je $a^2+b^2=1$ i $c^2+d^2=1$, tada je $|ac-bd| \leqslant 1$. Dokazati.

**1309.** Ako je $a^2+b^2+c^2=1$ i $m^2+n^2+p^2=1$, tada je $|am+bn+cp|<1$. Dokazati.

Dokazati nejednakosti (1310–1314):

**1310.** $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.

**1311.** $|a|-|b| \leqslant |a+b|$.

**1312.** $|a-b| \geqslant |a|-|b|$.

**1313.** $|a+b| \geqslant |a|-|b|$.

**1314.** $|a_1+a_2+\ldots+a_n| \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|$.

Odrediti realan broj $a$ tako da nejednačine (1315–1319) važe za sve realne vrednosti $x$:

**1315.** $-3<\dfrac{x^2+ax-2}{x^2-x+1}<2$.



**1316.** $-6<\dfrac{2x^2+ax-4}{x^2-x+1}<4$.

**1317.** $-9<\dfrac{3x^2+ax-6}{x^2-x+1}<6$.

**1318.** $\left|\dfrac{x^2-ax+1}{x^2+x+1}\right|<3$.

**1319.** $\left|\dfrac{x^2+ax+1}{x^2+x+1}\right|<2$.

**1320.** Rešiti nejednačinu $\left|\dfrac{x^2-3x-4}{x^2+x+1}\right|<2$.

**1321.** Odrediti polinom $P(x)$ trećeg stepena, sa realnim koeficijentima, tako da zadovoljava uslove $P(1+i)=3i-4$ i $P(-i)=4i-1$ $(i^2=-1)$.

**1322.** Odrediti interval za $x$ u kome funkcija

$$x \to y=\sqrt{x-1}+\sqrt{x+24-10\sqrt{x-1}}$$

ima konstantnu vrednost.

**1323.*** Data je jednačina $x^2-6x+5+m(x^2-5x+6)=0$ $(m \in R)$. Odrediti relaciju, između rešenja date jednačine, koja je nezavisna od realnog parametra $m$.

**1324.*** Odrediti sve vrednosti parametra $\alpha$ $(0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi)$ za koje je kvadratni trinom

$$y=(\sin\alpha+0{,}5)x^2-2(\sin\alpha-3)x+1$$

pozitivan za svako $x$.

**1325.*** Odrediti sve realne vrednosti parametra $m$ za koje je trinom

$$y=\left(\log_{\frac{1}{3}}\frac{m-1}{m+1}-2\right)x^2-2\left(2+\log_{\frac{1}{3}}\frac{m-1}{m+1}\right)x+2+\log_{\frac{1}{3}}\frac{m-1}{m+1}$$

negativan za svako realno $x$.

**1326.** Dokazati da se vrednost proizvoda

$$\left(x^4+x^3+x^2+x+1+\frac{2}{x-1}\right)\left(x^4-x^3+x^2-x+1-\frac{2}{x+1}\right)$$

ne menja ako se u faktorima izostave razlomci $\frac{2}{x-1}$ i $\frac{2}{x+1}$.

**1327.** Rešenja $x_1$ i $x_2$ kvadratne jednačine zadovoljavaju relacije $x_1+x_2+2x_1x_2=0$ i $m(x_1+x_2)-x_1x_2=3m+4$, gde je $m$ realan parametar:

a) odrediti kvadratnu jednačinu;
b) odrediti za koje vrednosti realnog broja $m$ dobijena jednačina ima realna rešenja;
c) za koje su vrednosti realnog broja $m$ rešenja dobijene jednačine negativna?

**1328.** Rešiti jednačinu

$$3^{1+\sin x+\sin^2 x+\cdots+\sin^n x+\cdots}=\sqrt[3]{9}\ .$$

**1329.** Rešiti jednačinu

$$2^{-1+\cos x-\cos^2 x+\cdots+(-1)^{n+1}\cos nx+\cdots}=\sqrt[3]{0,25}\ .$$

**1330.** Dokazati jednakost

$$\operatorname{tg} 9^\circ+\operatorname{tg} 15^\circ-\operatorname{tg} 27^\circ-\operatorname{ctg} 27^\circ+\operatorname{ctg} 15^\circ+\operatorname{ctg} 9^\circ=8\ .$$

**1331.*** Rešiti jednačinu

$$|\log^2(1-9x)+\log(1-9x)-2|=2-\log(1-9x)-\log^2(1-9x)\ .$$

**1332.*** Odrediti realna rešenja jednačine

$$(x^3+x^{-3})+(x^2+x^{-2})+(x+x^{-1})=6\ .$$

**1333.** Dat je kompleksan broj

$$z=\log_2(m^2-13m+44)-2+i\sqrt{\log_2 m-3}\ .$$

Dokazati da ni za jednu realnu vrednost parametra $m$ kompleksni broj $z$ ne može biti čisto imaginaran.

Rešiti jednačine (1334–1336):

**1334.** $5^{\log x}-3^{\log x}=5,\dot{3}\cdot 3^{0,5\log x}\cdot 5^{0,5(\log x-2)}$, $(5,\dot{3}=5,333\ldots)$.

**1335.** $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1\ .$

**1336.** $\sqrt{x-3-2\sqrt{x-4}}+\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=1\ .$

**1337.** Broj $N=30x0y03$ deljiv je sa 13. Odrediti cifre $x$ i $y$.

**1338.** Odrediti četvorocifren broj koji je jednak četvrtom stepenu zbira njegovih cifara. Dokazati jedinstvenost rešenja.

**1339.** Odrediti osnovu brojnog sistema u kome se broj »hiljadu tri stotine trideset i tri« piše sa 10101.

**1340.** Neki trocifreni broj napisan u brojnom sistemu sa osnovom 7 ima iste cifre, ali u obrnutom poretku, koje ima taj broj napisan u brojnom sistemu sa osnovom 9. Odrediti taj broj.

**1341.** Postoje li celi brojevi $m$ i $n$ koji zadovoljavaju jednačinu

$$m^2+1956=n^2\ ?$$

**1342.** Odrediti dva pozitivna broja deljiva sa 4, takva da je razlika njihovih kubova četvorocifren broj deljiv sa 91.

**1343.*** Dokazati implikaciju

$$\log_{12}18=a\wedge\log_{24}54=b\Rightarrow ab+5(a-b)=1\ .$$

**1344.*** Dokazati implikaciju

$$\log_{12}24=m\wedge\log_{18}54=n\Rightarrow 5(m+n)-3mn=8\ .$$

Rešiti jednačine (1345–1347):

**1345.*** $\sin^{1988}x+\cos^{1000}x=1\ .$

**1346.*** $\sin x-\sqrt{3}\,\cos x=2\sin 1999x\ .$

**1347.** $2^{1-\log_2 x+\log_2^2 x-\log_2^3 x+\cdots}=x\ .$

**1348.*** Odrediti $a$, $b$ i $c$ tako da funkcija

$$x\to f(x)=a+b\cos x+c\sin x \text{ ima oblik } f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ f(\pi)=0,\ f\left(\frac{\pi}{12}\right)=1.$$

Zatim, odrediti minimalnu i maksimalnu vrednost ove funkcije.

**1349.*** Odrediti jednačinu krive koju opisuje tačka: a) $z=\dfrac{1+2ti}{1-ti}$;

b) $z = \dfrac{1 + ti}{1 - ti}$, ako je $z$ kompleksni broj a $t$ realan parametar, zatim konstruisati njen grafik.

**1350.*** Ako su $x, y, \alpha \in R$ i ako je $\dfrac{3}{2 + \cos\alpha + i\sin\alpha} = x + iy$, tada je $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$. Dokazati.

**1351.** Odrediti funkciju $x \to f(x) = a + bc^x$, ako je $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

**1352.*** Koju krivu opisuje tačka $z = 2e^{ti} + e^{-ti}$, ako je $z$ kompleksni broj a $t$ realan broj?

**1353.*** Data je funkcija $y = f(x)$ : $x = \dfrac{1 - 2t^2}{1 + t^2}$, $y = \dfrac{3t}{1 + t^2}$, gde je $t$ realan broj. U pravouglom koordinatnom sistemu konstruisati grafik date funkcije.

**1354.** Rešiti jednačinu $\left(x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{4}{x + \dfrac{1}{x}}\right)^2 = \dfrac{81}{100}$.

**1355.** Rešiti jednačinu $\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \sqrt{3}$.

**1356.*** Funkcija $y = f(x)$ data je u obliku
$$\frac{e^x}{e^x + 1} = e^y + \frac{1}{e^x + 1}.$$
Izračunati dužinu luka ove krive u intervalu $a \le x \le b$.

**1357.*** Izračunati dužinu luka krive $y = \ln\cos x$ u intervalu $0 \le x \le \dfrac{\pi}{4}$.

**1358.** Odrediti dužinu luka krive $y = \ln\sin(x - 1)$ u intervalu $1 + \dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$.

**1359.** Rešiti jednačinu
$\sin ax \ \sin bx = \sin cx \ \sin dx$
po $x$, ako su $a, b, c, d$ uzastopni pozitivni članovi aritmetičkog niza.



**1360.** Dokazati da je
$\operatorname{ctg} 7{,}5° + \operatorname{tg} 67{,}5° - \operatorname{ctg} 67{,}5° - \operatorname{tg} 7{,}5° = 2(3 + \sqrt{3})$.

**1361.** Rešiti po $x$ jednačinu
$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x + \ldots = 3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + \ldots$

**1362.** Dat je beskonačni red
$\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \ldots.$
Odrediti interval u kome se mora nalaziti $x$ da bi red bio konvergentan, zatim odrediti $x$ tako da zbir reda bude 0,5.

**1363.** Stranice trougla čine aritmetički niz sa diferencijom 2. Odrediti stranice trougla ako je jedan unutrašnji ugao 120°.

**1364.** Četiri broja obrazuju geometrijski niz. Njihov zbir je 130, a zbir kvadrata 5044. Odrediti niz.

**1365.** Ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ čine geometrijski niz, dokazati tačnost jednakosti
$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}\right)^{\frac{n}{2}} = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n.$$

**1366.** Dat je beskonačan geometrijski red čiji je prvi član $a_1 = k$ $(k > 1)$, a količnik $q = \dfrac{k - 1}{k}$. Ako je $S$ zbir reda, a $S_n$ zbir prvih $n$ članova, za koje vrednosti $n$ je tačna nejednakost $|S_n - S| < 10^{-2}$?

**1367.** Zbir beskonačnog geometrijskog reda je $a$, a zbir kvadrata njegovih članova $b$. Odrediti prvi član i količnik reda.

**1368.** Dat je niz
$\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \ldots.$
Dokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

**1369.** Dat je niz
$\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \ldots$ $(a > 0)$.

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

**1370.** Realan niz $(a_n)$ definisan je rekurentnom formulom $a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n$, $a_1 = 3$, $a_2 = 1$. Odrediti opšti član niza.

**1371.*** Realan niz $(a_n)$ definisan je rekurentnom formulom $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$, $a_1 = a_2 = 1$. Odrediti opšti član niza (Fibonačijev niz).

**1372.*** Data je funkcija definisana formulom $f(x) = -\log(1+x)$, $(x > -1)$.
Dokazati nejednakost
$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$
gde su $x_1$ i $x_2$ dve vrednosti iz oblasti definisanosti funkcije $(x_1 > -1,\ x_2 > -1)$.

**1373.*** Ako su $\alpha$, $\beta$ i $\gamma$ $(\alpha < \beta < \gamma)$ uglovi trougla i ako $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ čine aritmetički niz, tada $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ takođe čine aritmetički niz. Dokazati.

**1374.** Ako je $\log\frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2)$, gde su $a$ i $b$ katete pravouglog trougla, odrediti uglove trougla.

**1375.*** Ako kotangensi uglova trougla čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokazati.

**1376.** Ako uglovi trougla $\alpha, \beta, \gamma$ čine aritmetički niz u datom poretku, dokazati da između stranica trougla $a, b, c$ postoji relacija $a^2 - ac + c^2 = b^2$ i obratno.

**1377.** Dva ugla trougla određena su jednačinama:
$4^{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y} = 8$, $16^{\operatorname{tg}^2x - \operatorname{tg}^2y} = 8$.
a) Odrediti tangens trećeg ugla trougla.
b) Ako je dat poluprečnik $R$ opisane kružnice, odrediti stranice trougla.

**1378.** Stranice trougla čine aritmetički niz, čija je razlika $d$. Odrediti stranice i najveći ugao trougla ako je $\cos\alpha = \frac{13}{14}$, ako je $\alpha$ najmanji ugao trougla.

**1379.** Dokazati da je grafik funkcije $x \to y$, koja je data formulom $y^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0$, unija dve prave. Odrediti presek ove dve prave i ugao koji obrazuju.

**1380.** U trouglu $ABC$ uglovi $\alpha, \beta, \gamma$ čine geometrijski niz sa količnikom 2. Dokazati da stranice trougla zadovoljavaju jednakost $a^{-1} = b^{-1} + c^{-1}$.

Rešiti jednačine (1381 – 1385):

**1381.** $\log_{\frac{1}{8}}\left(2^{x+1} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}\right) + \log_{\frac{1}{8}}\left(2^x + \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}\right) = \frac{5}{3} + 3\log_{\frac{1}{8}}5.$

**1382.** $\sin^{77}x + \cos^{88}x = 1.$

**1383.** $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\cos 99x.$

**1384.** $\operatorname{ctg}2^x = \operatorname{tg}2^x + 2\operatorname{tg}2^{x+1}.$

**1385.** $\log_2\left(\cos 2x + \cos\frac{x}{2}\right) + \log_{0,5}\left(\sin x + \cos\frac{x}{2}\right) = 0.$

**1386.** Odrediti skup tačaka u Dekartovoj ravni za koje je $\sin(\pi(x+y)) > 0$.

**1387.** Funkcija $f(n)$ definisana u skupu prirodnih brojeva zadovoljava uslove $f(n) = f(n-1) + a^n$, $f(1) = 1$. Odrediti $f(n)$.

**1388.** Ako pozitivni brojevi $a, b, c$ čine geometrijski niz, tada je $a^2b^2c^2(a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}) = a^3 + b^3 + c^3$. Dokazati.

**1389.** Ako je $a = A\cos^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha + C\sin^2\alpha$,
$b = 2C\sin\alpha\cos\alpha + B\cos 2\alpha - 2A\sin\alpha\cos\alpha$,
$c = A\sin^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha + C\cos^2\alpha$,
tada je $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$. Dokazati.

1390. Ako za uglove trougla važi jednakost

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2},$$

tada je trougao jednakostraničan. Dokazati.

1391. Izračunati zbir

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \ \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \ \cos 2} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}.$$

## *I grupa* *)

1392. Data su dva trinoma

$f_1(x) = x^2 - (a+b)x + ab$

$f_2(x) = x^2 - (a-b)x - ab$.

a) Pokazati da ni jedan od ova dva trinoma ne može imati isti znak za sve realne vrednosti argumenta $x$.

b) Odrediti zbir $s$ onih vrednosti argumenta $x$ za koje ovi trinomi imaju najmanju vrednost i zbir $S$ njihovih najmanjih vrednosti.

1393. Data je funkcija

$y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$.

a) Konstruisati grafik funkcije u intervalu $(-\pi, +\pi)$.

b) Za koje vrednosti parametra $m$ jednačina $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$ ima realna rešenja?

c) Za $m = 1$ rešiti jednačinu.

1394. Data je parabola $y^2 = 2px$ i kružnica sa centrom u žiži parabole i poluprečnikom $r = 2p$.

a) Naći ugao pod kojim se seku date krive.

b) Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom figure ograničene parabolom i kružnim lukom koji preseca pozitivni deo $x$-ose.

---

*) Grupe zadataka I, II i III bile su na maturskom pismenom ispitu iz matematike u Petoj beogradskoj gimnaziji 1971. god.



## *II grupa*

1395. Prava $3x - 5y + 25 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i parabole $y^2 = 2px$, koja sa elipsom ima zajedničku žižu. Dokazati da je trougao čija su temena tačke dodira i zajednička žiža pravougli trougao.

1396. Za koju vrednost $x$ u razvijenom obliku binoma

$$\left(\sqrt{2^x} + \frac{1}{\sqrt{2^{x-1}}}\right)^n$$

zbir trećeg i petog člana je 135, ako je zbir binomnih koeficijenata poslednja tri člana 22.

1397. Data je funkcija

$y = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha$,

gde je $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Odrediti $\alpha$ da osa $OX$ bude tangenta krive, i skiciraj grafik tih krivih.

b) Ako su $x_1$ i $x_2$ rešenja jednačine $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha = 0$, odrediti $\alpha$ iz relacije $x_1^2 + x_2^2 = 2$.

c) Naći vezu između rešenja $x_1$ i $x_2$ jednačine $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha = 0$ koja ne zavisi od $\alpha$.

## *III grupa*

1398. Data je funkcija $f(x) = x^3 + ax^2 + 9x + 4$.

a) Odrediti parametar $a$ tako da funkcija ima ekstremum za $x = -1$.

b) Za dobijenu vrednost parametra $a$ nacrtati grafik i ispitati promene funkcije.

c) Izračunati površinu ograničenu krivom, osom $OX$ i $OY$.

d) Naći presek krive i prave koja prolazi kroz tačku $A(-1, 0)$ a sa osom $OX$ obrazuje ugao $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

1399. Prava $x - 2y + 8 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i sa njom konfokalne parabole $y^2 = 2px$.

a) Napisati jednačine ovih krivih.

b) Napisati jednačinu kružnice $k$ koja sadrži obe dodirne tačke i čije središte pripada datoj tangenti, pa pokazati da ova kružnica sadrži i zajedničku žižu elipse i parabole.

c) Odrediti zapreminu tela koje postaje rotacijom oko ose $x$ figure ograničene elipsom, parabolom i datom tangentom.

**1400.** Dat je trougao $ABC$ čiji uglovi zadovoljavaju relaciju

$$\alpha - \beta = 2\gamma.$$

a) Dokazati da je ugao $\alpha$ tup.

b) Na polupravoj $BA$ uzeti tačku $D$ tako da bude $BD > BA$ i $DC = AC$, pa dokazati da je prava $CA$ simetrala ugla $BCD$.

c) Odrediti ortogonalnu projekciju $p$ stranice $CA$ na pravoj $AB$, pa dokazati da stranice $BC = a$, $CA = b$ i $AB = c$ trougla zadovoljavaju relaciju $c^2 = a(a - b)$.

## IV grupa*)

**1401.** Naći najmanju visinu trougla čije su stranice $a = 6{,}5$ cm, $b = 7$ cm i $c = 7{,}5$ cm.

**1402.** Data je funkcija $y = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1}$.

a) Ispitati tok i nacrtati grafik funkcije.

b) Odrediti površinu ograničenu lukom krive i odsečcima koordinatnih osa.

**1403.** Odrediti $x$ u izrazu $\left((\sqrt{x})^{\frac{1}{\log x + 1}} + \sqrt[12]{x}\right)^6$, ako je četvrti član razvijenog binoma 200.

**1404.** Dat je izraz $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin 2x$.

a) Podesiti dati izraz za logaritmovanje.

b) Za koje vrednosti parametra $m$ jednačina $\cos^4 x - \sin^4 x + \sin 2x = m$ ima realna rešenja? Rešiti jednačinu za $m = \sqrt{2}$.

**1405.** Prava $5y - 3x = 25$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i konfokalna parabole $y^2 = 2px$. Odrediti ugao pod kojim se vidi deo ove tangente među tačkama dodira iz zajedničkog fokusa.

*) Maturski pismeni zadaci – juna 1971. god., u Čačku.

## V grupa*)

**1406.** Stranice trougla su tri uzastopna parna broja, a površina mu je 24. Nad srednjom stranom treba u trougao upisati pravougaonik maksimalne površine i naći njegov obim. U kom odnosu je površina kruga opisanog oko pravougaonika prema površini kruga opisanog oko trougla.

**1407.** Odrediti $x$-ti član geometrijske progresije čija prva tri člana glase: $11 - x^{\log x}$; $x^{\log x} - 5$; $35 - x^{\log x}$.

**1408.** Tačka $M(9,0)$ spojena je sa tačkom $N(x < 9, y)$ na paraboli $y^2 = 8x$. Površina ograničena lukom parabole, delom njene osovine i dužinom $MN$ obrće se oko $x$- ose. Odrediti koordinate tačke $N$, tako da zapremina nastale kupe bude maksimalna i naći odnos u kome ona stoji prema zapremini nastalog rotacionog paraboloida.

**1409.** Ispitati i grafički predstaviti funkciju $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - x + 1}$.

**1410.** Odrediti za koje je $x$ šesti član razvoja binoma $\left(\sqrt{2^{\log(10 - 3^x)}} + \sqrt{2^{(x-2)\log 3}}\right)^n$ jednak 21, ako su binomni koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja redom, prvi, treći i peti član aritmetičke progresije.

## VI grupa**)

**1411.** Ako je jedna dijagonala četvorougla prečnik kružnice opisane oko njega, dokazati da su ortogonalne projekcije dveju naspramnih stranica četvorougla na drugu dijagonalu među sobom jednake.

*) Pismeni maturski, Jagodina, juna 1971. godine.

**) Maturski pismeni zadaci, juna 1971. godine u Valjevu.

1412. Rešiti jednačinu $x^{2\log^3 x - \log\sqrt{x^3}} = 10$ i izvršiti proveru.

1413. Prava $x - 2y + 6 = 0$ je tangenta parabole $y^2 = 2px$. Odrediti jednačine onih tangenata iste parabole, koje su normalne na datu pravu i pokazati da presek tih tangenata pripada direktrisi parabole.

1414. Merni brojevi stranica trougla su tri uzastopna neparna broja, a jedan ugao $\frac{2\pi}{3}$. Izračunati stranice i uglove.

1415. Izračunati površinu ograničenu lukom krive $y = \frac{2}{3}x^3 - x^2 - 4x$, $x$-osom i ordinatama njenih ekstremnih tačaka.

*VII grupa* *)

1416. U jednačini $x^2 - 2(m-3)x + 11 - 5m = 0$, odrediti parametar $m$ tako da: a) koreni budu realni;
b) koreni zadovoljavaju relaciju $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 1$.

1417. Jednokraki trougao obrće se oko prave koja prolazi kroz teme na osnovici i paralelna je sa visinom trougla. Izračunati $P$ i $V$ obrtnog tela, ako se zna osnovica $c$ i krak $a$ $(c = 12, a = 15)$.

1418. U tački $P(3, y_0 > 0)$ parabole $y^2 = 2(x-1)$ povučena je tangenta. Izračunati:
a) površinu figure ograničene tom tangentom, parabolom i $x$-osom;
b) zapreminu tela koje nastaje obrtanjem iste figure oko ose $Ox$.

*VIII grupa* **)

1419. Izračunati zapreminu tela koje se dobija kada se od elipsoida, nastalog rotacijom elipse $3x^2 + 4y^2 = 36$ oko ose $Ox$, iseče va-

*) Pismeni maturski, I gimnazija Zrenjanin, juna 1971. godine.
**) Maturski pismeni, II beogradske gimnazije, avgusta 1971. godine.



ljak najveće zapremine (osa valjka se poklapa sa osom $Ox$).

1420. Rešiti jednačinu $|x^2 + 2x| - |3 - x| = x^2$.

1421. Stranice trougla obrazuju geometrijski niz.
a) Dokazati da količnik toga niza $q$ zadovoljava uslov $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < q < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.
b) Odrediti $q$ tako da trougao bude pravougli.

1422. Odrediti ostala temena trougla $ABC$, ako je dato teme $A(4, -1)$ kao i jednačina visine $2x - 3y + 12 = 0$ i težišna linija $2x + 3y = 0$ koje polaze iz temena $C$.

1423. Avion leti na visini $H = 2R$ nad Zemljom.
a) Pod kojim uglom posmatrač vidi Zemlju iz aviona?
b) Koliki deo Zemljine površine je u vidnom polju posmatrača? (Smatrati da je Zemlja oblika lopte.)

*IX grupa* *)

1424. Naći zapreminu tela koje nastaje rotacijom površine ograničene lukovima krivih
$y^2 = x^3$ i $y^2 = 4x$ oko $x$-ose.

1425. Tri broja koja obrazuju geometrijsku progresiju daju sumu 26. Ako se prvom doda 1, drugom 6 i trećem 3, dobijaju se tri broja koji obrazuju aritmetički niz. Naći zbir prvih 20 članova aritmetičkog niza.

1426. Kružnica prolazi kroz tačku $A(-3, 4)$ i obe žiže hiperbole čije su asimptote $y = \pm\frac{3}{4}x$ i tangenta $5x - 4y = 16$ (hiperbole). Odrediti jednačinu kružnice.

1427. Visina pravilne zarubljene četvorostrane piramide je 6 cm, a zapremina 152 $cm^3$. Površine osnova odnose se kao 4 : 9. Odrediti površinu omotača zarubljene piramide.

1428. Rešiti trougao kome je data površina, zbir dveju stranica i ugao među njima
$[P = 80\sqrt{3},\ b + c = 42,\ \alpha = 120°]$.

*) Maturski pismeni, Gimnazija „Jovan Jovanović" Novi Sad, juna 1971. godine.

## *X grupa* *)

1429. Sinus jednog ugla pravouglog trougla aritmetička je sredina sinusa druga dva ugla a poluprečnik upisane kružnice u trouglu iznosi 4. Izračunati površinu trougla (bez upotrebe logaritamskih tablica i digitrona).

1430. Osnova prave četvorostrane prizme je romb površine 1 $m^2$. Izračunati površinu i zapreminu prizme ako su površine dijagonalnih preseka 3 $m^2$ i 6 $m^2$.

1431. Rešiti jednačinu $4^{\log_{16} x} - 3^{\log_{16} x - 0,5} = 3^{\log_{16} x + 0,5} - 2^{2\log_{16} x - 1}$.

1432. Odrediti $x$ tako da zbir trećeg i sedmog člana u razvoju binoma $(\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x})^8$ jednak je 7.

1433. Ispitati precizno tok i nacrtati grafik funkcije

$$(1) \quad y = \frac{x^2 - 5x + 7}{x - 2},$$

zatim izračunati površinu ograničenu grafikom krive (1) njenom kosom asimptotom i pravama $x = 3$ i $x = 6$.

## *XI grupa* *)

1434. a) Odrediti jednačinu onog prečnika elipse $x^2 + 5y^2 = 25$, čija je dužina jednaka međusobnom rastojanju žiža;
b) Pod kojim se uglom vidi ta elipsa iz tačke $A(0, \sqrt{30})$.

1435. Stranice trougla se odnose kao 3 : 5 : 6 a zbir njihovih kvadrata je 280. Odrediti površinu tela koje nastaje rotacijom trougla oko najveće stranice.

1436. Rešiti jednačinu $|\log_{\frac{1}{3}}(1 + \sin 2x)| + |\log_{\frac{1}{3}}(1 - \sin 2x)| + = 1$.

1437. Za koje $\alpha$ važi $\dfrac{1 - 2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha} + \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \sin\alpha + \cos\alpha$.

*) Grupe X, XI i XII, Maturski pismeni, u Trećoj beogradskoj gimnaziji, juna 1994. godine



1438. Dato je (1) Funkcija $y = x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha \quad \alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
(2) jednačina $x^2 - 2x\cos\alpha + 1 - \sin\alpha = 0$.
a) Ispitati prirodu rešenja jednačine (2) u zavisnosti od $\alpha$;
b) Ako su $x_1$ i $x_2$ rešenja jednačine (2) odrediti $\alpha$ iz relacije $x_1 + x_2 = 2$;
c) Ako su $x_1$ i $x_2$ rešenja jednačine (2) odrediti relaciju između $x_1$ i $x_2$ koja ne zavisi od $\alpha$;
d) Za koje $\alpha$ funkcija (1) je stalno pozitivna;
e) Odrediti $\alpha$ tako da $Ox$ osa bude tangenta krivih, skicirati grafike tih krivih.

## *XII grupa*

1439. Prvi član beskonačnog geometrijskog reda je veći, a treći manji član uređenog para koji predstavlja rešenje sistema jednačina $x^3 + y^3 = 35 \quad 2^{x+y} + 2^{x+y+1} + 2^{x+y+2} = 224$. Odredi sumu tog beskonačnog reda.

1440. Osnova prizme je jednakokraki trapez osnovica $a = 8$ cm i $b = 2$ cm. U prizmi je upisan valjak. Koji procenat zapremine prizme čini zapremina valjka, ako je visina tela jednaka kraku trapeza?

1441. Data je funkcija
(1) $y = \sqrt{3}\sin x + \cos x$
a) Nacrtaj grafik funkcije bez upotrebe izvoda, ispitaj tok;
b) Za koju vrednost parametra $m$ jednačina $\sqrt{3}\sin x + \cos x = m$ ima realna rešenja;
c) Za $m = 1$ reši jednačinu;
d) Izračunati zapreminu tela koje nastaje rotacijom krivolinijskog trapeza ograničenog lukom krive (1) i odsečkom $X$-ose $x \in \left[-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right]$.

1442. Odredi $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x(\sqrt{1 + x} - 1)}$.

## *XIII grupa *)*

1443. Data je kvadratna jednačina

$4x^2=(3-a)(2x-1)$, $a$ realan broj.

Odrediti vrednost realnog broja $a$ da data jednačina ima realna i različita rešenja $x_1$ i $x_2$, koja zadovoljavaju relaciju

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}\leq 3$ .

1444. Rešiti jednačinu

$(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x)^2-5=\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)$ .

1445. Ako su $S_m$, $S_n$, $S_{m+n}$ sume $m$, $n$, $m+n$ prvih članova aritmetičke progresije, tada je $\frac{S_m-S_n}{S_{m+n}}=\frac{m-n}{m+n}$. Dokazati.

1446. Ako su $x$, $y$, $\alpha\in R$ i ako je

$$\frac{3}{2+\cos\alpha+i\sin\alpha}=x+iy \qquad (i^2=-1),$$

tada skup tačaka $M(x,y)$ u Dekartovoj ravni pripadaju konusnom preseku. Odrediti oblik konusnog preseka i konstruisati ga u ravni $xOy$.

1447. Izračunati površinu površi u prvom kvadrantu koja je ograničena elipsom $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, kojoj pripadaju tačke $A(4,1)$ i $B(-2,-2)$ i hiperbolom $xy=m$, kojoj pripada tačka $C(2,2)$.

## *XIV grupa *)*

1448. Rešiti jednačinu

$$20\left(\frac{x-2}{x+1}\right)^2-5\left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=0.$$

1449. Data je funkcija $x\to y=2\cos^2 x+\sqrt{3}\sin 2x$.

a) Ispitati promene i konstruisati grafik date funkcije;

b) Izračunati površinu površi ograničene lukom date krive i pravama $x=0$ i $y=0$, koja pripada prvom kvadrantu.



1450. Zajedničke tangente parabole $y^2=4x$ i kružnice $x^2+y^2+2x-8y+9=0$ obrazuju trougao, oko kog je opisana kružnica. Odrediti jednačinu te kružnice.

1451. Izračunati $\sqrt[6]{\frac{2z-3}{z+1}}$ ako je $z=1+i$. Rešenja svesti na algebarski oblik kompleksnog broja $a+bi$, $a, b\in R$.

1452. U jednačini $x^3-30x^2+mx-780=0$. Odrediti realan broj $m$, ako koreni date jednačine su stranice pravouglog trougla.

## *XV grupa *)*

1453. Neka su $\operatorname{ctg}\alpha$ i $\operatorname{ctg}\beta$ rešenja jednačine $x^2+\frac{x}{p}+\frac{1}{q}=0$. Dokazati da je

$\cos^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{p}\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+\frac{1}{q}\sin^2(\alpha+\beta)=1.$

1454. Rešiti jednačinu $4x^2+9^{1+\log_4 x}=15x^{1+\log_4 3}$.

1455. Dat je kompleksan broj $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$. Odrediti $x$ tako da srednji član u razvijenom obliku binoma $\left(\frac{3^{\frac{1}{zx}}}{3}+3^{\frac{1}{\bar{z}x}}\right)^{2n}$ bude jednak binomnom koeficijentu.

1456. Date su elipsa $x^2+2y^2=2k^2$, gde je $k>0$, i kružnica čiji je prečnik fokalno rastojanje date elipse. Izraziti u funkciji od $k$ koordinate onih tačaka na elipsi iz kojih se kružnica vidi pod uglom od 120 stepeni pa odrediti sve vrednosti parametra $k$ za koje će koordinate traženih tačaka biti celi brojevi.

1457. U kružni isečak čiji su poluprečnici $OM=ON=R$ i centralni ugao $\angle MON=\alpha$ ($\alpha<90$ stepeni) upisan je pravougaonik $ABCD$ maksimalne površine tako da mu temena $A$ i $B$ pripadaju poluprečniku $OM$, zatim teme $C$ luku $MN$ i teme $D$ poluprečniku $ON$. Izraziti u funkciji od $R$ i $\alpha$ dimenzije tog pravougaonika kao i tu maksimalnu površinu.

## *XVI grupa* *)

**1458.** Data je jednačina $x^2+(3a-1)x+a=0$, $a \in R$.

a) Izraziti jedan koren date jednačine kao funkciju drugog.

b) Naći interval u kome se mora nalaziti jedan koren da bi drugi bio pozitivan.

c) Odrediti vrednost parametra a tako da oba rešenja jednačine budu pozitivna.

**1459.** Rešiti po $x$ jednačinu: $32\cos^6 x-\cos 6x=1$

**1460.** Data je hiperbola: $3x^2-4y^2=72$ i prava $l$: $3x+2y+1=0$

a) Naći tačku $P$ hiperbole najbližu pravoj $l$ i njeno rastojanje od prave $l$.

b) Izračunati površinu trougla određenog $x$-osom, tangentom i normalom hiperbole u tački $P$.

**1461.** Odrediti maksimalnu vrednost odnosa zapremine lopte i oko nje opisane kupe.

**1462.** Rešiti nejednačinu: $\sqrt{\log_2 \dfrac{3-2x}{1-x}} < 1$.

## *XVII grupa* *)

**1463.** Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=x\cdot\ln^2 x$.

**1464.** Stranice $a$, $b$, $c$ trougla $ABC$ obrazuju aritmetički niz sa diferencijom $d=\dfrac{p}{4}$ gde je $p$ poluprečnik upisanog kruga u trougao $ABC$. Odrediti odnos $a:b:c$.

**1465.** Odrediti domen funkcije

a) $y=\log_{\cos x}\sin x$

b) rešiti jednačinu: $\log_{\cos x}\sin x+\log_{\sin x}\cos x=2$

**1466.** Izračunati vrednost izraza:

$$\left(\frac{x-9}{x+3\sqrt{x}+9}:\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x^3}-27}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt{x}\,.$$

*) Grupe XIII, XIV, XV, i XVI, Maturski pismeni, u Petoj beogradskoj gimnaziji, [illegible] 1994. godine

**1467.** Data je parabola $y^2=4x$ i tačka $M(4,\ y>0)$. U tački $M$ postaviti tangentu parabole. Naći zapreminu rotacionog tela koje nastaje rotacijom figure ograničene tangentom, lukom krive i $x$-osom, rotacijom oko $x$-ose.

## *XVIII grupa*

**1468.** Nacrtati grafik funkcije $y=\sin(x-\sqrt{x^2})$

a) rešiti jednačinu $\sin(x-\sqrt{x^2})=-1$.

**1469.** Tri broja čiji je zbir 28 obrazuju geometrijski niz, ako najveći broj umanjimo za 4 dobijaju se tri broja aritmetičkog niza. Odrediti te brojeve.

**1470.** Rešiti nejednačinu: $\log_{0,25}\left(\dfrac{2x+1}{x+3}+\dfrac{1}{2}\right)>\dfrac{1}{2}$

**1471.** U razlaganju binoma: $\left(a^2\sqrt[3]{a}-\dfrac{2}{a^3\sqrt{a}}\right)^n$ naći član koji ne sadrži $a$ ako je odnos binomnih koeficijenata petog i trećeg člana 1:2.

**1472.** Između svih jednakokrakih trouglova upisanih u krug poluprečnika $r$ odrediti onaj trougao kome je površina najveća.

## *XIX grupa*

**1473.** Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{2x}{1+x^2}$ i naći površinu ograničenu lukom krive i ordinatama ekstremnim vrednostima i $x$-osom.

**1474.** Dat je niz pravougaonika jednakih širina a dužine čine aritmetički niz, obim prvog je 32 cm, a površina drugog 70 cm$^2$ a peti pravougaonik je kvadrat. Odredi dimenzije tih pravougaonika.

**1475.** Odrediti sve realne brojeve $p$ za koje je kvadratna funkcija $f(x)=(p^2+2p-3)x^2-4px+p$ pozitivna za sve realne vrednosti promenljive $x$.

1476. Dokazati da je: $\dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=2\sin x \sin 2x.$

1477. U binomu $\left(\sqrt{x}^{\frac{1}{\log x+1}}+\sqrt[12]{x}\right)^6$ odredi $x$ tako da je četvrti član jednak 200.

## *XX grupa*

1478. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $f(x)=\dfrac{5-x}{9-x^2}$.

1479. Rešiti nejednačinu $\dfrac{|x-2|}{x^2-3x+2}\geqslant 2$.

1480. Pravilna četvorostrana piramida ima bočnu ivicu $b$ koja je pod uglom alfa u odnosu na ravan osnove. Za koju vrednost ugla alfa je zapremina piramide najveća?

1481. Naći sva rešenja jednačine: $\sin x\cos^3 x-\cos x\sin^3 x=\dfrac{1}{8}$.

1482. Za koju vrednost parametra »$a$« $a\in R$ je prava
$(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$
a) paralelna $x$-osa; b) paralelna $y$-osi; c) prolazi kroz kord. početak.

## *XXI grupa*

1483. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=(2x^2-3x)\,e^x$.

1484. Data je jednačina $\dfrac{1}{x-m}+\dfrac{1}{x-2m}=1$ gde je $m$ realan broj i $(x-m)\cdot(x-2m)\neq 0$

a) pokazati da jednačina ima realna rešenja za svako $m\in R$

b) odredi parametar $m$ tako da između rešenja postoji relacija $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}\leqslant 1.$

*) Grupe XVII, XVIII, XIX, XX, XXI, XXII, Maturski pismeni, u Jedanaestoj beogradskoj gimnaziji, juni 1994. godina



1485. Romb stranice $a$ i oštrog ugla $\alpha=60°$ rotira oko ose koja prolazi kroz teme oštrog ugla i normalna je na veću dijagonalu. Naći površinu i zapreminu rotacionog tela.

1486. Rešiti jednačinu $0{,}5\sin 4x\sin x+\sin 2x\sin x=2\cos^2 x$

1487. Zbir binomnih koeficijenata drugog i trećeg člana u razvoju binoma: $\left(\sqrt[5]{x^2}-\dfrac{1}{2\sqrt[6]{x}}\right)^n$ jednak je 153. Naći član koji ne sadrži $x$.

## *XXII grupa*

1488. Ispitati i nacrtati grafik funkcije $y=\dfrac{x^3}{(x-2)^2}$.

1489. Data je jednačina $m\cdot(4x-m)=4(x+2)-2\cdot(m-1)-5m$, $m\in R$ i $m\neq 1$. Rešiti jednačinu po $x$ a zatim odrediti parametar $m$ tako da rešenje date jednačine bude pozitivno.

1490. Data je parabola $y^2=8(x-2)$ i njena tačka $A\ (4, y>0)$

a) napisati tangentu parabole u tački $A$.

b) izračunati zapreminu koja nastaje rotacijom oko $x$-ose figure ograničene tangentom parabole, lukom parabole i $x$-osom.

1491. Dokazati da je za svako $3\cdot 4^{n+1}+10^{n-1}-4=0 \pmod 9)$ $n\in N$.

1492. Rešiti nejednačinu:
$\log_2(\log_4 x)+\log_4(\log_2 x)\leqslant -4.$

**Univerzitet u Beogradu**

## Klasifikacioni ispit iz matematike za upis na tehničke fakultete, matematički, fizički i fizičko-hemijski fakultet, svaki test ima 20 zadataka.

> Zadaci 1—5 vrede po 3 poena, zadaci 6—10 po 4 poena, zadaci 11—14 po 5 poena, zadaci 15—17 po 7 poena i zadaci 18—20 po 8 poena. Pogrešan odgovor donosi −10% od broja poena za tačan odgovor. Zaokruživanje N ne donosi ni pozitivne ni negativne poene. U slučaju zaokruživanja više od jednog odgovora, kao i u slučaju nezaokruživanja ni jednog odgovora, dobija se −1 poen.

**25. juni 1990.**

1. Hipotenuza pravouglog trougla dva puta je veća od jedne katete. Oštri uglovi tog trougla su:

   A) $45°, 45°$, B) $30°, 60°$, C) $26°35'32''$, $63°24'28''$, D) $18°, 72°$, E) $15°, 75°$.

2. Dati su iskazi: I $\log((-2)(-3)) = \log(-2) + \log(-3)$, II $\log(-3)^2 = 2\log(-3)$, III $\log(-2)^4 = 2\log(-2)^2$, IV $\log\frac{-2}{-3} = \log 2 - \log 3$. Tačni su:

   A) Nijedan, B) svi, C) I i IV D) II i III, E) III i IV.

3. Vrednost izraza $\left(\frac{2}{5}+\frac{3}{7}\cdot\frac{12}{5}\right)^{-2}$ je

   A) 1, B) 0,49, C) $\sqrt{\frac{10}{7}}$, D) $\left(\frac{175}{348}\right)^2$, E) $\frac{400}{361}$.

4. Ako su $a, b \in R$ i $a^2 \neq b^2$, vrednost izraza $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$ je:

   A) $a-b$, B) $\frac{a^2+b^2}{a+b}$, C) $\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}$, D) $\frac{a^2-ab+b^2}{a+b}$, E) $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$.

5. Za $a=(2+\sqrt{3})^{-1}$ i $b=(2-\sqrt{3})^{-1}$ izraz $(a+1)^{-1}+(b+1)^{-1}$ ima vrednost: A) 1, B) $\sqrt{3}$, C) $\frac{1}{3}$, D) $1+\sqrt{3}$, E) 2.



6. Ako je površina lopte $324\pi$, njena zapremina je:

   A) $18^3\pi$, B) $18^3\pi^2$, C) $972\pi$, D) $2916\pi$, E) $108\pi$.

7. Koliko rešenja u intervalu $(0,2\pi)$ ima jednačina $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$?

   A) Nijedno, B) jedno, C) dva, D) tri, E) beskonačno mnogo.

8. Date su funkcije $f_1=(x)=x$, $f_2(x)=\frac{x^2}{x}$, $f_3(x)=\sqrt{x^2}$, $f_4(x)=(\sqrt{x})^2$. Tačan je iskaz:

   A) Među datim funkcijama nema međusobno jednakih, B) sve su funkcije međusobno jednake, C) $f_1=f_2\neq f_3$, D) $f_1=f_3\neq f_4$, E) $f_1\neq f_3=f_4$.

9. Proizvod svih rešenja jednačine $x^2-2|x|-3=0$ je:

   A) 3, B) $-3$, C) $-1$, D) $-9$, E) 9.

10. Ako je $\log_3 7=a$, $\log_3 2=b$, tada je $(\log_2 7+\log_7 2)^{-1}$ jednako:

    A) $\frac{a^2-b^2}{ab}$, B) $\frac{a^2+b^2}{ab}$, C) $\frac{ab}{a^2+b^2}$, D) $\frac{2a+7b}{3ab}$, E) $\frac{7a+2b}{ab}$.

11. Jednačina $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x+5}$

    A) ima dva realna pozitivna rešenja, B) ima dva realna rešenja od kojih je samo jedno pozitivno, C) ima samo jedno realno rešenje, D) ima četiri realna pozitivna rešenja, E) nema realnih rešenja.

12. U figuru ograničenu lukom krive $2x^2-y=6$ i osom $Ox$ upisan je pravougaonik tako da su mu dva temena na osi $Ox$. Maksimalna površina takvog pravougaonika jeste:

    A) 8, B) 8,5, C) 9, D) 9,5, E) 10.

13. Prava $ax+y-5=0$ dodiruje elipsu $9x^2+16y^2=144$ ako i samo ako je: A) $a=\pm 2$, B) $a=\pm\frac{3}{4}$, C) $a=\pm\frac{\pi}{4}$, D) $a=\pm\frac{6}{5}$, E) $a=\pm 1$.

14. Izraz $\sin^4 x+\cos^4 x$ indentički je jednak izrazu:

A) 1, B) $\sin 4x+\cos 4x$, C) $1+\cos^2 2x$, D) $\frac{1-2\cos 4x}{2}$,

E) $\frac{3+\cos 4x}{4}$.

15. Neka je $M$ skup svih realnih vrednosti parametra $m$ takvih da jednačina $2\log x=\log(x+m)+2\log 2$ ima dva realna različita rešenja. Skup M je:

A) Skup $R$, B) prazan skup, C) $\{m: m>-1\}$,
D) $\{m: -1<m<0\}$, E) $\{m: m\geqslant 0\}$.

16. Kroz tačku u trouglu $ABC$ povučene su prave paralelne stranicama trougla. Na taj način formirana su tri manja trougla čije su površine 1, 4, i 9. Površina trougla $ABC$ je:

A) 36, B) 64, C) 48, D) 24, E) 27.

17. Koreni jednačine $x^2-x+a-2=0$ zadovoljavaju uslov:

$\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}+\frac{1}{2}x_1x_2+4=0.$

Tada je: A) $-1\leqslant a\leqslant 1$, B) $a=\pm 1$, C) $a=\pm\sqrt{2}$,
D) $a=\sqrt{3}$ ili $a=4-\sqrt{3}$, E) $0<a<1$.

18. Polazeći od zbira geometrijske progresije $1+x+x^2+x^3+x^4$ (ili na neki drugi način) mogu se izračunati $\cos\frac{2\pi}{5}$ i $\cos\frac{4\pi}{5}$. Zbir $\cos\frac{2\pi}{5}+\cos\frac{4\pi}{5}$ jednak je: A) $-\frac{\sqrt{5}}{4}$, B) $-\frac{1}{2}$, C) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

D) $-\frac{1+\sqrt{5}}{4}$, E) $-\frac{1}{4}$.

19. Na fudbalskom turniru takmičenje se odvija u $m$ grupa $(m>1)$ sa po $2k$ ekipa $(k>1)$ u svakoj grupi. U grupama ekipe igraju svaka sa svakom i prve dve ekipe iz svake grupe ulaze u finalnu grupu. U finalnoj grupi ekipe igraju svaka sa svakom, s tim što ekipe koje su se sastale u predtakmičenju ne igraju međusobno novu utakmicu. Ako je na turniru odigrano ukupno manje od 115 utakmica i ako je taj broj utakmica neparan, odrediti $m$ i $2k$.



A) $m=6$, $2k=4$ je jedino rešenje, B) $m=3$, $2k=6$ je jedino rešenje, C) postoje tačno dva rešenja, D) postoji više od dva rešenja, E) zadatak nema rešenja.

20. Za koje su vrednosti realnog parametra $m$ obe nejednakosti

$-3<\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$ zadovoljene za svako realno $x$?

A) $-6<m<-1$, B) $-6<m<7$, C) $-6\leqslant m\leqslant 7$,
D) $-1<m<2$, E) ni za jedno $m$.

**25. juni 1991.**

1. Ako je $a$ realan broj i $|a|\neq 2$, tada je vrednost izraza $\left(\frac{a+1}{a^2-4}+\frac{1-a^2}{a^3+8}\right):\frac{1}{(a-1)^2+3}$ jednaka

A) $\frac{a-2}{a+1}$; B) $\frac{a+1}{a-2}$; C) $a$; D) 1; E) $\frac{a+1}{(a^3+8)(a^2-2a+4)}$.

2. Ako je $10^{2\log_{10}3}=8x+5$, tada je $x$ jednako

A) 0; B) $\frac{5}{8}$; C) $\frac{1}{2}$; D) $\frac{9}{8}$; E) $\frac{1}{8}(\log_{10}9-5)$.

3. Tetiva kruga je za 2 manja od prečnika, a odstojanje centra kruga od tetive za 2 manje od poluprečnika kruga. Dužina ove tetive jednaka je

A) 6; B) 8; C) 10; D) $5\sqrt{2}$; E) zadatak nema rešenja.

4. Ako je recipročna vrednost broja $x+2$ četiri puta manja od broja $x-1$, tada je zbir svih vrednosti broja $x$ koje zadovoljavaju ovaj uslov

A) 0; B) 1; C) $-1$; D) $-6$; E) ne postoji nijedno takvo $x$.

5. Vrednost izraza $\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}+\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1+\sqrt{7}}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{1-\sqrt{7}}\right)^{-2}$ jednaka je

A) 25; B) $(1+\sqrt{7})^2$; C) $\frac{-7}{51}$; D) 17; E) 20;

6. Ako je $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=(x-1)^2$, tada je $f(3)$ jednako

A) 6,25; B) 7,35; C) 4; D) 9; E) 5,15.

7. Ako je $f(x)=\log_6 x+3\log_3 9x$, onda je $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)$ jednako

A) 0; B) 12; C) 18; D) $\log_3 x+2$; E) $3\log_3 9$.

8. Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za dva, njegov se ugao poveća za 9°. Broj stranica mnogougla jednak je

A) 8; B) 9; C) 10; D) 12; E) zadatak nema rešenja.

9. Koeficijent pravca prave normalne na pravu povučenu kroz tačke $A(-2,-1)$ i $B(2,2)$ jednak je

A) $-1$; B) $\frac{3}{4}$; C) $-\frac{3}{4}$; D) $\frac{4}{3}$; E) $-\frac{4}{3}$.

10. Zbir svih trocifrenih brojeva deljiv sa 11 iznosi

A) 33660; B) 40733; C) 41624; D) 44550 E) 53031.

11. Ako su prave $x+4y-25=0$ i $4x+9y-75=0$ tangente elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, onda je $a+b$ jednako

A) $12\sqrt{3}$; B) 20; C) 18; D) 24; E) $14\sqrt{2}$.

12. Maksimalna zapremina valjka upisanog u sferu poluprečnika $R$ jednaka je

A) $\frac{2}{3}R^3\pi$; B) $\frac{2}{3\sqrt{3}}R^3\pi$; C) $\frac{16}{27}R^3\pi$; D) $\frac{4}{3\sqrt{3}}R^3\pi$; E) $\frac{1}{\sqrt{2}}R^3\pi$.

13. Date su funkcije $f_1(x)=1$, $f_2(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, $f_3(x)=\frac{|\sin x|}{\sqrt{1-\cos^2 x}}$ i $f_4(x)=\frac{\sqrt{1+\cos 2x}}{|\sqrt{2}\cos x|}$. Tačan je sledeći iskaz:

A) Sve su funkcije međusobno jednake; B) Među datim funkcijama nema međusobno jednakih; C) $f_1\neq f_2=f_3\neq f_4\neq f_1$; D) $f_1\neq f_2=f_3=f_4$; E) $f_1\neq f_3=f_4\neq f_2\neq f_1$.

14. Vrednost realnog parametra $m$ za koju je zbir kvadrata korena jednačine $x^2-mx+m-3=0$ najmanji, pripada intervalu

A) $(-\infty,-5]$; B) $(-5,-2]$; C) $(-2,2]$; D) $(2,5]$; E) $(5,+\infty]$.

15. Ako je u trouglu $ABC$ ugao kod temena $A$ dvaput veći od ugla kod temena $B$, a stranice su $AC=2$, $AB=3$, tada je stranica $BC$ jednaka

A) 3; B) $2\sqrt{3}$; C) $2\sqrt{2}$; D) $\sqrt{10}$; E) $\frac{10}{3}$.

16. Dat je 1990-cifren broj 1234512345... 12345. U broju se, idući sleva na desno, redom precrtavaju sve cifre na neparnim mestima. Neprecrtane cifre u postojećem poretku čine novi broj u kome se ponavlja isti postupak precrtavanja. Ovaj se postupak ponavlja sve dok ne budu precrtane sve cifre. Koja je cifra poslednja precrtana?

A) 1; B) 2; C) 3; D) 4; E) 5.

17. Data je jednačina $\sqrt[3]{x+\sqrt{x^2-1}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{x^2-1}}=1$.

A) Jednačina ima tri rešenja koja pripadaju skupu $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$; B) Jednačina ima samo jedno rešenje koje pripada intervalu $(-\infty,-1]$; C) Jednačina ima samo jedno rešenje koje pripada intervalu $[1,+\infty)$; D) Jednačina ima dva realna negativna rešenja; E) Jednačina nema rešenja.

18. Skup svih rešenja nejednačine $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-4)\geqslant\log_{\frac{1}{9}}(2|x|-1)$ jednak je

A) $[-1,3]$; B) $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$; C) $[3,+\infty)$; D) $(-4,-3]\cup[3,4)$; i E) $[-3,-2)\cup(2,3]$.

19. Zbir uglova pod kojima se sa 100, 200 i 300 metara udaljenosti od podnožja vidi toranj koji stoji na horizontalnoj ravni iznosi 90°. Visina tornja je:

A) 100 m. B) 90 m. C) 95 m. D) $64\sqrt{2}$ m. E) $56\sqrt{3}$ m.

20. Vrednost proizvoda $\sin 20^0\sin 40^0\sin 80^0$ jednaka je:

A) $\frac{1}{2}$; B) $\frac{1}{4}$; C) $\frac{1}{3\sqrt{2}}$; D) $\frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)$; E) $\frac{1}{8}\sqrt{3}$.

1. Koji pravilan mnogougao ima 44 dijagonale?

A) desetougao; B) jedanaestougao; C) dvanaestougao; D) trinaestougao; E) četrnaestougao.

Jednačina prave koja prolazi kroz tačku. P(2,3) i normalna je na pravu $2x-y-1=0$ je:

A) $x+2y+2=0$; B) $2x+y-7=0$; C) $2x+2y-10=0$; D) $x+2y-8=0$; E) $x-y+1=0$.

3. U jednakokrakom trouglu krak je dva puta veći od osnovice. Ako je $\alpha$ ugao između krakova, onda je $\sin\frac{\alpha}{2}$ jednako:

A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{1}{2}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{\sqrt{15}}{4}$; E) $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

4. Ako je $|x|\neq|y|$, tada je izraz $\frac{x^3+y^3}{x+y}:(x^2-y^2)+\frac{2y}{x+y}-\frac{xy}{x^2-y^2}$ indentički jednak:

A) 1; B) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$; C) $\frac{x-y}{x+y}$; D) $\frac{xy}{x+y}$; E) $\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}$.

5. Vrednost izraza $\left\{\left[2^{-1}:\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\right]\cdot 8\right\}^{0,25}$ jednaka je:

A) 4; B) $-4$; C) $\frac{1}{4}$; D) 2; E) $\frac{1}{2}$.

6. Ako je $\log_5 8=a$ i $\log_5 9=b$ tada je $\log_5 6$ jednak:

A) $\frac{6}{3a+2b}$; B) $\frac{6}{2a+3b}$; C) $\frac{2a+3b}{6}$; D) $\frac{3a+2b}{6}$; E) $\frac{5}{2a+3b}$.

7. Jednačina $|x+2|=2(3-x)$:

A) nema rešenja; B) ima samo jedno rešenje; C) ima tačno dva rešenja; D) ima tačno četiri rešenja; E) ima beskonačno mnogo rešenja.



8. Skup tačaka u ravni čije koordinate $x$ i $y$ zadovoljavaju jednačinu $x^2-4x+2y^2+4y-4=0$, predstavlja:

A) kružnicu; B) elipsu; C) hiperbolu; D) parabolu; E) dve prave koje se seku.

9. Ako je $f(x-2)=x^3-2x-1$, tada je $f(1)$ jednako:

A) $-2$; B) 5; C) 10; D) 20; E) 25.

10. Vrednost izraza $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}-\frac{15}{\sqrt{3}-3}\right)(\sqrt{3}+5)^{-1}$ je:

A) $\sqrt{3}+1$; B) $\sqrt{3}$; C) 1; D) $\frac{1}{2}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

11. Zbir kvadrata rešenja jednačine $x^2+3\alpha x+\alpha^2=0$ je $\frac{7}{4}$ ako i samo ako je:

A) $\alpha=1$; B) $|\alpha|=1$; C) $\alpha=\frac{1}{4}$ D) $|\alpha|=\frac{1}{3}$; E) $|\alpha|=\frac{1}{2}$.

12. U aritmetičkom nizu, sa različitim članovima, prvi, peti i jedanaesti član obrazuju geometrijski niz. Ako je prvi član 24, odrediti deseti član aritmetičkog niza:

A) 48; B) 50; C) 51; D) 54; E) 72.

13. Izraz $\frac{\cos^3x+\sin^3x}{2-\sin 2x}$ indentički je jednak:

A) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; B) $\cos x+\sin x$; C) $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$; D) $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$; E) 1.

14. Date su funkcije $f_1(x)=2\log_2 x$, $f_2(x)=\log_2 x^2$, $f_3(x)=2\log_2|x|$, $f_4(x)=\frac{2}{\log_x 2}$. Tačan je sledeći iskaz:

A) Sve su funkcije međusobno jednake. B) Među datim funkcijama nema međusobno jednakih. C) $f_1=f_2=f_3\neq f_4$. D) $f_1=f_4\neq f_2=f_3$. E) $f_1\neq f_2=f_3\neq f_4\neq f_1$.

**15.** Rešenje jednačine $\log_3(3-2\cdot 3^{x+1})=2+2x$ pripada intervalu

A) $[-8,-4]$; B) $[-4,0]$; C) $[0,4]$; D) $[4,8]$; E) $[8,12]$.

**16.** Skup svih rešenja nejednačine $\dfrac{x-2}{x^2+3x-4}>\dfrac{1}{3}$ je:

A) $(-4,1)$; B) $(2,+\infty)$; C) $[0,2)$; D) $(-5,0]$;

E) Skup realnih brojeva.

**17.** Košarkaški tim sačinjavaju 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko se načina može od njih sastaviti petorka ako u njoj moraju da igraju bar 2 beka i bar jedan centar.

A) 540; B) 1440; C) 792; D) 243; E) 125.

**18.** Na stranici $AB$ paralelograma $ABCD$ površine 1 data je tačka $M$ tako da je $AB=3\cdot AM$. Ako je $N$ tačka preseka pravih $AC$ i $DM$, tada je površina trougla $AMN$ jednaka:

A) $\dfrac{1}{12}$; B) $\dfrac{1}{15}$; C) $\dfrac{1}{18}$; D) $\dfrac{1}{24}$; E) $\dfrac{1}{27}$.

**19.** Sva rešenja jednačine $\sin x+\cos x+\operatorname{tg} x=\dfrac{1}{\cos x}$ su:

A) $x=(2k+1)\pi,\ k\in Z$; B) $x=k\pi,\ k\in Z$; C) $x=2k\pi,\ k\in Z$;

D) $x=\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in Z$; E) $x=\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in Z$.

**20.** Visina prave kupe najmanje zapremine, opisane oko sfere datog poluprečnika $R$ je:

A) $2R$; B) $R\sqrt{2}$; C) $3R$; D) $2\sqrt{R}$; E) $4R$.

**26. juni 1992.**

**1.** Sveže pečurke sadrže 90% vode, a suve 12%. Koliko se kilograma suvih pečurki može dobiti od 22 kilograma svežih?

A) 2,464; B) 2,5; C) 2,64; D) 4,576; E) 4,84.

**2.** Ako je $f(x)=ax^2+bx+c$, tada je $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)$ za svako realno $x$ jednako:

A) $f(x)$; B) $f(-x)$; C) 0; D) $-f(x)$; E) $7f(x)-2c$.

**3.** Ako $a\in R\,/\,\{-1,0,1\}$, vrednost izraza $\left(\dfrac{1}{a-1}-\dfrac{a^3+1}{a^4-a}\right):\dfrac{a+1}{a-a^3}$ je

A) 1; B) $\dfrac{1-a-a^2}{1+a+a^2}$; C) $\dfrac{1-a-a^2}{(a^3-a^2)\,(a^3-1)}$; D) $\dfrac{a^2+a-1}{a^2+a+1}$;

E) $\dfrac{a+1}{1+a+a^2}$.

**4.** Vrednost izraza $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+0{,}2^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$ iznosi

A) $\dfrac{3}{25}$; B) 1; C) $\dfrac{5}{3}$; D) 3; E) 8.

**5.** Proizvod svih rešenja jednačine $|4x-6|-2x-12=0$ je:

A) $-18$; B) $-9$; C) $-6$; D) 3; E) 9.

**6.** Geometrijsko mesto tačaka $(x,\,y)$ temena parabola $y=x^2+kx+k+1,\ k\in R$, određeno je sa

A) $y=2-(x+1)^2$; B) $y=x^2+2x$; C) $y=3x$; D) $y=(1-3x)^2$;

E) $y=\dfrac{3}{4}$.

**7.** Date su realne funkcije $f_1(x)=(x-1)^2$, $f_2(x)=|x-1|^2$,

$f_3(x)=\sqrt{\dfrac{(x-1)^5}{x-1}}$, $f_4(x)=|x-1|\sqrt{x^2-2x+1}$ i

$f_5(x)=(x-1)\sqrt{(x-1)^2}$.

Tačno je tvrđenje

A) Sve date funkcije su međusobno različite;

B) $f_3\neq f_1=f_2=f_4\neq f_5$;

C) $f_1=f_2=f_3=f_4\neq f_5$;

D) $f_3\neq f_1=f_2\neq f_4$ i $f_5\neq f_1$;

E) Sve date funkcije su jednake.

**8.** Tačka simetrična tački $M\left(\dfrac{2}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$ u odnosu na pravu $x-3y-4=0$ je:

A) $(2,\,-3)$; B) $\left(\dfrac{8}{5},\dfrac{-14}{5}\right)$; C) $\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{-5}{2}\right)$; D) $(2,\,-4)$; E) $\left(\dfrac{5}{3},\,-3\right)$.

**9.** Neka je u trouglu $ABC$ $AB=AC$ i ugao kod temena $A$ veći od $30°$. Neka je $D$ tačka na stranici $BC$ takva da je ugao $BAD=30°$ i neka je $E$ tačka na stranici $AC$ takva da je $AE=AD$. Ugao $EDC$ jednak je:

A) $10°$; B) $12°$; C) $15°$; D) $18°$; E) $30°$.

**10.** Na segmentu $[0, 3\pi]$ broj rešenja jednačine $\sin 2x=\cos x$ je

A) 2; B) 3; C) 4; D) 5; E) 7.

**11.** Skup svih vrednosti realnog parametra $m$ za koj su koreni kvadratne jednačine $(m-2)x^2-2mx+2m+2=0$ realni i različitog znaka jeste

A) $(-1, 2)$; B) $(1-\sqrt{5}, -1)\cup(2, 1+\sqrt{5})$; C) $(1-\sqrt{5}, 1+\sqrt{5})$; D) $(2, \infty)$; E) $\emptyset$.

**12.** Ako su $a, b, c, d$ pozitivni realni brojevi različiti od 1, vrednost izraza $\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_d c \cdot \log_a d$ je

A) $abcd$; B) $\log_{abcd}(a+b+c+d)$; C) $ad$; D) $\dfrac{ad}{bc}$; E) 1.

**13.** Ako su prave $x+y-8=0$ i $x+3y+16=0$ tangente elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, uređen par $(a, b)$ jednak je

A) $(6, 5)$; B) $(6, 2\sqrt{6})$; C) $(2\sqrt{10}, 5)$; D) $(2\sqrt{10}, 2\sqrt{6})$; E) $(4\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$.

**14.** Ako su stranice trougla $ABC$, $AB=5$, $BC=6$, $AC=9$, tada je poluprečnik opisane kružnice tog trougla

A) $\dfrac{5\sqrt{3}}{2}$; B) $\dfrac{22}{5}$; C) $\dfrac{27\sqrt{2}}{8}$; D) $\dfrac{7}{2}\sqrt{2}$; E) $2\sqrt{6}$.

**15.** Oko polulopte poluprečnika $r$ opisana je prava kupa minimalne zapremine čija je osnova u ravni osnove polulopte. Zapremina te kupe iznosi

A) $\dfrac{4}{5}r^3\pi$; B) $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}r^3\pi$; C) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}r^3\pi$; D) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}r^3\pi$; E) $\dfrac{4}{3}r^3\pi$.



**16.** Jednačina $\sin^4 x+\cos^4 x=a$, $a\in R$, ima bar jedno rešenje ako i samo ako je

A) $-1<a<1$; B) $0\leq a\leq 1$; C) $0\leq a\leq \dfrac{1}{2}$; D) $\dfrac{1}{2}\leq a\leq 1$; E) $-1<a<\dfrac{1}{2}$.

**17.** Na teniskom turniru učestvuje $2^n$ takmičara. Turnir se igra po kup sistemu, tj. u naredno kolo se plasira pobednik u meču, a poraženi ispada iz daljeg takmičenja. Svaki meč se igra do tri dobijena seta, odnosno, pobeđuje onaj igrač koji prvi dobije tri seta. Poznato je da je na celom turniru odigrano ukupno $2^{n+1}+4n^2+184$ setova. Broj takmičara na turniru je

A) 32; B) 64; C) 128; D) 256; E) 512.

**18.** Tetive $AB$ i $AC$ kruga $k$ su jednake, a tetiva $AD$ seče $BC$ u tački $E$. Ako je $AC=12$ i $AE=8$, tada je $AD$ jednako

A) 16; B) $12\sqrt{2}$; C) 17; D) 18; E) $12\sqrt{3}$.

**19.** Ako je niz funkcija $f_n(x)$, $n\in N$, definisan na sledeći način:

$f_1(x)=\dfrac{x}{x-1}$, $f_2(x)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_{n+2}(x)=f_{n+1}(f_n(x))$, $n\in N$, onda je $f_{1992}(1992)$ jednako

A) $-1991$; B) $\dfrac{-1}{1991}$; C) $\dfrac{1}{1992}$; D) $\dfrac{1991}{1992}$; E) $\dfrac{1992}{1991}$.

**20.** Sistem jednačina $2^{1+\sqrt{xy}}+3^{x+y-1}=a$, $8^{1+\sqrt{xy}}+27^{x+y-1}=a^3-3a^2+3a$, $a\in R$, ima bar jedno rešenje $(x, y)$, $x, y\in R$ ako i samo ako je

A) $a\geq 3$; B) $1+\sqrt{2}\leq a\leq 1+2\sqrt{2}$; C) $3\leq a\leq 1+2\sqrt{2}$; D) $a>1$; E) $\sqrt{2}\leq a\leq 2\sqrt{2}$.

**4. septembar 1992.**

1. Jednačina prave $q$ koja prolazi kroz tačku $A\,(1,\,-2)$ i paralelna je pravoj $p$: $3x+2y-1=0$ je:

A) $3x+2y-3=0$; B) $2x+3y-1=0$; C) $x+y+2=0$; D) $3x+2y+1=0$; A) $2x-3y-8=0$.

2. Vrednost izraza $(0{,}536^2-0{,}464^2):(3{,}6^2-7{,}2\cdot 2{,}4+2{,}4^2)$ je:

A) 1; B) $\frac{1}{20}$; C) 1,25; D) $\frac{1}{4}$; E) $\frac{1}{2}$.

3. Ako je $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x^2+2x-1}$, onda je $f(\sqrt{2}+1)$ jednako:

A) 2; B) $\frac{4}{5}$; C) Ne postoji; D) $\dfrac{4+4\sqrt{2}}{5+4\sqrt{2}}$; E) 0.

4. Ostatak deljenja polinoma $4x^5+9x^3+19x+92$ binomom $x+1$ je:

A) 80; B) 60; C) 40; D) 124; E) 96.

5. Rešenje jednačine $\log_2(\log_4(\log_3 x))=-1$ pripada intervalu:

A) $(6,8)$; B) $(8,10)$; C) $(10,24]$; D) $(0,1)$; E) $(1,6)$.

6. Vrednost zbira $z=1+i+i^2+i^3+\ldots+i^{4n-1}$, gde je $n\in N$, a $i$ imaginarna jedinica, je:

A) 0; B) $i$; C) $-i$; D) $-1$; E) 1.

7. Ako je u trouglu $ABC$ ugao $BAC$ jednak $30°$, a stranice $BC=\sqrt{2}$ i $AC=2$, onda je ugao $ABC$ jednak:

A) $45°$; B) $60°$; C) $\arcsin\frac{2}{3}$; D) $\arcsin\frac{1}{3}$; E) $30°$.

8. Stranica romba je $a=9$, a zbir dijagonala $d_1+d_2=24$. Površina romba je:

A) 72; B) 64; C) 63; D) 108; E) 81.

9. Ako je $a\cdot b\neq 0$ i $a\neq b$, vrednost izraza
$$\left[\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-4\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2}{ab}-1\right)\right]:\frac{a^3-b^3}{ab}\ \text{je:}$$

A) $\frac{1}{ab}$; B) $a-b$; C) $\frac{a-b}{ab}$; D) $\frac{a+b}{ab}$; E) $\frac{a^2+ab+b^2}{ab}$.

10. Data je jednačina $\sqrt{16x^2-48x+36}=4x+11$. Tačan je iskaz:

A) Jednačina ima samo jedno pozitivno rešenje; B) Jednačina ima tačno dva rešenja; C) Jednačina ima beskonačno mnogo rešenja; D) Jednačina nema rešenje; E) Jednačina ima samo jedno negativno rešenje.

11. Oko kruga poluprečnika $r=\sqrt{\sqrt{2}+1}$ opisan je pravilan osmougao. Površina osmougla je:

A) $6\sqrt{2}$; B) 9; C) $4(\sqrt{2}+1$; D) $5\sqrt{2}$; E) 8.

12. Jednačina $x^2+ax+1=0$, $a\in R$, ima realne korene $x_1$ i $x_2$, koji zadovoljavaju uslov $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}<7$ ako i samo ako je:

A) $|a|>3$; B) $2\leq|a|<3$; C) $2\leq a<3$; D) $|a|\geq 2$; E) $2\leq a<\sqrt{7}$.

13. Vrednost izraza $\dfrac{\sin\,160°}{\sin\,100°(\cos^4\,40°-\sin^4\,40°)}$ je:

A) $2\sin 20°$; B) 2; C) $-2\sqrt{3}$; D) $-2$; E) $-2\sqrt{2}$.

14. Najkraće rastojanje između krive $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ i prave $x-y+3=0$ je:

A) $\sqrt{2}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{4}{5}$; D) $2(\sqrt{2}-1)$; E) 1.

15. Najveća zapremina uspravnog valjka, čija je površina jednaka $P$, iznosi:

A) $\dfrac{P\sqrt{P}}{3\sqrt{6\pi}}$; B) $\dfrac{P\sqrt{P}}{\sqrt{27\pi}}$; C) $\dfrac{P\sqrt{P}}{\sqrt{\pi}}$; D) $\dfrac{P\sqrt{P}}{8\sqrt{\pi}}$; E) $\dfrac{P^2}{2\pi}$.

**16.** Ako je $\operatorname{tg} x = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} < x < \pi$, $\operatorname{tg} y = 3$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$, tada je $\sin(x+y)$ jednako:

A) $-\frac{1}{6}$; B) $\frac{7\sqrt{2}}{10}$; C) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{10}$; E) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**17.** U košarkaškom timu igra 5 bekova, 4 centra i 3 krila. Na koliko se načina može sastaviti prva petorka, ako u njoj moraju da budu bar 2 beka i bar 1 centar.

A) 480; B) 540; C) 792; D) 120; E) 360.

**18.** Ako je $a > b \geq 0$, tada je skup rešenja nejednačine $ax + \frac{b}{x} < a + b$ jednak:

A) $(-\infty, 0) \cup (\frac{b}{a}, 1)$; B) $(\frac{b}{a}, +\infty)$; C) $(0, \frac{b}{a}) \cup (1, +\infty)$;

D) $(\frac{b}{a}, 1)$; E) $(-\infty, \frac{b}{a}) \cup (1, +\infty)$.

**19.** Skup rešenja nejednačine $\log_x \sqrt{\frac{5}{2}x - 1} > 1$ jednak je:

A) $\left(\frac{2}{5}, 1\right) \cup (1, 2)$; B) $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$; C) $\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{2}\right) \cup (1, 2)$;

D) $\left(\frac{2}{5}, +\infty\right)$; E) $(1, 2)$.

**20.** Proizvod rešenja jednačine $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 34$ je:

A) $12\sqrt{2} - 34$; B) $-12$; C) $-16$; D) $-4$; E) $-8$.

**25. jun 1993.**

1. Vrednost izraza $\left( \frac{\left(0{,}5 : 1{,}25 + \frac{7}{5} : 1\frac{4}{7} - \frac{3}{11}\right) \cdot 3}{\left(1{,}5 + \frac{1}{4}\right) : 18\frac{1}{3}} \right)$ jednaka je:

A) $\frac{2}{3}$; B) 2; C) $\sqrt[5]{\frac{3}{2}}$; D) 3; E) $\frac{1}{3}$.



2. Za svako $a > 1$, $\left( \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}}\right)$ jednako je:

A) $\sqrt{a^2 - 1}$; B) $a - 1$; C) $\sqrt{a-1}$; D) $a^2 - 1$; E) $2\sqrt{a(a-1)}$.

3. Ako je $A(x_0, y_0)$ tačka na pravoj $3x - 4y + 1 = 0$ koja je najbliža tački $B(2, 3)$, tada je $x_0 + y_0$ jednako:

A) $\frac{19}{4}$; B) $\frac{24}{5}$; C) $\frac{14}{3}$; D) $\frac{43}{9}$; E) $\frac{17}{6}$.

4. Zbir prva četiri člana aritmetičke progresije je 92, a zbir prvih devet članova je 342. Koliko prvih članova treba sabrati da bi se dobio zbir 840?

A) 11; B) 13; C) 15; D) 17; E) 21.

5. Neka je $P(x) = ax^2 + bx + c$. Ako je $P(0) = 4$, $P(1) = 5$, $P(-1) = 9$, tada je skup $\{a, b, c\}$ jednak:

A) $\{1, 2, 4\}$; B) $\{4, 5, 9\}$; C) $\{-2, 4, 3\}$; D) $\{0, -1, -2\}$;

E) $\{8, 9, -1\}$.

6. Prava $kx - 3y - 24 = 0$ je tangenta hiperbole $x^2 - y^2 = 36$ ako i samo ako $k$ ima vrednost:

A) 5 ili $-5$; B) 1 ili $-1$; C) 1 ili $-2$; D) 2 ili $-2$;

E) 3 ili $-1$.

7. Nejednakost $x + 1 > \sqrt{5 - x}$ je tačna ako i samo ako:

A) $1 < x \leq 5$; B) $x < -2$ ili $x > 1$; C) $-2 < x < 1$;

D) $-1 < x \leq 5$; E) $x < -2$.

8. Ako su $a + ib$, $c + id$ ($a, b, c, d$ realni brojevi, $i = \sqrt{-1}$) rešenja jednačine $z^2 = -15 - 8i$, tada je $a \cdot b \cdot c \cdot d$ jednako:

A) 15; B) $-12$; C) 12; D) 16; E) $-16$.

9. Broj rešenja jednačine $2\sin^4 x - 2\cos^4 x - 1 = 0$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ jednak je:

A) 6; B) 3; C) 5; D) 2; E) 4.

**10.** Ako je $a>0, b>0$ i $a^2+b^2=14ab$, tada je $\log_2(a+b)-\frac{1}{2}(\log_2 a+\log_2 b)$ jednako:

A) $\log_2 ab$; B) 0; C) $\frac{1}{2}$; D) 1; E) 2.

**11.** U oštrouglom trouglu zadane su stranice $a=1$, $b=2$ i površina $P=\frac{12}{13}$. Zbir kvadrata sinusa uglova trougla jednak je:

A) $\frac{134}{65}$; B) $\frac{352}{169}$; C) $\frac{1868}{845}$; D) $\frac{28}{13}$; E) $\frac{88}{39}$.

**12.** Maksimalna zapremina prave kupe date izvodnice $s$ jednaka je:

A) $2\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{27}$; B) $\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{24}$; C) $3\pi s^3\frac{\sqrt{2}}{4}$; D) $2\pi s^3\frac{\sqrt{3}}{3}$;

E) $\pi s^3\frac{\sqrt{2}}{6}$.

**13.** Zbir svih vrednosti parametra $a$, za koje je razlika korena jednačine $(a-2)x^2-(a-4)x-2=0$ jednaka 3, je:

A) 2; B) $-5$; C) $\frac{9}{2}$; D) 4; E) $\frac{11}{4}$.

**14.** Zbir kvadrata svih realnih rešenja jednačine $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)=15$ je:

A) 18; B) 25; C) 36; D) $\frac{44}{25}$; E) 23.

**15.** Jednačina $x-a=2\,|2\sqrt{x^2-a^2}|$ ima maksimalan broj rešenja ako i samo ako je:

A) $a<0$ ili $a>2$; B) $a\leq -2$ ili $a\geq -\frac{1}{2}$; C) $-2<a<0$;

D) $|a|\leq 1$; E) $-2<a<-\frac{1}{2}$.

**16.** Osnovice trapeza $ABCD$ su $AB=8$ i $CD=4$. Neka je $N$ tačka na stranici $BC$ takva da je površina trougla $ABN$ četiri puta manja od površine trapeza. Ako je $M$ tačka preseka pravih $AN$ i $CD$, tada je $CM$ jednako:

A) 13; B) $\frac{64}{5}$; C) $\frac{40}{3}$; D) 14; E) $\frac{49}{4}$.

**17.** Ako je $ax^3=by^3=cz^3$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$ ($x, y, z, a, b, c$ realni brojevi, $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}\neq 0$), tada je izraz $\frac{\sqrt[3]{ax^2+by^2+cz^2}}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$ jednak:

A) $\frac{\sqrt[3]{9(a^3+b^3+c^3)}}{a+b+c}$; B) $\sqrt[3]{\frac{ab+bc+ca}{a^2+b^2+c^2}}$;

C) $1+\sqrt[3]{a-b}+\sqrt[3]{b-c}+\sqrt[3]{c-a}$; D) Ne zavisi od $a, b, c$;

E) $\frac{a+b+c}{3\sqrt[3]{abc}}$.

**18.** Na šahovskom turniru učestvuje 8 igrača. Svako igra sa svakim po jednu partiju. U svkoj partiji, pobednik dobija 1 poen, poraženi dobija 0 poena, a pri nerešenom ishodu, oba igrača dobijaju po 0,5 poena. Na kraju turnira svi igrači su osvojili različit broj poena. Ako je petoplasirani igrač osvojio 2,5 poena, ako postoji igrač koji je osovojio 3,5 poena i ako drugoplasirani ima manje poena od zbira poena četvrtog, sedmog i osmog, tada je broj poena prvoplasiranog i drugoplasiranog jednak:

A) 7 i 6; B) 6,5 i 6; C) 7 i 5,5; D) 6,5 i 5,5; E) 7 i 5.

**19.** Vrednost proizvoda $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$ jednaka je:

A) $\frac{1}{4}$; B) $\frac{\sqrt{2}}{8}$; C) $\frac{1}{8}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{16}$; E) $\frac{\sqrt{3}}{16}$.

20. Neka je $S$ skup svih realnih brojeva $x$ za koje važi $\log_x \dfrac{62x^2-35x+6}{35-6x} \geq 3$. Tada je, za neke realne brojeve $a, b, c, d, e, f, g$ $(a<b<c<d<e<f<g)$, skup $S$ oblika:

A) $(a, b]\cup[c, d)\cup(d, e]\cup[f, g]$; B) $[a, b]\cup(c, d]\cup[e, f)$; C) $(a, b]\cup[c, d]\cup[e, f)$; D) $[a, b]\cup[c, d]\cup[e, +\infty)$; E) $(a, b]\cup[c, d)$.

**2. septembar 1993.**

1. Vrednost izraza $\left(\sqrt{(-2)^2}+\sqrt{(-1)^2}\right)^{-2} \cdot \dfrac{3+4{,}20 : 0{,}1}{\left(1 : \frac{3}{10}-2\frac{1}{3}\right) \cdot 0{,}3125}$ jednaka je:

A) $-16$; B) $54$; C) $6$; D) $16$; E) $48$.

2. Za $0<a<b$, vrednost izraza $\left(1+\left(\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^{-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{a}{b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}$ jednaka je:

A) $1$; B) $\dfrac{b-a}{ab}$; C) $\left(\dfrac{a+b}{a-b}\right)^2$; D) $\dfrac{a+b}{a-b}$; E) $\dfrac{a+b}{b-a}$.

3. Zbir svih vrednosti parametra $p$ za koje je zbir kvadrata korena jednačine $2x^2-px-2p+3=0$ jednak 2 je:

A) $2$; B) $-11$; C) $26$; D) $-8$; E) $3$.

4. U pravouglom trouglu tačka dodira upisane kružnice i hipotenuze deli hipotenuzu na odsečke dužine 5 cm i 12 cm. Zbir dužina kateta je:

A) 23 cm; B) 24 cm; C) 25 cm; D) $16\sqrt{2}$ cm; E) 22 cm.

5. Ako se poluprečnik sfere poveća za 1 cm, njena površina se poveća za $8\pi$ cm$^2$. Pri tome se zapremina svere (u cm$^3$) poveća za:



A) $4\pi$; B) $\dfrac{17}{6}\pi$; C) $16\pi$; D) $2^{9/2}\pi$; E) $\dfrac{13}{3}\pi$.

6. Jednačina prave koja prolazi kroz tačku $A(3,4)$ i normala je na pravoj $2x+3y-7=0$ je:

A) $3x-2y-1=0$; B) $3x-2y+1=0$; C) $2x-3y+6=0$; D) $3x+2y-17=0$; E) $2x+3y-18=0$.

7. Sva rešenja jednačine $4\sqrt{x+3}=x+6$ pripadaju skupu:

A) $(-2,0)\cup(1,2)$; B) $(-3,-1)\cup(2,7)$; C) $(0,5)$; D) $(-3,0)\cup(3,5)$; E) $(1,4)\cup(5,9)$.

8. Broj rešenja jednačine $\cos x=\cos 3x$ na segmentu $[0,2\pi]$ jednak je:

A) 0; B) 1; C) 2; D) 3; E) veći od 3.

9. Jednačina $|x-3|+2|x+1|=7$

A) nema rešenja; B) ima tačno jedno rešenje; C) ima tačno dva rešenja; D) ima tačno tri rešenja; E) ima beskonačno mnogo rešenja.

10. Skup rešenja nejednačine $\dfrac{x^2-x-6}{x^2-2x-3} \geqslant 1$ je;

A) $(-\infty,-1]\cup(3,+\infty)$; B) $(-1,3)\cup(3,+\infty)$; C) $(-1,+\infty)$; D) $[3,+\infty)$; E) $(-1,3)$.

11. Jednačina prave $q$ koja je simetrična pravoj $p: 3x+4y-2=0$ u odnosu na pravu $s: -x+y-8=0$ je:

A) $13x+8y+26=0$; B) $4x+3y+6=0$; C) $26x+23y+26=0$; D) $13x+15y=0$; E) $4x+3y+7=0$.

12. Skup svih rešenja nejednačine $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 \cdot \log_2 16x > 1$ je:

A) $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)\cup(1,4)$; B) $\left(0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},1\right)$; C) $\left(\frac{1}{3},\frac{3}{2}\right)$; D) $(1,4)$; E) $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$;

13. Rešenje jednačine $4^x - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$ nalazi se u intervalu:

A) $(-4,-2)$; B) $(-2,0)$; C) $(0,2)$; D) $(2,4)$; E) $(4,6)$.

14. Ako su $\alpha$ i $\beta$ oštri uglovi za koje je $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ i $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{3}$, tada je $\alpha + 2\beta$ jednako:

A) $30°$; B) $45°$; C) $60°$; D) $90°$; E) $135°$.

15. Zbir binomnih koeficijenata trećeg od početka i trećeg od kraja člana razvoja binoma $(\sqrt[4]{3} + \sqrt[3]{4})^n$ ($n$ je prirodan broj), jednak je 2450. Broj racionalnih članova u tom razvoju jednak je:

A) 7; B) 6; C) 5; D) 4; E) 3.

16. Broj 1993! se završava sa $N$ nula, gde je $N$ jednako:

A) 420; B) 495; C) 450; D) 440; E) 409.

17. Trocifrenih brojeva deljivih brojem 11 kod kojih je zbir cifara jednak 14 ima:

A) 7; B) 5; C) 3; D) 1; E) 0.

18. Skup prirodnih brojeva razbijen je u grupe na sledeći način: $\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10\}, \ldots$ Zbir brojeva 99. grupe jednak je:

A) 501509; B) 490901; C) 511932; D) 471981; E) 485199.

19. Ako su $m_a$, $m_b$, $m_c$ dužine težišnih linija trougla, tada je zbir kvadrata dužina stranica trougla jednak:

A) $\frac{4}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2)$; B) $\frac{4}{9}(m_a + m_b + m_c)^2$;

C) $\frac{4}{3}(m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c)^2$;

D) $\frac{1}{3}((m_a + m_b)^2 + (m_a + m_c)^2 + (m_b + m_c)^2)$;

E) $\frac{2}{3}(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 + m_a m_b + m_a m_c + m_b m_c)$.

20. Skup svih rešenja nejednačine $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$ je:

A) prazan skup; B) $\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$; C) $\left(2k\pi; \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$;

D) $\left(2k\pi; \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$; E) $\left(\frac{\pi}{12} + 2k\pi; \frac{5\pi}{12} + 2k\pi\right)$ ($k$ je ceo broj).

**1. jul 1994.**

1. Ako je $f(2x-1) = x$, tada je $f(f(x))$ jednako:

A) $x^2$; B) $\frac{x-3}{4}$; C) $2x-1$; D) $\frac{x+3}{4}$; E) $(2x-1)^2$; N) Ne znam.

2. Dat je pravougli trougao $ABC$ sa pravim uglom kod temena $C$. Ako je dužina visine $CC'$ iz temena $C$ jednaka $\sqrt{\frac{2}{3}}$ i dužina odsečka $C'B$ jednaka $\frac{2}{\sqrt{3}}$, tada je poluprečnik opisane kružnice oko trougla $ABC$ jednak:

A) $\frac{2}{3}$; B) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; E) 1; N) Ne znam.

3. Data je jednačina $(k^2-1)x + k - 1 = 0$ ($k$ realan broj) i iskazi:

I Za $k=1$, data jednačina ima beskonačno mnogo rešenja.
II Za $k=-1$, data jednačina ima više od jednog rešenja.
III Za $k \notin \{-1,1\}$, data jednačina ima jedinstveno rešenje.

Tačni su:

A) Samo I i II; B) Svi iskazi; C) Samo II; D) Samo I; E) Samo I i III; N) Ne znam.

4. Rastojanje centra kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 4 = 0$ od tačke $M(-1,2)$ je:

A) $-1$; B) 1; C) $\sqrt{2}$; D) 2; E) 0; N) Ne znam.

5. Izraz $\left(81^{-2^{-2}}\right) : \left(81^{(-2)^{-2}}\right)$ ima vrednost:

A) $3^{-8}$; B) $3^{-5}$; C) $3^{-2}$; D) 1; E) $3^8$; N) Ne znam

6. Ako je $\log_{10}5=a$, $\log_{10}3=b$, tada je $\log_{30}8$ jednako:

A) $\frac{3(1-a)}{1+b}$; B) $\frac{3(a+1)}{1-b}$; C) $\frac{3(1-a)}{b-1}$; D) $\frac{2-a}{1+b}$; E) $\frac{3a+1}{1-b}$;

N) Ne znam.

7. Nejednakost $\frac{5-2x}{x^2-6x+8}\geqslant 1$ tačna je ako i samo ako $x$ pripada skupu:

A) $(-\infty,2)\cup\left[\frac{5}{2},4\right)$; B) $[1,2)\cup[3,4)$; C) $(0,2)\cup(3,4]$;

D) $[1,2)\cup[3,5)$; E) $[1,3]$; N) Ne znam.

8. Odnos visina dve pravilne trostrane piramide je 1:2, a ivica manje piramide je $a=\sqrt{6}$. Površina veće piramide jednaka je:

A) $30\sqrt{3}$; B) $12\sqrt{3}$; C) $16\sqrt{3}$; D) $20\sqrt{3}$; E) $24\sqrt{3}$;

N) Ne znam.

9. Neka je $S$ skup svih brojeva $x_k$ definisanih sa $x_k=i^k+i^{-k}$, gde je $k$ prirodan broj a $i^2=-1$. Akup $S$ ima:

A) 4 elementa; B) Više od 4 elementa; C) 2 elementa;

D) 3 elementa; E) 1 element; N) Ne znam.

10. Najmanja vrednost funkcije $f(x)=\cos x+\sin x$ je:

A) $-\sqrt{3}$; B) 0; C) $-1$; D) $-2$; E) $-\sqrt{2}$; N) Ne znam.

11. Date su tačke $A(0,a)$ i $B(0,b)$, $0<a<b$. Ako se iz tačke $C(x,0)$, $x>0$, duž $AB$ vidi pod maksimalnim uglom, tada je $x$ jednako:

A) $\sqrt{ab}$; B) $ab$; C) $\frac{a+b}{2}$; D) $\sqrt{a(b-a)}$; E) $\sqrt{b(b-a)}$;

N) Ne znam.

12. Ako su $x_1$, $x_2$ i $x_3$ rešenja jednačine $125x^3-64=0$, tada je $x_1x_2x_3-(x_1+x_2+x_3)$ jednako:

A) $-\frac{64}{125}$; B) 0; C) $\frac{125}{64}$; D) $\frac{64}{125}$; E) $\frac{8}{25}$; N) Ne znam.



13. Broj rešenja $(x,y)$ sistema jednačina $x+y=3$, $|x|^{x^2-y^2-6}=1$ je:

A) 1; B) 3; C) 0; D) 2; E) 4; N) Ne znam.

14. Broj racionalnih članova u razvoju stepena binoma $(\sqrt{6}+\sqrt[3]{3})^{1994}$ je :

A) 334; B) 330; C) 331; D) 332; E) 333; N) Ne znam.

15. Dat polinom $P(x)$ stepena $n(n\geq 3)$. Ako je ostatak deljenja $P(x)$ sa $x-1$ jednak 1, a ostatak deljenja $P(x)$ sa $x^2+1$ jednak $2+x$, onda je ostatak deljenja $P(x)$ sa $(x-1)(x^2+1)$ jednak:

A) $x^2+x$; B) $-x^2+x+1$; C) $3+x$; D) $x^2-x+2$;

E) $2+x$; N) Ne znam.

16. Neka je $p$ ceo broj i $\alpha\in\left(0,\frac{\pi}{4}\right]$. Ako su $x_1=\cos\alpha$ i $x_2=\sin\alpha$ rešenja jednačine $18x^2-6(p+3)x+p(p+6)=0$, broj uređenih parova $(p,\alpha)$ je:

A) veći od 3; B) 0; C) 1; D) 2; E) 3; N) Ne znam.

17. Zbir $\mathrm{tg}9^\circ+\mathrm{tg}81^\circ+\mathrm{tg}117^\circ+\mathrm{tg}153^\circ$ jednak je:

A) $-3$; B) 1; C) 4; D) $3\sqrt{3}$; E) $-\frac{13\sqrt{3}}{5}$; N) Ne znam.

18. Neka je $S$ skup svih realnih brojeva $x$ za koje važi $\log_{\mathrm{tg}x}\sin x-\log_{\mathrm{ctg}x}\cos x\geq 3$ i $0\leq x\leq 2\pi$. Tada je, za neke realne brojeve $a$, $b$, $c$, $(a<b<c)$, skup $S$ oblika:

A) $(a,b)$; B) $(a,b)\cup(b,c)$; C) $[a,b]$; D) $[a,b)\cup(b,c]$;

E) $[a,b)$; N) Ne znam.

19. Broj rešenja jednačine $2\cos^2\frac{x^2+x}{3}=3^x+3^{-x}$ je:

A) veći od 3; B) 0; C) 1; D) 2; E) 3; N) Ne znam.

20. U ormanu se nalazi 10 različitih pari cipela. Na koliko načina možemo izabrati 4 cipele tako da među izabranim cipelama bude bar jedan par iste vrste?

A) 2100; B) 3360; C) 1485; D) 1530; E) 1440;

N) Ne znam.

# REŠENJA

# I GLAVA

## 1. FUNKCIJE

### 1.1. Neka svojstva elementarnih funkcija

**1.** a) $D = \{x \mid x \in [-2, 2]\}$, $D = \{y \mid y \in [-2, 2]\}$;
b) $D = \{x \mid x \in [0, 4]\}$, $D = \{y \mid y \in [-2, 2]\}$;
c) $D = \{x \mid x \in (-\infty, 0) \cup (6, +\infty)\}$,
$D = \{y \mid y \in (-\infty, +\infty)\}$.

**2.** c) $A = \{y \mid -\infty < y < 2\}$.

**3.** c) $1 < x < 4$;
d) $x > \dfrac{8}{3}$;
f) $1 \leq x \leq 4$.

**4.** Iskoristiti da je $0 \leq \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} \leq 1$.
Rezultat je
$$D = \left\{x \mid x \in \left[\frac{1 - \sqrt{13}}{2}, -1\right] \cup \left[1, \frac{1 + \sqrt{13}}{2}\right]\right\}.$$

**10.** Da bi se odredila nepoznata funkcija $f$, treba zameniti argumente:
$x + 1; x + x^{-1}; x^{-1}$ i $\dfrac{x}{x + 1}$ sa novom promenljivom, recimo sa $t$ itd.
a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$;
b) $f(x) = x^2 - 2$;
c) $f(x) = \dfrac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$;
d) $f(x) = \left(\dfrac{x}{1 - x}\right)^2$.

**11.** Neka je $x-1=t$, tada je
$f(t)=2(t+1)-3=2t-1$. Ako stavimo da je
$t=x^2-x+1$, imamo da je
$f(x^2-x+1)=2x^2-2x+1$, a
$f(f(x^2-x+1))=4x^2-4x+1$.

**14.** a) parna; b) parna; c) ni parna ni neparna;
d) parna; e) neparna.

**18.** Na osnovu pretpostavke, imamo jednakost
$ax^2+bx-a(x-1)^2-b(x-1)=x$, ili
$2ax-a+b=x$.
Da bi poslednja jednakost bila identitet, neophodno je da su zadovoljene jednakosti
$2a=1$, $-a+b=0$. Odavde nalazimo da je
$$a=b=\frac{1}{2}.$$
Tražena funkcija ima oblik
$$f(x)=\frac{x^2}{2}+\frac{x}{2}=\frac{x(x+1)}{2}.$$
Kako je
$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$
sledi da je
$f(n)=1+2+3+\ldots+n$.

**19.** Neka je $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ traženi polinom. Na osnovu pretpostavke, imamo jednakost
$ax^3+bx^2+cx-a(x-1)^3-b(x-1)^2-c(x-1)=x^2$.
Iz ovog identiteta sledi $3a=1$, $-3a+2b=0$,
$a-b+c=0$.
Odavde nalazimo da je
$$a=\frac{1}{3},\ b=\frac{1}{2},\ c=\frac{1}{6}.$$
Dakle, traženi polinom
$$f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{x}{6}=\frac{x(x+1)(2x+1)}{6}.$$
Ako u dati identitet zamenimo $x$ redom sa prvih $n$ prirodnih brojeva, imamo:

$f(1)-f(0)=1^2$,
$f(2)-f(1)=2^2$,
$f(3)-f(2)=3^2$,
. . . . . . . . . .
$f(n)-f(n-1)=n^2$.
Sumiranjem nalazimo da je
$$f(n)=1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

**20.** a) $\omega=\dfrac{2\pi}{b}$; b) $\omega=2\pi$; c) $\omega=\pi$; d) $\omega=2\pi$.

**22.** Amplituda je $A=\sqrt{a^2+b^2}$, a period $\omega=\dfrac{2\pi}{p}$.

**23.** Date funkcije se mogu izraziti kao linearne kompozicije izraza $\sin px$ i $\cos px$.
a) $y=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cos 4x \Rightarrow \omega=\dfrac{2\pi}{4}=\dfrac{\pi}{2}$;
b) $y=\dfrac{5}{8}+\dfrac{3}{8}\cos 4x \Rightarrow \omega=\dfrac{\pi}{2}$.

**24.** Da bismo odredili inverznu funkciju, uočimo njene monotone grane. Data funkcija ima dve monotone grane, i to:
1° $f(x)=x^2 \wedge x<0$;
2° $f(x)=x^2 \wedge x\geq 0$.
Iskoristimo li poznatu jednakost $f^{-1}(f(x))=x$, imamo inverznu granu za
1° $f^{-1}(x)=-\sqrt{x} \wedge y<0$, a za granu
2° $f^{-1}(x)=+\sqrt{x} \wedge y\geq 0$.

**25.** Iskoristimo li poznatu jednakost $f^{-1}(f(x))=x$, imamo
$f^{-1}(\log_2(x-1))=x$. Neka je
$\log_2(x-1)=t$, tada je $x-1=2^t \Rightarrow x=2^t+1$,
pa je $f^{-1}(t)=2^t+1$. Dakle, inverzna funkcija datoj je
$f^{-1}(x)=2^x+1$.

**26.** Analogno prethodnom zadatku imamo:

$f^{-1}(3^x-1)=x\,.$
Smenom $3^x-1=t$, nalazimo da je
$x=\log_3(t+1)$, pa je
$f^{-1}(t)=\log_3(t+1)$, ili $f^{-1}(x)=\log_3(x+1)\,.$

**28.** $f^{-1}(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2}\,.$

**29.** $f^{-1}(x)=\log_a\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$

**31.** $f(x)=\dfrac{e}{\sqrt[3]{x^2-1}}-2\,;$

$D=\{x\mid x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)\};$

$$f^{-1}(x)=\sqrt{1+\left(\frac{e}{x+2}\right)^3}\,.$$

**32.** Na osnovu definicije inverzne funkcije, imamo funkcionalnu jednačinu

$$f^{-1}\left(\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}\right)=x\,.$$

Neka je $\sqrt[3]{x+\sqrt{1+x^2}}+\sqrt[3]{x-\sqrt{1+x^2}}=t\,.$
Primenom identiteta
$(a+b)^3=a^3+b^3+3ab(a+b)$, imamo
$x+\sqrt{1+x^2}+x-\sqrt{1+x^2}+$
$+3\sqrt[3]{\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(x-\sqrt{1+x^2}\right)}\;t=t^3$, odavde

$$2x-3t=t^3\Rightarrow x=\frac{t^3+3t}{2}\,.$$

Zamenom u funkcionalnoj vezi

$$f^{-1}(t)=\frac{t^3+3t}{2}\,,$$

nalazimo da je

$$f^{-1}(x)=\frac{x^3+3x}{2}\,.$$

**33.** a) Kako u ovom slučaju na osnovnom periodu data funkcija ima dve monotone grane, tada je inverzna funkcija za datu:



$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\ \wedge\ -\frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{6}\,,$$

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{3}\arcsin\frac{x}{2}\ \wedge\ \frac{\pi}{6}<y<\frac{\pi}{2}\,.$$

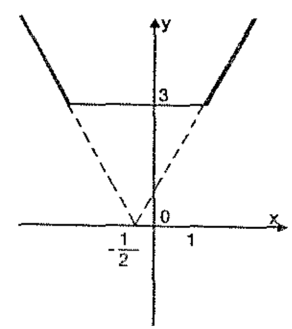
**34.** a) $x\in\left(-\infty,-2\right]\cup\left[\dfrac{2}{3},+\infty\right);$ b) $x\in[-1,3]\,;$

c) $x\in\left[-2,-\dfrac{2}{3}\right]\cup\left[0,2\right]\,;$ d) $x\in[-0{,}5;\,1].$

**35.** a) $x_1=-1;\ x_2=4;$ b) $x_1=2;\ x_2=4.$

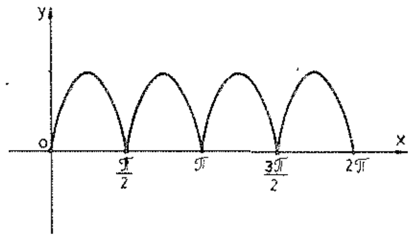
**36.** $\beta=\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2\pi}{3}\,.$

**38.** b) Na osnovu definicije kvadratnog korena, imamo
$y=|x-1|+|x+2|$. Odavde dobijamo:
1° za $x<-2,\ y=-2x-1\,;$
2° $-2\le x<1,\ y=3;$
3° za $x\ge 1,\ y=2x+1.$
Grafik je prikazan na slici 6.1.




*Sl.* 6.1

g) Za $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right]$ $y=\sin 2x$, i za
$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2}\right)$ $y=-\sin 2x\,.$
Grafik je prikazan na slici 6.2.




*Sl.* 6.2

**40.** $f(x) = \dfrac{x+7}{2x+1}$.

**41.** $f(x) = 2 + 3 \cdot 4^x$.

**42.** a) $f(f(x)) = -\dfrac{1}{x}$; b) $x = -2$; c) nema rešenja.

**43.** $x\,(1 + 5x^2)^{-0,5}$.

**44.** Iskoristiti rešenje prethodnog zadatka.

**45.** a) $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$; b) $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$;
c) $(-\sqrt{2}, -1) \cup (\sqrt{2}, +\infty)$; d) $a \in (-1{,}0) \cup (1, +\infty)$.

**46.** a) $|x| \leq 4$ (Dokazati da je $\sin x \cdot \sin 7x \neq 1$.)
b) Parna.

**47.** $[5, \infty) \cup \{4\}$.

**48.** Jednakost je tačna, što se lako dokazuje. Za dokaz suprotnog tvrđenja stavimo u (1) umesto $x$, $-x-3$, tada (1) postaje
(2) $2f(-x-1) + f(x+2) = (x+3)^2 - 4(x+3) + 4$.
Iz (1) i (2) nalazimo da je
(3) $2f(x+2) = x^2 + 6x + 7$.
Zamenom u (3), $x-2$ umesto $x$ imamo:
$f(x) = \dfrac{1}{3}\left((x-2)^2 + 6(x-2) + 7\right) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{3}$.

**49.** $[-4, 2) \cup (3, 4]$.

**50.** $-1 \leq x \leq -\dfrac{1}{2}$, $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$.



**51.** $a = b = c = 0$.

**54.** Ako je $\dfrac{x-2}{x+1} = z$, tada je
$x = \dfrac{z+2}{1-z}$, $\dfrac{x+1}{x-2} = \dfrac{1}{z}$ $(z \neq 1, z \neq 0)$.

Data funkcionalna jednačina postaje

(1) $f\left(\dfrac{1}{z}\right) + 2f(z) = \dfrac{z+2}{1-z}$.

Ako u (1) zamenimo $z$ sa $\dfrac{1}{z}$, dobijamo

(2) $f(z) + 2f\left(\dfrac{1}{z}\right) = \dfrac{1+2z}{z-1}$.

Iz (1) i (2) nalazimo da je $f(z) = \dfrac{4z+5}{3(1-z)}$.

Dakle, tražena funkcija je $f(x) = \dfrac{4x+5}{3(1-x)}$.

**55.** Tačno je tvrđenje pod b) $f_3 \neq f_1 = f_2 = f_4 \neq f_5$.

**56.** Iz definicije niza funkcija nalazimo da je

$f_1(x) = f_7(x) = \ldots = \dfrac{x}{x-1}$,

$f_2(x) = f_8(x) = \ldots = \dfrac{1}{1-x}$,

$f_3(x) = f_9(x) = \ldots = 1 - x$,

$f_4(x) = f_{10}(x) = \ldots = \dfrac{x}{x-1}$,

$f_5(x) = f_{11}(x) = \ldots = \dfrac{x-1}{x}$,

$f_6(x) = f_{12}(x) = \ldots = \dfrac{1}{x}$.

Odavde zaključujemo da je $f_{n+6}(x) = f_n(x)$. Kako je 1992 deljivo sa 6, sleduje da je

$f_6(x) = f_{12}(x) = \ldots = f_{1992}(1992) = \dfrac{1}{1992}$.

**57.** $f(3) = 6{,}25$ .

**58.** Tačan je iskaz c).

**59.** Tačan je iskaz e).

**60.** $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 12$ .

**61.** $f(1) = 20$ .

**62.** $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$ .

**63.** a) 39; b) $x_{1,2} = \pm 2$ .

## 1.2. Granična vrednost funkcije

**64.** a) $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$; b) $\delta(\varepsilon) = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$; c) $\delta(\varepsilon) = 3\varepsilon$; d) $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{3}$.

**65.** 0,005.

**66.** a) $\frac{3}{4}$; b) $\frac{5}{2}$; d) 1 .

**67.** a) 4 ; b) $-\frac{8}{3}$; c) 0.

**68.** a) 1. b) $\infty$ ; c) $-\frac{36}{5}$ .

**69.** a) 3; b) 0,4; c) $\frac{16}{3}$ .

**70.** a) $\lim\limits_{x \to \infty} (x - \sqrt{x^2 - 10x}) = \lim\limits_{x \to \infty} \frac{10x}{x + \sqrt{x^2 - 10x}} =$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{10}{1 + \sqrt{1 - \frac{10}{x}}} = 5$ ;

b) 0; c) $\frac{1}{8}$; d) $24\sqrt{a}$ ; e) 2 .



**71.** a) $\frac{2c}{b}$; b) 6; c) 20; d) $-\frac{1}{14}$; e) $\frac{1}{4}$; f) 4.

**72.** a) $\frac{2}{3}$; b) $\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$; c) $-2$ ; d) $\frac{1}{3}$; e) 4 ; f) 0,5 .

**73.** a) $\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{2\sqrt{a}}$; c) $\frac{a+b}{2}$; d) $\frac{a+b}{2}$.

**74.** a) 4 ; b) 1 ; c) 2 ; d) $\frac{1}{2}$; e) $2\cos a$ ; f) $\cos a$ .

**75.** a) $-\frac{1}{3}$; b) $\frac{3}{2}$; c) $\frac{1}{2}$; d) $\frac{1}{4}$; e) 8 ; f) 3 .

**76.** a) $-\frac{1}{2}$; b) $-2$; c) $\frac{\sin 2a}{2a}$; d) 1; e) $\frac{b^2 - a^2}{2}$; f) $\frac{2}{\pi}$.

**77.** a) 6 ; b) $\frac{\sqrt{2}}{8}$.

**78.** a) $\cos^3 a$ ; b) $\frac{1}{4}$.

**79.** a) 1 ;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1 - \cos\left(2\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^4} =$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{x^4} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{8} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^4 \cdot$

$\left(\frac{\sin\left(\sin^2 \frac{x}{2}\right)}{\sin^2 \frac{x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{8}$ .

**80.** $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{n}{2} r^2 \sin\frac{2\pi}{n} = r^2\pi$.

$\lim\limits_{n\to\infty} O_n = \lim\limits_{n\to\infty} 2rn \sin\frac{\pi}{n} = 2r\pi$.

**81.** 8.

**82.** $\frac{3}{2}$.

**83.** Primeniti obrazac

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$.

Rezultat je $\frac{m}{n}$.

**84.** a) $e^2$, b) $e^{2m}$.

**85.** a) $e^{\frac{n-p}{m}}$; b) $e^3$.

**86.** a) $e^3$; b) $10 \log e$.

**87.** a) 1; b) 1.

**88.** a) $e^{-\frac{5}{4}}$; b) $e^{10}$.

**89.** a) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+x+1}{x^2-x-1}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-x-1)+(2x+2)}{x^2-x-1}\right)^x =$

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+2}{x^2-x-1}\right)^x =$

$= \lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{2x+2}{x^2-x-1}\right)^{\frac{x^2-x-1}{2x+2}\cdot\frac{2x^2+2x}{x^2-x-1}} = e^2$.

Ovde smo iskoristili da je

$\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{\frac{1}{f(x)}} = e$.

b) $e^8$.



**90.** a) $e^3$; b) $e^{-0,5}$.

**91.** a) Smena $e^x - 1 = t$; b) Smena $a^x - 1 = t$.

**92.** a) Iskoristiti prethodni zadatak pod a). Rezultat je $-2$;

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax}-e^{bx}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{ax-bx}-1)}{x} =$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{bx}(e^{(a-b)x}-1)(a-b)}{(a-b)x} = a-b$.

**93.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}\cdot\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right) = 1$;

b) $\ln a$ $\left(\text{smena } \frac{1}{x} = t\right)$.

**94.** 1.

**95.** a) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\cos x-\sqrt{3}}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\left(\cos x-\cos\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)} =$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{-4\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)} =$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\frac{2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)} = 1$;

b) $\sqrt{2}$.

**96.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - \cos x}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{x^2}-1}{x^2} + \frac{1-\cos x}{x^2}\right) = \frac{3}{2};$$

b) 1.

**97.** $\sqrt{e}$.

**98.** Smena $x = \pi + t$. Ako su $a$ i $b$ oba parna ili oba neparna, dati limes ima vrednost $\dfrac{a}{b}$.

Ako su brojevi $a$ i $b$ jedan paran, a drugi neparan, dati limes ima vrednost $-\dfrac{a}{b}$.

**99.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[m]{\cos ax} - \sqrt[n]{\cos bx}}{x^2} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sqrt[n]{\cos bx} - (1 - \sqrt[m]{\cos ax})}{x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos bx}{x^2(1 + \sqrt[n]{\cos bx} + \ldots + (\sqrt[n]{\cos bx})^{n-1})} -$$

$$- \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos ax}{x^2(1 + \sqrt[m]{\cos ax} + \ldots + \sqrt[m]{\cos ax})^{m-1}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{b^2}{n} - \frac{a^2}{m}\right).$$

Pri racionalisanju korišćena je formula
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + b^{n-1})$.

**100.** a) $a = 1$ i $b = -1$; b) $a = -1$ i $b = \dfrac{1}{2}$.

**101.** a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin x)}{\sin x} \cdot \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

b) $\arcsin x = t \Rightarrow x = \sin t$. Rezultat je $\dfrac{2}{3}$.



**102.** a) Smena $\operatorname{arc\,tg} x = t$. Rezultat je 1.

b) $\dfrac{2}{3}$ (skratiti razlomak sa $x$).

**103.** a) Smena $\arcsin(1-2x) = t$. Rezultat je $-0{,}5$.

b) Smena $\dfrac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\dfrac{x}{x+1} = t$. Rezultat je 0,5.

**104.** a) $\dfrac{2}{\pi}$; b) $\dfrac{1}{4}$.

**105.** $\lim\limits_{x\to a} \sin\dfrac{x-a}{2} \operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{2a}\right) = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}} \cdot \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{2a}\right)}{\dfrac{-\pi}{a}} \cdot$

$$\cdot \left(\frac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{2a}\right)}{\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi x}{2a}}\right)^{-1} = -\frac{a}{\pi}.$$

**106.** a) 1; b) $\dfrac{a^2}{b^2}$.

**107.** a) 1; b) 3.

### 1.3. Asimptote krivih linija u ravni

**108.** a) Vertikalna $x = 2$, kosa $y = x - 2$,
b) Vertikalna $x = 0$, kosa $y = 4x - 1$.

**109.** a) $x - 2 = 0$, $x - y = 0$;
b) $x = 1$, $x = -1$, $y = x$.

**110.** a) $x = -1$, $x - 2y = 0$;
b) $x = 1$, $x = -1$, $y = -1$; c) $x = 2$.

**111.** a) $x = 0$, $x = 2$, $y = -1$; b) $x = 0$, $y = 1$;
c) $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in Z$.

**112.** a) $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$; b) $x=k\pi$; c) $x=k\pi$, $k\in Z$.

**113.** a) $y=x+1$, $x=0$; b) $y=1$, $y=-1$.

**114.** $x=0$, $x=\pi$, $x=-\pi$.

**115.** $x=2$, $x=-2$, $y=1$, $y=-1$.

**116.** $x=-1$, $y=x-3$.



# II GLAVA

## 2. IZVOD FUNKCIJE

### 2.1. Priraštaj funkcije

**117.** $x_0=1$.

**118.** $\Delta x=0{,}01$ $\Delta x=1{,}99$.

**119.** $\beta=45°$.

**120.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=4{,}52$.

**121.** a) $x=999$, $\Delta y=3$; b) $\Delta y=1$, $\Delta x=4{,}5$.

**122.** $\frac{\Delta y}{\Delta x}=0{,}99485$.

**123.** $\frac{\Delta s}{\Delta t}=10+10t+5t$: a) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=215$ m/s; b) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=210{,}5$ m/s;

c) $\frac{\Delta s}{\Delta t}=210{,}05$ m/s; $v(20)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=210$ m/s

**124.** $x_2=2a$

**125.** a) Kako je $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=f(2)=5$, data funkcija je neprekidna za $x=2$.

b) Neprekidna je $x=1$.

**126.** Primeni definiciju 2 neprekidnosti $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

**127.** Tražena funkcija je $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in D, \\ \dfrac{1}{3}, & x=1 . \end{cases}$

**128.** $F(x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 0 \\ 0{,}5, & x=0 . \end{cases}$

**129.** a) $a=1$; b) $a=-6$; c) $a=4$.

**130.** *Primedba* 1. Ako postoji konačna leva i desna granična vrednost funkcije $y=f(x)$ u tački $x=a$ i ako su ove dve granične vrednosti različite međusobom, tj. $f(a+0)\neq f(a-0)$, tada se tačka $x=a$ naziva tačkom prekida prve vrste.

*Primedba* 2. Ako u tački $x=a$ bar jedna od jednostranih graničnih vrednosti ne postoji, ili je ova beskonačna, tačka $x=a$ se naziva tačka prekida druge vrste:

a) funkcija ima prekid druge vrste za $x=3$, jer je

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{x}{x-3}=-\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x\to 3+0}\frac{x}{x-3}=+\infty ;$$

b) $x=2$ i $x=4$ prekid druge vrste;

c) $x=0$, $x=-1$ i $x=\pm 2$ prekidi druge vrste;

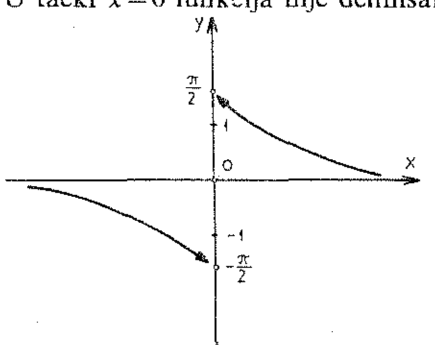
d) $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, prekidi druge vrste $(k\in Z)$;

e) $x=k\pi$, prekid druge vrste $(k\in Z)$;

f) $x=0$ je prekid prve vrste, jer je

$$\lim_{x\to -0}\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=1, \quad \text{a} \quad \lim_{x\to +0}\frac{1}{1+5^{\frac{1}{x}}}=0 .$$

**131.** Data funkcija ima tačku $x=0$ za tačku prekida prve vrste, jer je $f(+0)=\lim\limits_{x\to +0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{2}$, $f(-0)=\lim\limits_{x\to -0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\pi}{2}$, tj. $f(+0)\neq f(-0)$. U tački $x=0$ funkcija nije definisana (sl. 7).




Sl. 7.



**133.** Za $x=0$ funkcija ima prekid prve vrste.

## 2.2. Izvod funkcije

**134.** a) $$f'(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{2(x+x)-3}-\sqrt{2x-3}}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2x+2\Delta x-3-2x+3}{\sqrt{2x+2\Delta x-3}+\sqrt{2x-3}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{\sqrt{2x+2\Delta x-3}+\sqrt{2x-3}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2x-3}} ;$$

b) $f'(x)=-\dfrac{2}{\sqrt{(4x+5)^3}}$.

**135.** a) $$f'(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt[3]{x+\Delta x}-\sqrt[3]{x}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x(\sqrt[3]{x+x})^2+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+\Delta x)^2}+\sqrt[3]{x(x+\Delta x)}+\sqrt[3]{x^2}}=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} ;$$

b) $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-a)^2}}$.

**136.** a) $$f'(x)\overset{\text{def}}{=}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)\sin(x+\Delta x)-x\sin x}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x(\sin(x+\Delta x)-\sin x)+x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x\cdot 2\cos\dfrac{x+\Delta x+x}{2}\sin\dfrac{x+\Delta x-x}{2}+\Delta x\sin(x+\Delta x)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x\cos\left(x+\dfrac{\Delta x}{2}\sin\dfrac{\Delta x}{2}\right)}{\dfrac{\Delta x}{2}}+\lim_{\Delta x\to 0}(\sin(x+\Delta x))=x\cos x+\sin x ;$$

b) $f'(x)=\cos x-x\sin x$.

**137.** a) $f'(x)\overset{\text{def}}{=}\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x-\Delta x)^2\sin(2x+2\Delta x)-x^2\sin 2x}{\Delta x}=$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{x^2(\sin(2x+2\Delta x)-\sin 2x)+2x\Delta x(\sin(2x+2\Delta x)+\Delta x^2\sin(2x+2\Delta x))}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{2x^2(\cos(2x+\Delta x)\cdot\sin\Delta x}{\Delta x}+\lim\limits_{\Delta x\to 0}2x\sin(2x+2\Delta x)+$

$+\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin(2x+2\Delta x)=2x^2\cos 2x+2x\sin 2x$;

b) $f'(x)\ 2x\cos 3x-3x^2\sin 3x$.

**138.** a) $f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$; b) $f'(x)=3\sqrt{x}$.

**139.** a) $y'=30x^5-15x^4+4$; b) $y'=12x^2-4x+1$.

**140.** a) $y'=\frac{2}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$;

b) $y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\frac{6}{x^3}+\frac{3}{5x^4}$.

**141.** a) $y'=4x^3$; b) $y'=(x^2+x+1)(5x^2-x-1)$.

**142.** a) $f'(x)=6x^2+14x+1$; b) $f'(x)=24x^3+22x$.

**143.** a) $f'(x)=2x\cos x-x^2\sin x$;
b) $f'(x)=3x^2\sin x+x^3\cos x$.

**144.** a) $f'(x)=\frac{4}{\sin^2 2x}$; b) $f(x)=2\sin^2 x$.

**145.** a) $f'(x)=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$; b) $f'(x)=\frac{2a}{(x+a)^2}$; c) $f'(x)=\frac{4x}{(2-x^2)^2}$.

**146.** a) $f'(x)=\frac{-4x}{(x^{2+}x+1)}2$; b) $f'(x)=\frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$.

**147.** a) $f(x)=\frac{x^2}{(\cos x+x\sin x)^2}$; b) $f'(x)=e^x\left(\arcsin x+(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right)$.

**148.** a) $y'=\frac{1}{1-\sin x}$; b) $f'(t)=-\frac{\sin t+2}{(1+2\sin t)^2}$.

**149.** $f'(t)=t\operatorname{arctg} t$.

**150.** $f'(-1)=-20$.

**151.** $f'(3)=21$.

**152.** $f'(1)=1$.

**153.** $f'(3)=26$.

**154.** $f'(x)=\frac{2\sin x}{(\cos x-1)^2}$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\sqrt{3}$.

**155.** $f'(x)=\frac{1}{1-\sin 2x}$, $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=2(2+\sqrt{3})$

**156.** $f'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=16$.

**157.** $f'(x)=-\frac{2e^x}{(e^x-1)^2}$, $f'(-1)=-\frac{2e}{(1-e)^2}$.

**158.** $f'(x)=\frac{5}{1+x^2}$, $f'(2)=1$.

**159.** $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=4\sqrt{2}-6$.

**160.** $f'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$.

**161.** $f'(x)=\frac{1}{1-\sin 2x}$.

**162.** $f'(x)=\cos 2x-\sin x$.

163. $f'(x)=\cos x-\cos 2x$.

164. $f'(x)=\frac{-7e^x}{(e^x+2)^2}$.

165. $f'(x)=\frac{4}{(e^x+e^{-x})^2}$.

166. $f'(x)=\frac{1}{x(1-\ln x)^2}$.

167. $f'(x)=\frac{2}{x\ln^2 x}$.

168. $f'(x)=-\frac{1}{x\ln^2 x}$

170. $A\left(5,\frac{125}{3}\right)$, $B\left(-1,\frac{1}{3}\right)$.

171. a) Pošto tačka $A$ pripada grafiku date funkcije, imamo da je $y=2\cdot 2^2-3\cdot 2+2=4$. Pa je $A(2,\ 4)$.
Izvod date funkcije u tački $A$ ima vrednost $y=4x-3=4\cdot 2-3=5$.
Primenom obrasca $y-y_1=f'(x_1)(x-x_1)$ dobija se jednačina tangente $y-4=5(x-2)$; $5x-y-6=0$.
b) $2x-y+1=0$; c) $x-y-1=0$; d) $x+y-\pi=0$.

172. $3x+y+6=0$.

173. $P(6,\ -3)$.

174. $A(0,\ 1)$, $B(2,\ -3)$.

175. $7x-4y-17=0$ i $189x-108y-209=0$.

176. $10x-y-11=0$.

177. Jednačina tangente je $y=2x+1$.



*Primedba.* Ako je $M(x_1,\ y_1)$ tačka grafika funkcije $y=f(x)$, prava koja sadrži tačku $M$ i normalna je tangenti date funkcije u istoj tački $M$ naziva se normala date funkcije u tački $M$. Jednačina normale u tački $M$ glasi $y-y_1=-\frac{1}{f'(x_1)}(x-x_1)$.

178. Jednačina tangente: $4x+y-8=0$.
Jednačina normale: $x-4y-2=0$.

179. Jednačina tangente je: $2x+2y-\pi=0$, a
jednačina normale: $2x-2y-\pi=0$.

180. Za $x=0$ $f(0)=\cos^2 0=1$, dodirna tačka ima koordinate $M(0,\ 1)$.
Kako je
$f'(x)=-\frac{\sin 2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$, za $x\to 0$ $\lim_{x\to 0} f'(x)=-1=k$ (jer je $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$).
Jednačina tangente je $y=-x+1$, a normale $y=x+1$.

181. Prava je tangenta parabole ako imaju jednake izvode. Pošto su izvodi $y'=k$ i $y'=\frac{p}{y}$, imamo $k=\frac{p}{y}$. Ako se eliminišu $x$ i $y$ iz sistema $y=kx+n \wedge y^2=2px \wedge p=ky$, tražena relacija je $p=2kn$.

182. $k^2+4an=0$.

183. Jednačina tangente date hiperbole u bilo kojoj tački $M(x_1,\ y_1)$ je
$y-y_1=-\frac{a^2}{2x_1^2}(x-x_1)$.
Odsečci koje tangenta odseca na koordinatnim osama su:
$\frac{2x_1^2y_1+a^2x_1}{a^2}$ i $\frac{2x_1^2y_1+a^2x_1}{2x_1{}^2}$.
Površina trougla je $P=\frac{1}{2}\cdot\frac{x_1(2x_1y_1+a^2)}{a^2}\cdot\frac{x_1(2x_1y_1+a^2)}{2x_1^2}=$

$=\frac{(2x_1y_1+a^2)}{4a^2}=\frac{(2a^2)^2}{4a^2}=a^2$, čime je dokaz završen.

184. Pošto grafik sadrži tačku $(0,\ 0)$, sledi da je $C=0$.
Prvi izvod funkcije je $y'=2ax+b$. Iz uslova da grafik ima tangente u tačkama sa apscisama $x=2$ i $x=3$, imamo:
$4a+b=0 \wedge 6a+b=1$. Odavde nalazimo
$a=\frac{1}{2}$, $b=-2$, trinom ima oblik $y=\frac{x^2}{2}-2x$.

185. $f(x) = -x^2 - x + 2$.

186. $f(x) = x^2 - 3x + 4$.

187. $a = 4$.

188. $8x - y + 12 = 0$; $216x - 27y - 176 = 0$.

189. $x - 2y + 9 = 0$; $27x - 54y - 7 = 0$.

190. $A(1, 5)$, $B\left(-\frac{1}{3}, \frac{59}{27}\right)$.

191. $6x + 9y - 38 = 0$.

2.3. **Izvod složene funkcije**

192. a) $y' = \frac{2ax + b}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$; b) $y' = -20(1 - 5x)^3$.

193. a) $y' = 12 \cos 6x$; b) $y' = \frac{a}{\cos^2 ax}$.

194. a) $y' = 2x(1 - x)e^{-2x}$; b) $y' = -2e^{-x} \sin x$.

195. a) $y' = (2x - 1)e^{x^2 - x - 2}$; b) $y' = -\frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$.

196. a) $y' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}}$; b) $y' = \frac{2}{1 - x^2}$.

197. a) $y' = \frac{a}{a^2 - x^2}$; b) $y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{4x} + 1}}$.

198. a) $y' = 4 \sin^3 x \cos x$; b) $y' = \cos^3 x$.

199. $y' = 3 \operatorname{tg}^4 x$.

200. $y' = \operatorname{ctg} 2x$.



201. a) $y' = \frac{1}{1 - \sin x}$; b) $y' = \frac{1}{2\cos^4 \frac{x}{2}}$.

202. $y' = \operatorname{tg}^5 x$.

203. $y' = \operatorname{tg}^3 x$.

204. $y' = \operatorname{ctg} x \cos^2 x$.

205. a) $y' = -\frac{1}{\cos x}$; b) $y' = \frac{\operatorname{ctg} 2x}{1 - \sin 2x}$.

206. $y' = \frac{1}{2(1 + \sqrt{x + 1})}$.

207. a) $y' = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$; b) $y' = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$ $(|x| > 1)$.

208. $y' = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$.

209. $y' = \sqrt{x^2 + a^2}$.

210. a) $y' = \frac{2ax}{x^4 + a^2}$; b) $y' = \frac{2}{\sqrt{1 - 4x^2}}$.

211. a) $y' = \frac{1}{1 + x^2}$ $(x \neq 1)$; b) $y' = \frac{2}{1 + x^2}$ $(|x| < 1)$.

212. a) $y' = \frac{2a}{x^2 + a^2}$; b) $y' = -\frac{1}{1 + x^2}$.

213. a) $y' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$; b) $y' = \frac{1}{\sqrt{ax - x^2}}$ $(0 < x < a)$.

214. a) $y' = \frac{a^2 + b^2}{(x + a)(x^2 + b^2)}$; b) $y' = e^{\arcsin x}$.

215. $y' = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}}$ $(|x| < 1)$.

**216.** $y' = \frac{1}{x^3+1} \quad (x \neq -1)$.

**217.** $y' = \frac{1}{x^3-1} \quad (x \neq +1)$.

**218.** $y' = \frac{x^2}{1-x^4}$.

**219.** $y' = \sqrt{a^2-x^2}$.

**220.** $y' = -\frac{x}{\sqrt{x^2+ax}}$.

**221.** $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2-4x}}$.

**222.** $f'(x) = \frac{x^2-3x}{x^4-1}$.

**223.** $y' = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

**224.** $y' = \frac{-2x^2}{(1+x^2)^2}$.

**225.** $y' = \frac{2}{1-x^4}$.

**226.** $y' = 2e^x\sqrt{1-e^{2x}}$.

**227.** $y' = \frac{1}{x^4+x^2+1}$.

**228.** $y' = \frac{1}{\cos^6 x}$.

**229.** $y' = \frac{\cos x}{1+\sin^2 x}$.



**230.** Prvi izvod sve četiri funkcije je $y' = 0$.

**232.** $\frac{(2n+1)\sin(2n+1)x-(2n+1)\sin(2n-1)x}{4\sin^2 x}$.

**233.** $\frac{n\sin 2nx\sin x-\sin^2 nx\cos x}{\sin^2 x}$.

**235.** a) $y' = -\frac{x}{y}$; b) $y' = \frac{p}{y}$.

**236.** a) $y' = -\frac{bx^2}{a^2y}$; b) $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$.

**237.** a) $y' = -\frac{2x+y}{x+2y}$; b) $y' = \frac{ay-x^2}{y^2-ax}$.

**238.** a) $y' = \frac{1+y^2}{2+y^2}$; b) $y' = \frac{y(1-x^2-y^2)}{x(1+x^2+y^2)}$.

**239.** $y = x+5$.

**240.** $2x-y+1=0 \vee 2x-y-1=0$.

**241.** $\alpha = 90°$.

**242.** $\alpha = 45°$.

**243.** $\alpha = 90°$.

**244.** $\alpha = 90°$.

**245.** $\alpha = 90°$.

**246.** $\alpha = 60°$.

**247.** $\alpha = 60°$.

**248.** $\alpha = 45°$.

**249.** $\alpha=60°$.

**250.** $\alpha_1=90°, \qquad \alpha_2=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

**251.** $\alpha_1=90°, \qquad \alpha_2=\alpha_3=45°$.

**252.** Date familije krivih obrazuju originalnu mrežu ako je ugao preseka $\alpha=90°$:

a) Presečna tačka je $A(b-a,\ 2\sqrt{ab})$. Iz $y^2=4a(x+a)$ nalazimo

$$y'=\frac{2a}{y}=\frac{2a}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{\frac{a}{b}}=k_1, \text{ a iz } y^2=4b(b-x) \text{ nalazimo}$$

$$y'=-\frac{2b}{y}=-\frac{2b}{\sqrt{2b}}=-\sqrt{\frac{b}{a}}=k_2, \text{ pa je } k_1\cdot k_2=-1.$$

Familije datih krivih se seku pod uglom $\alpha=90°$, što znači da obrazuju ortogonalnu mrežu.

b) $\alpha=90°$; c) $\alpha=90°$.

**253.** $-5<x<0$.

**254.** $\alpha=\operatorname{arctg} 9, \quad y=9x-23{,}25$.

**255.** $\alpha=\operatorname{arctg} 3, \quad y=2x+3$.

**256.** $f'(1)=0$.

**257.** Uputstvo: $y'=5x^4+8>0$ za svako $x$.

**258.** $A(0,\ 2)$.

**259.** $y=-x+2{,}5$.

**260.** a) $y''=\dfrac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$; b) $y''=(4x^2-2)e^{-x^2}$.

**261.** a) $y''=2e^x\cos x$; b) $y''=4e^{2x+1}$.

**262.** a) $y''=\dfrac{4}{(1+x)^3}$; b) $y''=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$.

**263.** a) $y''=\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}$; b) $y''=-\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.



**264.** a) $y'''=\dfrac{2}{x}$; b) $y'=4\sin 2x$.

**265.** Kako je $f'(x)=e^x(\sin x+\cos x)$; $f''(x)=2e^x\cos x$, $f'''(x)=2e^x(\cos x-\sin x)$, onda $f'(0)=1$, $f''(0)=2$, $f'''(0)=2$.

**266.** a) $y'=\cos x=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$$y''=-\sin x=\sin\left(x+2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y'''=-\cos x=\sin\left(x+3\frac{\pi}{2}\right),$$

$$y^{(4)}=\sin x=\sin\left(x+4\frac{\pi}{2}\right),$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$y^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right);$$

b) $y^{(n)}=\cos\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$.

**267.** a) $y^{(n)}=(-2)^n e^{-2x}$; b) $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n+1}\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}$;

c) $y^{(n)}=\dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

**268.** Ako diferenciramo datu formulu, imamo $2x+2yy'=0$, ili $x+yy'=0$.

Ako poslednju jednačinu diferenciramo ponovo imamo

$$1+y'^2+yy''=0? \quad \text{ili} \quad y''=-\frac{1+y'^2}{y}.$$

Kako je $y'=-\dfrac{x}{y}$ i $y=\sqrt{1-x^2}$, može se drugi izvod izračunati kao funkcije od $x$, $y''=\dfrac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

**272.** $x \in (-\infty, 1) \cup \left(\frac{3}{2}, \ 2\right)(3, +\infty)$.

**273.** $1 < x < \frac{8}{3}$.

**275.** a) $dy = \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$; b) $dfx = 2(1-\cos 2x)\,dx$.

**276.** a) $dy = \frac{2\,dx}{1-4x+8x^2}$; b) $df(\varphi) = b \sin(a-b\varphi)\,d\varphi$.

**277.** a) $df(x) = \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$; b) $df(x) = \frac{-a^3\,dx}{x^2(x^2+a^2)}$.

**278.** $x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{2}$.

**279.** $x \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{3}{5}, +\infty)$.

**280.** $x_1 = 2,\ x_2 = a$.

**281.** $x = +\frac{\sqrt{2}}{2}$.

**282.** *a*) $a = -3,\ b = -9$; b) 12; c) $x \in (3{,}2+\sqrt{5})$.

**283.** $a = 1$.

**284.** $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2(1-a)}{3a}$.

**285.** $a_1 = -1,\ a_2 = -5$.

**287.** $k_1 = 1,\ k_2 = -0{,}6$.

### 2.4. Primena izvoda pri određivanju granične vrednosti Lopitalovo pravilo

**288.** Primenom Lopitalovog pravila dobija se

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos x}{2} = \frac{3}{2}$.

b) 0,5.



**289.** a) $n$; b) 2.

**290.** *Primedba.* Ako se neodređenost »$\frac{0}{0}$« ili »$\frac{\infty}{\infty}$« ponavlja, potrebno je Lopitalovo pravilo ponoviti više puta, dok se neodređenost ne eliminiše, tj.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$$

a) Potrebno je Lopitalovo pravilo ponoviti tri puta, tj.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = 2;$$

b) 0.

**291.** a) 12; b) 6.

**292.** a) $-\frac{1}{8}$; b) $\ln\frac{a}{b}$.

**293.** Ovde je neodređenost oblika »$0 \cdot \infty$«. Međutim, ona se transformiše na neodređenost oblika »$\frac{0}{0}$« ili »$\frac{\infty}{\infty}$« na ovaj način:

$$\lim_{x\to 0} x^2 \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{2x^2}{-1}\right) = 0;$$

b) 0,5.

**294.** Ovde je neodređenost oblika »$0^0$«, ona se transformiše na oblik »$\frac{\infty}{\infty}$« logaritmovanjem, tj.

$$A = \lim_{x\to 0} x^x \Leftrightarrow \ln A = \ln \lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$= \lim\limits_{x\to 0}(-x) = 0$. Odavde sledi da je $\ln A = 0 \Leftrightarrow A = e^0 = 1$, dakle, $\lim\limits_{x\to 0} x^x = 1$.

**295.** Ovo je neodređenost oblika »$\infty - \infty$«. Posle svođenja na zajednički imenilac dobija se tip »$\frac{0}{0}$«, tj.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{x\ln x - x + 1}{(x-1)\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x + 1 - 1}{\ln x + \frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = 0{,}5;$$

b) $-1$.

**296.** a) $-5$ ; b) $0{,}5$ .

**297.** a) $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ ; b) $\dfrac{1}{e}$ .

**298.** a) $1$ ; b) $-1$ .

**299.** a) $1{,}5$ ; b) $4$ .

**300.** a) $\dfrac{1}{6}$ ; b) $-1$ .

**301.** a) $\infty$ ; b) $0$ .

**302.** a) $2$ ; b) $\dfrac{1}{3}$ .

**303.** a) $1$ ; b) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{e}}$ .

### 2.5. Primena izvoda u prirodnim naukama

**304.** Brzina tačke u ma kom trenutku $t: v=s'(t)=6t^2+2t$ .
Brzina kretanja tačke u trenutku $t=4: v=s'(4)=6\cdot4^2+2\cdot4=$ $=104$ m/s.

Ubrzanje u bilo kom trenutku $t$ je: $W=s''(t)=12t+2 \Rightarrow s''(4)=$ $=12\cdot4+2=50$ m/s.

**305.** $v=s'(t)=t^2-4t+3$ , $W=s''(t)=2t-4$. Telo menja smer u trenutku kada je $V=0 \Leftrightarrow t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1 \vee t=3$ .

**306.** Moment susreta dobijamo iz jednačine

$$\frac{1}{2}t^2=100-5t \Leftrightarrow t=-5 \vee t=20 .$$

Brzine u momentu susreta su $v=-5 \vee v=20$ .

**307.** $t=5$ s.

**308.** $t=1$ s.

**309.** Brzina zagrevanja tela je prvi izvod temperature T po vremenu $t$, tj. $T'(t)=0{,}4t$, odavde $T'(10)=0{,}4\cdot10=4$. Dakle u trenutku $t=10$, telo se zagreva brzinom četiri stepena u sekundi.

**310.** 3 stepena u sekundi.

**311.** $s(t)=10+20t-\dfrac{gt^2}{2}$ , $v=20-gt$, $W=-g$. U maksimalnoj tački $v=0$, $t=\dfrac{20}{g}=2{,}04$ s; $s_{max}=30{,}38$ m.

**312.** Put $s$ koji je centar $C$ točka prešao za vreme $t$ jednak je $s=r\beta$ ($\beta$ izraženo u radijanima), pa je $s=r\left(t+\frac{1}{2}t^2\right)$. Brzina centra $C$ je $v=s'(t)=r+rt$, a ubrzanje $W=r$.

**313.** $I=\dfrac{dg}{dt}=0{,}8t=0{,}8\cdot8=6{,}4$ (A/s).

**314.** 35 A/s .

**315.** Brzina $v(t)=6t+1=6\cdot4+1=25$ m/s; kinetička energija $\dfrac{1}{2}m^2=$ $=\dfrac{1}{2}\cdot10\cdot25^2=3\,225$ J.

**316.** 20 000 J.

### 2.6. Monotonost, ekstremne vrednosti, konveksnost, konkavnost, prevojne tačke funkcije

**317.** a) Za $x\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty)$ funkcija raste; u intervalu $x\in(-1,\ 1)$ opada. Za $x<0$ funkcija je konkavna, a za $x>0$ konveksna. Tačka $P(0,\ 0)$ je prevojna tačka.

b) Monotonost date funkcije prikazana je tabelom:

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{2}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | $\nearrow$ | max | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | |

Za $x<\dfrac{4}{3}$ funkcija je konkavna, a za $x>\dfrac{4}{3}$ konveksna; tačka

$P\left(\frac{4}{3}, \frac{16}{27}\right)$ je prevojna tačka.

**318.** a) Za $x>0$ funkcija je rastuća, konkavna je i nema prevojnih tačaka;

b) Stalno je rastuća; za $x<k\pi$ je konveksna, za $x>k\pi$ konkavna. Prevojne tačke $P(k\pi, 0)$, $k \in Z$.

**319.** a) Raste u intervalu $(-1, 1)$, opada u intervalu $(-\infty, -1)$ i $(1, +\infty)$.

b) Raste za $-\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$, opada za $\frac{3\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$.

**320.** a) $y_{max}=3$ za $x=1$, $y_{min}=-1$ za $x=1$;

b) $y_{max}=\frac{5}{3}$ za $x=1$, $y_{min}=-9$ za $x=3$.

**321.** a) $y_{min}=2$ za $x=\pm 1$; $y_{min}=8$ za $x=4$. b) $y_{max}=0$ za $x=0$,

**322.** $y_{max}=\sqrt{2}$, za $x=\frac{\pi}{4}$, $y_{min}=-\sqrt{2}$ za $x=\frac{5\pi}{4}$.

**323.** $y_{min}=-1$ za $x=\frac{\pi}{2}$, $y_{max}=3$ za $x=\frac{3\pi}{2}$.

**324.** a) $y_{max}=\frac{4}{e^2}$ za $x=e^{-2}$, $y_{min}=0$ za $x=1$.

b) $y_{min}=4e^{-2}$ za $x=-2$; $y_{min}=0$ za $x=1$.

**325.** Jednačina $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2-6x+6=0$ nema realnih rešenja, što znači da data funkcija nema ekstremnih vrednosti.

**326.** Ako su dimenzije pravougaonika $x$ i $y$ tada je površina $P(x)=xy=x\sqrt{4r^2-x^2}=\sqrt{4r^2x^2-x^4}$ jer je $y=\sqrt{4r^2-x^2}$. Funkcija $P(x)$ ima maksimalnu vrednost kada i funkcija $f(x)=4r^2x^2-x^4$ ima maksimalnu vrednost. Izvod funkcije $f'(x)=8r^2x-4x^3=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=r\sqrt{2}$. Maksimalnoj vrednosti odgovara $x=r\sqrt{2}$, druga dimenzija $y=r\sqrt{2}$, što znači traženi pravougaonik je kvadrat stranice $r\sqrt{2}$ i $P_{max}=2r^2$.

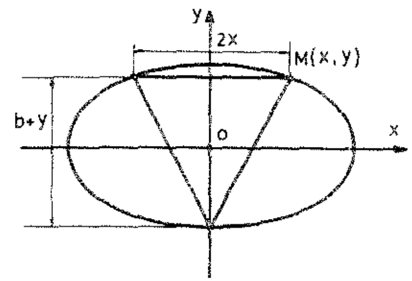


**327.** Analogno prethodnom zadatku, dimenzije pravougaonika su $m=a\sqrt{2}$, $n=b\sqrt{2}$, $P_{max}=2ab$.

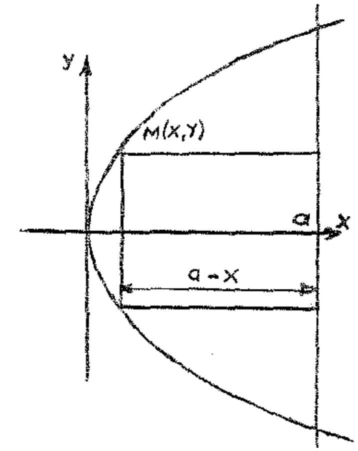
**328.** Ako je $M(x, y)$ bilo koja tačka elipse (sl. 8), tada je

$$P(y)=\frac{a}{b}(b+y)(b^2-y^2)^{\frac{1}{2}}, \quad P_{max}=\frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Osnovica je $a\sqrt{3}$, a visina $\frac{3}{2}b$.



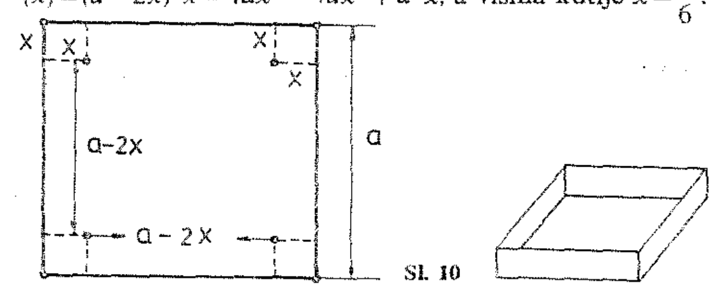

Sl. 8




Sl. 9

**329.** Ako je $M(x, y)$ ma koja tačka parabole (sl. 9.), tada je $P(y)=2ay-\frac{y^3}{p}$. Dimenzije su $\frac{2a}{3}$, $\frac{2}{3}\sqrt{6ap}$, a $P_{max}=\frac{4a}{9}\sqrt{6ap}$.

**330.** Osnovna ivica kutije je $a-2x$ a visina $x$ (sl. 10). Zapremina je $(x)=(a-2x)^2x=4ax^3-4ax^2+a^2x$, a visina kutije $x=\frac{a}{6}$. $V_{max}=\frac{2a^3}{27}$.




Sl. 10

**331.** $V(x)=(32-2x)(20-2x)x-4x^2-104x+640,\quad x=4,\ V_{max}=1152\,\mathrm{cm}^2$

**332.** Manja osnovica je $r$, a visina $\dfrac{r\sqrt{3}}{2}$.

**333.** Ako sa $x$ označimo poluprečnik valjka, tada je

$V(x)=\dfrac{\pi H}{R}\ (Rx^2-x^3)$. Poluprečnik valjka $x=\dfrac{2R}{3}$, visina $h=\dfrac{R}{3}$,

$V_{max}=\dfrac{4R^2H\pi}{27}$.

**334.** Neka je $x$ visina kupe, tada je $V(x)=\dfrac{\pi}{3}(2Rx^2-x^3)$. Poluprečnik kupe je $r=\dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$, visina $x=\dfrac{4}{3}R$, $V=\dfrac{32R^3\pi}{81}$.

**335.** $x=\dfrac{H}{3}$, a $a=\dfrac{2R\sqrt{2}}{3}$, $V_{max}=\dfrac{8R^3H}{27}$.

**336.** Poluprečnik osnove kupe je $x=R\sqrt{2}$, visina $h=4R$,

$V_{min}=\dfrac{8\pi}{3}R^3$.

**337.** a) $V_{max}=\dfrac{4R^3\sqrt{3}\,\pi}{9}$, poluprečnik $r=R\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, visina $x=\dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$,

b) $M_{max}=2R^2\pi$, visina $x=R\sqrt{2}$, poluprečnik $r=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$.

**338.** $M\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{b\sqrt{2}}{2}\right)$, $P_{min}=ab$.

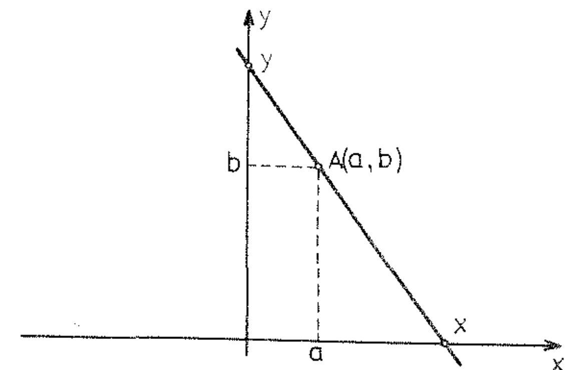
**339.** Neka prava koja sadrži datu tačku $A$ odseca odsečke $x$ i $y$ (sl. 11). Tada je površina trougla

$P=\dfrac{1}{2}\,xy$.



Iz proporcije $x:y=(x-a):b$ proizlazi da je

$y=\dfrac{bx}{x-a}$, pa je $P(x)=\dfrac{bx^2}{2(x-a)}$.

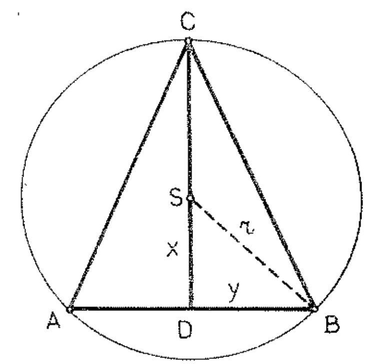



Sl. 11

**340.** Neka je osnovica trougla $AB=2y$, a visina $CD=r+x$ (sl. 12). Tada je

$P(x)=\sqrt{(x+r)^3\,(r-x)}$,

odakle proizlazi da je $AC=AB=BC=r\sqrt{3}$.




Sl. 12

**341.** Ako je visina konusa $x$ a poluprečnik $r$, tada je

$P=r^2\pi+r\pi\sqrt{r^2+x^2}$. Odavde je $r^2=\dfrac{P^2}{\pi(\pi x^2+2P)}$. Zapremina u funkciji visine $x$ je $V(x)=\dfrac{P^2x}{3(\pi x^2+2P)}$. Rezultat: $x=\sqrt{\dfrac{2P}{\pi}}$, $r=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{\pi}}$.

**342.** Osnovna ivica je $a=\frac{1}{2}\sqrt{P}$, visina $h=\frac{1}{2}\sqrt{2P}$.

**343.** Poluprečnik osnove je $r=\frac{R}{2}$, visina $h=\frac{H}{2}$, $V_{\max}=\frac{R\pi H}{2}$.

**344.** Poluprečnik je $r=\frac{1}{2}\sqrt[6]{\frac{3V}{\pi}}$, a visina $h=2\sqrt[3]{\frac{3V}{\pi}}$.

**345.** Tetiva $MN=4\sqrt{2}$, $P_{\max}=6$.

**346.** $\frac{3}{5}a$, $\frac{2}{5}a$.

**347.** Neka je tražena tačka na paraboli $A(x, y)$. Tada je rastojanje tačke $A$ od date prave $d=\frac{2x-y-4}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}$. Pošto je $y=x^2$, sledi $d(x)=\frac{2x-x^2-4}{\sqrt{5}}$. Rezultat je $(1, 1)$.

**348.** $a=3 \vee a=\frac{3}{4}$.

**349.** $a_3=\frac{1}{27}$, $a_2=0$, $a_1=-1$, $a_0=0$; $x \to y=\frac{1}{27}x^3-x$.

**350.** a) $y=x^3-\frac{9}{2}x^2-12x+3$; b) $y=x^3+6x^2+12x+12$.

**351.** $\beta=(2k+1)\pi$, $k=0, 1, 2, \ldots$

**352.** $\beta=\operatorname{arctg} k$ (tako dobijeni ugao $\beta$ naziva se ugao trenja).

**353.** a) $A=B=1$; b) $A=-\frac{1}{6}$, $B=-\frac{2}{3}$; c) $A \geqslant 0$, $B \geqslant 0$.

**354.** Kako su $x_1$ i $x_2$ rešenja izvodne jednačine $f'(x)=0$ to je $x^2+(a-2)x-(a+1)=0$, na osnovu Vistovih formula je $x_1+x_2=-(a-2)$ i $x_1 \cdot x_2=-(a+1)$.



Izraz $s=x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$, pa je $s(a)=(a-2)^2+2(a+1)=a^2-2a+6$. Za $a=1$, $s_{\min}=5$.

**355.** $a=0{,}5$.

**356.** Funkcija raste na intervalu $(2, 3)$, opada na $(3, +\infty)$. Za $x=3$, $f_{\max}=4$.

**357.** $-1<a<0$.

**358.** $b=4$.

**359.** $c \in [12, 14]$.

**360.** $a=3$.

**361.** a) $f_{\min}=f(3)=-57$, $f_{\max}=f(6)=132$.

b) $f_{\min}=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=15-2\sqrt{5}$, $f_{\max}=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=15$.

**362.** Sistem $y=x^4+3x^2+2x$, $y=2x-1$ nema rešenje u skupu $R$, što se lako dokazuje. Tangenta na datu krivu, paralelna datoj pravoj, ima sa krivom zajedničku tačku $A(0, 0)$, koja je udaljena od prave za $d=\frac{\sqrt{5}}{5}$.

**363.** $f_{\max}(-3)=-2$, $f_{\min}(-1)=-\frac{10}{3}$.

**364.** a) Data funkcija ima ekstremne vrednosti za $y'=0 \Leftrightarrow 3x^2+p=0$ $x=-\sqrt{\frac{p}{3}}$, $x=\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Pošto je $y''\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)<0$, za $x=-\sqrt{-\frac{p}{3}}$ funkcija ima maksimum, a $y''\left(\sqrt{\frac{-p}{3}}\right)>0$ pa za $x=\sqrt{\frac{-p}{3}}$ funkcija ima minimum.

Maksimalna vrednost $M=\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3+p\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)+q=$

$=q-\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$,

a minimalna $m=\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right)^3+p\sqrt{-\frac{p}{3}}+q=q+\frac{2p}{3}\sqrt{-\frac{p}{3}}$.

Proizvod $Mm=q^2+\frac{4}{27}p^3$.

b) $p=-3$, $q=2$, $x\to y=x^3-3x+2$.

**365.** a) $M(2, 4)$, $P(0, 2)$, $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+2$;

b) $\alpha=45^\circ$

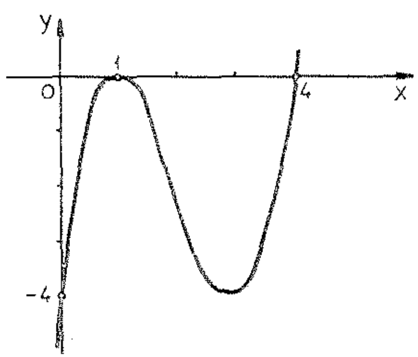
**366.** Izvodna jednačina $y'=0\Leftrightarrow(-3m+2)x^2+2x-m=0$ nema realnih rešenja ako je njena diskriminanta $1+m(-3m+2)<0\Leftrightarrow$

$m\in\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right)\cup(1, +\infty)$.

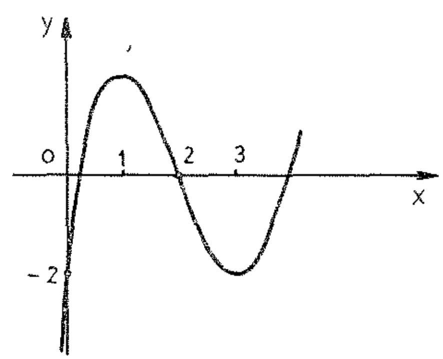
### 2.7. Ispitivanje funkcije (uz primenu izvoda). Grafik funkcije

**367.** a) Data funkcija se može transformisati u proizvod $y=(x-1)^2(x-4)$. Definisana je za $x(-\infty, +\infty)$; ima dvostruku nulu $x=1$ i nulu $x=4$. Pozitivna je za $x>4$, negativna za $x<4$ i $x\neq 1$; $y_{max}=0$ za $x=1$, $y_{min}=-4$ za $x=3$; prevojna tačka je $P(2, -2)$, konkavna za $x<2$, konveksna za $x>2$ (grafik na sl. 13):

$y=x^3-6x^2+9x-4$ $\qquad\qquad$ $y=x^3-6x^2+9x-2.$




Sl. 13

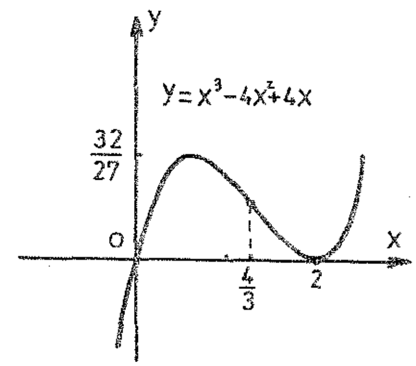



Sl. 14

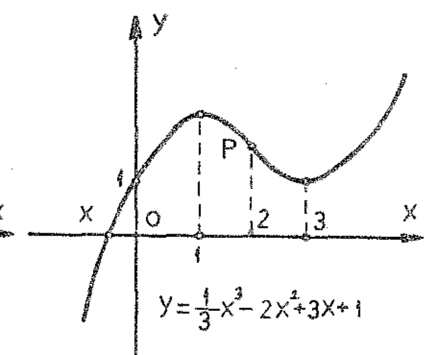


**368.** b) Polinom u funkciji treba rastaviti na činioce $y=(x-2)(x^2-4x+1)$. Definisano je u skupu $D=\{x|\in(-\infty, +\infty)\}$. Nule su $x_1=2$, $x_{2,3}=2\pm\sqrt{3}$; $y<0$ za $x\in(-\infty, 2-\sqrt{3})(2, 2+\sqrt{3})$; $y>0$ za $x\in(2-\sqrt{3}, 2)\cup(2+\sqrt{3},)$; $y=2$ za $x=1$ i $y_{min}=-2$ za $x=3$. Prevojna tačka je $P(2, 0)$, konkavna za $x<2$, konveksna za $x>2$ (grafik na sl. 14).

**369.** a) Data funkcija se može napisati u obliku $y=x(x-2)^2$. Definisana je u skupu $D=\{x|x\in R\}$, ima nulu drugog reda $x_1=x_2=2$ i nulu $x_3=0$, za $x=\frac{2}{3}$ $y_{max}=\frac{32}{27}$, $y_{min}=0$ za $x=2$, prevojnu tačku za $x=\frac{4}{3}$, konkavna je za $x<\frac{4}{3}$, konveksna za $x>\frac{4}{3}$ (grafik na sl. 15).




Sl. 15

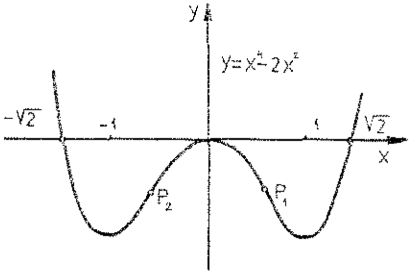



Sl. 16

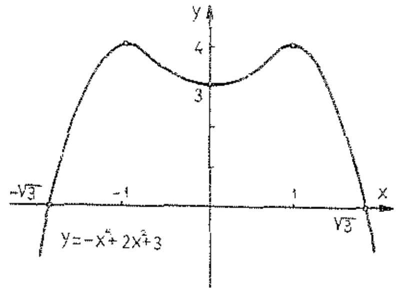
**370.** Definisana je u skupu $D=\{x|x\in R\}$. Ima jednu realnu nulu $x_0\in(-1, 0)$, $y_{max}=\frac{7}{3}$ za $x=1$, $y_{min}=+1$ za $x=3$, prevojna tačka je $P\left(2, \frac{5}{3}\right)$, $y<0$ za $x<x_0$, $y>0$ za $x>x_0$, funkcija je konkavna za $x<2$, konveksna za $x>2$ (sl. 16).

**373.** a) Definisana je za svako $x\in R$, ima nulu drugog reda $x_1=x_2=0$, i $x_{3,4}=\pm\sqrt{2}$, za $x=0$ $y_{max}=0$ i za $x=\pm 1$ $y_{min}=-1$; ima dve prevojne tačke $P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ i $P_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{5}{9}\right)$ (sl. 17).

b) Definisana je za svako $x$, kriva seče koordinatne ose $y$ u tačkama $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$ i $(0, 3)$, za $x=0$ $y_{min}=3$, za $x=\pm 1$ $y_{max}=4$, prevojne tačke za $x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ (sl. 18).




Sl. 17



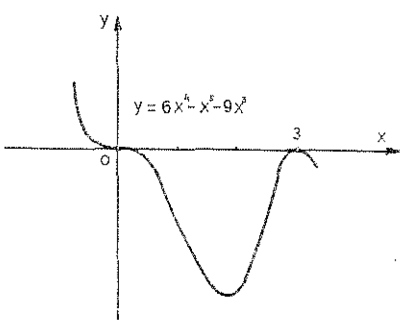

Sl. 18

**375.** a) Definisana je za svako $x$; za $x_1=x_2=x_3=0$ ima nulu trećeg reda i $x_4=5=3$ dvostruku nulu;

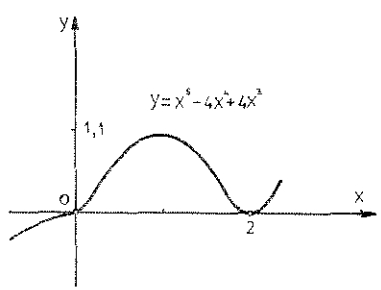
$y_{min}\approx -8{,}2$ za $x=\frac{9}{5}$, $y_{max}=0$ za $x=3$; prevojne tačke za

$x=0$ i $x=\frac{18\pm 3\sqrt{6}}{10}$ (sl. 19).

b) Funkcija je definisana za svako $x$; ima nulu trećeg reda $x=0$ i dvostruku nulu $x=2$; $y_{max}=1{,}1$ za $x=\frac{6}{5}$, $y_{min}=0$ za $x=2$; prevojne tačke $x=\frac{6\pm\sqrt{6}}{5}$ i $x=0$ (sl. 20).




Sl. 19

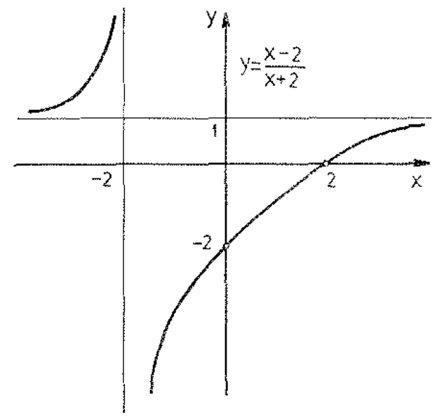



Sl. 20

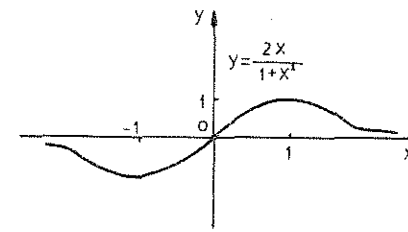


**378.** a) Definisana je u skupu $D=\{x\,|\,x\in R\setminus\{-2\}\}$, $x=2$ nule funkcije, nema ekstremne vrednosti, $x=-2$ vertikalna asimptota i $y=1$ horizontalna asimptota, $y'=\frac{4}{(x+2)^2}$, $y''=-\frac{8}{(x+2)^3}$. $y'>0$, raste za $\forall x\in D$ (sl. 21).

b) Definisana je za svako $x$, nula funkcije je $x=0$. $y>0$ za $x>0$, $y<0$ za $x<0$. $y=\frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)}$, $y=\frac{-8x}{(1+x^2)}4$. $y_{max}=1$ za $x=1$, $y_{min}=-1$ za $x=-1$, prevojna tačka za $x=0$, konkavna za $x>0$, konveksna za $x<0$ (sl. 22).




Sl. 21




Sl. 22

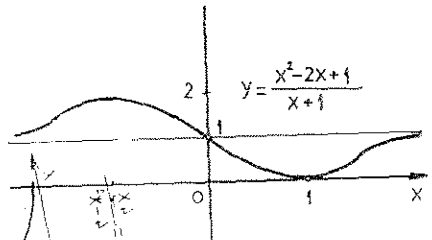
**379.** a) Definisana je za $x\neq\pm 2$; za $x=0$ ima nulu, $x=\pm 2$ vertikalne asimptote, $y=0$ je horizontalna asimptota,

$y'=\frac{16+4x^2}{(4-x^2)^2}$, $y''=\frac{8x(x^2+12)}{(4-x^2)^3}$ (sl. 23).

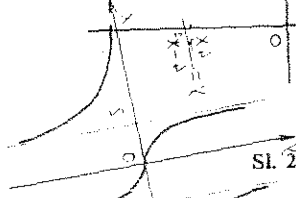
b) Definisana je za svako $x$; $x=1$ je nula drugog reda, $y>0$ za svako $x$, $y=1$ horizontalna asimptota,

$y'=\frac{2x^2-2}{(1+x^2)^2}$, $y''=\frac{4x(3-x^2)}{(1+x^2)^3}$, $y_{max}=2$ za $x=-1$, $y_{min}=0$ za $x=1$,;

prevojne tačke za $x=0$ i $x=\pm\sqrt{3}$ (sl. 24).



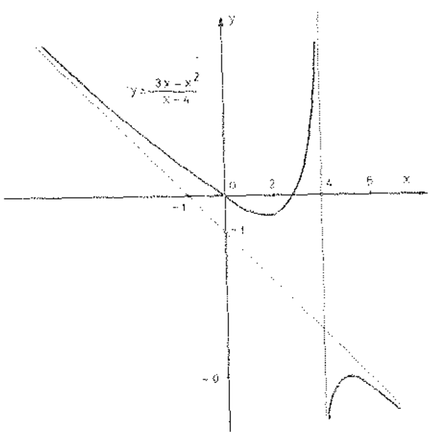

Sl. 23



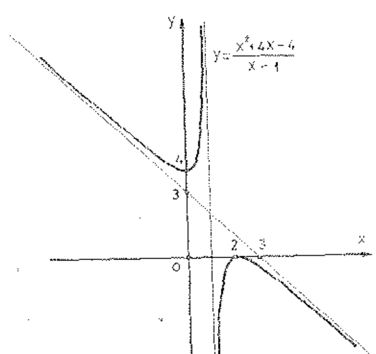
Sl. 24

**383.** a) Definisana je za $x \neq 4$; $x=0$ i $x=3$ nule funkcije; $x=4$ vertikalna asimptota, a $y=-x-1$ kosa asimptota;
$y'=\dfrac{-x^2+8x-12}{(x-4)^2}$, $y''=\dfrac{-2}{(x-1)^3}$. $y_{\max}=-9$ za $x=6$ i $y_{\min}=-1$ za $x=2$ (sl. 25).

b) Definisana je za $x \neq 1$; $x=2$ nula drugog reda; $x=1$ vertikalna asimptota a kosa $y=-x+3$; $y'=\dfrac{-x^2+2x}{(x-1)^2}$, $y=\dfrac{-2}{(x-1)^3}$, $y_{\max}=0$ za $x=2$, $y_{\min}=4$ za $x=0$ (sl. 26).



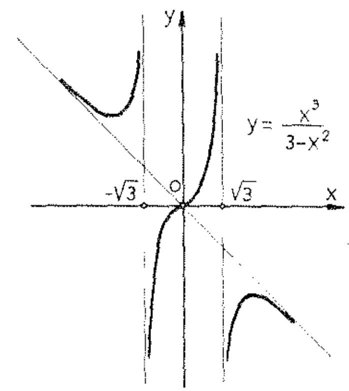
Sl. 25



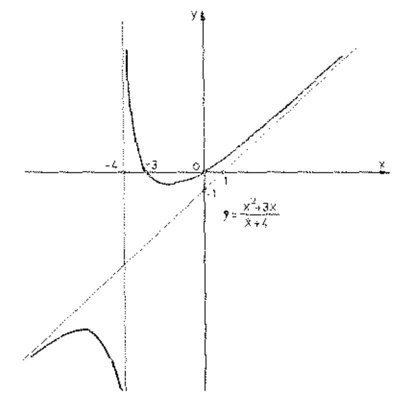

Sl. 26

**384.** a) Definisana je u skupu $D=\{x \mid x \in(-\infty,-\sqrt{3}) \cup(-\sqrt{3}, \sqrt{3}) (\sqrt{3},+\infty)\}$, funkcija je neparna; $x=0$ je nula trećeg reda. Za $x=3$ $y_{\max}=-4{,}5$, za $x=-3$ $y_{\min}=4{,}5$; prevojna tačka $(0,\ 0)$. Vertikalne asimptote su $x= \pm \sqrt{3}$ i kosa $y=-x$ (sl. 27).

b) Definisana je u skupu $D=\{x \mid x \in(-\infty,-4) \cup(4,+\infty)\}$; $x=0$ i $x=3$ su nule funkcije, $x=-4$ vertikalna asimptota $y=x-1$ kosa asimptota, $y_{\max}=-9$ za $x=-6$, $y_{\min}=-1$ za $x=2$ (sl. 28).



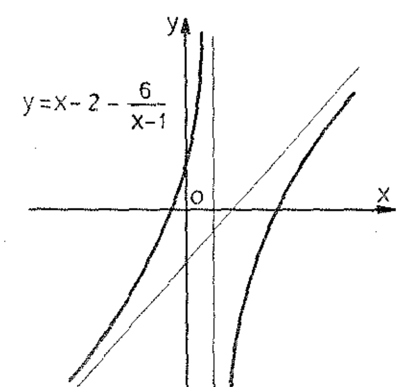

Sl. 27



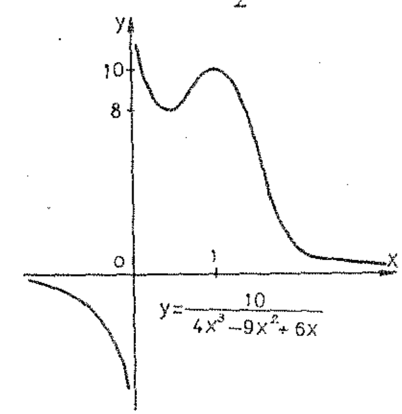
Sl. 28

**387.** a) Definisana je za $x \neq 1$; $x=-1$ i $x=4$ su nule funkcije, nema ekstremnih vrednosti. Funkcija je monotona rastući za sve vrednosti $x \neq 1$. Ima vertikalnu asimptotu $x=1$ i kosu $y=x-2$ (sl. 29).

b) Definisana je za $x \neq 0$, nema nula, vertikalna asimptota je $x=0$, horizontalna $y=0$, $y_{\max}=10$ za $x=1$, $y_{\min}=8$ za $x=\dfrac{1}{2}$ (sl. 30).



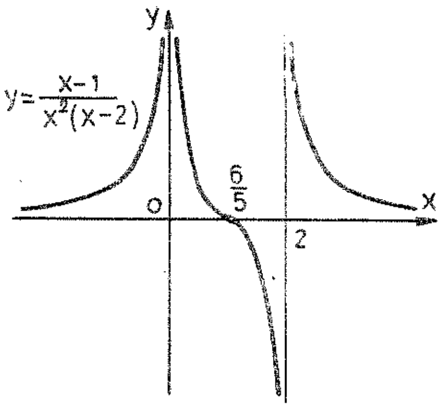

Sl. 29



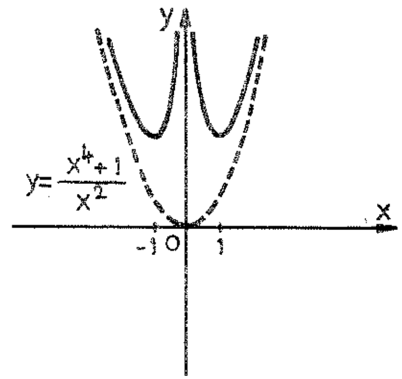

Sl. 30.

**388.** a) Definisana je u skupu $D=\{x|x\in(-\infty, 0)\cup(0, 2)\cup(2, +\infty)\}$, $x=1$ je nula, nema ekstremnih vrednosti. Ima prevojnu tačku za $x=\frac{6}{5}$. Vertikalne asimptote su $x=0$ i $x=2$, horizontalna $y=0$ (sl. 31).

b) Definisana je u skupu $D=\{x|x\in(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)\}$, parna je, za $x=\pm 1$ $y_{\min}=2$, vertikalna asimptota $x=0$. Krivolinijska asimptota $y=x^2$, $x\to\pm\infty$, $y\to x^2$ (sl. 32).




Sl. 31




Sl. 32

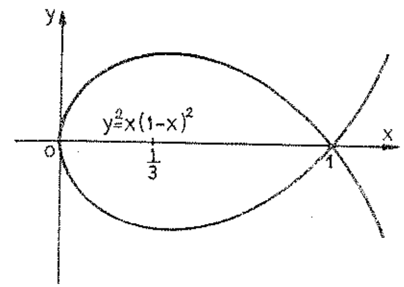
**391.** Za $y>0$ dobija se $y=\sqrt{x(1-x)^2}$, a za $y<0$ $y=-\sqrt{x(1-x)^2}$, tj. data funkcija ima dve grane.
Definisana je za $x>0$; $x=0$ i $x=1$ su nule funkcije, za

$x=\frac{1}{3}$ $|y|=\frac{2\sqrt{3}}{9}$, što znači da $y>0$ $y_{\max}=\frac{2\sqrt{3}}{9}$ a za $y<0$

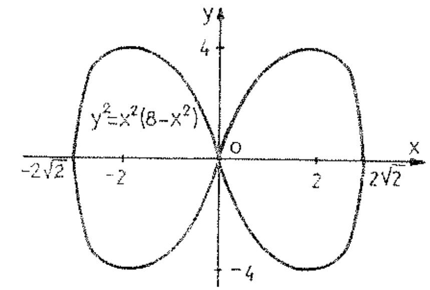
$y_{\min}=-\frac{2\sqrt{3}}{9}$ (sl. 33).

b) Definisana u intervalu $-2\sqrt{2}\leqslant x\leqslant 2\sqrt{2}$. Grafik seče koordinatne ose u tačkama: $(-2\sqrt{2}, 0)$, $(0, 0)$ i $(2\sqrt{2}, 0)$. Ova funkcija je dvoznačna: Za $y>0$ $y=\sqrt{x^2(8-x^2)}$ za $y<0$ $y=-\sqrt{x^2(8-x^2)}$. Ekstremne vrednosti u tačkama $(-2, \pm 4)$ i $(2, \pm 4)$, jer je dvoznačna. Prevojna tačka $(0, 0)$ (sl. 34).



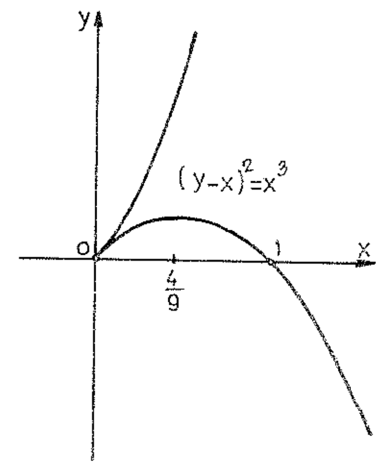



Sl. 33

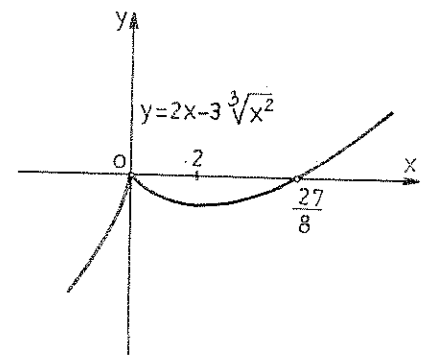



Sl. 34

**392.** Grafici datih funkcija prikazani su na slici 35 i 36.



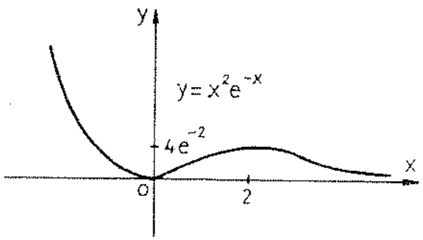

Sl. 35



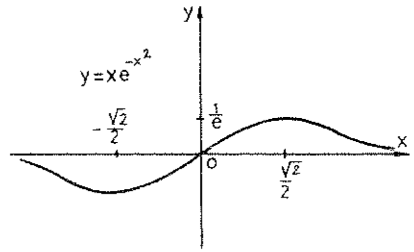

Sl. 36

**393.** a) Definisana je u skupu $D=\{x|x\in(-\infty, +\infty)\}$, $x=0$ je nula drugog reda, $y_{\min}=0$ za $x=0$, $y_{\max}=4e^{-2}$ za $x=2$. Horizontalna asimptota $y=0$ (sl. 37).

b) Definisana je u skupu $D=\{x|x\in R\}$, $x=0$ je nula funkcije $y_{\max}=e^{-1}$ za $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $y_{\min}=-e^{-1}$ za $x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Apscise prevojnih tačaka su $x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ (sl. 38).

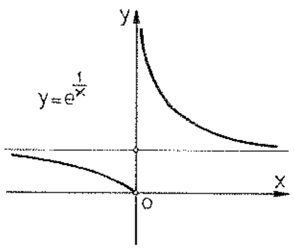



Sl. 37

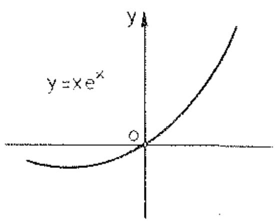



Sl. 38

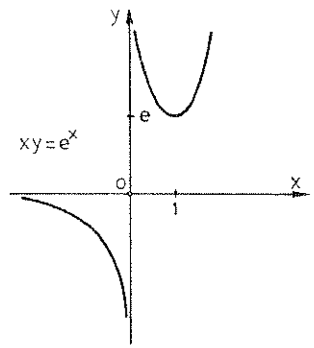
**394.** Grafici datih funkcija su prikazani na sl. 39, 40 i 41.




Sl. 39

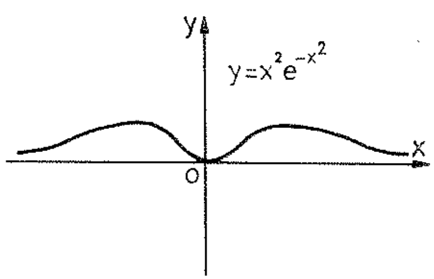



Sl. 40

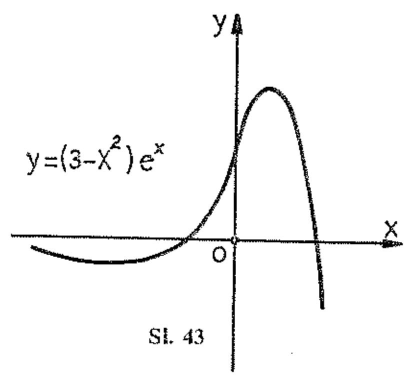



Sl. 41

**395.** Grafici datih funkcija prikazani su na sl. 42 i 43.




Sl. 42

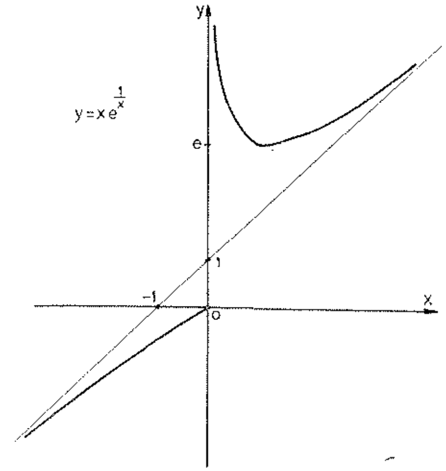



Sl. 43

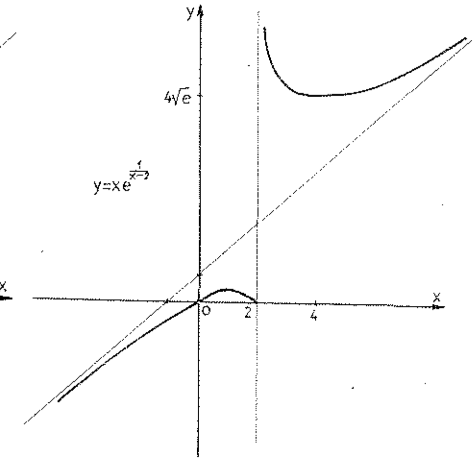
**396.** a) Definisana je za $x \neq 0$; nema nule, $y>0$ za $x>0$, $y<0$ za $x<0$, $y_{\min}=e$ za $x=1$. Vertikalna asimptota $y=0$, kosa $y=x+1$ (sl. 44).



b) Definisana je za $x \neq 2$, $x=0$ nula funkcije, $y<0$ za $x<0$, $y>0$ za $x>0$. $y_{\max}=\frac{1}{e}$ za $x=1$, $y_{\min}=4$ za $x=4$. Vertikalna asimptota $x=2$, kosa $y=x+1$ (sl. 45).



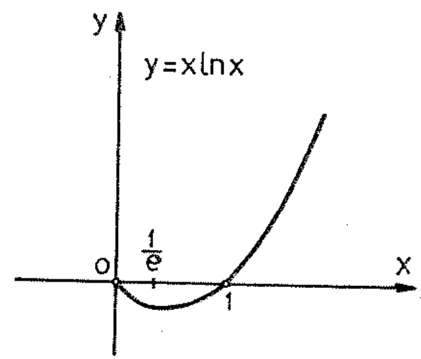

Sl. 44



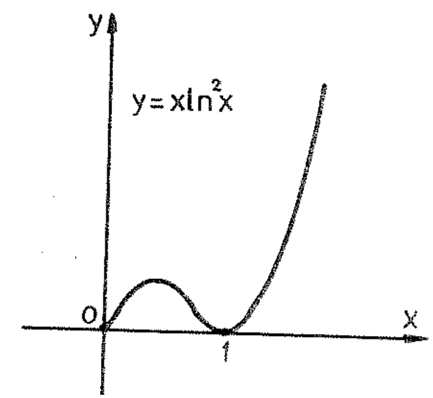

Sl. 45

**397.** a) Definisana je za $x>0$, $x=1$ nula funkcije, $y_{\min}=-e^{-1}$ za $x=e^{-1}$, $y<0$ za $0<x<1$, $y>0$ za $x>1$ (sl. 46).

b) Definisana je za svako $x>0$, $x=1$ je nula drugog reda, $y=4e^{-2}$, $y_{\min}=0$, za $x=1$. Prevojna tačka je $P(e^{-1}, e^{-1})$ (sl. 47).



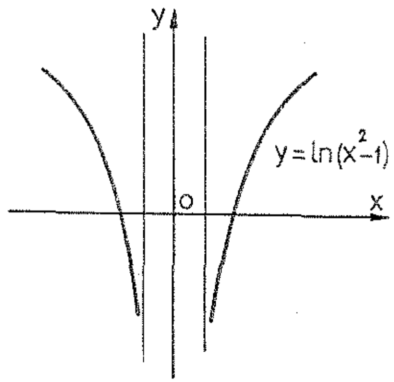

Sl. 46



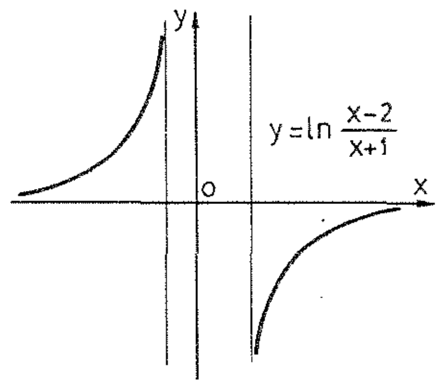

Sl. 47

**398.** a) Definisana je u skupu $D=\{x \mid x \in(-\infty,-1) \cup(1,+\infty)\}$; $x=\pm\sqrt{2}$ su nule funkcije. Nema ekstremnih vrednosti ni prevojnih tačaka. Vertikalne asimptote su $x=\pm 1$ (sl. 48).

b) Grafik je prikazan na sl. 49.

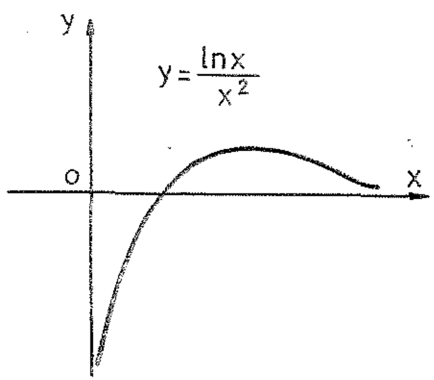



Sl. 48

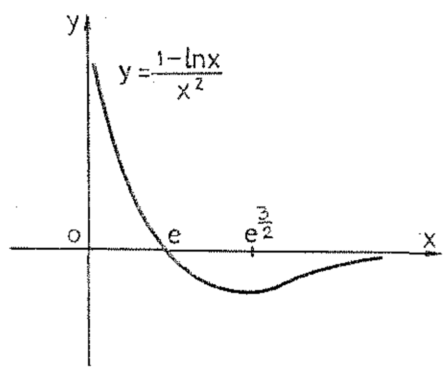



Sl. 49

**399.** Grafici su prikazani na sl. 50 i 51.




Sl. 50



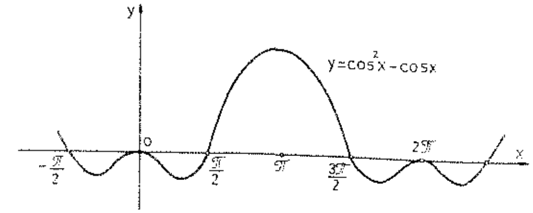

Sl. 51

**400.** a) Definisana je za svako $x$, $y=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi \vee x=2k\pi$

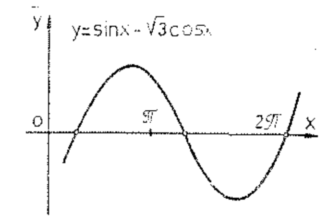
$y'=0 \Leftrightarrow x=k\pi \vee x=\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k \in Z$ (sl. 52).



b) Definisana je za svako $x$, nule su $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $y_{max}=2$ za svako $x=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $y_{min}=-2$ za $x=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$, $k \in Z$ (sl. 53).

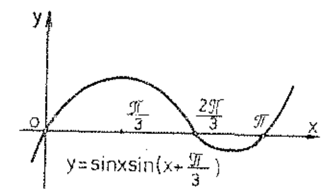



Sl. 52

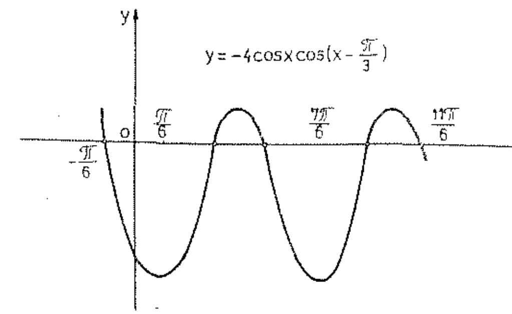



Sl. 53

**401.** Grafici su prikazani na sl. 54 i 55.

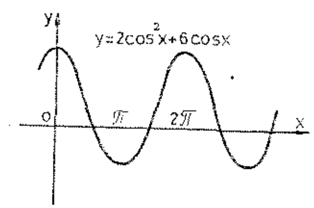



Sl. 54

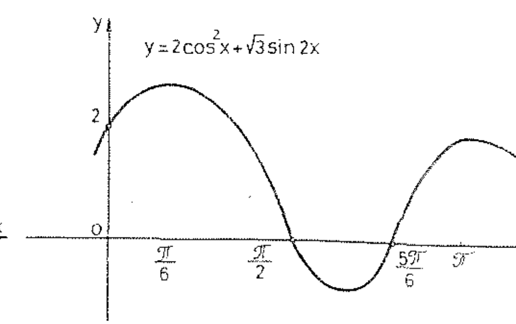



Sl. 55

**403.** Grafici su prikazani na sl. 56 i 57.



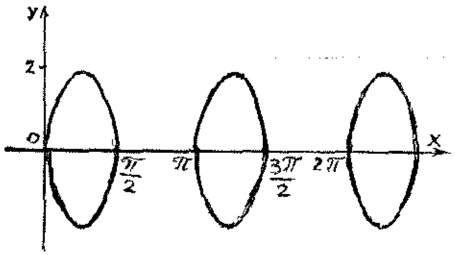

Sl. 56



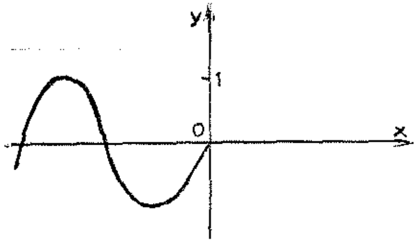

Sl. 57

**405.** Grafik a) na sl. 58, pod b) sl. 59.

$y=2\sin(x+|x|)$ $\qquad$ $y=\sin^2(x-\sqrt{x^2})$



Sl. 58



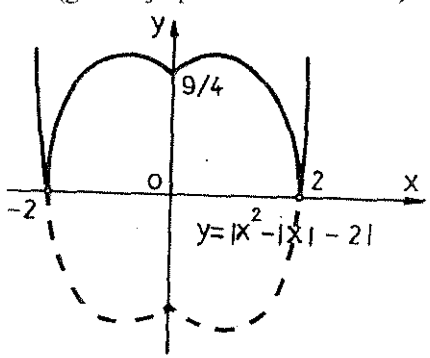
Sl. 59

**407.** a) Prvo posmatrajmo funkciju $y=x^2-|x|-2$.

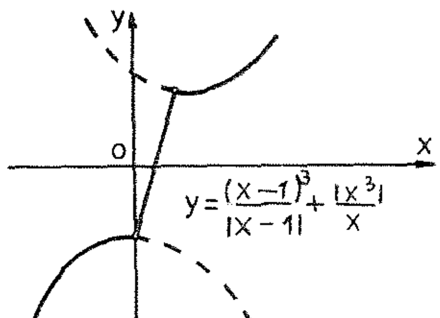
Za $x\geqslant 0$ $\;y=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$, a za $x<0$ $\;y=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{9}{4}$. Grafik date funkcije je apsolutna vrednost svih ordinata grafika funkcije $y=x^2-|x|-2$ (sl. 60).

b) Funkcija je definisana za $x\neq 0$ i $x\neq 1$. Za $x<0$ data funkcija ima oblik $y=-2x^2+2x-1$. Za $0<x<1$ funkcija se svodi na oblik $y=+2x-1$.

Na kraju, ako je $x>1$, data funkcija postaje $y=2x^2-2x+1$ (grafik je prikazan na sl. 61).




Sl. 60




Sl. 61

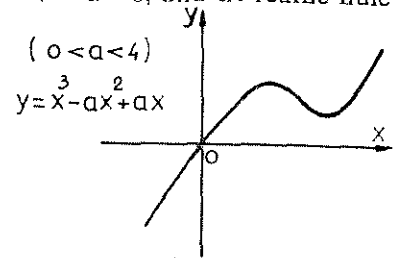
**410.** a) Definisana je za svako $x$. U zavisnosti od parametra $a$ treba razlikovati sledeće slučajeve:

1° $0<a<4$, ima jednu realnu nulu i dve ekstremne vrednosti (sl. 62);

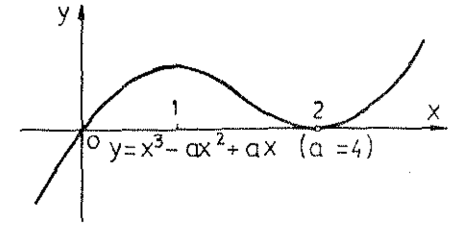
2° $a=4$, ima tri realne nule, $x=0$ i $x=2$ dvostruku (sl. 63);

3° $a>4$, ima tri realne nule (sl. 64);

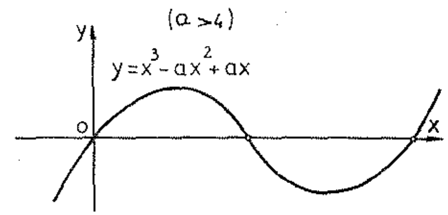
4° $a=0$, ima tri realne nule (sl. 65).



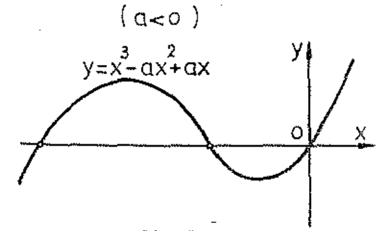

Sl. 62




Sl. 63




Sl. 64

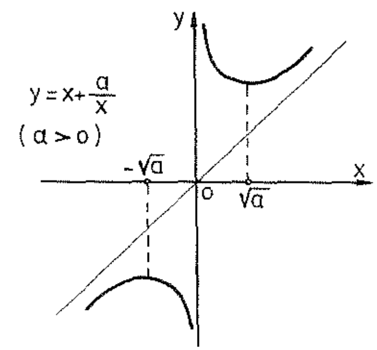



Sl. 65

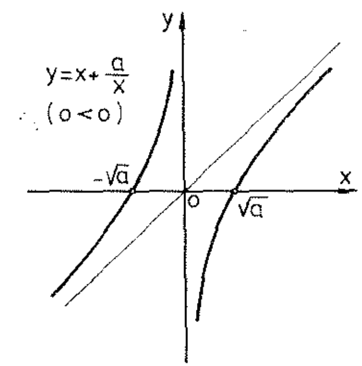
**411.** a) Definisana je za $x\neq 0$, kosa asimptota $y=x$, vertikalna $x=0$.

1° ako je $a>0$, ima dve ekstremne vrednosti, za $x=-\sqrt{a}$ $\;y_{\max}=-2\sqrt{a}$, za $x=\sqrt{a}$ $\;y_{\min}=2\sqrt{a}$ (sl. 66);

2° ako je $a<0$, ima dve realne nule $x=\pm\sqrt{a}$ (sl. 67).




Sl. 66



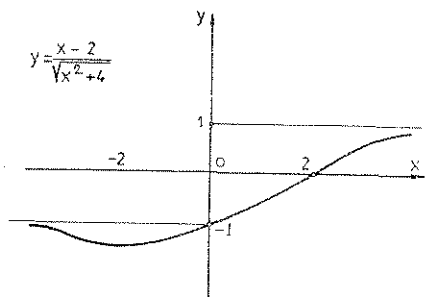

Sl. 67

**412.** **a)** Definisana je za svako $x$, $y>0$ za $x>2$, $y<0$ za $x<2$. $x=2$ je nula funkcije, $y_{\min}=-\sqrt{2}$ za $x=-2$ $y=1$ i $y=-1$ su horizontalne asimptote, jer $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = +1$,

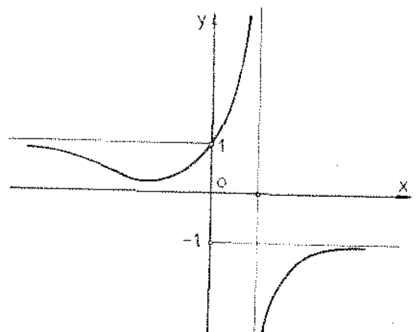
$\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x-2}{|x|\sqrt{1-\dfrac{4}{x^2}}} = -1$ (sl. 68).

b) Definisana je za $x \neq 1$, nema nula, $y>0$ za $x<1$, $y<0$ za $x>1$. Asimptote su: $x=1$ vertikalna i $y=\pm 1$ horizontalne.

$y_{\min} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ za $x=-1$ (sl. 69).




Sl. 68



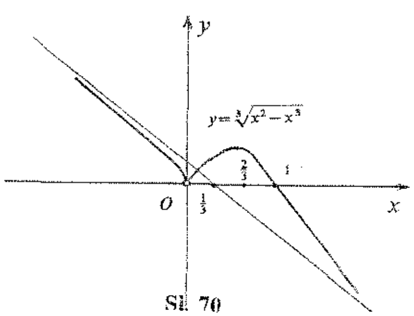
Sl. 69

**415.** a) Definisana je za svako $x$, $x=0$ i $x=1$ su nule; $y_{\min}=0$ za $x=0$, $(\lim\limits_{x\to\pm 0} y' \to \pm\infty)$

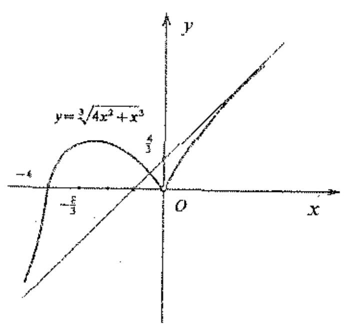
$y_{\max} = \dfrac{4}{27}$ za $x=\dfrac{2}{3}$, kosa asimptota je $y=-x+\dfrac{1}{3}$ (sl.70).

b) Definisana je za svako $x$, $x=0$ i $x=-4$ su nule; $y_{\max}=\dfrac{256}{27}$ za $x=-\dfrac{8}{3}$, $y_{\min}=0$ za $x=0$ $(\lim\limits_{x\to\pm 0} y' \to \pm\infty)$ (sl. 71).

Kosa asimptota $y=x+\dfrac{4}{3}$.




Sl. 70

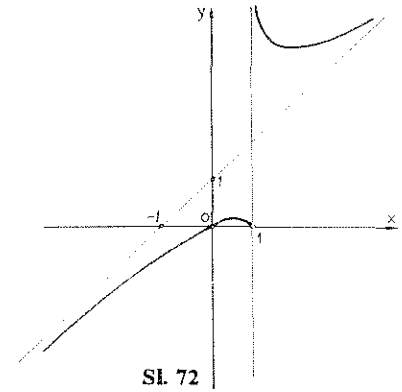



Sl. 71

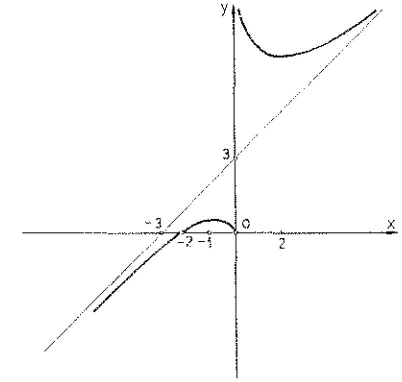


**418.** a) Definisana je za $x \neq 1$, $x=0$ je nula funkcije. Za $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ funkcija ima maksimalnu vrednost. I za $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ minimum. Asimptote: $x=1$ vertikalna a $y=x+1$ kosa (sl. 72).

b) Definisana je za $x \neq 0$, $x=-2$ je nula funkcije, za $x=-1$, $y_{\max}=e^{-1}$, za $x=2$ $y_{\min}=4\sqrt{e}$.



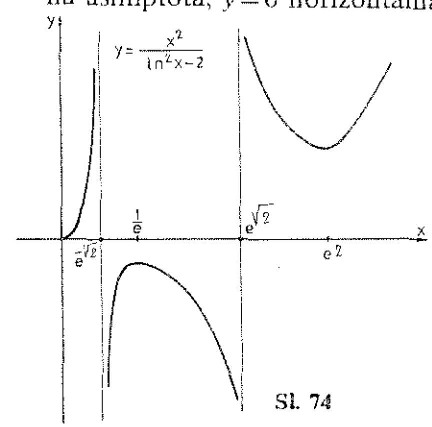
Sl. 72



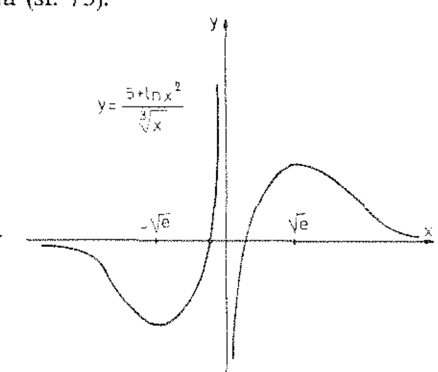
Sl. 73

**422.** a) Definisana je za $x>0$ i $x \neq e^{\pm\sqrt{2}}$, nema nula; za $x=e^{-1}$ $y_{\max}=-e^{-2}$, za $x=e^2$ $y_{\min}=\dfrac{e^4}{2}$; vertikalne asimptote su $x=e^{-\sqrt{2}}$ i $x=e^{+\sqrt{2}}$ (sl. 74).

b) Definisana je za $x \neq 0$, neparna je, nule su $x=\pm\sqrt{e^{-5}}$. Za $x=-\sqrt{e}$ $y_{\min}=-\dfrac{6}{\sqrt[6]{e}}$, za $x=\sqrt{e}$ $y_{\max}=\dfrac{6}{\sqrt[6]{e}}$. $x=0$ je vertikalna asimptota, $y=0$ horizontalna (sl. 75).




Sl. 74




Sl. 75

**424.** a) Definisana je za $x \neq 0$, neparna je, nema nula;

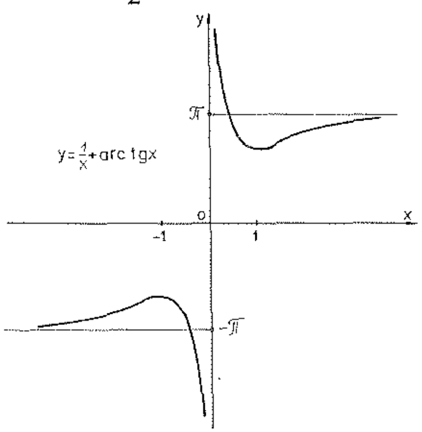
$y_{\max} = -\frac{\pi}{2} - 1$ za $x = -1$, $y_{\min} = 1 + \frac{\pi}{2}$ za $x = 1$; $x = 0$ je vertikalna asimptota a $y = \pm\pi$ horizontalne asimptote (sl. 76).

b) Definisana je za svako $x$, neparna je, $x = 0$ je nula funkcije. Za $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

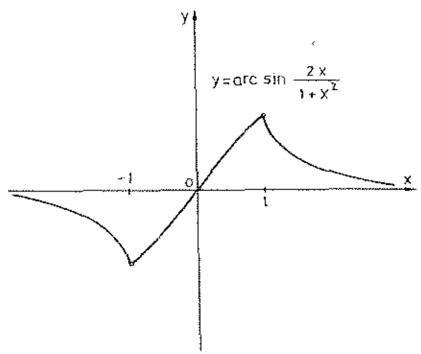
$$y' = \frac{-2}{1+x^2} \quad \text{i} \quad y'' = \frac{4x}{1+x^2} \text{ funkcija opada, za } x \in (-1, +1)$$

$$y' = \frac{2}{1+x^2} \quad \text{a} \quad y'' = \frac{-4x}{1+x^2}, \text{ funkcija raste, } y_{\min} = -\frac{\pi}{2} \text{ za } x = -1,$$

$y_{\max} = \frac{\pi}{2}$ za $x = 1$, $x = 0$ prevojna tačka. Ako $x \to 1$, $y \to \frac{\pi}{2}$; $x \to -1$, $y \to -\frac{\pi}{2}$; $y = 0$ je horizontalna asimptota (sl. 77).




Sl. 76




Sl. 77

**425.** a) Definisana je u skupu $D = \{x \mid x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$. Nula funkcije je $x = 1$, nema ekstremnih vrednosti. Za $x \geqslant 1$

$$y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \text{ pa je } y' > 0, \text{ funkcija je rastuća.}$$

$$\text{Za } x \leqslant -1 \quad y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}, \ y' > 0, \text{ funkcija je rastuća.}$$

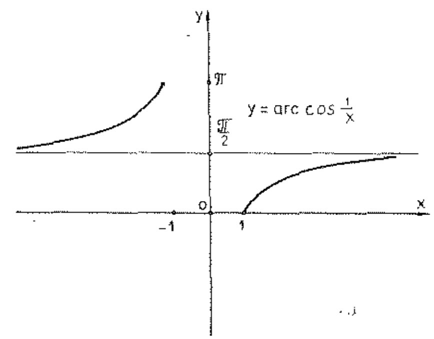
$y = \frac{\pi}{2}$ je horizontalna asimptota, za $x = -1$ $y = \pi$ (sl. 78).



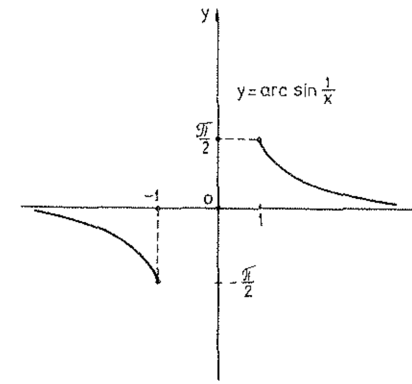
b) Definisana je u skupu $D = \{x \mid x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)\}$, nema nula. Za $x \geqslant 1$ $y' = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $y' < 0$, funkcija opadajuća.

Za $x \leqslant -1$ $y' = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$, $y' < 0$, funkcija je opadajuća. Horizontalna asimptota je $y = 0$.

Za $x = 1$ $y = \frac{\pi}{2}$, za $x = -1$ $y = -\frac{\pi}{2}$ (sl. 79).

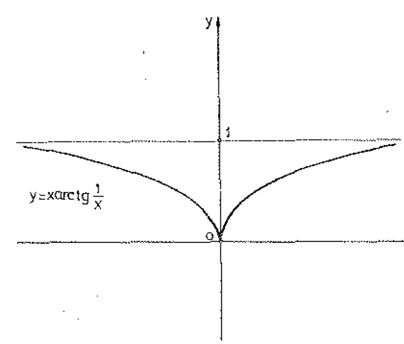



Sl. 78

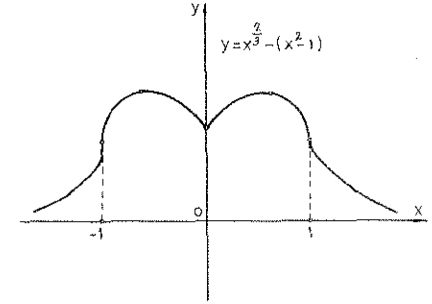



Sl. 79

**426.** Grafici pod a) i b) prikazani su na sl. 80 i 81.




Sl. 80




Sl. 81

**427.** a) Definisana za svako $x$, neprekidna je, $x=0$ i $x=2a$ su nule funkcije.

Prvi izvod $y'=\dfrac{4ax-3x^2}{3\sqrt[3]{(2ax^2-x^3)^2}}=\dfrac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x-(2a-x)^2}}$.

Za $x_1=0$ i $x_2=2a$ prvi izvod nije definisan;

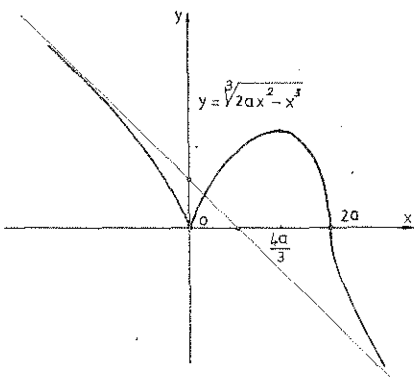
$$\lim_{x\to -0}\frac{4a-3x}{\sqrt[3]{x(2a-x)^2}}\to-\infty,\quad \lim_{x\to+\infty}\frac{4a-3x}{3\sqrt[3]{x(20-x)^2}}\to+\infty.$$

Za $x<0$ $y'<0$, za $x>0$ $y'>0$ data funkcija za $x=0$ ima minimum $y_{\min}=0$. Za $x=\dfrac{4a}{3}$ $y_{\max}=\dfrac{2}{3}a\sqrt[3]{4}$. Za $-\infty<x<0$ funkcija opada; za $0<x<\dfrac{4a}{3}$ raste i za $x>\dfrac{4a}{3}$ opada. Kosa asimptota $y=-x+\dfrac{2a}{3}$ (sl. 82).

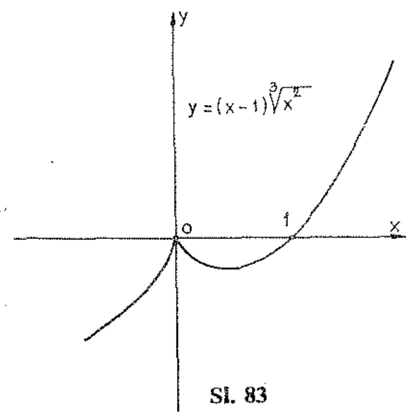
b) Definisan je za svako $x$, $x=0$ i $x=1$ su nule funkcije;

$y_{\min}-\dfrac{3}{5}\sqrt[3]{\dfrac{4}{25}}$ za $x=\dfrac{2}{5}$, $y_{\max}=0$

za $x=0$ $(\lim\limits_{x\to\pm\infty} f'(x)\to\pm\infty)$ (sl. 83).




Sl. 82



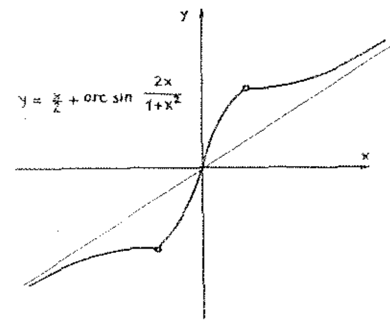

Sl. 83

**428.** a) Definisana je za svako $x$, neparna je, nula funkcije je $x=0$, ekstremne vrednosti su $y_{\min}=-0{,}5(1+\pi)$ za $x=-1$ i $y_{\min}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\pi}{3}$ za $x=\sqrt{3}$. $y_{\max}=0{,}5(1+\pi)$ za $x=1$ i $y_{\max}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{3}$ za $x=-\sqrt{3}$. Prevojne tačke $P_1(-1,\ -0{,}5(1+\pi))$, $P_2(0,\ 0)$,

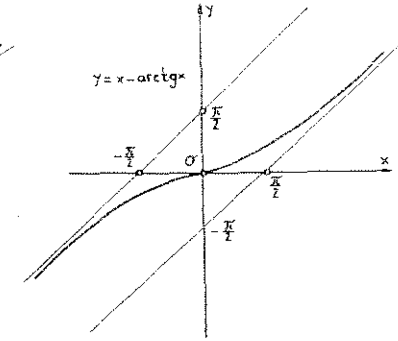


$P_3(1,\ 0{,}5(1+\pi))$. Kosa asimptota je $y=\dfrac{x}{2}$ (sl. 84).

b) Definisana je za svako $x$, neparna je, nula funkcije je $x=0$. Prevojna tačka (0, 0). Kose asimptote su $y=x\pm\dfrac{\pi}{2}$ (sl. 85).




Sl. 84



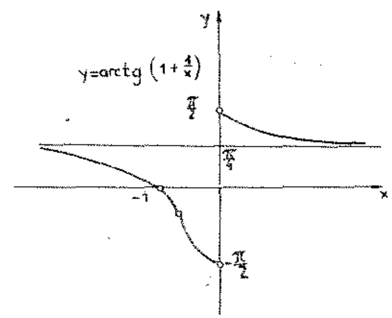

Sl. 85

**429.** a) Definisana je za $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. Ako $x\to0$, $y\to\pm\dfrac{\pi}{2}$.

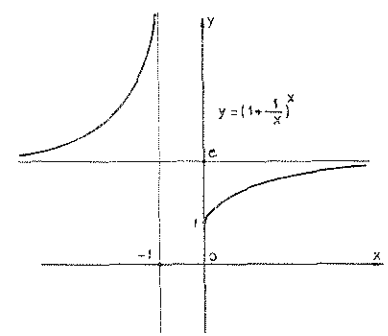
Nula funkcije je $x=-1$, prevojna tačka za $x=-\dfrac{1}{2}$.

Horizontalna asimptota $y=\dfrac{\pi}{4}$ (sl. 86).

b) Definisana je za $x\in(-\infty,-1)\cup(0,+\infty)$, nema nula, $x=-1$ i $y=e$ (sl. 87).




Sl. 86




Sl. 87

# III GLAVA

## 3. APROKSIMACIJA FUNKCIJA

### 3.1. Diferencijal. Primena kod linearnih aproksimacija

**430.** Priraštaj date funkcije $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \Delta x\,(6x+3\Delta x-1) = 0{,}05003$. Diferencijal $dy = f'(x)\cdot dx = f'(x)\,\Delta x = (6x-1)\,\Delta x = 0{,}0500$.
Pri aproksimaciji $\Delta y \approx dy$ apsolutna greška je $\alpha = |\Delta y - dy| = 0{,}0003$ a relativna greška

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = 0{,}06, \text{ a procentualna } 100\cdot\delta = 6\%.$$

**431.** Priraštaj date funkcije je $\Delta y = \Delta x\,(2x+\Delta x-1)$. Za $x=10$ i $\Delta x = 0{,}1$ je

$$\Delta y = 0{,}1\ (20+0{,}1-1) = 1{,}91.$$

Diferencijal date funkcije se izračunava pomoću obrasca $dy = y'dx = y'\Delta x = (2x-1)\Delta x$; za $x=10$ i $\Delta x = 0{,}1$ sledi da je

$$dy = (20-1)\ 0{,}1 = 1{,}9.$$

Pri aproksimaciji $\Delta y \approx dy$ apsolutna greška $\alpha = |\Delta y - dy| = 0{,}01$.

Relativna greška $\delta = \left|\dfrac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \dfrac{1}{191} \approx 0{,}005$, a procentualna greška je

$$100\cdot\delta \approx 0{,}5\%.$$



**432.** a) $\Delta y = 0{,}009006$; $dy = 0{,}009$;
b) $\alpha = 0{,}000006$; $\delta = 0{,}0066622$; $100\delta = 0{,}66622\%$.

**433.** Površina kvadrata stranice $x$ je $y = x^2$ $(x \in (0, +\infty))$. Uvećanje površine predstavlja priraštaj ove funkcije:

$\Delta y = (x+\Delta x)^2 - x^2 = \Delta x\ (2x+\Delta x)$.
Pošto je $x=8$, $\Delta x = 0{,}1$, onda je
$\Delta y = 0{,}1(16+0{,}1) = 1{,}61$.

Povećanje površine kvadrata iznosi $1{,}61\ \mathrm{cm}^2$.
Diferencijal funkcije $y = x^2$ je $dy = 2x.\ \Delta x = 2\cdot 8\cdot 0{,}1 = 1{,}6$.
Relativna greška pri aproksimaciji $\Delta y \approx dy$ iznosi

$$\delta = \left|\frac{\Delta y - dy}{\Delta y}\right| = \frac{1{,}61-1{,}60}{1{,}61} = \frac{0{,}01}{1{,}61} = \frac{1}{161} \approx 0{,}0062111.$$

**434.** $\Delta M = 16\pi$, $dM = 20\pi$; $\delta = 0{,}25$.

**435.** Površina trougla je $P = \frac{1}{2}bc \sin\alpha$. Odavde $P(b) = -\frac{1}{4}b^2 + b$.

Pošto je $\Delta b = 0{,}1$, tada je $\Delta P = 0{,}0475$, $dP = 0{,}05$; $\delta = 0{,}05$.

**436.** $\Delta y = 0{,}452$; $dy = 0{,}4$; $\delta = 0{,}1150442$.

**437.**

| | | | |
|---|---|---|---|
| a) | $\Delta s = 215$ m | $ds = 210$ m | $\delta = 0{,}022325$: |
| b) | $\Delta s = 21{,}05$ m | $ds = 21$ m | $\delta = 0{,}002375$; |
| c) | $\Delta s = 2{,}1005$ m | $ds = 2$ m | $\delta = 0{,}048$. |

**438.** Ako primenimo obrazac (3) $f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\ \Delta x$ iz primedbe (3) na datu funkciju, uz $x=1$ i $\Delta x = 0{,}03$, dobija se
$f(1+0{,}03) \approx 1^3 - 4\cdot 1^2 + 7\cdot 1 + 3 - (3\cdot 1^2 - 81 + 7)\ 0{,}03 \approx 7{,}006$.

**439.** $y\ (2+0{,}3) \approx 15{,}42$.

**440.** $y\ (2{,}01) \approx 8{,}14$.

**441.** $y(2{,}1) \approx -16{,}3$.

**442.** $y(-2{,}03) \approx -23{,}84$.

**443.** $y(4{,}2) \approx 0{,}814$.

**444.** a) Neka je $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$. Aproksimacijom priraštaja diferencijalom formula (3) primedbe (3) postaje

(1) $\quad \sin(x + \Delta x) \approx \sin x + \cos x \Delta x.$

Neka je $x = 45° = \frac{\pi}{4}$, $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180°}$, tada je

$46° = 45° + 1° = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180°}$.

Zamenom $y$ (1) dobija se da je $\sin 46° = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) =$

$$= \sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\pi}{180°} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{180°} = 0{,}7071 + 0{,}7071\cdot 0{,}017 =$$
$$= 0{,}7194.$$

*Primedba* 1. Ako se u formuli (1) stavi da je $x = 0$, $\Delta x = \alpha$ dobija se približna jednakost

(2) $\quad \sin\alpha \approx \alpha.$

*Primedba* 2. Iz približne nejednakosti (2) zaključuje se da se za male vrednosti ugla sinus u približnim računima može zameniti uglom

b) $\sin 60°3' \approx 0{,}8665$.

**445.** a) Ako primenimo formulu (3), dobija se $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{180°}\right) =$

$$\sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{180} = 0{,}5 + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180°} = 0{,}51511;$$

b) 0,8747.

**446.** a) Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Prvi izvod funkcije je $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. Za $x = 1$ i $\Delta x = 0{,}02$ formula (3) postaje

$$f(1 + 0{,}02)\sqrt[3]{1} + \frac{1}{3\sqrt[3]{1}}\cdot 0{,}02 = 1 + 0{,}33333\cdot 0{,}02 = 1 + 0{,}00666 =$$
$$= 1{,}00666;$$

b) 4,02073.



**447.** Ovde treba poći od funkcije $f(x) = \log_{10} x$ i primeniti aproksimativni obrazac

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\cdot\Delta x,$$

uzimajući da je $x = 200$, $\Delta x = 0{,}2$. Tada se dobija

$$\log(x + \Delta x) = \log_{10} x + \frac{\log_{10} e}{x}\Delta x,$$

$$\log_{10} 200{,}2 \approx \log_{10} 200 + \frac{0{,}43}{200}\,0{,}2$$
$$\approx 2{,}30103 + 0{,}0043 \approx 2{,}30146 \quad (\log_{10} e \approx 0{,}43).$$

**448.** a) 1,04343;

b) Aproksimativna formula za funkciju $f(x) = \operatorname{tg} x$ ima oblik

(1) $\quad \operatorname{tg}(x + \Delta x) \approx \operatorname{tg} x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\Delta x.$

Za $x = 60° = \frac{\pi}{3}$, $\Delta x = 1° = \frac{\pi}{180°}$ dobija se

$$\operatorname{tg} 61° \approx \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} + \frac{1}{\cos^2\frac{\pi}{3}}\cdot\frac{\pi}{180°} \approx \sqrt{3} + 4\cdot\frac{\pi}{180°} \approx 1{,}73205 + 0{,}06981 \approx$$
$$\approx 1{,}80186.$$

*Primedba* 1. Ako u formulu (1) stavimo $x = 0$, $\Delta x = \alpha$, dobija se formula

(2) $\quad \operatorname{tg}\alpha \approx \alpha.$

*Primedba* 2. Za male vrednosti ugla $\alpha$ prema formuli (2) $\operatorname{tg}\alpha$ se može zameniti uglom $\alpha$.

**449.** Polazeći od funkcije $f(x) = \sqrt{x}$ i aproksimacijom priraštaja diferencijalom, dobija se

(1) $\quad \sqrt{x + \Delta x} \approx \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x.$

Zamenom $x = 1$ i $\Delta x = h$ formula (1) postaje

(2) $\quad \sqrt{1 + h} \approx 1 + \dfrac{1}{2}h.$

b) Analogno rešenju pod a), koristeći funkciju $f(x) = \sqrt[3]{x}$ i aproksimacijom $\Delta y \approx dy$ dobija se

(3) $\sqrt[3]{x+\Delta x}\approx\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\Delta x.$

Ako se zameni $x=1$ i $\Delta x=h$, formula (3) postaje

(4) $\sqrt[3]{1+h}\approx 1+\dfrac{1}{3}h.$

**450.** a) 1,02; b) 1,02.

**451.** Iskoristiti uputstvo iz zadatka 307.

**452.** $\dfrac{1}{x+\Delta x}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{\Delta x}{x^2}\approx 0{,}996.$

**453.** $\operatorname{arctg} 1{,}05\approx 0{,}81.$

**454.** *Primedba*. Priraštaj neprekidne funkcije $y=f(x)$ u tački $x_0$ i njenoj okolini dat je formulom

(1) $\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+\beta(x)\cdot\Delta x.$

gde $\beta(x)\to 0$ kod $\Delta x\to 0$; $\Delta y=f(x)-f(x_0)$, $\Delta x=x-x_0$.

Formula (1) može se napisati u obliku

(2) $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)+\beta(x)\cdot(x-x_0).$

Formulom (2) može se u okolini tačke $x_0$ luk krive zameniti tangentom (linearna aproksimacija).

Da bismo za funkciju $f(x)=x^3-3x+2$ odredili odgovarajuću linearnu funkciju u tački $(x_0, f(x_0))$ odredimo $f(2)$ i $f'(2)$. $f(2)=2^3-3\cdot 2+2=4$, $f'(2)=3\cdot 2-3=9$. Prema prethodnoj primedbi odgovarajuća linearna funkcija je

$f(x_0)\to 4+9(x-2)=9x-14.$

Greška koja se čini zamenom date funkcije linearnom je

$f(x)-(9x-14)=x^3-12x+16.$

Grešku možemo napisati i u obliku $\beta(x)(x-2)$, tj.

$x^3-12x+16=(x-2)(x^2+2x-8),$

pri čemu je $\beta(x)=x^2+2x-8.$

Dakle,

$f(x)=x^3-3x+2=9x-14+(x^2+2x-8)(x-2).$

**455.** $f_0(x)\to 6x-5.$

**456.** $f_0(x)\to 2x.$



**457.** $f_0(x)\to 2x+3.$

**458.** *Primedba.* Lagranžov interpolacioni polinom čiji grafik sadrži $n+1$ tačku $M_i(x_i, y_i)$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ glasi:

$$f(x)\approx P_n(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_n)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_n)}f(x_1)+$$

$$+\ldots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_2-1)}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ldots(x_n-x_n-1)}f(x_n).$$

Na osnovu prethodne primedbe Lagranžov interpolacioni polinom drugog reda glasi

$$f(x)\approx P_2(x)=f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x-x_2)}+$$

$$f(x_2)\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}.$$

Zamenom datih vrednosti dobija se da je $P_2(x)=-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{7}{2}x+4.$

**459.** $P_2(x)=\dfrac{x^2+13x+12}{6}.$

**460.** $P(x)=x^2-10x+1$; $P(0)=1.$

**461.** $y=\sin x\approx\dfrac{8}{3\pi^3}(x^3-3\pi x^2+2\pi^2 x).$

### 3.2. Približno rešavanje jednačina sa jednom nepoznatom

**462.** Neka je $f(x)=x^3-2x^2-4x-7$, tada je $f(3)=-10<0$, a $f(4)=9>0$, pa je $f(3)\cdot f(4)<0$. Data jednačina ima realan koren u intervalu [3, 4].

Prvu aproksimaciju dobijamo po formuli

(1) $x_1=a-\dfrac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)},$

tj.

$x_1=3-\dfrac{-10(4-3)}{9+10}=3+\dfrac{10}{19}=3+0{,}52=3{,}52.$

Drugu aproksimaciju, primenom formule (1),

$$x_2=3{,}52-\frac{0{,}48\ f(3{,}52)}{f(4)-f(3{,}52)}=3{,}52+\frac{1{,}7836416}{11{,}246592}=3{,}52+0{,}09\ldots$$

ili, približno,

$x_2\approx 3{,}61.$

Treća aproksimacija

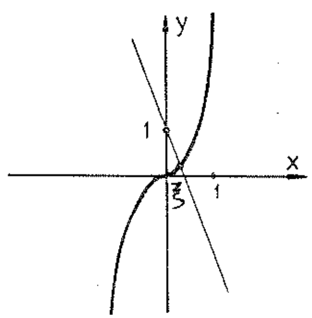
$$x_3=3{,}61-\frac{0{,}39\cdot f(3{,}61)}{f(4)-f(3{,}61)}=3{,}61+\frac{0{,}17874441}{9{,}458319}=3{,}61+0{,}0188\ldots$$

ili, približno,

$x_3\approx 3{,}63.$

Pri daljim aproksimacijama druga decimala se ustaljuje na 3, pa je koren jednačine $x=\xi=3{,}63$.

**463.** Neka je $f(x)=2x^3+6x-1$, onda je $f'(x)=6x^2+6$ a $f''(x)=12x$. Kako je $f(x)>0$ za svako $x$, funkcija $f(x)$ je rastuća i ima jedan realan koren. Grafičkom metodom odredimo interval kome pripada realni koren date jednačine. Data jednačina ekvivalentna je jednačini $2x^3=-6x+1$, odakle je $y=2x^3$ i $y=-6x+1$ (sl. 88). Realni koren date jednačine je u intervalu $[0, 1]$.
Za $x=1$, $f(1)\cdot f''(1)>0$, pa uzimamo za početnu vrednost $a=1$.




**Sl. 88**

Ako primenimo formulu (3) prva aproksimacija je $x_1=1-\dfrac{f(1)}{f'(1)}=$
$=1-\dfrac{7}{12}=0{,}417.$



Druga aproksimacija je

$$x_2=0{,}417-\frac{1{,}647}{7{,}043}=0{,}183\ .$$

Treća aproksimacija je

$$x_3=0{,}183-\frac{0{,}110}{6{,}200}=0{,}165.$$

Četvrta aproksimacija je

$$x_4=0{,}165-\frac{0{,}001}{6{,}163}=0{,}165.$$

Pošto se druga decimala ustalila, zaključujemo da je realni koren date jednačine $\xi\approx 0{,}165$.

**464.** Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$x=2+\frac{1}{2}\ln x.$$

Primenom primedbe 6 dobijamo niz

$$x_1=2+\frac{1}{2}\ln 2{,}5\approx 2{,}458,$$

$$x_2=2+\frac{1}{2}\ln 2{,}458\approx 2{,}450,$$

$$x_3=2+\frac{1}{2}\ln 2{,}450\approx 2{,}448,$$

$$x_4=2+\frac{1}{2}\ln 2{,}448\approx 2{,}448.$$

Dakle, možemo zaključiti da je koren $\xi\approx 2{,}45$; dalje aproksimacije možemo skratiti, jer se treća decimala ustalila.

**465.** $x_1\approx -1{,}88$, $x_2\approx 0{,}35$ i $x_3\approx 1{,}53$.

**466.** $x_1\approx 0{,}38$, $x_2\approx 1{,}24$.

**467.** $x\approx 1{,}84$.

**468.** $x_1\approx 1{,}31$; $x_2\approx -0{,}67$.

**469.** $x_1\approx 1{,}045$.

**470.** $x \approx 2{,}51$.

**471.** $x \approx 0{,}31$.

**472.** $x_1 \approx -1{,}95$; $x_2 \approx 0{,}76$; $x_3 \approx 1{,}69$.

**473.** $x \approx 0{,}51$.

**474.** $x \approx 1{,}64$.

**475.** $x \approx 1{,}096$.

**476.** $x \approx 0{,}84$.

**477.** $x_1 = 4$; $x_2 \approx 0{,}31$.

**478.** $x \approx 0{,}24$.

**479.** $x \approx 0{,}74$.

**480.** $x \approx 2{,}09$.

**481.** $x \approx 0{,}198$.

**482.** $x \approx 3{,}6$.

**483.** $x \approx 2{,}06$.

**484.** $x_1 \approx 0{,}16$; $x_2 \approx 1{,}75$.

**485.** $x_1 \approx 1{,}17$.

**486.** $x \approx 3{,}07$.

**487.** a) $x \approx 1{,}67$; b) $x_1 \approx 1{,}49$; $x_2 \approx -0{,}798$.



# IV GLAVA

## 4. INTEGRAL

### 4.1. Neodređeni integral. Tablica integrala

**488.** a) $x^2 + C$; b) $\frac{x^3}{3} + C$; c) $-t^4 + C$.

**489.** a) $\frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$; b) $-\frac{1}{2x^2} + C$; c) $-\frac{1}{2x^4} + C$.

**490.** a) $\frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} + C$; b) $\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}} + C$; c) $\frac{1-x}{x^2} + C$.

**491.** a) $\frac{x^3}{3} + x^2 + \ln|x| + C$; b) $\frac{5}{4} x^4 - \frac{3}{2} x^2 + 5x + C$.

**492.** a) $\frac{8}{15} \sqrt[8]{x^{15}} + C$; b) $\frac{3x^4}{2} + \frac{16x\sqrt{x}}{3} - 5x + 2\ln|x| + C$.

**493.** $\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} x^{\frac{2}{3}} + \frac{3}{7} x^{\frac{7}{3}} - \frac{1}{x} + C$.

**494.** a) $2x^5 - \frac{1}{x^3} + C$; b) $\frac{x^2}{6} + \frac{x}{3} - \ln|x| + \frac{1}{x} + C$.

**495.** $\frac{x^5}{5} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{7} x^3 - \frac{1}{x} + C$.

**496.** a) $\frac{6}{13} x^{\frac{13}{6}} - \frac{6}{7} x^{\frac{7}{6}} + C$; b) $\frac{4(x^2+7)}{7^4 x} + C$.

**497.** $\frac{2}{7} x^{\frac{7}{2}} + x + \ln|x| - \frac{6}{x} + C$.

**498.** a) $\frac{at^2}{2}+b\ln|t|+C$; b) $t-e^{-t}+C$.

**499.** $e^z+\frac{1}{z}+C$; b) $\frac{a^u}{\ln a}-\frac{2}{\sqrt{u}}+C$.

**500.** a) $\frac{3^y}{\ln 3}-e^{3+y}+C$; b) $2\cdot\frac{0{,}2^x}{\ln\ 0{,}2}+\frac{2^{-x}}{\ln\ 2}+C$.

**501.** $3\sqrt[3]{x^2}-\cos\ x-3\ \arcsin\ x+C$.

**502.** a) $-\text{ctg}\ x-\text{tg}\ x+C$; b) $\text{tg}\ x-\text{ctg}\ x+C$.

**503.** a) $-\text{ctg}\ x-x+C$; b) $\text{tg}\ y-y+C$.

**504.** a) $3\,\text{tg}\ x+2\,\text{ctg}\ x+C$; b) $\frac{x}{2}-\frac{\sin x}{2}+C$.

**505.** a) $x+\cos x+C$; b) $\frac{x}{2}+\frac{\sin x}{2}+C$.

**506.** a) $e^z+\text{tg}\,z+C$; b) $2\ \arcsin t+C$.

**507.** a) $\frac{a^u}{\ln a}-\text{arctg}\,u+C$; b) $\cos x\ -\text{ctg}\,x+C$.

**508.** a) $a\ \ln x-\text{b}\ \arcsin x+C$; b) $\frac{a}{b}\text{arctg}\,x+C$.

**509.** a) $4\ \sin z-\frac{5}{3}\arcsin z+C$; b) $\frac{x^3}{3}x+\text{arctg}\,x+C$.

**510.** $2\ \text{arctg}\,x-3\ \arcsin x+4\ \ln|x|+C$.

**511.** a) $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{6}{5}x^{\frac{5}{6}}+\ln|x|+C$; b) $\ln|x|-6x^{\frac{1}{6}}+\frac{1}{x}+C$.

**512.** a) $e^x-\cos x+C$; b) $2y+\text{tg}\,y+C$.

**513.** $\frac{ax^4}{4}+\frac{\text{b}x^2}{3}+\frac{\text{c}x^2}{2}+dx+C$.



**514.** $\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+C$.

**515.** a) $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^2}{2}+6\sqrt{x}+C$; b) $2x-\frac{2}{3}x\sqrt{x}+C$.

**516.** $3x^2+2x+C$; b) $\ln|x|+2\ \text{arctg}\,x+C$.

**517.** a) $a^2x-\frac{9}{5}a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+\frac{a}{7}a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-\frac{x^3}{3}+C$;

b) $\sqrt{x}\left(\frac{2x^{2m}}{4m+1}-\frac{4x^{m+n}}{2m+2n+1}+\frac{2x^{2n}}{4n+1}\right)+C$.

**518.** a) $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+x+C$; b) $\left(\frac{3x^4}{13}-\frac{3x^2}{7}-6\right)\sqrt[3]{x}+C$.

**519.** $y=x^3-x$.

**520.** $y=x^2-x^4$.

**521.** $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

**522.** $y=e^x+x-2$.

**523.** $y=\text{tg}\,x+\text{ctg}\,x$.

**524.** $y=\text{arctg}\,x$.

**525.** $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

**526.** $y=\sin x-\cos x+1$.

**527.** $s=t^3+2t^2$.

**528.** $s=2\ \sin t+10-\sqrt{2}$.

**529.** $y=e^x+x-2$.

**530.** $y=\sin x+1$.

**531.** a) $y=\dfrac{x^2+1}{x}$; b) $y=x^3-2x^2+x$.

**532.** $s=\dfrac{t^4}{12}+\dfrac{t^2}{2}+t$.

### 4.2. Integracija metodom smena

**533.** a) Neka je $5-2x=t \Rightarrow dx=-\dfrac{dt}{2}$. Zbog toga je $\int(5-2x)^9\,dx=$

$$=\int t^9\cdot\left(-\frac{dt}{2}\right)=-\frac{1}{2}\int t^9 dt=-\frac{t^{10}}{20}+C=-\frac{(5-2x)^{10}}{20}+C.$$

b) $\dfrac{3}{16}(4x+3)^{\frac{1}{3}}+C$ (smena $4x+3=t$).

**534.** a) $\dfrac{1}{3}\ln|3y+2|+C$ (smena $3y+2=t$) ;

b) $\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ (smena $1+x^2=t$) .

**535.** a) $-\sqrt{1-x^2}+C$ (smena $1-x^2=t^2$) .

b) $-\dfrac{1}{2(x^2+1)}+C$ (smena $1+x^2=t$) .

**536.** a) $\dfrac{3}{2}(3-2x)^{-\frac{1}{3}}+C$ (smena $3-2x=t$);

b) $\dfrac{1}{3}\ln|x^3+1|+C$ (smena $x^3+1=t$).

**537.** a) $\ln|x^2+x-3|+C$ (smena $x^2+x-3=t$);

b) $\dfrac{1}{3b^2}(a^2+b^2x^2)^{\frac{3}{2}}+C$ (smena $a^2+b^2x^2=t$).

**538.** a) $\displaystyle\int\frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\int\frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x-\sqrt{1-x^2}+C$



(Prvi integral je tablični, a za drugi važi smena $1-x^2=t^2$.)

b) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\,dx=\int\sqrt{\frac{(1-x)^2}{1-x^2}}\,dx=\int\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=$

$=\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$.

**539.** a) $\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}+C$ (smena $x=at$):

b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+C$ (smena $x=t\sqrt{3}$).

**540.** a) $\dfrac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}}+C$ (smena $x=\sqrt{\frac{2}{3}}\,t$);

b) $\dfrac{1}{10}\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{5}+C$ (smena $x=\dfrac{5}{2}t$).

**541.** a) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{\sin x}{2}+C$ (smena $\sin x=2t$);

b) $-\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\cos\dfrac{x}{a}\right)+C$ (smena $\cos x=at$).

**542.** a) $\operatorname{arctg} e^x+C$ (smena $e^x=t$);

b) $\operatorname{arctg}\ln x+C$ (smena $\ln x=t$).

**543.** a) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x}{5}+C$ (smena $x=\dfrac{5}{3}t$);

b) $\dfrac{7}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{\dfrac{5}{3}}x+C$ (smena $x=\sqrt{\dfrac{3}{5}}t$).

**544.** a) $\dfrac{1}{4}\arcsin\dfrac{4x}{3}+C$ (smena $z=\dfrac{3}{4}t$);

b) $\arcsin\left(\dfrac{\sin x}{a}\right)$ (smena $\sin x=at$).

**545.** a) $\dfrac{1}{\ln 3}\arcsin\dfrac{3^x}{5}+C$ (smena $3^x=5t$);

b) $\arcsin e^x + C$ (smena $e^x = t$).

**546.** a) $\arcsin \ln z$ (smena $\ln z = t$);

b) $-\arcsin \frac{1}{x}$ (smena $x = \frac{1}{z}$).

**547.** a) $e^{ax+b} + C$ (smena $ax + b = z$);

b) $\ln(e^x + 1) + C$ (smena $e^x + 1 = u$).

**548.** a) $-\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$ (smena $-x^2 = u$);

b) $-\frac{1}{6} \ln|1 - 3\, e^{2x}| + C$ (smena $1 - 3^{2x} = z$).

**549.** a) $-\frac{1}{3} e^{-x^2} + C$ (smena $-x^3 = t$).

**550.** a) $\frac{3^{5x^2}}{10 \ln 3} + C$ (smena $5x^2 = u$);

b) $\frac{0{,}5\,(ab)^{2x}}{\ln(ab)} + C$ (smena $2x = t$).

**551.** a) $\frac{a^{x^4}}{4 \ln a} + C$ (smena $x^4 = z$).

b) $2e^{\sqrt{x}} + C$ (smena $\sqrt{x} = u$).

**552.** a) $e^{\sin x} + C$ (smena $\sin x = t$).

b) $-e^{\frac{1}{x}} + C$ (smena $\frac{1}{x} = z$).

**553.** a) $\frac{\ln^4 x}{4} + C$ (smena $\ln x = t$);

b) $\frac{\ln^2 y}{2} + C$ (smena $\ln y = z$).

**554.** a) $\ln|1 + \ln t| + C$ (smena $1 + \ln t = u$);

b) $-0{,}5\,(2 - \ln t)^2 + C$ (smena $2 - \ln t = u$).



**555.** Neka je $\ln x = u$, $\frac{dx}{x} = du$, tada je $\int \frac{dx}{x \ln x\, \ln(\ln x)} = \int \frac{du}{u \ln u}$. Ako je $\ln u = z$, $\frac{du}{u} = dz$, poslednji integral se postupno svodi na

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dz}{z} = \ln|z| + C = \ln|\ln u| + C = \ln|\ln\, \ln x| + C.$$

**556.** a) $\frac{1}{a} \sin(ax + b) + C$ (smena $ax + b = u$);

b) $-0{,}5 \cos \sqrt{x} + C$ (smena $\sqrt{x} = u$).

**557.** a) $\ln|\sin x| + C$ (smena $\sin x = t$);

b) $\ln\left|\frac{C}{\cos x}\right|$ (smena $\cos x = u$).

**558.** a) $-0{,}5 \cos(t^2 - 1) + C$ (smena $t^2 - 1 = z$);

b) $0{,}5 \sin(x^2 + 1) + C$ (smena $x^2 + 1 = z$).

**559.** a) $2 \sin \sqrt{x} + C$ (smena $\sqrt{x} = t$);

b) $\frac{3}{4} \operatorname{tg} 2x^2 + C$ (smena $2x^2 = u$).

**560.** a) $2 \operatorname{tg} \sqrt{x} + C$ (smena $\sqrt{x} = u$).

b) $\frac{1}{3} \operatorname{tg} x^3 + C$ (smena $x^3 = u$).

**561.** a) $-0{,}25 \operatorname{ctg} 2x^2 + C$ (smena $2x^2 = z$);

b) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3} - t\right) + C$ (smena $\frac{\pi}{3} - t = z$).

**562.** a) $\operatorname{ctg} \frac{1}{x} + C$ (smena $\frac{1}{x} = u$);

b) $-\operatorname{ctg} \ln x + C$ (smena $\ln x = u$).

**563.** a) $\frac{\sin^3 x}{3} + C$ (smena $\sin x = t$);

b) $-\frac{\cos^4 t}{4} + C$ (smena $\cos x = t$).

**564.** a) Ako se iskoristi identitet $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, tada je

$$\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int\cos 2x\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\sin 2x\right)+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C.$$

**565.** a) $\int\frac{\cos 2x}{\sin x\cos x}\,dx=2\int\frac{\cos 2x}{\sin 2x}\,dx=\ln|\sin 2x|+C$ (smena $\sin 2x=t$);

b) $-\frac{1}{3}\ln|1+3\cos x|+C$ (smena $1+3\cos x=t$).

**566.** a) $\frac{1}{2}\ln|1+2\sin x|+C$ (smena $1+2\sin x=t$);

b) $\frac{2-\cos x}{\sin x}+C.$

**567.** a) Kako je $\sin x=2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$, tada je

$$\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}}.$$

Neka je

$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=z$, tada je $dz=\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{2}\,dx$ ili

$\frac{dx}{\cos^2\frac{x}{2}}=2\,dz$. Odavde je $\int\frac{dx}{\sin x}=\int\frac{dz}{z}=\ln|z|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right|+C.$

b) $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$. Neka je $\frac{\pi}{2}+x=z$, tada je $dx=dz$. Dalje

imamo da je $\int\frac{dx}{\cos x}=\int\frac{dz}{\sin z}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{z}{2}\right|+C=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{\frac{\pi}{2}+x}{2}\right|+C=$

$=\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)\right|+C.$



**568.** a) Dati integral se postupno transformiše:

$$\int\cos^5 x\,dx=\int\cos^4 x\cdot\cos x\,dx=\int(1-\sin^2 x)^2\cos x\,dx=\sin x-$$

$$-\frac{2\sin^3 x}{3}+\frac{\sin^5 x}{5}+C\quad(\text{smena } \sin x=u).$$

b) $\int\sin^7 x\,dx=\int\sin^6 x\sin x=\int(1-\cos^2 x)^3\sin x\,dx=$

$$=-\cos x+\cos^3 x-\frac{3}{5}\cos^5 x+\frac{\cos^7 x}{7}+C\quad(\text{smena } \cos x=z).$$

**569.** a) $-\frac{1}{\sin^4 x}+C$ (smena $\sin x=t$);

b) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C$ (smena $\cos x=t$).

**570.** a) $-\sqrt{1+2\cos x}+C$ (smena $1+2\cos x=z^2$);

b) $-e^{\cos x}+C$ (smena $\cos x=z$).

**571.** a) $\frac{5^{\sin x}}{\ln 5}+C$ (smena $\sin x=t$);

b) $\frac{1}{6}(1+4\sin x)^{\frac{3}{2}}+C$ (smena $1+4\sin x=z^2$).

**572.** a) $\int\cos^4 x\,dx=\int(\cos^2 x)^2\,dx=\int\frac{1+\cos 2x^2}{2}\,dx=$

$$=\frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\int\cos^2 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$$

$$=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int(1+\cos 4x)\,dx$$

$$=\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$$

b) $\frac{3x}{8}-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C.$

**573.** a) $\int\operatorname{tg}^4 x\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x\,\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx=\int\operatorname{tg}^2 x\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx=$

$$=\int\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}-\operatorname{tg}^2 x\right)dx=\int\left(\frac{\operatorname{tg}^2 x}{\cos^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}+1\right)dx=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}^3 x}{3}-\operatorname{tg} x+x+C \quad (\text{smena } \operatorname{tg} x=t).$$

b) $-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x+\operatorname{ctg} x+x+C$.

**574.** a) $\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C \quad (\text{smena } \sin x=t,\ \cos^3 x=(1-\sin^2 x)\cos x)$;

b) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{1}{5}\cos^5 x+C$
(smena $\cos x=t$, $(1-\cos x)^2\sin x$).

**575.** *Primedba*. Za izračunavanje integrala oblika:
$\int\sin ax\cos bx\,dx$, $\int\sin ax\sin bx\,dx$ i $\int\cos ax\cos bx\,dx$ koriste se poznati identiteti:

$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x-\cos(a+b)x);$$
$$\cos ax\cos bx=\frac{1}{2}(\cos(a-b)x+\cos(a+b)x);$$
$$\sin ax\cos bx=\frac{1}{2}(\sin(a-b)x+\sin(a+b)x).$$

a) $\int\sin 5x\sin 3x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 2x-\cos 8x)\,dx=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{16}\sin 8x+C$;

b) $\int\cos 4x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\int(\cos 3x+\cos 5x)\,dx=\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{10}\sin 5x+C$;

**576.** a) $\frac{1}{4}\cos 2x-\frac{1}{16}\cos 8x+C$;

b) $\frac{3}{2}\cos\frac{x}{3}-\frac{1}{2}\cos x+C$.

**577.** Proizvod pretvoriti u zbir: $\sin x\cdot\frac{1}{2}(\cos x-\cos 5x)$

$$=\frac{1}{2}(\sin x\cos x-\sin x\cos 5x)=\frac{1}{4}\sin 2x-\frac{1}{2}(\sin 6x+\sin 4x).$$

$$\int\sin x\sin 2x\sin 3x\,dx=\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\sin 4x-\frac{1}{8}\cos 2x+C.$$



**578.** a) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}+C \quad (\text{smena } x^3+1=t^3)$;

b) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C \quad (\text{smena } 1+\ln x=t^2)$.

**579.** a) $\frac{1}{4}\,{}^3(x^3-8)^4+C \quad (\text{smena } x^3-8=t^3)$;

b) $-\frac{1}{40}(1-6x^5)^{\frac{4}{3}}+C \quad (\text{smena } 1-6x^5=t^3)$.

**580.** a) $\frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{\sqrt{3}}+C \quad (\text{smena } x^2=\sqrt{3t})$;

b) $\frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^3}{2}+C \quad (\text{smena } x^3=2t)$.

**581.** a) $2\ln(x^2+5)-\sqrt{5}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{5}}+C$;

b) $\frac{x^3}{3}+2x+2\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C$.

**582.** a) $\frac{1}{\ln 4}\arcsin 4^x+C \quad (\text{smena } 4^x=z)$;

b) $\operatorname{arctg}2x^2+C \quad (\text{smena } x^2=\frac{t}{2})$.

**583.** a) Neka je $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$; odavde je $x=\frac{t^2-a^2}{2t}$ a $dx=\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt$. Tada je $\sqrt{x^2+a^2}=t-\frac{t^2-a^2}{2t}=\frac{t^2+a^2}{2t}$. Traženi integral je
$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{1}{\frac{t^2+a^2}{2t}}\cdot\frac{t^2+a^2}{2t^2}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C=$$
$$=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.$$

b) $\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C \quad (\text{smena } \sqrt{x^2-a^2}=t-x)$.

**584.** a) $\frac{1}{b}\ln|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}|+C \quad (\text{smena } bx=t)$;

b) $\frac{1}{a}\ln|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}|+C$ (smena $ax=t$).

**585.** a) $\frac{3}{5}\sqrt{5x^2+1}+\frac{1}{\sqrt{5}}\ln|x\sqrt{5}+\sqrt{5x^2+1}|+C$ (Dati integral jednak je zbiru dva integrala $3\int\frac{x\,dx}{\sqrt{5x^2+1}}+\int\frac{dx}{\sqrt{5x^2+1}}$. Za prvi integral smena je $5x^2+1=t^2$, a za drugi $x\sqrt{5}=z$.)

b) $\sqrt{x^2-4}+3\ln|x+\sqrt{x^2-4}|+C$.

**586.** a) $\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} y)^2+C$ (smena $\operatorname{arctg} y=z$);

b) $2e^{\operatorname{arctg} x}+C$ (smena $\operatorname{arctg} x=z$).

**587.** a) $\ln|\arcsin x|+C$ (smena $\arcsin x=t$);

b) $\frac{(\arcsin x)^3}{3}+C$ (smena $\arcsin x=t$).

**588.** a) Ako se uvede smena $x=\frac{1}{u}$, odatle je $dx=-\frac{du}{u^2}$. Dati integral se postupno svodi na tablični:

$$\int\frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}=-\int\frac{du}{u^2\frac{1}{u}\sqrt{1+\frac{1}{u^2}}}=-\int\frac{du}{\sqrt{u^2+1}}=$$

$$=-\ln|u+\sqrt{1+u^2}|+C=\ln\frac{x}{1+\sqrt{1+x^2}}+C.$$

b) $\frac{1}{\sqrt{2}}\arccos\frac{\sqrt{2}}{x}+C$ za $x>\sqrt{2}$ (smena $x=\frac{1}{t}$).

**589.** Ako se dati integral transformiše u razliku dva integrala, dobija se

$$\int\frac{dx}{\sqrt{2-x^2}}-\int\frac{dx}{\sqrt{2+x^2}}=\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}}-\ln|x+\sqrt{x^2+2}|+C.$$

**590.** Dati integral se transformiše u zbir tri integrala:

$$\int\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2}dx+\int\frac{x\ln(1+x^2)}{1+x^2}dx+\int\frac{dx}{1+x^2}=\frac{e^{\operatorname{arctg} x}}{4}+\operatorname{arctg} x+C$$

(smena: $\operatorname{arctg} x=t$ i $\ln(1+x^2)=u$).



**591.** a) $\frac{1}{2}\arcsin\left(\frac{\sin^2 x}{\sqrt{2}}\right)+C$ (smena $\sqrt{2}\sin^2 x=t$);

b) $\frac{(\arcsin x)^2}{2}-\sqrt{1-x^2}+C$.

**592.** a) $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$;

b) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2+C$.

**593.** a) $\frac{1}{\sqrt{6}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\operatorname{tg} x\right)+C$;

b) $\frac{a^x e^x}{1+\ln a}+C$.

**594.** a) Ako se uvede smena $x=\operatorname{tg} t$, tada je $dx=\frac{dt}{\cos^2 t}$, pa je

$$\int\frac{dx}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{dt}{\cos^2 t(1+\operatorname{tg}^2 t)^{\frac{3}{2}}}=\int\frac{\cos^3 t}{\cos^2 t}dt=\int\cos t\,dt=\sin t+C=$$

$$=\frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}}+C=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}+C.$$

b) Neka je $x=a\sin t$, tada je $dx=a\cos t\,dt$, pa je

$$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int\sqrt{a^2(1-\sin^2 t)}\,a\cos dt=a^2\int\cos^2 t\,dt=$$

$$=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}\right)=\frac{a^2}{2}\left(\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right)+C=$$

$$=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+C.$$

**595.** a) Neka je $x=a\operatorname{tg} u$, $dx=\frac{a\,du}{\cos^2 u}$, $\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2+a^2tg^2u}=$

$$=a\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 u}=\frac{a}{\cos u}.$$

Dati integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \int \frac{a}{\cos^2 u} \cdot \frac{1}{a \operatorname{tg} u} \cdot \frac{\cos u}{a} du = \frac{1}{a}\int \frac{du}{\sin u} = \frac{1}{a} \ln\left|\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right| + C.$$

Vratimo se na promenljivu $x$. Kako je

$$\cos u = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}, \text{ tada je } \sin u = \sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \text{i}$$

$$\operatorname{tg}\frac{u}{2} = \frac{\sin u}{1+\cos u} = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}\right)} = \frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}.$$

Konačno, traženi integral je

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{1}{a} \ln\left|\frac{x}{a+\sqrt{a^2+x^2}}\right| + C.$$

b) Dati integral se transformiše na ovaj način:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{9+x^2-9}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \int \frac{9-x^2}{\sqrt{9-x^2}}\,dx =$$

$$= 9\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} - \sqrt{9-x^2}\,dx = \frac{9}{2}\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + C$$

(smena za drugi integral je $x = 3\sin t$).

**596.** Neka je $a-x=u^2 \Leftrightarrow x=a-u^2$; odavde sledi da je $dx=-2u\,du$, $\sqrt{a-x}=u$.

Traženi integral se postupno transformiše na ovaj način:

$$\int x\sqrt{a-x}\,dx = -2\int (a-u^2)u^2\,du = -2a\int u^2\,du + 2\int u^4\,du =$$

$$= -\frac{2a}{3}u^3 + \frac{2}{5}u^5 + C = -\frac{2a}{3}\sqrt{(a-x)^3} + \frac{2}{5}(\sqrt{a-x})^5 + C.$$

**597.** a) $\frac{1}{\cos x} + 2\cos x - \frac{1}{3}\cos^3 x + C$ (smena $\cos x = z$, $\sin^5 x = (1-\cos^2 x)\sin x$);

b) $\frac{1}{3}\sin^3 x - 2\sin x - \frac{1}{\sin x} + C$ (smena $\sin x = z$, $\cos^5 x = (1-\sin^2 x)^2 \cos x$).

**598.** a) $\ln\cos^4 x + \frac{1}{\cos^2 x} - \cos^2 x + C$ (smena $\cos x = z$);

b) $\sin^2 x - \ln\sin^4 x - \frac{1}{\sin^2 x}$ (smena $\sin x = z$).



**599.** a) $-\frac{1}{4}\sin x + \frac{3}{16}\ln\left|\frac{2\sin x-1}{2\sin x+1}\right| + C$ (smena $\sin x = t$);

b) $\frac{1}{2}\cos x - \frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{\sqrt{2}\cos x-1}{\sqrt{2}\cos x+1}\right| + C$ (smena $\cos x = t$).

### 4.3. Parcijalna integracija

**600.** a) Usvojimo da je $u=x$, $d=\cos x\,dx \Rightarrow du=dx$, $v=\sin x$, pa je primenom formule (2) $\int x\cos x\,dx = x\sin x - \int \sin x\,dx = x\sin x + \cos x + C$.

b) Uzmimo da je $u=\ln x$ i $dv=x^n\,dx$. Tada je $du=\frac{1}{x}\ln x$, $v=\frac{x^{n+1}}{n+1}$, pa je na osnovu (2)

$$\int x^n \ln x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\ln x - \frac{1}{n+1}\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln x - \frac{1}{n+1}\right) + C.$$

**601.** a) $e^x(x-1)+C$ $(u=x,\ dv=e^x\,dx)$;

b) $x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$ $(u=x^2,\ dv=\cos x\,dx)$.

**602.** a) $x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C$ $(u=\operatorname{arctg} x,\ dv=dx)$;

b) $\frac{x^2}{2}(\ln x - 0{,}5)+C$ $(u=\ln x,\ dv=x\,dx)$.

**603.** a) $(x-1)\cos x - \sin x + C$ $(u=x-1,\ dv=\sin x\,dx)$;

b) $\frac{x-1}{2}\ln|x-1| - 0{,}5x(0{,}5x+1)+C$ $(u=\ln|x-1|,\ dv=x\,dx)$.

**604.** a) $-\frac{x\ln 2+1}{2^x\ln^2 2}+C$ $(u=x,\ dv=2^{-x}dx)$;

b) $-\frac{x+1}{e^x}+C$ $(u=x,\ dv=e^{-x}dx)$.

**605.** a) $-e^{-x}(x^2+5)$ $(u=x^2-2x+5,\ dv=e^{-x}dx)$;

b) $-x\operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$ $\left(u=x,\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\right)$.

**606.** a) $0{,}25\,(2x^2+10x+11)\sin 2x+0{,}25\,(2x+5)\cos 2x+C$
$(u=x^2+5x+6,\ \ dv=\cos 2x\ dx)$;

b) $x\operatorname{tg}x+\ln|\cos x|+C \quad \left(u=x,\ \ dv=\dfrac{dx}{\cos^2 x}\right)$.

**607.** a) $-\dfrac{\ln x}{2x^2}-\dfrac{1}{4x^2}+C \quad (u=\ln x,\ \ dv=x^{-3}dx)$;

b) $x(\ln^2 x-2\ln x+2)+C \quad (u=\ln^2 x,\ \ dv=dx)$.

**608.** a) Neka je $\mathrm{I}=\int e^x\sin x\ dx$. Ako uzmemo $u=\sin x$, $dv=e^x\,dx$, tada je $du=\cos x\ dx$, $v=e^x$, pa je

(1) $\qquad \mathrm{I}=e^x\sin x-\int e^x\cos x\ dx.$

Primenimo ponovo parcijalnu integraciju na dobijeni integral. Sada je $u=\cos x$, $dv=dx$, pa je $du=-\sin x\ dx$, $v=e^x$ i jednačina (1) transformiše se na ovaj način:

$\mathrm{I}=e^x\sin x-(e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)\ dx).$

(2) $\qquad \mathrm{I}=e^x\sin x-e^x\cos x-\int e^x\sin x\ dx.$

U jednačini (2) se ponovo javlja traženi integral.

(3) $\qquad \mathrm{I}=e^x(\sin x-\cos x)-\mathrm{I}\Rightarrow 2\mathrm{I}=e^x(\sin x-\cos x)$

$$\mathrm{I}=\frac{e^x(\sin x-\cos x)}{2}+C.$$

b) $\dfrac{1}{2}\,e^x(\sin x+\cos x)+C$ (analogno prethodnom primeru).

**609.** a) $\dfrac{1}{3}\left(x^3\sin 3x+x^2\cos 3x-\dfrac{2}{3}x\sin 3x-\dfrac{2}{9}\cos 3x\right)+C$

$(u=x^3$, $dv=\cos 3x\ dx$, tri uzastopne parcijalne integracije).

b) $\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x^3-\dfrac{3x^2}{a}+\dfrac{6x}{a^2}-\dfrac{6}{a^3}\right)+C$ (tri uzastopne parcijalne integracije, $u=x^3$, $dv=e^{ax}\,dx$).

**610.** a) Neka je $u=\sqrt{x^2-a^2}$, $dv=dx$, tada je $du=\dfrac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $v=x$.

$$\mathrm{I}=\int\sqrt{x^2-a^2}\ dx=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$



$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\ dx$$

$$=x\sqrt{x^2-a^2}-\int\sqrt{x^2-a^2}\ dx-a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Poslednja jednačina može se napisati u obliku

$\mathrm{I}=x\sqrt{x^2-a^2}-\mathrm{I}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$

ili

$2\mathrm{I}=x\sqrt{x^2-a^2}-a^2\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|$;

odavde sledi da je

$$\mathrm{I}=\frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2}-\frac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2-a^2}|+C.$$

b) $\dfrac{x}{2}\sqrt{a^2+x^2}+\dfrac{a^2}{2}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C$ (analogno prethodnom primeru $a$).

**611.** $2\sqrt{x}\arcsin\sqrt{x}+2\sqrt{1-x}+C$ (smena $\sqrt{x}=t$, zatim primena formule parcijalne integracije).

**612.** a) $\dfrac{x^2+1}{2}\operatorname{arctg}x-\dfrac{x}{2}+C \quad (u=\operatorname{arctg}x,\ dv=x\,dx)$;

b) $\dfrac{1}{4}((2x^2-1)\arcsin x+x\sqrt{(1-x^2)})+C \quad (u=\arcsin x,\ dv=x\,dx)$.

**613.** a) $-\dfrac{x^2+1}{2}e^{-x^2}+C \quad (u=x^2,\ dv=e^{-x^2}\cdot x\,dx)$;

b) $\dfrac{x^4}{4}\left(\ln x-\dfrac{1}{4}\right)+C \quad (u=\ln x,\ dv=x^3\,dx)$.

**614.** a) $\dfrac{3^x(\sin x+\cos x\ln 3)}{1+\ln^2 3}+C$ (dve uzastopne parcijalne integracije, slično zadatku 466):

b) $-\dfrac{x}{\sin x}+\ln\left|\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\right|+C \quad \left(u=x,\ dv=\dfrac{\cos x\,dx}{\sin^2 x}\right)$.

**615.** a) $\dfrac{5^{x^2}}{2\ln 5}(x^2-\dfrac{1}{\ln 5}+C \quad (u=x^2,\ dv=5^{x^2}x\,dx)$;

b) $\frac{\sin 2x}{8}-\frac{x\cos 2x}{4}+C \quad (u=x,\ dv=\sin x\cos x\,dx)$.

**616.** a) $x\ln(x+\sqrt{1+x^2})-\sqrt{1+x^2}+C \quad (u=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ dv=dx)$;

b) $-\frac{1}{x}(\ln^2 x+2\ln x+2)+C \quad (u=\ln^2 x,\ dv=x^{-2}\,dx)$.

**617.** a) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)-\cos(\ln x))+C \quad (u=\sin(\ln x),\ dv=dx)$;

b) $\frac{x}{2}(\sin(\ln x)+\cos(\ln x))+C \quad (u=\cos(\ln x),\ dv=dx)$;

**618.** a) $\frac{e^x}{5}(\sin^2 x-\sin 2x+2)+C$ (iskoristiti identitet $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, zatim dve parcijalne integracije);

b) $\frac{e^x}{5}(\cos^2 x-\sin 2x+2)+C$ (iskoristiti identitet $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$).

**619.** a) $\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(x^2-1)-\frac{1}{2}x^2+C \quad (u=\ln(x^2-1),\ dv=x\,dx)$;

b) $\frac{x^3}{3}\ln\left|\frac{1-x}{1+x}\right|-\frac{1}{3}\ln|1-x^2|-\frac{1}{3}x^2+C \quad \left(u=\ln\frac{1-x}{1+x},\ dv=x^2\,dx\right)$.

**620.** a) $\frac{1}{6}(2x^3+3x^2-1)\ln(x+1)-\frac{1}{9}x^3-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{6}x+C$

$(u=\ln(x+1), \quad dv=(x^2+x)\,dx)$;

b) $e^x(x-1)+C$.

**621.** a) $\frac{e^{ax}\ (a\cos bx+b\sin bx)}{a^2+b^2}+C$;

b) $\frac{e^{ax}\ (a\sin bx-b\cos bx)}{a^2+b^2}+C$.

**622.** a) $\frac{x^2+1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2-x\operatorname{arctg} x+\frac{1}{2}\log(x^2+1)+C$;

b) $\frac{x^3}{3}\operatorname{arctg} 3x-\frac{x^2}{18}+\frac{1}{162}\ln(9x^2+1)+C$.



**623.** $(x^3+3x^2+5x+5)\operatorname{arctg} x-\frac{x}{2}-3x-2\ln(x^2+1)+C$.

**624.** Ako iskoristimo identitet

$\frac{1}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)$, dati integral se izračunava na sledeći način:

$$\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)$$

$$=\frac{1}{2a}(\ln|x-a|-\ln|x+a|+C$$

$$=\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C.$$

b) Iskoristiti identitet

$$\frac{1}{k^2-x^2}=\frac{1}{2k}\left(\frac{1}{k+x}+\frac{1}{k-x}\right).$$

*Primedba.* Ova dva integrala se koriste kao tablični jer je njihova primena česta.

**625.** *Primedba.* Da bismo izračunali integral oblika $\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}$ $(a\neq 0)$, najpre trinom $ax^2+bx+c$ svodimo na konačni oblik:

$$ax^2+bx+c=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}=a\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2+k,$$

gde je

$k=\frac{4ac-b^2}{4a^2}$. Ako uvedemo smenu $x+\frac{b}{2a}=t$, $dx=dt$

i dobijemo da je

$$\mathrm{I}=\int\frac{dx}{ax^2+bx+c}=\frac{1}{a}\int\frac{dt}{t^2+k}.$$

Izračunavanje poslednjeg integrala svodi se na jedan od sledećih slučajeva:

1° $\quad b^2-4ac>0$, $\mathrm{I}=\frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right|+C$;

$2^\circ$ $b^2-4ac=0$, $\mathrm{I}=\dfrac{2}{2ax+b}+C$;

$3^\circ$ $b^2-4ac<0$, $\mathrm{I}=\dfrac{2}{\sqrt{4ac+b^2}}\operatorname{arctg}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}+C$.

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-6x+13}=\int\frac{dx}{(x-3)^2+4}=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2}$ (smena $x-3=2t$).

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2-4x+3}=\int\frac{dx}{(x-2)^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C$ (smena $x-2=t$, vidi zadatak pod a).

**626.** a) $-\dfrac{1}{x+3}+C$ (smena $x+3=t$);

b) $\operatorname{arctg}\dfrac{x+2}{3}+C$ (smena $x+2=3t$).

**627.** a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-4}{x}\right|+C$ $(x^2-4x=(x-2)^2-4$ (smena $x-2=t$);

b) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}$ $\left(x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}\right.$, (smena $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$).

**628.** a) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{2}+C$ (smena $x+1=2t$);

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{3x^2-2x+4}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{11}{9}}=\frac{1}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{3x-1}{\sqrt{11}}+C$

(smena $x-\dfrac{1}{3}=\dfrac{\sqrt{11}}{3}z$).

**629.** a) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-5}{x-1}\right|+C$; b) $\operatorname{arctg}(2z-1)+C$.

**630.** *Primedba.* Integral oblika $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$, za $a>0$, transformiše



se posle svođenja kvadratnog trinoma na $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{t^2+k^2}}$;

a za $a<0$ na integral oblika $\displaystyle\int\frac{dt}{\sqrt{k^2-t^2}}$. Ovi oblici integrala su razmatrani u zadacima 583. pod a) i b).

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x^2+x+1}=\int\frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}=\ln\left|x+\frac{1}{2}+\sqrt{x^2+x+1}\right|+C$

(smena $x+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t$);

b) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{15+2x-x^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{16-(x-1)^2}}=\arcsin\frac{x-1}{4}+C$

(smena $x-1=4t$).

**631.** a) $\ln|x+2+\sqrt{x^2+4x}|+C$;

b) $\arcsin(x-1)+C$.

**632.** a) $\arcsin\dfrac{2x+3}{\sqrt{17}}+C$;

b) $\dfrac{1}{2}\ln|2x-3+\sqrt{4x^2-12x+10}|+C$.

**633.** a) $\ln(e^x+\dfrac{1}{2}+\sqrt{1+e^x+e^{2x}})+C$ (smena $e^x=z$ dati integral se svodi na 630 a);

b) $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{3-\sin x}{3}+C$ (smena $\sin x=\sqrt{z}$ svodi dati integral na poznati).

**634.** a) $-\ln|\cos x+2+\sqrt{\cos^2 x+4\cos x+1}|+C$ (smena $\cos x=t$ svodi dati integral na poznati).

b) $\arcsin\dfrac{2+\ln x}{\sqrt{5}}+C$ (smena $\ln x=z$).

**635.** a) Podintegralna funkcija može se rastaviti na parcijalne razlomke na sledeći način:

$$(1) \qquad \frac{x+2}{x^3-2x^2}=\frac{x+2}{x^2(x-2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-2}.$$

Ako se pomnoži poslednji identitet najmanjim zajedničkim $x^2(x-2)$, dobija se

$$x+2=Ax(x-2)+B(x-2)+Cx^2$$
$$=(A+C)x^2+(B-2A)x-2B.$$

Koristeći osobinu identičnih polinoma da su im koeficijenti uz odgovarajuće stepene promenljive $x$ jednaki, dobija se sistem

$$A+C=0 \wedge B-2A=1 \wedge -2B=2.$$

Rešenja sistema su $A=-1$, $B=-1$, $C=1$.

Na osnovu identiteta (1) dobija se da je

$$\int\frac{x+2}{x^3-2x^2}\,dx=-\int\frac{dx}{x}-\int+\int\frac{dx}{x-2}=\frac{1}{x}+\ln\left|\frac{x-2}{x}\right|+C.$$

b) Jednačina $x^4-1=0$ ima dva realna korena $x_1=1$ i $x_2=-1$ i dva konjugovano kompleksna $x_3=i$ i $x_4=-i$. Radi toga imamo identitet

$$(1) \qquad \frac{2x^2}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2+1}.$$

Množenjem identiteta (1) sa najmanjim zajedničkim dobija se identitet

$$2x^2=(A+B+M)x^3+(A+B+N)x^2+(A+B-M)x+(A-B-N).$$

Primenom metode neodređenih koeficijenata dobija se sledeći sistem

$$A+B+M=0 \wedge A-B+N=2 \wedge A+B-M=0 \wedge A-B-N=0.$$

Rešavanjem sistema nalazimo $A=\frac{1}{2}$, $B=-\frac{1}{2}$, $M=0$ i $N=1$.

Na osnovu identiteta (1) dati integral se postupno svodi na sledeći način:

$$\int\frac{2x^2}{x^4-1}\,dx=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x-1}-\int\frac{dx}{x+1}+\int\frac{dx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+\operatorname{arctg}x+C.$$

**636.** Pošto je stepen brojioca veći od stepena imenioca i pošto se izvrši deljenje dobija se količnik $x+5$ i ostatak $x+1$, tj.



$$\frac{x^3+x^2-16x+16}{x^2-4x+3}=x+5+\frac{x+1}{x^2-4x+3}.$$

Ako se poslednji razlomak transformiše na parcijalne razlomke dobija se

$$\frac{x+1}{(x-1)(x-3)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-3}$$

ili

$$x+1=(A+B)x+(-3A-B).$$

Iz ovog identiteta sledi da je

$$A+B=1 \wedge -3A-B=1 \Rightarrow A=-1 \wedge B=2.$$

Dati integral se postupno transformiše na ovaj način:

$$I=\int x\,dx+5\int dx-\int\frac{dx}{x-1}+2\int\frac{dx}{x-2}=\frac{x^2}{5}+5x+\ln\frac{(x-2)^2}{|x-1|}+C.$$

**637.** a) $\frac{x^3}{3}+x^2+4x+\ln(x-2)^8+C$;

b) $\frac{x^3}{3}-a^2x+a^3\operatorname{arctg}\frac{x}{a}+C.$

**638.** a) $\frac{2}{9}\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|-\frac{2x-1}{6(x+1)^2}+C$;

b) $\ln\frac{\sqrt[5]{(x-3)^4}\cdot\sqrt[10]{(x+2)^7}}{\sqrt{x}}+C.$

**639.** a) $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{1}{4}\ln(x^2+1)+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x+C$;

b) $\ln\left|\frac{x^3}{(x-1)(x+1)^2}\right|+C.$

**640.** a) $\frac{1}{x-2}+\ln\left|\frac{x-2}{x+1}\right|+C$;

b) $\frac{3}{x-2}+\ln\left(\frac{x-2}{x}\right)^2+C.$

**641.** a) $-\frac{1}{x}-\operatorname{arctg} x+C\left(\frac{1}{x^2(x^2+1)}=\frac{A}{x^2}+\frac{B}{x}+\frac{Cx+D}{x^2+1}\right);$

b) $\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}|x^3-1|+C.$

**642.** a) $\ln\left|\frac{Cx^3(x-1)}{x+1}\right|;$

b) $-\frac{1}{2(x-1)}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+\frac{3}{2}\operatorname{arctg} x+C.$

**643.** a) $\frac{x^2}{2}+4x+\ln\frac{(x-1)^8}{|x|}+C;$

b) $\frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{x-a}{x}\right|+\frac{x-a}{ax^2}+C.$

**644.** a) $\frac{1}{10\sqrt{3}}\ln\left|\frac{x-\sqrt{3}}{x+\sqrt{3}}\right|-\frac{1}{5\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C;$

b) $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C.$

**645.** a) $\ln\frac{(x-2)^{\frac{3}{10}}}{x^{\frac{1}{6}}(x+3)^{\frac{2}{5}}}+C;$

b) $\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|-\frac{4}{x-1}+C.$

**646.** a) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1}+\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C,\quad\left(\frac{1}{x^3-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+x+1}\right);$

b) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C.$

**647.** a) $\ln|x^2-5x+9|+\frac{4}{\sqrt{11}}\operatorname{arctg}\frac{2x-5}{\sqrt{11}}+C,\quad\left(\int\frac{2x-3}{x^2-5x+9}\,dx=\right.$

$\left.=\int\frac{2x-5}{x^2-5x-9}\,dx+\int\frac{2\,dx}{x^2-5x+9}\right);$



b) $\ln|x^2+3x+6|-\frac{4}{\sqrt{15}}\operatorname{arctg}\frac{2x+3}{\sqrt{15}}+C\quad\left(\int\frac{(2x+1)\,dx}{x^2+3x+6}=\right.$

$\left.=\int\frac{(2x+3)\,dx}{x^2+3x+6}-\int\frac{2\,dx}{x^2+3x+6}\right).$

**648.** a) $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{3}\ln|x-1|-\frac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C;$

b) $\frac{1}{4}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|-\frac{1}{2}\operatorname{arctg} x+C.$

**649.** a) $\frac{3}{2}\ln(x^2-x+1)+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$

b) $\frac{2}{3}\ln|3x-1|+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C.$

**650.** a) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C;$

b) $\ln\frac{x^2+4}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C.$

**651.** a) $\frac{1}{\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}+\sqrt{2}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}+C.$ (Iskoristiti što je:

$x^4+1=x^4-2x^2+1-2x^2=(x^2-1)^2-(x\sqrt{2})^2=(x^2+x\sqrt{2}+1)$

$(x^2-x\sqrt{2}+1)$, zatim $\frac{4}{1+x^4}=\frac{Ax+B}{x^2+x\sqrt{2}+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x\sqrt{2}+1};$

b) $\frac{2-x}{4(x^2+2)}+\ln(x^2+2)-\frac{1}{4\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$

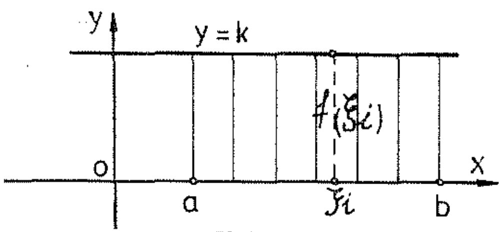
**652.** a) $x+4\ln|x|+\ln(x^2+4)^3+C;$

b) $x^2+\ln|x|+2\ln|x-1|+C.$

**653.** a) $2x+2\ln|x|+\operatorname{arctg}\frac{x}{2}+C;$

b) $x^3-4\ln|x|+\ln(x^2+1)+C.$

**654.** a) Neka je $f(x)=k$, $(k\in R)$, određeni integral $\int_a^b k\,dx$ predstavlja površinu dela ravni $xOy$ ograničenu pravom $f(x)=k$, odsečkom $[a,\ b]$ na $Ox$ osi i ordinatama u tačkama $a$ i $b$ (sl. 89). Ako se izvrši podela segmenta $[a,\ b]$ na $n$ delova tačkama



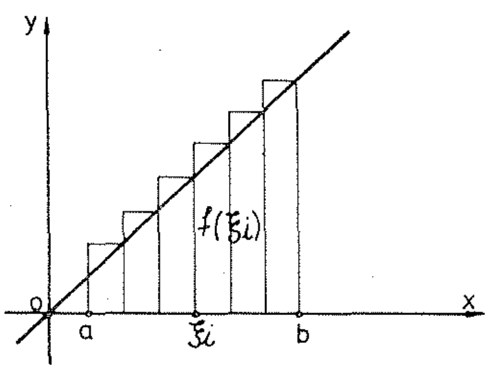

Sl. 89

$a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=$ $=b$, onda je na osnovu definicije određenog integrala

$$\int_a^b k\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}(k(x_1-x_0+x_2-x_1+x_3-x_2+\ldots+$$
$$+x_n-x_{n-1})$$
$$=\lim_{n\to\infty}k(x_n-x_0)=\lim_{n\to\infty}k(b-a)=k(b-a).$$

Dakle, površina pravougaonika je $k(b-a)$.

b) Podelimo segment $[a,\ b]$ na $n$ jednakih delova i uzimamo da su $\xi_i=x_i$ levi krajevi parcijalnih segmenata (sl. 90). Funkcija $f(x)=x$ je neprekidna na segmentu $[a,\ b]$




Sl. 90

$$\Delta x=\frac{b-a}{n}.$$

Primenom definicije određenog integrala dobija se:

$$\int_a^b x\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}(\Delta x\,(a+\Delta x)+\Delta x\,(a+2\Delta x)+\Delta x\,(a+$$
$$+3\Delta x)+\ldots+\Delta x\,(a+n\,\Delta x))=\lim_{n\to\infty}(n\,a\,\Delta x+\Delta x^2\,(1+2+3+\ldots+n))$$



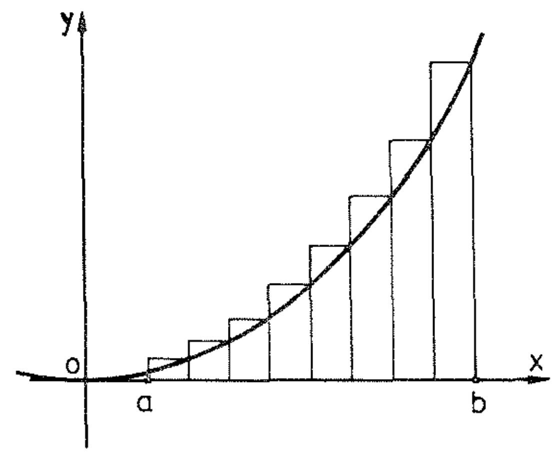
$$=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot a\frac{b-a}{n}+\left(\frac{b-a}{n}\right)^2\cdot\frac{n(n+1)}{2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}a(b-a)+\frac{(b-a)^2}{2}(1+\frac{1}{n})$$
$$=\frac{2ab-2a^2+b^2-2ab+a^2}{2}=\frac{b^2-a^2}{2}.$$

Dakle, $\int_a^b x\,dx=\frac{b^2}{2}-\frac{a^2}{2}$.

*Primedba.* Iskorišćen je poznati identitet

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

**655.** a) Podelimo segment $[a,\ b]$ na $n$ jednakih delova; tada $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. Za tačke $\xi_i$ uzećemo leve krajeve parcijalnih segmenata (sl. 91).




Sl. 91

$$\int_a^b x^2dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\Delta x\,(a+\Delta x)^2+(a+2\Delta x)^2+\ldots+(a+n\Delta x)^2)$$
$$=\lim_{n\to\infty}(\Delta x\,(na^2+2a\Delta x\,(1+2+3+\ldots+n)+\Delta x^2\,(1^2+2^2+$$
$$+3^2+\ldots+n^2)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\left( na^2 + 2a\cdot\frac{b-a}{n}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} (b-a)(a^2 + a(b-a)\left(1+\frac{1}{n}\right) + \frac{(b-a)^2}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$
$$= (b-a)\left(ab + \frac{(b-a)^2}{3}\right) = \frac{b^3}{3} - \frac{a^3}{3}.$$

*Primedba.* Iskorišćen je poznati identitet za zbir kvadrata prirodnih brojeva: $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b) $$\int_0^a e^x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\left(e^0 + e^{\frac{a}{n}} + e^{\frac{2a}{n}} + \ldots + e^{\frac{(n-1)a}{n}}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{a}{n}\cdot\frac{e^a-1}{e^{\frac{a}{n}}-1} = (e^a-1)\lim \ln(1+h)^{\frac{1}{h}}$$
$= e^a - 1$ (smena: $e^{\frac{a}{n}}-1=h$ formula za zbir geometrijske progresije).

656. a) $$\int_0^\pi \sin x\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{n\pi}{n}\right)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2n}\pi\ \sin\frac{n\pi}{2n}}{\sin\frac{\pi}{2n}} =$$
$$= \lim_{n\to\infty} 2\cdot\frac{\pi}{2n}\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)\sin\frac{\pi}{2}}{\sin\frac{\pi}{2n}}$$
$$= 2\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{2n}\cdot\lim\frac{1}{\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}} = 2.$$

Iskorišćen je poznati identitet
$$\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin\frac{n+1}{2}x \sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$



b) Pošto je funkcija $f(x)=\cos x$ neprekidna na segmentu $[a, b]$, ona je integrabilna na tom segmentu. Podelimo segment $[a, b]$ na $n$ parcijalnih segmenata jednakih dužina:
$[a, a+\Delta x]$, $[a+\Delta x, a+2\Delta x]$, $\ldots$ $[a+(i-1)\Delta x, a+i\Delta x]$, $\ldots$
$\ldots$ $[a+(n-1)\Delta x, b]$, gde je $\Delta x = \dfrac{b-a}{n}$ i $b=a+n\Delta x$.
Za tačku $\xi_i$ uzimamo, na primer, desne krajeve parcijalnih segmenata, tj. $\xi_i = a+i\Delta x$. Rimanova integralna suma ove funkcije je

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \Delta x(\cos\xi_1 + \cos\xi_2 + \ldots + \cos\xi_i + \ldots + \cos\xi n)$$
$$= \Delta x(\cos(a+\Delta x) + \cos(a+2\Delta x) + \ldots +$$
$$+ \cos(a+i\Delta x) + \ldots + \cos(a+n\Delta x).$$

Ako iskoristimo poznati identitet da je
$$\cos(a+i\Delta x)\sin\frac{\Delta x}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\left(a+\frac{2i+1}{2}\Delta x - \sin\left(a+\frac{2i-1}{2}\Delta x\right)\right)\right).$$
ili
$$\cos(a+i\Delta x) = \frac{1}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\left(\sin(a+\frac{2i+1}{2}\Delta x - \sin\left(a+\frac{2i-1}{2}\Delta x\right)\right),$$

tada je $$\sigma_n = \frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}(\sin(a+\frac{3}{2}\Delta x) - \sin(a+\frac{\Delta x}{2}) + \sin(a+\frac{5}{2}\Delta x) -$$
$$- \sin\left(a+\frac{3}{2}\Delta x\right) + \ldots + \sin\left(a+\frac{2n-1}{2}\Delta x\right) - \sin\left(a+\frac{2n-3}{2}\Delta x\right) +$$
$$+ \sin\left(a+\frac{2n+1}{2}\Delta x\right) - \sin\left(a+\frac{2n-1}{2}\right)$$
$$= \frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\left(\sin\left(a+n\Delta x+\frac{\Delta x}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$
$$= \frac{\Delta x}{2\sin\frac{\Delta x}{2}}\left(\sin\left(b+\frac{\Delta x}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)\right).$$

Na osnovu definicije određenog integrala imamo
$$\int_a^b \cos x\,dx = \lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\right)^{-1}\left(\sin\left(b+\frac{\Delta x}{2}\right) - \sin\left(a+\frac{\Delta x}{2}\right)\right)$$
$$= \sin b - \sin a.$$

**657.** a) $\int_1^3 x^3\,dx=\frac{x^4}{4}\Big|_1^3=\frac{3^4}{4}-\frac{1^4}{4}=\frac{81}{4}-\frac{1}{4}=20;$

b) $\int_1^2 (x^2+x^{-4})\,dx=\frac{x^3}{3}-\frac{1}{3x^3}\Big|_1^2=\frac{8}{3}-\frac{1}{24}-\left(\frac{1^3}{3}-\frac{1}{3}\right)=\frac{21}{8};$

c) $\int_1^4 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_1^4=\frac{2}{3}(\sqrt{4^3}-1)=\frac{14}{3}.$

**658.** a) 24; b) $\frac{93}{5}$; c) $\frac{15}{2}$.

**659.** a) $\frac{8}{3}$; b) $\frac{40}{3}$.

**660.** a) $e-e^{-1}$; b) $\frac{e^2(e^4-1)}{2}$; c) $\frac{e^3-1}{3}$.

**661.** a) 1; b) $\ln\frac{3}{2}=0{,}4055$; c) $\ln 2=0{,}6931$.

**662.** a) 0,5; b) 2.

**663.** a) $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$; b) 0.

**664.** a) 2; b) $\frac{1}{2}+\sqrt{3}$.

**665.** a) $\frac{\pi}{2}$; b) $\frac{\pi}{4}$; c) $\frac{\pi}{8}$.

**666.** a) Uvedimo novu promenljivu integracije smenom $2x-1=t$. Diferenciranjem nalazimo $dx=\frac{1}{2}\,du$.

Odredimo nove granice integrala: za $x=2$ $t=3$ i za $x=3$ $t=5$. Tada se dati integral postupno svodi na ovaj način:

$$\int_2^3 (2x-1)^3=\frac{1}{2}\int_3^5 u^3du=\frac{1}{2}\cdot\frac{u^4}{4}\Big|_3^5=\frac{1}{8}\,(5^4-3^4)=68.$$

b) Smena $2x^3+1=z$ daje $x^2dx=\frac{1}{6}dz$. Odredimo nove granice: za $x=0$, $z=1$, za $x=1$, $z=3$. Tada imamo:

$$\int_0^1 (2x^3+1)^4x^2dx=\frac{1}{6}\int_1^3 z^4dz=\frac{1}{6}\cdot\frac{z^5}{5}\Big|_1^3=\frac{1}{30}(3^5-1^5)=8\frac{1}{15}.$$



**667.** a) $\frac{\pi}{6}$; b) $\frac{\pi}{12a}$; c) $\frac{2}{3}$.

**668.** a) Smena je $e^x-1=t^2$, $dx=\frac{2t\,dt}{t^2+1}$, nove granice su za $x=0$ $t=0$, za $x=\ln 2$, $t=1$. Tada je

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx=2\int_0^1\frac{t^2dt}{t^2+1}=2\int_0^1\frac{(t^2+1)-1}{t^2+1}=2t-\operatorname{arctg} t\Big|_0^1=2-\frac{\pi}{4}.$$

b) $4-\pi$ (smena je $e^x-1=t^2$).

**669.** a) $\frac{2}{15}$; b) $\frac{\pi}{16}$.

**670.** a) $\frac{1}{3}\ln 2$; b) $\frac{\pi}{12}$.

**671.** a) $10\ln 2-3{,}5$ (parcijalna integracija $u=\ln x$, $dv=(3x+2)\,dx$).
b) 0 ($u=\ln(x+\sqrt{x^2+1})$, $dv=dx$).

**672.** a) $\pi\left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{9}\right)+\ln\sqrt{\frac{3}{2}}$; b) $\frac{\pi}{2}-1$.

**672.** a) $\ln 2-0{,}5$ (smena $1+x^2=t$);
b) $\frac{\pi}{18}$ (smena $x=\frac{2}{3}t$).

**674.** a) $C=\frac{8}{3}\vee C=\frac{2}{3}$; b) $C=e$.

**675.** Posle integracije data jednačina se svodi na lanac ekvivalentnih jednačina:

$$\sin(a^2+a)-\sin a^2=\sin a$$
$$\Leftrightarrow 2\cos\frac{2a^2+a}{2}\sin\frac{a}{2}-2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{a}{2}\left(\cos\frac{2a^2+a}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)=0$$
$$\Leftrightarrow \sin\frac{a}{2}\sin\frac{a^2+a}{2}\sin\frac{a^2}{2}=0$$
$$\Leftrightarrow a=2k\pi\vee a=\pm\sqrt{2n\pi}\vee a=\frac{-1\pm\sqrt{1+8m\pi}}{2},\quad (k,n,m\in Z).$$

Ako se uzme uslov $2 \leqslant a \leqslant 3$ skup rešenja date jednačine je

$$\left\{\sqrt{2\pi}, \frac{-1+\sqrt{1+8\pi}}{2}\right\}.$$

**676.** a) $\in\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right\}$.

**677.** $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$.

**678.** $0<a<4$.

**679.** $A=C=7$, $B=-6$.

**680.** a) $x=1$ za $a \in (0,2]$ i $x_1=1$, $x_2=\log_2 \log_2 \frac{a^2}{4}$ za $a \in (1, +\infty)$.

*Uputstvo*: Smenom $2^x=u$ data jednačina se svodi na kvadratnu $u^2-2u\log_2 a + 4\log_2\left(\frac{a}{2}\right)=0 \Leftrightarrow u=2 \vee u = 2(\log_2 a-2)$.

b) $x_{1,2} = (2-a)^{\pm\sqrt{a}}$ za $a \in (-\infty, 0)$;
$x_1=1$ za $a=0$;
$x_{1,2}=(2-a)^{\pm\sqrt{5a}}$ za $a \in (0, 1) \cup (1, 2)$.

**681.** a) $\frac{\pi^2}{32}$; b) $\frac{3e^4+1}{16}$.

**682.** a) $\frac{\pi^2-8}{4}$; b) $3e-6$.

**683.** $\ln 8+\frac{\pi}{\sqrt{3}}-3$ (parcijalna integracija $u=\ln(1+x^3)$, $dv=dx$).

**684.** Smenom $t=\frac{1}{u}$, data jednačina ekvivalentna je lancu ekvivalencija

$$-\int_1^{\frac{1}{x}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arccos u \Big|_1^{\frac{1}{x}} = \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \arccos\frac{1}{x}-\arccos 1=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow \arccos\frac{1}{x}=\frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=2$$

**685.** $x=-7$. (Primeni parcijalnu integraciju $u=\arcsin t$, $dv=\frac{dt}{\sqrt{1+t}}$).

**686.** $x=0$. (Primeni parcijalnu integraciju $u=\operatorname{arctg} t$, $dv=\frac{t\,dt}{\sqrt{1+t^2}}$).

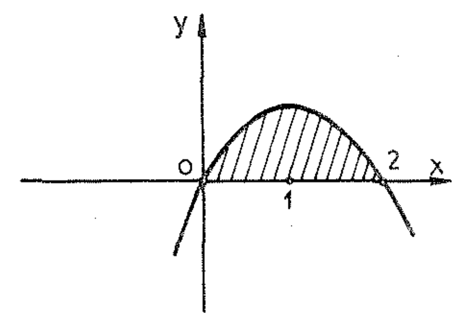
**687.** $x=\ln 8$. (Smena $e^t-4=u^2$).

**688.** $x=1$. (Vidi rešenje zadatka 684.).

### 4.6. Primena određenog integrala za izračunavanje površine ravnih figura

**689.** Figura ograničena lukom parabole $y=-x^2+2x$ i pravom $y=0$ prikazana je na slici 92.

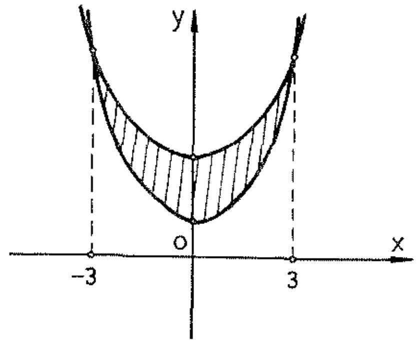
Površina figure je $P=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx=\frac{4}{3}$.




Sl. 92

**690.** Apscise presečnih tačaka datih parabola su $x=-3$ i $x=3$. Tražena površina je prikazana na sl. 93. Kako su date parabole simetrične u odnosu na $Oy$ osu, dovoljno je odrediti površinu na segmentu [0, 3]. Zatim je udvostručimo:

$$P=2\int_0^3\left(\frac{5}{9}x^2+3\right)-\left(\frac{7}{9}x^2+1\right)dx=8.$$

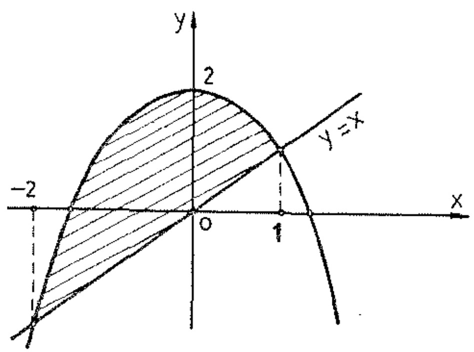



Sl. 93

**691.** Data prava i data parabola seku se u tačkama $x=-2$ i $x=1$ (sl. 94) (rešenja sistema $y=x \wedge y=2-x^2$). Tražena površina je

$$P=\int_{-2}^{1}(2-x^2-x)\,dx=\left(2x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-2}^{1}=\left(2-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)-$$

$$-\left(-4+\frac{8}{3}-2\right)=4{,}5.$$

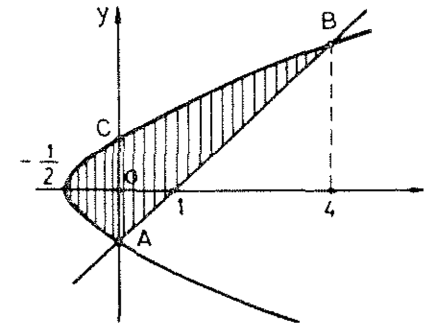



Sl. 94

**692.** Tražena površina (sl. 95) se dobija ako se na površinu ograničenu osom $Oy$ i lukom parabole dodaju površine trougla AO1 i krivolinijskog trapeza OCB4, a zatim oduzme površina trougla 14B:



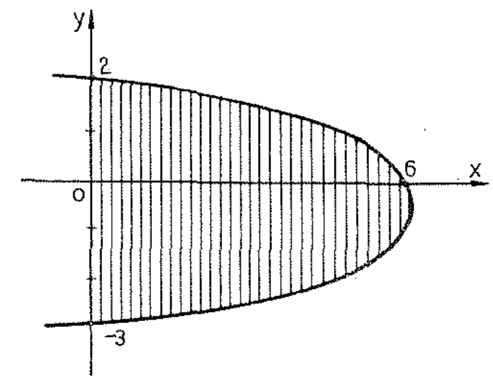
$$P=2\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\sqrt{2x+1}\,dx+\frac{1\cdot 1}{2}+\int_0^4\sqrt{2x+1}\,dx-\frac{3\cdot 3}{2}=\frac{16}{3}.$$




Sl. 95

**693.** U ovom slučaju zgodnije je izvesti integraciju duže ose $Oy$ (sl. 96). Tada je tražena površina

$$P=\int_a^b x\,dy=\int_{-3}^{2}(6-y-y^2)\,dy=6y-\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}\Big|_{-3}^{2}=\frac{125}{6}.$$




Sl. 96

**694.** $P=\int_{-1}^{0}(2x^3+3x^2+2)\,dx=2{,}5.$

**695.** a) Jednačina kruga je $x^2+y^2=R^2$. Površina kruga se dobija kada se četvrtina površine kruga učetvorostruči:

$$P=4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx.$$

Smena $x=R\sin t$ svodi prethodni integral na oblik

$$P=4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\,dt=4R^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=R^2\pi.$$

b) Analogno prethodnom primeru, površina elipse je $P=ab\pi$ (jednačina elipse je $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$).

**696.** $\frac{4}{3}p^2$.

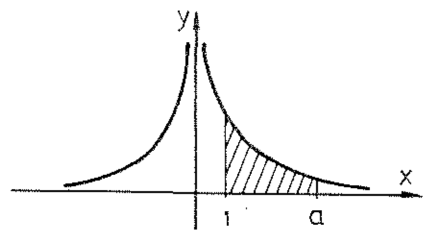
**697.** Grafik date krive je simetričan u odnosu na osu $Oy$. Prava $x=0$ je vertikalna asimptota a prava $y=0$ horizontalna (sl. 97). Tražena površina u funkciji parametra $a$ je

$$P(a)=\int_1^a \frac{1}{x^2}\,dx=-\frac{1}{x}\Big|_1^a=1-\frac{1}{a}.$$

Ako $a\to\infty$, tada $\frac{1}{a}\to 0$, prema tome

$$P=\lim_{a\to\infty}P(a)=\lim_{a\to\infty}\left(1-\frac{1}{a}\right)=1,$$

a to znači da figura koja se prostire u beskonačnosti između ose $Ox$, luka krive $y=\frac{1}{x^2}$ i prave $x=a$ ima konačnu vrednost.



Sl. 97

**698.** $P=36$.

**699.** $P=18$.

**700.** $P=36$.

**701.** $P=4{,}5$.

**702.** $P=\frac{125}{6}$.



**703.** $P=\frac{64}{3}$.

**704.** $P=\frac{16\pi}{3}+4\sqrt{3}$.

**705.** $P=\frac{4}{3}(4\pi+\sqrt{3})$.

**706.** $P=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{3}$.

**707.** $P=\frac{4\pi+\sqrt{3}}{6}$.

**708.** $P=\frac{16}{3}-\ln 27$.

**709.** $P=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{3}$.

**710.** $P=e^2+e^{-2}-2\approx 5{,}524$.

**711.** $P=(a)=\operatorname{arctg} a$, $P=\lim_{a\to\infty}P(a)=\frac{\pi}{2}$.

**712.** $P=\frac{7}{3}$.

**713.** $P=\frac{17}{6}$.

**714.** $P=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\approx 0{,}685$.

**715.** $P=\frac{1}{3}-\ln\frac{\sqrt{3}}{2}$.

**716.** $P=\frac{\pi}{2}$.

**717.** $P=\ln\sqrt{2}$.

**718.** $P=9$.

**719.** $P=0{,}5$.

**720.** $P=12$.

**721.** $P=1{,}5$.

722. $P=\frac{24}{\ln 5}-\frac{8}{9\ln 3}\approx 14{,}10.$

723. $P=4-3\ln 3\approx 0{,}7042.$

724. $P=\frac{1}{3}.$

725. $P=4{,}25.$

726. $P=4{,}5.$

727. $P=10\frac{2}{3}.$

728. $P=4.$

729. $P=ab\,(2\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})).$

730. $P=m^2\ln 3.$

731. $P=\pi+\frac{10}{3}.$

732. $P=\frac{8\pi}{3}+\frac{10\sqrt{3}}{3}.$

733. $P=4{,}5.$

734. $P=2\int_0^1(2-x^2-x^{\frac{2}{3}})\,dx=2\frac{2}{15}.$

735. $P=5\arcsin\frac{3}{5}-4\ln 2.$

736. $P=0{,}5.$

737. $P=6\sqrt{2}-\frac{9}{2}\ln 3.$

738. $P_1=2\pi+\frac{4}{3}$ i $P_2=6\pi-\frac{4}{3}.$

739. $P_1=\frac{16\pi}{3}-\frac{4\sqrt{3}}{3}$ i $P_2=\frac{32\pi}{3}+\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

740. $P=\ln 2.$



741. $P=\frac{4}{3}$. (Grafik date zatvorene krive se zove lemniskata, simetričan je u odnosu na obe koordinatne ose i ima oblik kao znak beskonačno, $\infty$.)

742. $P=\frac{4}{3}.$

743. $P=13{,}5.$

744. $P=2{,}25.$

745. $P=\frac{1}{3}.$

746. $P=5.$

747. $P=8.$

748. $P=\frac{9\pi}{4}-3.$

749. a) Funkcija je definisana za $x\neq 5$, nule su $x=1$ i $x=4$, $y_{max}=1$ za $x=3$, $y_{min}=9$ za $x=7$, asimptote $x=5$ i $y=x$.

b) $P=\frac{15}{2}-4\ln 4.$

750. a) Definisana je za $x\neq 8$, nule su $x=7$ i $x=4$, $y_{max}=1$ za $x=6$ i $y_{min}=9$ za $x=10$, asimptote su $y=x-3$ i $x=8$.

b) $P=\frac{15}{2}-4\ln 4.$

751. a) Definisana je za svako $x\neq -1$, nule su $x=1$ i $x=4$.

$y_{max}=\frac{9}{4}$ za $x=-1-\sqrt{10}$, $y_{min}=-\frac{1}{4}$ za $x=-1+\sqrt{10}$, horizontalna asimptota $x=1$, prevojne tačke za $x=0$ i $x=\pm 2\sqrt{3}$.

b) $P=5\ln 2-3.$

**752.** a) Definisana je za $x \neq -1$, nule su $x=-3$ i $x=1$, $y_{min}=9$, za $x=1$, $y_{max}=1$ za $x=-3$, asimptote su $x=-1$ i $y=x+6$;

b) $P=\frac{15}{2}-4\ln 4$.

**753.** $P(a)=\int\limits_1^2\left(\sqrt{\frac{2y}{a}}-\sqrt{\frac{y}{a}}\right)dy=\frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{a}}$.

Za $a=1$, $P_{max}=\frac{2}{5}(5-3\sqrt{2})$.

**754.** Maksimalna površina površi određuje se iz funkcije,

$P(p)=2\int\limits_0^{2(r-p)}\sqrt{2px}\,dx=\frac{16}{3}\sqrt{p(r-p)^3}$.

P(p) je maksimalno ako i samo ako je $P'(p)=0 \Leftrightarrow (r-p)^2(r-4p)=0$ $\Leftrightarrow r=p \vee p=\frac{r}{4}$. Odgovara drugo rešenje $p=\frac{r}{4}$.

**755.** Rešenje jednačine

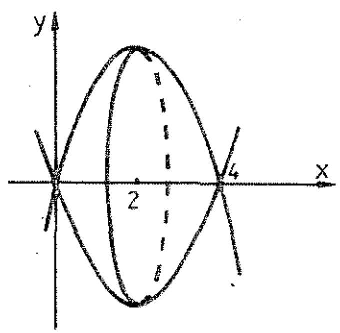
$$\int\limits_0^x\sqrt{4x}\,dx-\frac{1}{2}x\sqrt{4x}=9.$$

Tražena sečica sadrži tačku M (9, 6), jednačina sečice je $y=\frac{2}{3}x$.

### 4.7. Primena određenog integrala za izračunavanje zapremine rotacionih tela

**756.** Lik prikazan na sl. 98 rotira oko ose $Ox$. Zapremina nastalog tela je

$$V_x=\pi\int\limits_0^4(4x-x^2)^2\,dx=$$
$$=\pi\int\limits_0^4(16x^2-8x^3+x^4)\,dx=$$
$$=16\frac{x^3}{3}-2x^4+\frac{x^5}{5}\Big|_0^4=\frac{512}{15}\pi.$$



Sl. 98

**757.** $V=\frac{\pi^2}{2}$.

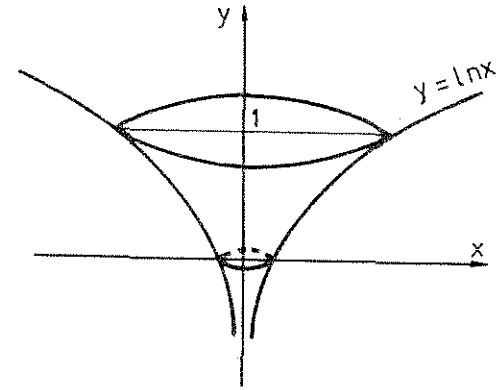
**758.** $V=\pi(1-\frac{\pi}{4})$.



**759.** $V=\frac{\pi(a^2-1)}{\ln a^2}$.

**760.** Lik prikazan na sl. 99 rotira oko ose $Oy$. Zapremina tela koje nastaje je

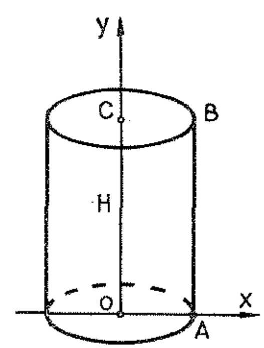
$$V=\pi\int\limits_0^1 x^2\,dy=\pi\int\limits_0^1 e^y\,dy=\frac{\pi}{2}(e^2-1).$$



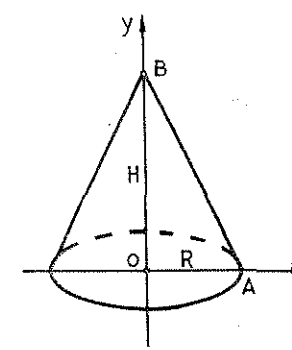
Sl. 99

**761.** a) Pravi kružni valjak poluprečnika $R$ i visine $H$ nastaje rotacijom pravougaonika $OABC$ (sl. 100) oko ose $Oy$. Jednačina prave $AB$ je $x=R$, pa je zapremina valjka

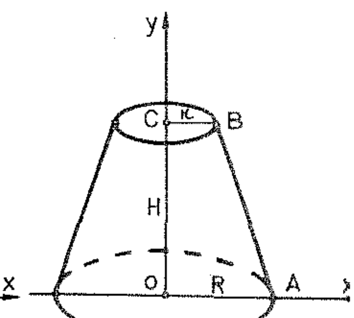
$$V=\pi\int\limits_0^H x^2\,dy=\pi\int\limits_0^H R^2\,dy=R^2\pi H.$$



Sl. 100



Sl. 101



Sl. 102

b) Rotacioni konus nastaje rotacijom pravouglog trougla $OAB$ (sl. 101) oko ose $Oy$. Jednačina prave $AB$ je

$\frac{x}{R}+\frac{y}{H}=1$, pa je zapremina konusa

$$V=\pi\int_0^H R^2\left(1-\frac{y}{H}\right)^2 dy=\frac{R^2\pi H}{3}.$$

c) Prava zarubljena kupa je rotaciono telo koje nastaje rotacijom pravouglog trapeza $AOBC$ (sl. 102) sa paralelnim stranicama $R$ i $r$ i visinom $H$. Pošto tačke $A$ i $B$ imaju koordinate $A(R, O)$ i $B(r, H)$, jednačina prave $AB$ je

$$x=\frac{r-R}{H}y+R.$$

Zapremina zarubljene kupe je

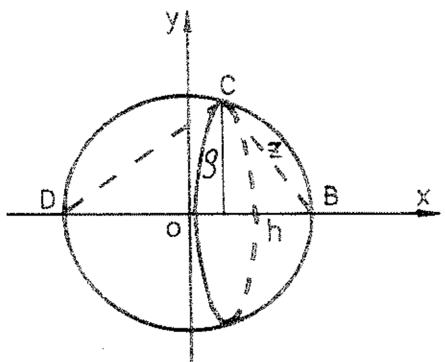
$$V=\pi\int_0^H x^2\,dy=\pi\int_0^H\left(\frac{r-R}{H}y+R\right)^2 dy=\frac{\pi H}{3}(R^2+Rr+r^2).$$

(smena $\frac{r-R}{H}y+R=z$).

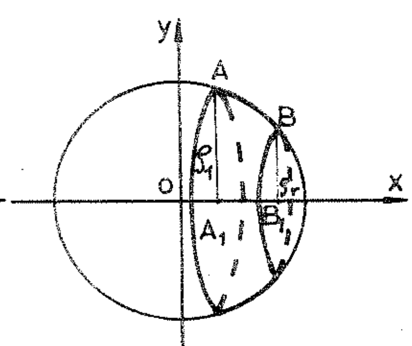
**762.** a) $V=\frac{4\pi R^2}{3}$ $\qquad\left(V=2\pi\int_0^R(R^2-x^2)\,dx\right.$.

b) Loptin odsečak (segment) nastaje rotacijom kružnog odsečka $ABC$ oko ose $Ox$. Zapremina loptinog odsečka je

$$V=\pi\int_{R-h}^{R} y^2\,dx=\pi\int_{R-h}^{R}(R^2-x^2)\,dx.$$




Sl. 103




Sl. 104



Koristeći osobine pravouglog trougla $BCD$ (sl. 103) obrascu za zapreminu loptinog segmenta može da se da i ovaj oblik

$$V=\frac{h\pi}{6}(3\rho^2+h^2),\ \text{jer je}\ h(3R-h)=h(2R-h)+hR$$

$$=\rho^2+\frac{\rho^2+h^2}{2}=\frac{3\rho^2+h^2}{2},\ \text{jer je}\ h(2R-h)=\rho^2,$$

$$z^2=\rho^2+h^2,\ z^2=2Rh,\ Rh=\frac{\rho^2+h^2}{2}.$$

c) Loptin sloj nastaje obrtanjem krivolinijskog trapeza $ABB_1A_1$ (sl. 104) oko ose $Ox$. Zapremina loptinog sloja je

$$V=\pi\int_{x_0}^{x_0+h}(R^2-x^2)\,dx=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{x_0}^{x_0+h}$$

$$=\frac{\pi h}{3}(3(R^2-x_0^2)+3(R^2-x_0^2-2hx_0-h^2)+h^2)$$

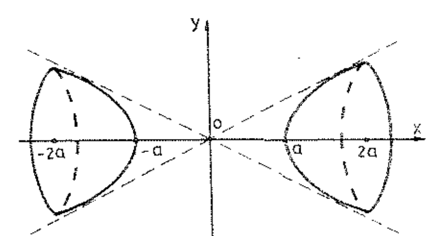
$$=\frac{\pi h}{3}(3(R^2-x_0^2)+3(R^2-(x_0+h)^2+h^2))=\frac{\pi h}{3}(3\rho_1^2+3\rho_2^2+h^2),$$

gde je $\rho_1^2=R^2-x_0^2$, a $\rho_2^2=R^2-(x_0+h)^2$.

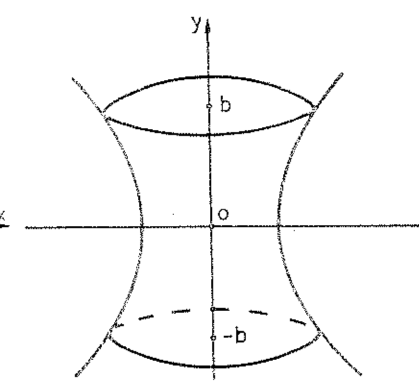
**763.** $V=a^2p\pi$.

**764.** a) $V_x=\frac{4}{3}a^2b\pi$; $\qquad$ b) $V_y=\frac{4}{3}ab^2\pi$.

**765.** a) Dvokrilni hiperboloid je prikazan na sl. 105. Njegova zapremina je




Sl. 105




Sl. 106

$$V=2\pi\int_a^{2a} y^2\,dx=2\pi\frac{b^2}{a^2}\int_a^{2a}(x^2-a^2)\,dx=\frac{8ab^2\pi}{3}.$$

b) Jednokrilni hiperboloid je prikazan na sl. 106; njegova zapremina je

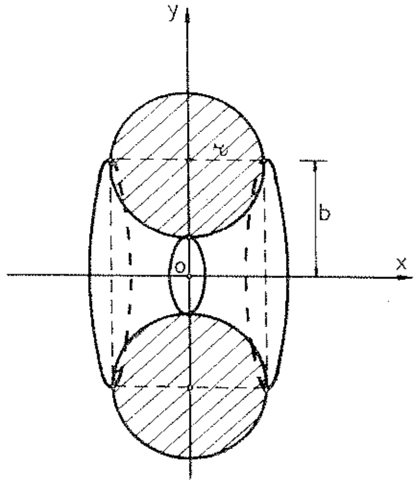
$$V=2\pi\int_0^b x^2\,dy=\frac{8a^2b\pi}{3}.$$

**766.** Iz jednačine $x^2+(y-b)^2=r^2$ dobijamo $y-b=\pm\sqrt{r^2-x^2}$. $y_1=b+\sqrt{r^2-x^2}$ je jednačina gornjeg polukruga, a $y=b-\sqrt{r^2-x^2}$ jednačina donjeg polukruga (sl. 107). Tražena zapremina je

$$V=\pi\int_{-a}^{a}(y_1^2-y_2^2)\,dx=$$

$$=4\pi b\int_{-a}^{a}\sqrt{r^2-x^2}\,dx.$$

Ako izvršimo smenu $x=r\sin t$ dobijamo nove granice integracije




**Sl. 107**

$$x=-a,\ t=-\frac{\pi}{2}\ \text{ i }\ x=a,\ t=\frac{\pi}{2},$$

pa je

$$V=4\pi b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{r^2-r^2\sin^2 t}\cdot r\cos t\,dt=4\pi r^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt$$

$$=2\pi r^2b\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=2r^2b\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=2\pi^2r^2b.$$

**767.** $V=\frac{63\pi}{5}$.

**768.** $V=\frac{76\pi}{15}$.



**769.** $V=\frac{19\pi}{6}$.

**770.** $V=\frac{40\pi}{3}$.

**771.** $V=\frac{3\pi}{10}$.

**772.** $V=\frac{19\pi}{24}$.

**773.** $V=\frac{572\pi}{105}$.

**774.** $V=\frac{352\pi}{15}$.

**775.** $V=\ln 2^{\pi}$.

**776.** $V=\frac{512\pi}{15}$.

**777.** $V=\frac{a^3\pi}{6}$.

**778.** $V=19{,}2\pi$.

**779.** $V=\frac{16\pi}{315}$.

**780.** $V=\frac{\pi}{30}$.

**781.** $V=\pi\left(\frac{312}{\ln 5}-\frac{40}{81\ln 3}\right)$.

**782.** $V=16\pi$.

**783.** $V=\frac{8\pi}{3}$.

784. $V=\frac{76}{3}\pi.$

785. $V=\frac{3}{10}\pi.$

786. a) $V=\lim\limits_{a\to-\infty}\pi\int\limits_a^0 e^{2x}\,dx=\frac{\pi}{2};$ b) $V=\pi\int\limits_0^1 \ln^2 y\,dy=\pi.$

787. $V=\frac{3}{8}\pi^2.$

788. $V=\frac{16\pi a^3}{5}.$

789. $V=\frac{\pi}{4}\left(\frac{5\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$

790. $$V=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}(\cos^2 x+\cos 2x+2\cos x\cos 2x)\,dx$$
$$=\pi\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\cos 3x+\cos x\right)dx$$
$$=\pi\left(x+\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{8}+\frac{\sin 3x}{3}+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\pi\left(\frac{\pi}{3}+\frac{9}{16}\sqrt{3}\right).$$

791. $V=\frac{44\pi}{15}.$

792. b) $P=16\sqrt{3}-\frac{16\pi}{3};$ c) $V=\frac{32\pi}{3}.$

793. $V=\frac{a^3\pi}{4}.$

794. $V=\frac{a^3\pi}{12}.$



795. a) $y=x;$ b) $V=\frac{16\pi}{3}.$

796. $V=24\pi.$

797. a) $x+2y-8=0;$ b) $V=36\pi.$

798. $V=18\pi.$

799. $N\left(\frac{9}{2},\,6\right)$ $V_1:V_2=2:3.$

800. a) $P=\frac{4}{3};$ b) $V=\frac{4\pi}{3}.$

801. $V=4\pi.$

802. $V=4\pi^2.$

803. $V=\pi\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right).$

804. $V=\pi\left(1+2\ln\frac{12}{5}+\frac{5}{4}\ln\frac{5}{3}\right).$

805. $V=\pi\left(1+2\ln\frac{4}{5}\right).$

## 4.8. Primena određenog integrala za izračunavanje dužine luka krive

**806.** Ako na jednačinu kružnice primenimo pravila izvoda implicitne funkcije dobija se

$$2x+2yy'=0 \quad \text{ili} \quad y'=-\frac{x}{y}.$$

Primenom obrasca (1) određujemo obim četvrtine kružnice:

$$\frac{s}{4}=\int_0^r\sqrt{1+\left(-\frac{x}{y}\right)^2}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{y^2+x^2}{y^2}}\,dx=\int_0^r\sqrt{\frac{r^2}{y^2}}\,dx=$$

$$=r\int_0^r\frac{dx}{\sqrt{r^2-x^2}}=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=\frac{\pi r}{2}.$$

Obim kružnice $s=2r\pi$.

**807.** Iz jednačine date parabole $y'=x$. Dužina luka na osnovu formule (1) je

$$s=\int_0^{\sqrt{3}}\sqrt{1+x^2}\,dx=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+1})\Big|_0^{\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{3}\cdot\sqrt{4}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+\sqrt{4})-\frac{1}{2}=$$

$$=\sqrt{3}+\frac{1}{2}\ln(\sqrt{3}+2)-0{,}5\,.$$

**808.** $$\frac{s}{2}=\int_0^2\sqrt{1+4x^2}\,dx=x\sqrt{1+4x^2}+\frac{1}{2}\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})\Big|_0^2=$$

$$=2\sqrt{17}+\frac{1}{2}\ln(4+\sqrt{17})\Rightarrow s=4\sqrt{17}+\ln(4+\sqrt{17}).$$

**809.** $s=\frac{14}{3}$.

**810.** Diferenciranjem jednačine astroide dobijamo $y'=-\frac{y^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{3}}}$.

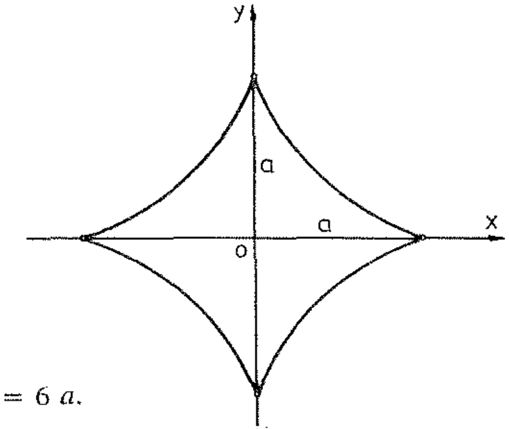
Prema tome, dužina luka četvrtine astroide je



$$\frac{s}{4}=\int_0^a\sqrt{1+\frac{y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=$$

$$=\int_0^a\sqrt{\frac{x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}}}\,dx=$$

$$=\int_0^a\sqrt{\left(\frac{a^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{1}{3}}}\right)^2}\,dx=\frac{3}{2}a\Rightarrow s=6a.$$




Sl. 108

Odatle dobijamo dužinu astroide $s=6a$ (sl. 108).

**811.** $s=\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})$.

**812.** $s=1+0{,}5(\ln 3-\ln 2)$.

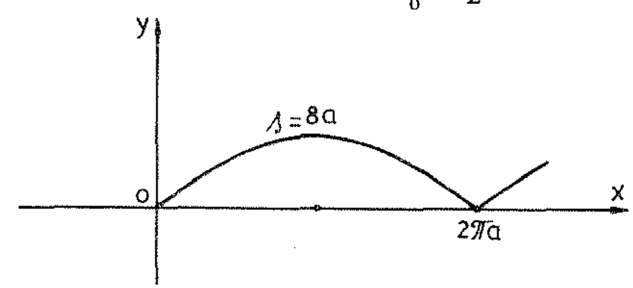
**813.** $s=\frac{1}{2}(e-e^{-1})$.

**814.** Cikloida je data u parametarskom obliku:

$$x'=\frac{dx}{dt}=a(1-\cos t); \qquad y'=\frac{dy}{dt}=a\sin t.$$

Primenom obrasca (2) dobija se:

$$s=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=8a \qquad \text{(sl. 109)}.$$




Sl. 109

**815.** $s=\ln 3-\frac{1}{2}$.

**816.** Kako je $y'=\frac{1-x}{2\sqrt{x}}$, tada je dužina luka

$$s=\int_0^3\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{2\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\int_0^3\frac{x+1}{2\sqrt{x}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^3(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}})\,dx=$$

$$=\left(\sqrt{x}+\frac{1}{3}\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^3=2\sqrt{3}.$$

**817.** $s=\frac{1}{2}\ln(\sqrt{5}+2)$.

**818.** $s=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{17}}{2}+\frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{5})(4+\sqrt{17})$.

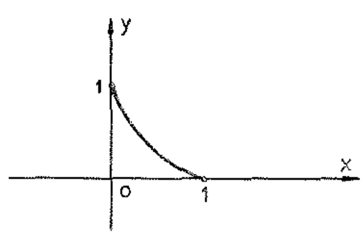
**819.** Kako je, za $x=0 \quad y=1$ i za $y=0 \quad x=1$ (sl. 110), a $y'=\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$, tada je dužina krive

$$s=\int_0^1\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}\right)^2}\,dx=\sqrt{2}\int_0^1\frac{\sqrt{\left(\sqrt{x}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Smenom $\sqrt{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}t$, $\frac{dx}{\sqrt{x}}=dt$, za $x=0 \quad t=-1$, za $x=1$ $t=1$; dužina luka je

$$s=\frac{\sqrt{2}}{2}\int_{-1}^{1}\sqrt{t^2+1}\cdot dt=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{t}{2}\sqrt{t^2+1}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{t^2+1})\right)\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1)\right).$$




Sl. 110

**820.** $s=2$.



**821.** $$s=\int_1^e\sqrt{1+x^2}\,dy=\int_1^e\sqrt{1+\left(\frac{y^2-1}{2y}\right)^2}\,dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}+\ln y\right)\Big|_1^e=\frac{e^2+1}{4}.$$

4.9. **Primena integrala za izračunavanje površine rotacione površi**

**823.** Sfera nastaje rotacijom luka kružnice $x^2+y^2=R^2$ iznad $x$-ose oko ose $Ox$.
Primenom formule (1) dobija se obrazac za površinu sfere:

$$P_x=2\pi\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2-x^2}\cdot\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}\,dx=2\pi R\int_{-R}^{R}dx=4\pi R^2.$$

**824.** 1° a) $P_x=2\pi\left(b^2+\frac{ab}{e}\cdot\arcsin e\right) \qquad \left(e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\right)$;

b) $P_y=2\pi\left(b^2+\frac{b^2}{3e}\ln\frac{1+e}{1-e}\right)$.

2° a) $M=2r\pi H$; b) $M=r\pi s$; c) $M=\pi s(R+r)$.

**825.** Primenom obrasca (1) dobija se

$$P_x=2\pi\int_0^{\pi}\sqrt{1+\cos^2 x}\cdot\sin x\,dx.$$

Smenom $\cos x=t$ imamo $dt=-\sin x\,dx$; za $x=0 \quad t=1$, a za $x=\pi$ $t=-1$; pa je $P_x=2\pi\int_1^{-1}\sqrt{1+t^2}\,dt=$

$$-2\pi\left(\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2}+\frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right)\Big|_1^{-1}=2\pi(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})).$$

**826.** $P_x=\pi(\sqrt{5}-\sqrt{2})+\ln\left(\frac{2\sqrt{2}+2}{\sqrt{5}+1}\right)^{\pi}$.

(Smena $cos^2x = t$, zatim na dobiveni integral primeni parcijalnu integraciju itd.)

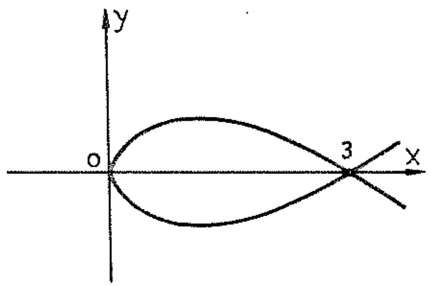
**827.** $P_y=\frac{12}{5}\pi a^2$.

**828.** $P_x=\frac{34\sqrt{17}-2}{9}\pi$.

**829.** $P_x = \frac{62\pi}{3}$.

**830.** $P_y = 2\pi\left(1 + \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}\right)$.

**831.**




Sl. 111

Za $0 \leqslant x \leqslant 3$ luk krive je $y = \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x}$. Odatle je izvod $y' = \frac{x+1}{2\sqrt{x}}$, pa se primenom formule (1) dobija da je površina površi

$$P_x = 2\pi \int_0^3 \frac{1}{3}(3-x)\sqrt{x} \cdot \frac{x+1}{\sqrt{x}}\, dx = 3\pi.$$

**832.** $P_x = 48\pi$.

**833.** $P_x = \frac{2\pi\sqrt{p}}{3}\left((2a+p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}}\right)$.

**834.** $P = \frac{56}{3}\pi$.

**835.** a) $P_x = 8\pi^2$; b) $P_x = \frac{8\pi}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

### 4.10. Primena integrala u prirodnim naukama

**836.** Na osnovu pretpostavke, imamo da je $f(t) = 3t^2 + 2t - 1$, $t_1 = 0$, $t_2 = 10$. Primenom formule (1) dobija se da je $s = \int_0^{10} (3t^2 + 2t - 1)\, dt = (t^3 + t^2 - t)\Big|_0^{10} = 10^3 + 10^2 - 10 = 1090$ m.

**837.** $s = \int_0^5 (6t^2 + 4)\, dt = 270$ m.



**838.** $s = \int_3^4 (9t^2 - 8t)\, dt = 83$ m.

**839.** $s = \int_1^2 (2t + 8t^{-2})\, dt = 7$ m.

**840.** Brzina tački je jednaka nuli u trenutku prestanka kretanja. $V = 0 \Leftrightarrow 12t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 0 \ V\ t = 4$. Primenom obrasca (1) $s = \int_0^4 (12t - 3t^2)\, dt = 32$ m.

**841.** a) $s = \int_0^3 (24t - 6t^2)\, dt = 54$ m;

b) $s = \int_2^3 (24t - 6t^2)\, dt = 22$ m;

c) $s = \int_0^4 (24t - 6t^2)\, dt = 64$ m.

**842.** $s = s_1 - s_2 = \int_0^5 (6t^2 + 2t)\, dt - \int_0^5 (4t + 5)\, dt = 275 - 75 = 200$ m.

**843.** 900 m.

**844.** Telo postiže maksimalnu visinu u trenutku kada je $V = 0 \Leftrightarrow 39{,}2 - 9{,}8t = 0 \Leftrightarrow t = 4$ s. Primenom formule (1) nalazimo da je $s = \int_0^4 (39{,}2 - 9{,}8t)\, dt = 78{,}4$ m.

**845.** Pošto je $x = 0{,}01$ m, za $F = 10$ N, zamenom u (3): $10 = k \cdot 0{,}01 \Leftrightarrow k = 1000$ N/m. Zamenom u isti obrazac dobija se $F = 1000x$, tj. $f(x) = 1000x$. Traženi rad je $A = \int_0^{0{,}04} 1000x\, dx = 0{,}8$ J.

**846.** Primenom obrasca (2) imamo da je $25 = \int_0^{0{,}25} kx\, dx = k\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}25} = 0{,}00125k$; odakle je $k = \frac{25}{0{,}00125} = 20\,000$ (N/m). Zatim je po istoj formuli $A = \int_0^{0{,}1} 20\,000x\, dx = 20\,000\frac{x^2}{2}\Big|_0^{0{,}1} = 100$ J.

**847.** $A = 21{,}6$ J.

# V GLAVA

## 5. DIFERENCIJALNE JEDNAČINE PRVOG I DRUGOG REDA

### 5.1. Diferencijalne jednačine sa razdvojenim promenljivima

**848.** a) Data jednačina ekvivalentna je jednačini $x(1+y^2)=y\dfrac{dy}{dx}$. Ako se razdvoje promenljive, prethodna jednačina postaje

$$\frac{y\,dy}{1+y^2}=x\,dx.$$

Ako se uzme integral leve i desne strane jednačine dobija se opšti integral date jednačine:

$$\int\frac{y\,dy}{1+y^2}=\int x\,dx\Leftrightarrow\frac{1}{2}\ln(1+y^2)+\frac{1}{2}\ln C=\frac{x^2}{2}\Leftrightarrow$$
$$\ln C(1+y^2)=x^2\Leftrightarrow C(1+y^2)=e^{x^2}.$$

b) $y^3=\dfrac{x^3}{3}+C.$

**849.** a) $\sqrt{x}-\sqrt{y}=C$; b) $\sqrt{y^3}=3\sqrt{x^3}+C.$

**850.** a) $y+1=C(x-1)$; b) $y=C\sqrt{1+x^2}.$

**851.** a) $x-2=Ce^{\frac{1}{y}}$; b) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\ln\dfrac{y}{x}+C=0.$

**852.** a) $2\sqrt{x}-\operatorname{arctg} y=C$; b) $\arcsin y+\sqrt{1-x^2}=C.$

**853.** a) $10^x+10^{-y}=C$; b) $y+a=C\sin x.$

**854.** *Primedba.* Partikularno rešenje date diferencijalne jednačine dobija se iz opšteg rešenja ako se konstanta odredi iz početnih uslova.



Opšte rešenje date diferencijalne jednačine je $y^2=x^2+C$. Iz početnih uslova $x=-2$ i $y=4$ dobija se da je $C=12$, pa je partikularno rešenje

$$y^2=x^2+12.$$

**855.** Razdvajanjem promenljivih data jednačina se svodi na oblik

$$\frac{ds}{s}=-\operatorname{tg} t\,dt.$$

Posle integracije dobija se

$$\ln s=\ln C+\ln\cos t\Leftrightarrow\ln s=\ln C\cos t\Leftrightarrow s=C\cos t.$$

Zamenom početnih uslova $s=4$ za $t=\dfrac{\pi}{3}$, dobija se da je $C=8$.

Dakle, traženo partikularno rešenje je

$$s=8\cos t.$$

**856.** $s=t^3-t^2.$

**857.** $x^2-y^2+4y-2x=0.$

**858.** $y=\ln(xy)+x.$

**859.** $3\cos^2 x+\cos^2 x\cos^2 y=1.$

**860.** a) Neka je $s$ put, tada je brzina $v=\dfrac{ds}{dt}$, pa je $ds=(2t+3t^2)\,dt.$

Partikularno rešenje je $s=t^3+t^2+4$;

b) $s=2t^2-2t^3+6.$

**861.** a) $y=2x^2-3x-5$; b) $y^2=x-1.$

**862.** Diferenciranjem date jednačine dobija se $y'=\dfrac{Cy}{2\cos^2\frac{x}{2}}$.

Eliminacijom konstante $C$ iz date i izvodne jednačine dobija se diferencijalna jednačina $y'=\dfrac{y\ln y}{\sin x}$.

**863.** $y'=\dfrac{xy(1+y^2)}{1+x^2}.$

**864.** *Primedba* 1. Kriva koja seče sve krive datog skupa, pod konstantnim uglom, naziva se izogonalna trajektorija.

*Primedba* 2. Ako je ugao preseka datog skupa krivih i trajektorije prav (90 stepeni), onda se trajektorija naziva ortogonalna. Koeficijenti pravca tangente krive $y$ i trajektorije $y_t'$ zadovoljavaju uslov normalnosti $y'=-\frac{1}{y_t'}$.

Diferenciranjem datog skupa parabola dobija se $y'=2ax$. Ako se eliminiše $a$, dobija se

$$\frac{y'}{y}=\frac{2}{x}.$$

Ako se iskoristi uslov normalnosti i $y'$ zameni sa $-\frac{1}{y'}$, dobija se diferencijalna jednačina skupa ortogonalnih trajektorija

$$-\frac{1}{yy'}=\frac{2}{x}$$

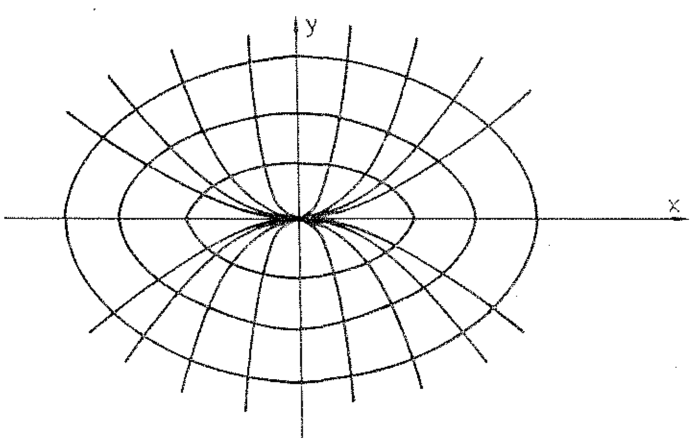
ili

$$y\,dy=-\frac{x\,dx}{2}.$$

Opšti integral ove jednačine je

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=C.$$

Ortogonalnu trajektoriju datog skupa parabola predstavlja skup elipsa čije su poluose $a=2C$, $b=C\sqrt{2}$ (sl. 112).




Sl. 112



**865.** Analogno prethodnom zadatku dobija se skup kružnica $x^2+y^2=Cy$.

**866.** $x^2+ny^2=C$.

**867.** $xy=C$.

**868.** Neka je koeficijent proporcionalnosti $k$ $(k>0)$, a $R$ količina neraspadnutog urana u trenutku $t$. Brzina raspadanja urana je brzina promenljive funkcije, koja povezuje $t$ i $R$ i izvod $\frac{dR}{dt}$. Na osnovu pretpostavke imamo $\frac{dR}{dt}=-kR$. Znak minus pokazuje da je $R$ opadajuća funkcija, pa je $\frac{dR}{dt}<0$, jer je $k>0$ i $R>0$. Razdvajanjem promenljive imamo $\frac{dR}{R}=-k\,dt\Leftrightarrow \ln R=-kt+\ln C\Leftrightarrow \ln\frac{R}{C}=$

$=-kt\Leftrightarrow\frac{R}{C}=e^{-kt}\Leftrightarrow R=C\,e^{-kt}$.

Ova jednačina izražava zakon raspadanja urana. Iz početnih uslova $R=R_0$ za $t=0$ nalazimo da je $R=R_0$, pa konačno dobijamo da je $R=R_0e^{-kt}$.

### 5.2. Homogene diferencijalne jednačine prvog reda

**869.** a) Data diferencijalna jednačina se svodi na oblik

(1) $$y'=1+\frac{y}{x}.$$

Neka je $y=ux$, gde je i $u$ nova funkcija od $x$. Posle diferenciranja $y'=u'x+u$ jednačina (1) se transformiše u oblik diferencijalne jednačine $u'x=1$, koja razdvaja promenljive:

$$du=\frac{dx}{x}\Leftrightarrow u=\int\frac{dx}{x}\Leftrightarrow u=\ln x+\ln C\Leftrightarrow u=\ln Cx.$$

Ako se uzme u obzir smena, opšte rešenje date jednačine je

$$y=x\ln Cx.$$

b) $\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=\ln C\sqrt{x^2-y^2}$.

**870.** a) $\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{arctg}\frac{y}{x}=C$; b) $x\,e^{\frac{y}{x}}=C$.

**871.** a) $y=C\,e^{-\sqrt{\frac{x}{y}}}$; b) $\sin\frac{y}{x}=Cx$.

**872.** a) $t\,e^{\frac{s}{t}}=C$; b) $y=x\sqrt[3]{3\ln Cx}$.

**873.** a) $y=Cx+2\ln x \quad (x\neq 0)$; b) $x^2-2xy+2y^2=C$.

**874.** $x^3+3x^2y-y^3=C$.

**875.** $y^2+x^2\ln Cx=0$.

**876.** $y=x-\frac{x}{\ln Cx}$.

**877.** $(2x-y)^2=4x$.

**878.** $x\,e^{\frac{x-y}{y}}=1$.

**879.** $y=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}$.

**880.** $y=x\,e^{1-x}$.

### 5.3. Linearna diferencijalna jednačina

**881.** a) Ako primenimo formulu (2), dobija se opšti integral date diferencijalne jednačine:

$$y=e^{\int 2dx}\left(C-\int(-3\,e^{-\int 2dx})\,dx\right)=$$
$$=e^{2x}(C+3)\int e^{-2x}\,dx=e^{2x}\left(C-\frac{3}{2}e^{-2x}\right)=C\,e^{2x}-1{,}5;$$

b) $y=C\,e^{x}-1$.

**882.** a) $y=\frac{x^2}{4}+\frac{C}{x^2}$; b) $y=1+C\,e^{-\frac{x^2}{2}}$.

**883.** $y=\frac{(x+1)^4}{2}+C(x+1)^2$.



**884.** $y=2+C(1-x^2)$.

**885.** $y=(x+C)\sin x$.

**886.** $s=\sin t+C\cos t$.

**887.** $y=-1+C(x+x^2)$.

**888.** $y=e^{-x^2}(C+x^2)$.

**889.** $y=\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{4}x^4+C\right)e^{x^2}$.

**890.** $y=\sin x-1+C\,e^{-\sin x}$.

**891.** $y=\sin x+\cos x$.

**892.** $y=2x+3\sqrt{1+x^2}$.

**893.** $y=x^3\,e^{x}$.

**894.** $y=x^{-1}+2x^{-2}$.

**895.** $y=\operatorname{tg} x-1+e^{-\operatorname{tg} x}$.

**896.** $y=2x^{-2}-x^{-3}$.

### 5.4. Nepotpune diferencijalne jednačine drugog reda

**897.** Na osnovu definicije drugog izvoda $y''=(y')'$, ako se uvede smena $y'=p$, tada je $y''=p'$.

Data jednačina se svodi na diferencijalnu jednačinu prvog reda:

$$p'=1-2x,$$

odakle je $p=\int(1-2x)\,dx=x-x^2+C_1$.

Ako se uzme u obzir smena $y'=p$, tada je

$$y'=x-x^2+C_1 \Leftrightarrow y=\int(x-x^2+C_1)\,dx$$
$$y=\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+C_1x+C_2.$$

**898.** a) $y=C_1x+C_2$; b) $y=2x^2+C_1x+C_2$; c) $y=-\cos x+C_1x+C_2$.

**899.** $y=\frac{5}{2}x^2-12x+19.$

**900.** $y=\frac{1}{6}x^3+\frac{5}{6}x-1.$

**901.** $s=2t^3+20t+2.$

**902.** $\theta=\frac{\omega t^4}{12}.$

**903.** $y=0{,}5\,e^{2x-2}+1.$

**904.** $y=-x^4+4x^2.$

**905.** $y=x^4-2x^2.$

**906.** $y=x^4-4x^2+3.$

**907.** $y=-x^4+2x^2+3.$

**908.** $y=C_1\cos ax+C_2\sin ax.$

**909.** a) $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$; b) $y=C_1\cos 3x+C_2\sin 3x.$

**910.** a) $y=C_1\cos\sqrt{5}\,x+C_2\sin\sqrt{5}x$; b) $y=C_1e^{9x}+C_2.$

**911.** a) $y=C_1e^{-3x}+C_2$; b) $y=C_1e^{x}+C_2.$

**912.** a) $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}$; b) $y=C_1e^{4x}+C_2e^{-4x}$;
c) $y=C_1e^{x}+C_2e^{-x}.$

**913.** a) $y=e^{3x}(C_1+C_2x)$; b) $y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$;

**914.** a) $y=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$;
b) $y=e^{-2x}(C_1\cos\sqrt{3}\,x+C_2\sin\sqrt{3}\,x).$

**915.** a) $y=e^{3x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$; b) $y=C_1e^{-2x}+C_2e^{3x}.$

**916.** a) $y=C_1e^{x}+C_2e^{3x}$; b) $y=e^{x}(C_1\cos x+C_2\sin x).$



# VI GLAVA

## 6. KOMBINATORIKA

### 6.1. Varijacije

**917.** Primenom obrasca (1) broj varijacija druge klase od elemenata skupa $A$ je
$V_2^4=4\cdot 3=12$ (tj. njih je 12); one su:

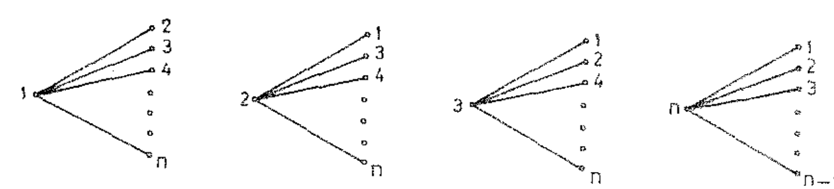
| | | | |
|---|---|---|---|
| 12 | 21 | 31 | 41 |
| 13 | 23 | 32 | 42 |
| 14 | 24 | 34 | 43. |

Broj varijacije treće klase od elemenata skupa $A$ je
$V_3^4=4\cdot 3\cdot 2=24$; one su:

| | | | |
|---|---|---|---|
| 123 | 213 | 312 | 412 |
| 124 | 214 | 314 | 413 |
| 132 | 231 | 321 | 421 |
| 134 | 234 | 324 | 423 |
| 142 | 241 | 341 | 432 |
| 143 | 243 | 342 | 432 |

**918.** $V_4^{10}=10\cdot 9\cdot 8\cdot 7=5040.$

**919.** Grafovi svih varijacija druge klase prikazani su na sl. 113.



Sl. 113

**920.** Svi dvocifreni brojevi od elemenata datog skupa su sve varijacije druge klase sa ponavljanjem od četiri elementa. Njihov broj je $\overline{V}_2^4=4^2=16$.

To su sledeći brojevi: 11, 12, 13, 14, 21, 22, 23, 24, 31, 32, 33, 34, 41, 42, 43, 44.

**921.** $V_4^9=9\cdot 8\cdot 7\cdot 6=3\,024$.

**922.** $V_2^{35}=35\cdot 34=1\,190$.

**923.** 630.

**924.** 205.

**925.** 15.

**926.** Elementi skupa $M$ su: 2, 3, 5, 7, 11. Broj traženih brojeva je 20.

**927.** Prosti činioci broja 3570 su: 2, 3, 5, 7, 17; a broj traženih brojeva je

$$V_3^5=\frac{5}{(5-3)!}=60.$$

**928.** $\overline{V}_5^{30}=30^5=24\,300\,000$.

**929.** $2\cdot V_4^5=480$.

**930.** $\overline{V}_3^5=5^3=125$.

**931.** Neka su traženi četvorocifreni brojevi $N_4$, petocifreni brojevi $N_5$ i šestocifreni $N_6$. Četvorocifreni brojevi su $N_4=V_4^6-V_3^6=300$, petocifreni $N_5=V_5^6-V_4^6=600$ i šestocifreni $N_6=V_6^6-V_5^6=600$. Broj svih traženih prirodnih brojeva je $300+600+600=1500$ (oduzeti su brojevi koji počinju nulom).

**932.** Traženi brojevi mogu biti jednocifreni $N_1$, dvocifreni $N_2$, trocifreni $N_3$, četvorocifreni $N_4$ i petocifreni $N_5$; a ovi rasporedi od datih brojeva su varijacije sa ponavljanjem, pa je:

$N_1=\overline{V}_1^6=5$, $N_2=\overline{V}_2^6-\overline{V}_1^6=6^2-6^1=30$, $N_3=\overline{V}_3^6-\overline{V}_2^6=$
$=6^3-6^2=180$, $N_4=\overline{V}_4^6-\overline{V}_3^6=6^4-6^3=1080$ i
$N_5=\overline{V}_5^6-\overline{V}_4^6=6^5-6^4=6\,480$.

Ukupno prirodnih brojeva je: $5+30+180+1080+6480=7\,775$ (oduzeti su brojevi koji počinju nulom).



**933.** Na osnovu pretpostavke, imamo jednačinu

$$V_3^n=\frac{5}{12}V_3^{n+2},$$

koja je ekvivalentna jednačini $7n^2-51n+14=0$. Rezultat: $n=7$.

**934.** a) $x=20$; b) $x=9$.

**935.** a) $x=57$; b) $x=6$.

**936.** a) $x=10$; b) $x=20$.

**937.** Jednačina $x(x-1)(x-2)(x-3)=1680$ ekvivalentna je jednačini $(x^2-3x)(x^2-3x+2)=1\,680$. Zamenom $x^2-3x=t$ dobijamo kvadratnu jednačinu $t^2-2t-1680=0$. Rezultat je $x=8$.

**938.** $x=15$.

**939.** $n=6$.

**940.** $x=12$.

**941.** $\overline{V}_1^3+\overline{V}_2^2+\overline{V}_3^2+\overline{V}_4^2+\overline{V}_5^2=62$.

**942.** $\overline{V}_{12}^3=3^{12}=531\,441$.

**943.** a) $3^7=2\,187$; b) $3^5\cdot 2^7=31104$.

**945.** $V_2^3\cdot V_4^5=720$.

**946.** $18\cdot V_3^5=1080$.

## 6.2. Permutacije

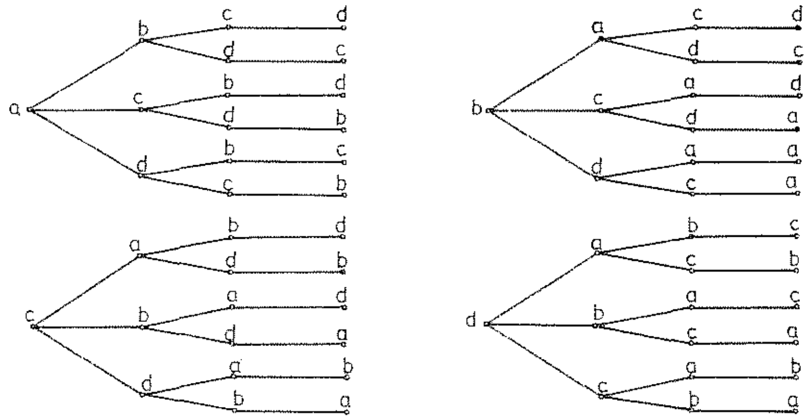
**947.** $P(4)=4!=24$.

**948.** $P(5)-P(4)=5!-4!=96$ (oduzeti su brojevi koji počinju nulom).

**949.** Sve permutacije od elemenata skupa $A$ su:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a\ b\ c\ d$ | $b\ a\ c\ d$ | $c\ a\ b\ d$ | $d\ a\ b\ c$ |
| $a\ b\ d\ c$ | $b\ a\ d\ c$ | $c\ a\ d\ b$ | $d\ a\ c\ b$ |
| $a\ c\ b\ d$ | $b\ c\ a\ d$ | $c\ b\ a\ d$ | $d\ b\ a\ c$ |
| $a\ c\ d\ b$ | $b\ c\ d\ a$ | $c\ b\ d\ a$ | $d\ b\ c\ a$ |
| $a\ d\ b\ c$ | $b\ d\ a\ c$ | $c\ d\ a\ b$ | $d\ c\ a\ b$ |
| $a\ d\ c\ b$ | $b\ d\ c\ a$ | $c\ d\ b\ a$ | $d\ c\ b\ a$. |

Njihovi grafovi su prikazani na slici 114.




Sl. 114

**950.** Sve permutacije datog skupa $E$ su:
123; 132; 213; 231; 312; 321.

Ove permutacije se često prikazuju kao preslikavanja skupa $E \to E$, tj.

$$\begin{pmatrix}123\\123\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\132\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\213\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\231\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\312\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}123\\321\end{pmatrix}.$$

**951.** a) $7! = 5\,040$; b) $5! = 120$; c) $4! = 24$.

**952.** a) $5! = 120$; b) $5! \cdot 4! = 2\,880$.

**953.** a) $6! - 5! = 600$; b) $5! + 5! + 5! - 4! - 4! - 4! = 288$.

**954.** Postoje samo sledeće mogućnosti da se broj 5 napiše kao zbir 5 cifara:

$5 = 5+0+0+0+0$, $5 = 4+1+0+0+0$, $5 = 3+2+0+0+0$,
$5 = 3+1+1+0+0$; $5 = 2+2+1+0+0$, $5 = 2+1+1+1+0$ i
$5 = 1+1+1+1+1$.

U svakom od ovih slučajeva izračunavamo broj svih mogućih rasporeda (radi se o permutacijama sa ponavljanjem) i od njih oduzimamo broj onih rasporeda koji počinju nulom:

$$\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{2! \cdot 2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{5!} - \left(\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!}\right) =$$

$= 70$. Dakle, 70 brojeva.



**955.** a) Traženi brojevi su one permutacije bez ponavljanja određene od elemenata skupa $S$, koje ne počinju nulom. Pošto $4! = 24$ permutacija počinje nulom, onda je broj petocifrenih prirodnih brojeva: $5! - 4! = 120 - 24 = 96$.

b) Parni brojevi su svi brojevi koji se završavaju sa:
0 i ima ih $4! = 24$;
2 i ima ih $4! = 24$;
4 i ima ih $4! = 24$.

Među brojevima koji se završavaju sa 2 i 4 ima i takvih koji počinju 0, i njih je $3! + 3! = 6 + 6 = 12$, pa je broj parnih petocifrenih brojeva $24 + 24 + 24 - 12 = 60$.

**956.** a) Analogno prethodnom zadatku dobija se $P(6) - P(5) = 6! - 5! = 720 - 120 = 600$ (5! je broj permutacija koje počinju 0).

b) Parni brojevi su oni koji se završavaju sa 0,2 i 4, pa je: $5! + 5! + 5! - (4! + 4!) = 360 - 48 = 312$ ($4! + 4!$ je broj permutacija koje završavaju sa 2 ili 4 a počinju 0).

**957.** Svi petocifreni brojevi koji se mogu formirati od elemenata skupa $E$ mogu se graditi kao permutacije bez ponavljanja od sledećih podskupova skupa $E$: $E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$; $E_2 = \{0, 2, 3, 4, 5\}$; $E_3 = \{0, 1, 3, 4, 5\}$; $E_4 = \{0, 1, 2, 4, 5\}$; $E_5 = \{0, 1, 2, 3, 5\}$ i $E_6 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Kako brojevi deljivi sa 6 moraju biti parni i deljivi sa 3, a brojevi deljivi sa 3 moraju imati takve cifre da je njihov zbir takođe deljiv sa 3. Zaključujemo da jedino skupovi $E_1$ i $E_4$ sadrže takve cifre. Od svih permutacija koje se mogu formirati od elemenata skupa $E_1$ dolaze u obzir samo one koje se završavaju brojem 2 ili 4 i njih ima $4! + 4! = 48$. Analogno, permutacije od elemenata skupa $E_4$ dolaze u obzir samo kad završavaju ciframa 0, 2 i 4; ali permutacije koje počinju 0 a završavaju se sa 2 i 4 nisu petocifreni brojevi, pa ih treba oduzeti. Broj permutacija koje završavaju sa 2 i 4 je $2(4! - 3!) = 36$. Ukupan broj petocifrenih brojeva deljivih sa 6 je $4! + 4! + 4! + 2(4! - 3!) = 108$.

**958.** $4! + 4! + 4! - 3! = 66$.

**959.** a) 402 600; b) 10 302; c) 5.

**960.** a) $\dfrac{n}{(n+1)!}$; b) $\dfrac{k-1}{k!}$.

**962.** a) $(n-2)(n-3)$; b) $n(n-1)$.

**963.** a) $\dfrac{1}{n(n-1)(n-2)}$; b) $(n-1)(n-2)$.

**964.** a) $n=7$; b) $x=5$.

**965.** a) $x=3$; b) $y=6$.

**966.** a) $n\in\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; b) $x\in\{n/n\in N \wedge n\geqslant 12\}$.

**967.** a) $y\in\{1, 2, 3, 4\}$; b) $m\in\{m|1\leqslant m<10\}$.

**968.** a) $n!<1000\Rightarrow n\in\{n|n\in N \wedge n<6\}$;
b) $n!>500\Rightarrow n\in\{n|n\in N \wedge n>6\}$.

**969.** $i=18$.

**970.** $i=4\,625$.

**971.** $i=1163$.

**972.** $i=58$.

**973.** milan.

**974.** uspeh.

**975.**

| | | |
|---|---|---|
| $a\ b\ b\ c$ | $b\ a\ b\ c$ | $c\ a\ b\ b$ |
| $a\ b\ c\ b$ | $b\ a\ a\ b$ | $c\ b\ a\ b$ |
| $a\ c\ b\ b$ | $b\ b\ a\ c$ | $c\ b\ b\ a$. |
| | $b\ b\ c\ a$ | |
| | $b\ c\ a\ b$ | |
| | $b\ c\ b\ a$ | |

**976.** $P_{3,2}(6)=\dfrac{6!}{3!\cdot 2!}=60$.

**977.** $P_4(7)-P_3(6)=\dfrac{7!}{4!}-\dfrac{6!}{3!}=210-120=90$.

**978.** a) $\dfrac{8!}{4!\cdot 3!}=280$; b) $\dfrac{8!}{5!\cdot 2!}=186$; c) $\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$.



**979.** a) $\dfrac{9!}{4!\cdot 3!}=2520$; b) $\dfrac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 3!}=560$; c) $\dfrac{7}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=210$.

**980.** $i=99262$.

**981.** smederevo.

**982.** $P_{5,3}(8)=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$.

**983.** $\dfrac{8!}{3!\cdot 2!\cdot 3!}=560$; $a^2bc^3ba$.

**984.** jamajka.

**985.** $i=357208$.

**986.** Na osnovu pretpostavke dobija se jednačina
$\dfrac{P(n)}{P(n+2)}=\dfrac{0{,}1}{3}\Leftrightarrow\dfrac{n!}{(n+2)!}=\dfrac{1}{30}\Leftrightarrow n^2+3n-28=0\Leftrightarrow$
$n_1=4 \quad n_2=-7$. Drugo rešenje ne odgovara uslovu zadatka.

**987.** $n=6$.

**988.** Primeni matematičku indukciju.

### 6.3. Kombinacije

**989.**

| | | |
|---|---|---|
| $a_1\ a_2\ a_3$ | $a_2\ a_3\ a_4$ | $a_3\ a_4\ a_5$. |
| $a_1\ a_2\ a_4$ | $a_2\ a_3\ a_5$ | |
| $a_1\ a_2\ a_5$ | $a_2\ a_4\ a_5$ | |
| $a_1\ a_3\ a_4$ | | |
| $a_1\ a_3\ a_5$ | | |
| $a_1\ a_4\ a_5$ | | |

**990.** Broj grupa jednak je broju kombinacija 4. klase od 12 elemenata:
$C_4^{12}=\dbinom{12}{4}=495$.

**991.** $C_2^{15}=\dbinom{15}{2}=105$.

**992.** $C_3^{12}=220.$

**993.** a) $C_2^5-5=5$ (oduzet je broj stranica petougla);

b) $C_2^{12}-12=54;$ c) $C_2^{20}-20=170;$

d) $C_2^n-n=\dfrac{n(n-1)}{2}-n=\dfrac{n(n-3)}{2}.$

**995.** $C_2^{12}-6\cdot 3=202$ ravni.

**996.** $\binom{16}{1}\binom{20}{3}+\binom{16}{2}\binom{20}{2}+\binom{16}{3}\binom{20}{1}+\binom{16}{4}=54\ 060.$

**997.** a) $C_0^3+C_1^3+C_2^3+C_3^3=1+3+3+1=8=2^3$ podskupova.

$C_0^3$ odgovara praznom skupu, $\emptyset$ je podskup svakog skupa;

$C_1^3$ određuje broj jednočlanih podskupova;

$C_2^3$ određuje broj dvočlanih podskupova itd.

b) $C_0^4+C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4=1+4+6+4+1=16=2^4$ podskupova;

c) $C_0^5+C_1^5+C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5=1+5+10+10+5+1=32=2^5$ podskupova;

d) $C_0^6+C_1^6+C_2^6+C_3^6+C_4^6+C_5^6+C_6^6=2^6$ podskupova.

**998.** Analogno prethodnom zadatku dobija se:
$C_0^n+C_1^n+C_2^n+\ldots+C_n^n=2^n$ podskupova.

**999.** 45 pravih.

**1000.** $C_3^{10}=\binom{10}{3}=120.$

**1001.** $V_2^{40}\cdot C_3^{38}=13\ 160\ 160.$

**1002.** $\binom{10}{1}\binom{15}{4}+\binom{10}{2}\binom{15}{3}+\binom{10}{3}\binom{15}{2}+\binom{10}{4}\binom{15}{1}+\binom{10}{5}=50\,127.$

**1003.** 21 učesnik.

**1004.** $\binom{5}{2}\binom{4}{2}\binom{3}{1}+\binom{5}{2}\binom{4}{3}+\binom{5}{2}\binom{4}{1}\binom{3}{2}+\binom{5}{3}\binom{4}{1}\binom{3}{1}+\binom{5}{3}\binom{4}{2}+$
$+\binom{5}{4}\binom{4}{1}=540.$

**1005.** a) $x=3 \vee x=14;$ b) $n=5.$

**1006.** $n=5.$

**1007.** $n=5.$



**1008.** a) $n=5;$ b) $x=5.$

**1009.** $n=10.$

**1010.** $x=3.$

**1011.** $x=2.$

**1012.** a) $(12, 5);$ b) $(16, 6);$ c) $(5, 2);$ d) $(7, 5);$

**1013.** a) $n\in\{5, 6, 7\};$ b) $n\in\{n \mid n=7, 8, 9, \ldots\};$ c) $1<k<10;$
d) $n>11;$ e) $2\leqslant n\leqslant 10.$

**1014.** $k=6,\ \ n=15.$

**1015.** Treba uočiti kombinacije 5. klase od elemenata skupa
$\{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l\}$. Rezultat *aeghk*.

**1016.** $i=54.$

**1017.** $x=23.$

**1018.** $x=8.$

**1019.** $n=8$ (videti rešenje zadatka 787).

**1020.** Kako je $\binom{n}{8}=\binom{n}{12}\Leftrightarrow\binom{n}{n-8}=\binom{n}{12}$, odavde imamo da je
$n-8=12\Leftrightarrow n=20$. $C_{17}^{20}=1\ 140.$

**1021.** Ako se iskoristi poznati obrazac $V_k^n=C_k^n\cdot P(k)$ i pretpostavka, dobija se da je

$\binom{n}{k}k!=24.$ Pošto je $\binom{n}{k}=4$, tada je

$k!=6\Leftrightarrow k=3.\ \binom{n}{3}=4\Leftrightarrow n(n-1)(n-2)=24\Leftrightarrow(n-4)(n^2+n+6)=$
$=0\Leftrightarrow n=4.$

**1022.** $n=5,\ \ x=3.$

**1023.** $k=4,\ \ n=6.$

**1024.** $k=3,\ n=6$.

**1025.** Ako se $\binom{n}{k}$ razvije, dobija se da je

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Proširivanjem razlomka sa $(n-k)!$ dobija se

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!}\cdot\frac{(n-k)!}{(n-k)!}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}{k!(n-k)!}=$$

$$=\frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Prethodni razlomak se može napisati u obliku proizvoda dva razlomka:

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots(k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-k)}\cdot\frac{k(k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}{(k\cdot k-1)\ldots3\cdot2\cdot1}=$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)\ldots n-(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\ldots(n-k)}=\binom{n}{n-k}.$$ Kraj dokaza.

**1026.** $$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n}{(k-1)!(n-k-1)!}$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n-k+1}\right)$$

$$=\frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\cdot\frac{n-k+1+k}{k(n-k+1)}$$

$$=\frac{(n+1)n!}{k(k-1)!(n-k+1)(n-k)!}=\frac{n!}{k!(n-k+1)!}=\binom{n+1}{k}.$$

**1027.** Primeni se identitet iz prethodnog zadatka tri puta na sledeći način:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}+\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}+\binom{n+1}{k}=\binom{n+2}{k+1}=C_{k+1}^{n+2}.$$

**1028.** Analogno prethodnom zadatku.



**1029.** Analogno 1027. zadatku.

**1030.** Dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$\frac{5(n+1)!}{k!(n-k+1)!}=\frac{6n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\wedge\frac{2n!}{(k+1)(n-k-1)!}=$$

$$=\frac{5n!}{(k-1)!(n-k+1)!}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6(n-k+1)(n-k)=5(n+1)(k+1)\wedge 2(n-k)(n-k+1)=5k(k+1).$$

Ako se podele jednačine prethodnog sistema dobija se da je $n=3k-1$. Rezultat $k=3,\ n=8$.

**1031.** $k=2,\ n=5$.

**1032.** $k=3,\ n=6$.

**1033.** $k=3,\ n=7$.

### 6.4. Binomni obrazac

**1035.** a) $243+810x+1080x^2+720x^3+240x^4+32x^5$;
b) $64x^4+160x^3+600x^2+1000x+625$.

**1036.** a) $x^5+5x^3+10x+10x^{-1}+5x^{-3}+x^{-5}$;
b) $(x^2+(x-3))^4=x^8+4x^7-6x^6-32x^5+91x^4+54x^2-108x+81$.

**1037.** a) $2+6i$; b) $e^{7x}-7e^{5x}+21e^{3x}-35e^{x}+35e^{-x}-21e^{-3x}+7e^{-5x}-e^{-7x}$.

**1038.** a) 0,88584; b) 85,76666; c) 1,03043.

**1039.** $T_5=T_{4+1}=\binom{12}{4}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{12-4}\cdot\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^4=495x^{\frac{20}{3}}$.

**1040.** Opšti član datog binoma ima oblik $T_{k+1}=\binom{12}{k}x^{12-3k}$.
Ovaj član ne sadrži $x$ ako i samo ako je
$12-3k=0\Leftrightarrow k=4$.

**1041.** Opšti član datog binoma se može napisati u obliku

$$T_{k+1}=\binom{11}{k}\left(x^{\frac{1}{3}}\right)^{11-k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{k}=\binom{11}{k}x^{\frac{11-k}{3}+\frac{k}{2}}.$$

Ovaj član sadrži $x^5$ ako i samo ako je

$$\frac{11-k}{3}+\frac{k}{2}=5 \Leftrightarrow k=8.$$

Dakle, $T_9=\binom{11}{8}x^5=165\,x^5$ sadrži $x$ sa izložiocem 5.

**1042.** $T_7=\binom{9}{6}=84.$

**1043.** $T_9=\binom{16}{8}\left(\frac{a}{x}\right)^8\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^8=12870\,a^8\,x^{-4}.$

**1044.** Iz jednačine $\frac{n(n-1)}{2}=105$, sledi da je $n=15$. Tada je

$$T_{13}=\binom{15}{12}(9x)^{15-12}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^{12}=\binom{15}{3}(9x)^3\cdot\frac{(-1)^{12}}{(3x)^6}=455x^{-3}.$$

**1045.** $n=15,\ T_{11}=3003\,a^{10}.$

**1046.** $T_7=84.$

**1047.** $\binom{13}{6}=\binom{13}{7}=1716.$

**1048.** $x_1=2 \vee x_2=-5.$

**1049.** $16\,x^{8,5}.$

**1050.** $T_4=\binom{13}{3}=286.$

**1051.** U binomnoj formuli (1) zameniti: a) $a=1,\ b=1$; b) $a=1,\ b=-1$.

**1052.** $n=5$, $x=2$ i $y=3$.

**1053.** $C_1+2C_2+3C_3+\ldots+nC_n=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}$

$$=n+2\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}+3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+n$$



$$=n\left(\binom{n-1}{0}+\binom{n-1}{1}+\binom{n-1}{2}+\ldots+\binom{n-1}{n-1}\right)=n\cdot 2^{n-1}.$$

(Iskoristili smo zadatak 1051 a) da je zbir binomnih koeficijenata $2^n$.)

**1054.** $C_0+2C_1+3C_2+\ldots+(n+1)\,C_n=$

$=C_0+(1+1)\,C_1+(1+2)\,C_2+\ldots+(n+1)\,C_n=$

$=(C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n)+(C_1+2C_2+3C_3+\ldots+nC_n)=$

$=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}+\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\ldots+n\binom{n}{n}\Big)$

$=2^n+n\cdot 2^{n-1}=(n+2)\cdot 2^{n-1}$. (Iskorišćeno je da je zbir binomnih koeficijenata $2^n$ iz zadatka 1051, a dokaz kao u prethodnom zadatku.)

**1055.** $C_2+(3-1)\,C_3+(4-1)\,C_n+\ldots+(n-1)\,C_n=$

$=C_1-C_1+2C_2-C_2+3C_3-C_3+4C_4-C_4+n\ C_n-C_n=$

$=(C_1+2C_2+3C_3+4C_4+\ldots+n\,C_n)-(C_0+C_1+C_2+C_3+\ldots+$

$+C_n)+C_0=n\cdot 2^{n-1}-2^n+1=2^{n-1}(n-2)+1$ (Pogledati uputstvo u prethodnom zadatku.)

**1056.** $C_0+C_1+2C_1+C_2+4C_2+C_3+6C_3+\ldots+2n\,C_n+C_n=$

$=(C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n)+2\,(C_1+2C_2+3C_3+\ldots+n\,C_n)=$

$=2^n+2\cdot n\cdot 2^{n-1}=(n+1)\,2^n.$

**1057.** $3C_1+7C_2+11C_3+\ldots+(4n-1)\,C_n=$

$=4C_1-C_1+8C_2-C_2+12C_3-C_3+4n\,C_n-C_n=$

$=4(C_1+2C_2+3C_3+\ldots+n\,C_n)-(C_0+C_1+C_2+\ldots+C_n)+C_0=$

$=4n\,2^{n-1}-2^n+1=n\cdot 2^{n+1}-2^n+1=(2n-1)\cdot 2^n+1.$

**1058.** Dati zbir se transformiše postupno na oblik

$$\frac{1}{n+1}\left(\binom{n+1}{0}+\binom{n+1}{1}+\binom{n+1}{2}+\ldots+\binom{n+1}{n+1}-1\right)=$$

$$=\frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1).$$

**1059.** $C_0 - C_1 - C_1 + C_2 + 2C_2 - C_3 - 3C_3 + \dots + (-1)n\,C_n + (-1)^n C_n =$
$= (C_0 - C_1 + C_2 - C_3 + \dots (-1)^n C_n) - C_1(C_1 - 2C_2 + 3C_3 + \dots +$
$+ (-1)^n n\,C_n) = 0 - 0 = 0$ (iskoristiti zadatak 1051 b)).

**1060.** Dati zbir se može napisati u obliku

$$1 - \frac{n}{2} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(\frac{n+1}{1} - \frac{(n+1)n}{1\cdot 2} + \frac{(n+1)(n)(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} - \dots + (-1)^n\right) =$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(-\binom{n+1}{0} + \binom{n+1}{1} - \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} + \dots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \binom{n+1}{n+1} + 1\right) = \frac{1}{n+1}$$

(jer je zbir u zagradi $0+1$, zadatak 1051 b)).

**1061.** Zbir binomnih koeficijenata jednak je $2^n$ (zadatak 1051 a)). Zbir koeficijenta na neparnim mestima je

$$\frac{1}{2}\cdot 2^n = 2048 \Leftrightarrow n = 12.$$

Rešenje je $T_8 = -264a^3 b^7$.

**1062.** Neka je $x$ izložilac prvog binoma, a drugog $x+3$. Zbirovi binomnih koeficijenata su $2^x$ i $2^{x+3}$, pa je na osnovu pretpostavke

$$2^x + 2^{x+3} = 144 \Leftrightarrow x = 4.$$

**1063.** Sedmi član od početka u razvijenom obliku binoma je

$T_7 = \binom{x}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^{x-6}\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^6$, a sedmi od kraja je

$$T_7' = \binom{x}{6}\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^6\left(3^{-\frac{1}{3}}\right)^{x-6}.$$

Njihov količnik je

$$T_7 : T_7' = 6^{\frac{x-12}{3}}.$$



Na osnovu pretpostavke imamo niz ekvivalentnih jednačina:

$$6^{\frac{x-12}{3}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6^{\frac{x-12}{3}} = 6^{-1} \Leftrightarrow \frac{x-12}{3} = -1 \Leftrightarrow x = 9.$$

**1064.** Na osnovu pretpostavke dobija se lanac ekvivalentnih jednačina:

$$\binom{5}{2} x^3 (x^{\log x})^2 = 100\,000 \Leftrightarrow 10x^{3+2\log x} = 10^6 \Leftrightarrow x^{2\log x + 3} = 10^5$$

$$\Leftrightarrow (2\log x + 3)\log x = 5 \Leftrightarrow \log x = 1 \vee \log x = -\frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = 10 \vee x = \frac{1}{100\sqrt{10}}.$$

**1065.** Na osnovu pretpostavke imamo ekvivalencije:

$$\binom{6}{3}(\sqrt{x})^{\frac{3}{\log x + 1}}\left(\sqrt[12]{x}\right)^3 = 200 \Leftrightarrow 20^{\frac{\log x + 7}{4(\log x + 1)}} = 200$$

$(\log x)^2 + 3\log x - 4 = 0 \Leftrightarrow \log x = 1 \vee \log x = -4$
$x = 10 \vee x = 0{,}0001$.

**1066.** a) $n = 16$; b) $x = 2 \vee x = 1$.

**1067.** $x = 10 \vee x = 10^{-\frac{1}{5}}$.

**1068.** $n = 14 \vee n = 7$.

**1069.** a) $n = 8$; b) $T_1 = x^4$; $T_5 = \frac{35x}{8}$ i $T_9 = \frac{1}{256x^2}$.

**1070.** $x = 1000 \vee x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

**1071.** $n = 9$, $k = 3$, $T_4 = 84x$.

**1072.** $n = 12$, $k = 8$, $T_9 = 495$.

**1073.** $n = 7$, $k = 3$, $T_4 = 35a^5$.

**1074.** $n = 5$, $k = 3$, $T_4 = -5a^2$.

**1075** Primeni binomni obrazac na sledeći način

$$(1 + (x^2 - x^3))^9 = \binom{9}{k} 1^{9-k} (x^2 + (-x^3))^k = \binom{9}{k}\binom{k}{r}(x^2)^{k-r}(-x^3)^r =$$

$$\binom{9}{k}\binom{k}{2}(-1)^r x^{2k+r}.$$

Iz pretpostavke $(0 \leqslant k \leqslant 9) \wedge (r \leqslant k) \wedge 2k+r=8$, dobija se $(r=2, k=3)$ ili $(r=0, k=4)$. Tražene vrednosti su 126 i 252.

**1076.** $-1, -42, -210, -140$.

**1077.** a) $10x^2$; b) 32, 2160, 15120, 22860, 7292, 243;
b) 1,2730, 25740, 3640, 625, 7000, 1120, 16.

**1078.** $210x^5$.

**1079.** Ako se uoči opšti član, dobija se da je

$$T_{k+1} = \binom{100}{k} \cdot 2^{\frac{100-k}{2}} \cdot 3^{\frac{k}{4}}.$$

Za $k=4p$ ($p$ prirodan broj i $k=0, 1, 2, \ldots, 100$) članovi će biti racionalni; njihov broj je 26.

**1080.** Tri člana, i to: $x^{-5}$; $\binom{12}{6} x^{-1}$ i $x^4$.

**1081.** a) $n=7$; b) $x=0 \vee x=2$.

**1082.** $n=10$, $k=3$, $T_3=7290$.

**1083.** Ako se primeni obrazac (2) za opšti član dobija se

$$T_k = \binom{12}{k-1} x^{\frac{8-2k}{3}}, \quad T_{k+1} = \binom{12}{k} x^{\frac{6-2k}{3}}.$$

Na osnovu pretpostavke dobija se sistem

$$2 \cdot \frac{6-2k}{3} = \frac{8-2k}{3} \wedge \binom{12}{k} x^{\frac{6-2k}{3}} - \binom{12}{k-1} x^{\frac{8-2k}{3}} = 30.$$

Rešenje prve jednačine je $k=2$, a druga se svodi na kvadratnu jednačinu $2\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2 - 11\sqrt[3]{x^2} + 5 = 0$. Njena rešenja su

$$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{4} \vee x = \pm 5\sqrt{5}.$$

**1084.** Mogu da stignu svi u različitim vremenima, mogu da stignu dva zajedno, a ostali različito, tri zajedno a ostali različito, ... mogu u grupama po dva, po tri, itd. Ukupan broj mogućnosti je

$$C_1^n + C_2^n + C_3^n + \ldots + C_n^n = \left(\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\right) - \binom{n}{0} =$$
$$= 2^n - 1.$$



**1085.** Treba odrediti zbir: $(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + \ldots + (C_n^n)^2$.

Ako se pođe od identiteta:

$$(x+1)^n = C_0^n x^n + C_1^n x^{x-1} + C_2^n x^{n-2} + \ldots + C_n^n;$$
$$(1+x)^n = C_0^n + C_1^n x + C_2^n x^2 + \ldots + C_n^n x^n;$$

Proizvod ove dve jednakosti na levoj strani daje $(1+x)^{2n}$. Koeficijent uz $x^n$ u razvijenom obliku ima oblik $C_n^{2n}$. Proizvod na desnoj strani je polinom stepena $2n$. Koeficijent tog polinoma uz $x^n$ je

$$(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + \ldots + (C_n^n)^2.$$

Dva polinoma su identično jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti jednaki. Tada su jednaki i koeficijenti uz $x^n$, tj.

$$(C_0^n)^2 + (C_1^n)^2 + (C_2^n)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_n^{2n}.$$

**1086.** Posle skraćivanja prvog razlomka sa $a_1$, drugog sa $a_3$ i trećeg sa $a_2$, data jednakost postaje

$$(1) \qquad \frac{1}{1+\frac{a_2}{a_1}} + \frac{1}{1+\frac{a_4}{a_3}} = \frac{2}{1+\frac{a_3}{a_2}}.$$

Na osnovu pretpostavke dobija se da je

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\binom{n}{k-1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n-k}{k+1}, \quad \frac{a_4}{a_3} = \frac{\binom{n}{k+3}}{\binom{n}{k+2}} = \frac{n-k-2}{k+3},$$

$$\frac{a_3}{a_2} = \frac{\binom{n}{k+2}}{\binom{n}{k+1}} = \frac{n-k+1}{k+2}.$$

Zamenom u jednakost (1) dobija se da je

$$\frac{2(k+2)}{n+1} = \frac{2(k+2)}{n+1}.$$

**1087.** $(42+1)^{17} = 42^{17} + \binom{17}{1} 42^{16} + \binom{17}{2} 42^{15} + \ldots + \binom{17}{16} 42 + \binom{17}{17}$

$= 42N + 1$, gde je $N$ ceo broj, jer brojevi $\binom{n}{k}$ su celi.

Dakle, pri deljenju broja $43^{17}$ sa 6, ostatak je 1.

**1088.** Posmatrajmo dve uzastopne vrste Paskalovog trougla:

$$\binom{k}{0}\binom{k}{1}\binom{k}{2}\cdots\binom{k}{k-2}\binom{k}{k-1}\binom{k}{k} \quad \text{i}$$

$$\binom{k+1}{0}\binom{k+1}{1}\binom{k+1}{2}\cdots\binom{k+1}{k-1}\binom{k+1}{k}\binom{k+1}{k+1}.$$

Razlika kvadrata elemenata treće hipotenuze jednaka je

$$\binom{k+1}{k-1}^2-\binom{k}{k-2}^2=\left(\frac{k(k+1)}{2}\right)^2-\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^2=$$

$=\frac{1}{4}k^2((k+1)^2-(k-1)^2)=k^3$, što je trebalo dokazati.

**1089.** Dati broj, primenom binomne formule, može se transformisati postupno na sledeći način:

$$11^{10}-1=(10+1)^{10}-1=\binom{10}{0}10^{10}+\binom{10}{1}10^9+\binom{10}{2}10^8+\ldots+$$

$$+\binom{10}{9}10+\binom{10}{10}-1=$$

$$=100\left(10^8+\binom{10}{1}10^7+\binom{10}{2}10^6+\ldots+1\right)=$$

$=100N$. Dakle, traženi broj je deljiv sa 100.

**1090.** Dati broj se može postupno transformisati:

$$23^n-1=(22+1)^n-1$$

$$=\binom{n}{0}22^n+\binom{n}{1}22^{n-1}+\ldots+\binom{n}{n-1}22+1-1$$

$$=22\left(\binom{n}{0}22^{n-1}+\binom{n}{1}22^{n-2}+\ldots+\binom{n}{n-1}\right)$$

$=22\cdot p \quad (p\in N)$.

**1091.** Iskoristiti rešenje zadatka 1051 a).

**1092.** U jednakosti

$$(a+b)^{2n}=\binom{2n}{0}a^{2n}b^0+\binom{2n}{1}a^{2n-1}b+\ \ldots\ +\binom{2n}{0}a^0b^{2n}$$

stavi $a=1$, $b=-1$, itd.



# VII GLAVA

## 7. VEROVATNOĆA I STATISTIKA

### 7.1. Verovatnoća

**1093.** Neka je $\omega_1$ pojava grba na gornjoj strani, a $\omega_2$ pojava pisma na gornjoj strani, tada je prostor (skup) elementarnih događaja $\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$.

**1094.** Elementarni događaji u ovom slučaju su:
$\omega_1$ pojava strane kocke sa jednom tačkom;
$\omega_2$ pojava strane kocke sa dvema tačkama;
. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .
$\omega_6$ pojava strane kocke sa šest tačaka.
Prostor (skup) elementarnih događaja je
$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$.

**1095.** Broj mogućih ishoda je broj kombinacija bez ponavljanja treće klase od elemenata $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5$, tj.

$C_3^5=\binom{5}{3}=10$. Dakle, skup ima 10 elemenata;

b) $A=\{(k_1, k_3, k_5), (k_1, k_4, k_5), (k_2, k_3, k_5), (k_2, k_4, k_5)\}$

c) $B=\{(k_1, k_3, k_4), (k_2, k_3, k_4), (k_3, k_4, k_5)\}$.

**1096.** a) Elementarne događaje ovog ogleda predstavljaju parovi brojeva $(m, n)$, gde je $m$ broj tačaka na gornjoj strani jedne kocke, a $n$ broj tačaka na gornjoj strani druge kocke. Skup $\Omega$ ima 36 elemenata, i to su:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
| 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 |
| 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| 51 | 52 | 53 | 54 | 55 | 56 |
| 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66; |

b) $A=\{(1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (6, 6)\}$;

c) $B=\{(6, 1); (5, 2); (4, 3); (3, 4); (2, 5); (1, 6)\}$.

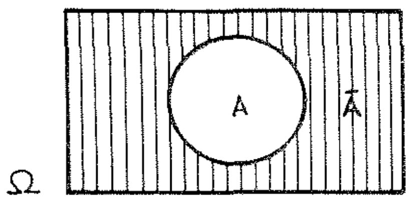
**1097.** *Primedba* 1. Zbir dva događaja $A$ i $B$ je događaj $C$, koji se realizuje pojavom bar jednog od događaja $A$ i $B$. Zbir dva događaja obeležava se $C=A+B$ ili $C=A\cup B$, zbog analogije sa skupovima.

a) $A=\{(2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2)\}$;
$B=\{(2, 6); (3, 4); (4, 3); (6, 2)\}$.
$A+B=A\cup B=\{(2, 6); (3, 4); (3, 5); (4, 3); (4, 4); (5, 3); (6, 2)\}$.

*Primedba* 2. Proizvod dva događaja $A$ i $B$ je događaj $C$, koji se realizuje pojavom i događaja $A$ i događaja $B$. Proizvod dva događaja se obeležava sa $C=AB$ ili $C=A\cap B$, zbog analogije sa skupovima.

b) $C=A\cap B=AB=\{(2, 6); (6, 2)\}$.

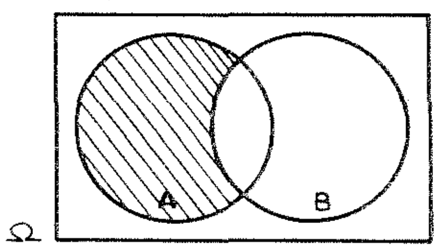
*Primedba* 3. Događaj $\bar{A}$ je suprotan događaju $A$ ako i samo ako se realizuje kada se događaj $A$ ne realizuje. Suprotan događaj $\bar{A}$ naziva se komplementom događaja $A$ (šrafirani deo sl. 115)




Sl. 115

**1098.** $\bar{A}=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$.

**1102.** *Primedba* 4. Razlika događaja $A$ i $B$ je događaj $C$ koji se sastoji od onih elementarnih događaja koji su povoljni događaju $A$, ali ne i događaju $B$. Razlika događaja $A$ i $B$ u oznaci je $A-B=C$ (šrafirani deo na sl. 116).

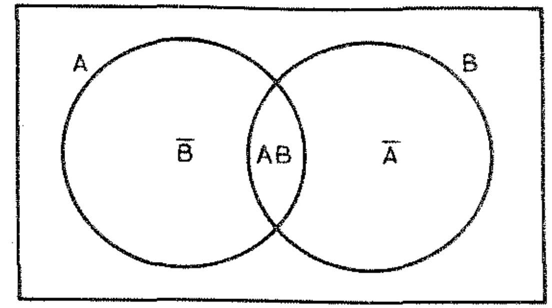



Sl. 116



Kako je $A=\{3, 4, 5, 6\}$ i $B=\{2, 3, 4\}$, onda je razlika $C=A-B=\{5, 6\}$, tj. događaj kada se na kocki pojavljuje ili 5 ili 6.

**1103.** Dokaz se izvodi ako se koristi sl. 117.




Sl. 117

**1104.** *Primedba* 5. Događaji $A$ i $B$ se isključuju (nezavisni su) ako i samo ako je $AB=\emptyset$ $(A\cap B=\emptyset)$. Za date događaje imamo:

$A\overline{(A+B)}=A(\bar{A}\,\bar{B})$ (de Morganovo pravilo)
$=(A\bar{A})\cdot\bar{B}$ (asocijativni zakon)
$=\emptyset\,\bar{B}=\emptyset$. Dakle, dati događaj se isključuje.

**1105.** *Primedba* 6. Događaji $A_1$, $A_2$, $A_3$, . . . , $A_n$ čine potpun sistem događaja ako se bar jedan od njih pojavljuje pri realizaciji ogleda i ako se među sobom isključuju, tj.

$A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n=\Omega$, $A_i\cdot A_j=0$, $i\neq j$ i $i, j=1, 2, 3, \ldots n$.

a) Događaji $A$ i $\bar{A}$ čine potpun sistem događaja, jer je
$A+\bar{A}=\Omega$, $A\cdot\bar{A}=\emptyset$.

b) Koristeći de Morganovo pravilo i zakon distribucije dobija se

$$A+\bar{A}B+\overline{A+B}=A+\bar{A}B+\bar{A}\bar{B}=A+\bar{A}(B+\bar{B})=A+\bar{A}\Omega=$$
$$=A+\bar{A}=\Omega.$$

**1106.** a) $A\bar{B}\bar{C}$; b) $ABC$; c) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$; d) $A+B+C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$.
e) $A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}B\bar{C}+\bar{A}\bar{B}C$; f) $\overline{ABC}$.

**1107.** Ako se primeni de Morganova formula dobijaju se ekvivalencije:

$$\overline{X+A}+\overline{X+\bar{A}}=B\Leftrightarrow\bar{X}\bar{A}+\bar{X}\bar{\bar{A}}=B$$
$$\Leftrightarrow\bar{X}(\bar{A}+A)=B$$
$$\Leftrightarrow\bar{X}\Omega=B$$
$$\Leftrightarrow\bar{X}=B$$
$$\Leftrightarrow X=\bar{B}.$$

**1108.** a) $(B+C)(B+\bar{C})(\bar{B}+C)=(BB+B\bar{C}+CB+C\bar{C})(\bar{B}+C)=$
$=(B+B(C+\bar{C})+\emptyset)(\bar{B}+C)=(B+B\Omega)(\bar{B}+C)=$
$=B(\bar{B}+C)=B\bar{B}+BC=\emptyset+BC=BC;$

b) $(A+B)(A+\bar{B})=AA+A\bar{B}+BA+B\bar{B}=A+A(\bar{B}+B)+\emptyset=$
$=A+A\Omega=A;$

c) $B$.

**1109.** a) Ako se označi pojava grba na gornjoj strani sa $G$, a pojava pisma na gornjoj strani sa $P$, tada je $\Omega=\{P, G\}$;

b) $\Omega=\{PP, PG, GP, GG\}$;

c) $\Omega=\{P1, P2, P3, P4, P5, P6, G1, G2, G3, G4, G5, G6\}$;

d) $\Omega=\{11, 12, 13, \ldots 64, 65, 66\}$ (broj elementarnih događaja u $\Omega$ je $\bar{V}_2^6=6^2=36$);

e) Broj elementarnih događaja u $\Omega$ je $\bar{V}_3^6=6^3=216$, tj. $=\{111, 112, 113, \ldots 666\}$.

**1110.** Broj svih mogućih elementarnih događaja je broj varijacija sa ponavljanjem od 6 elemenata druge klase, tj. $n=\bar{V}_2^6=6^2=36$. Među 36 mogućih, povoljnih da zbir cifara bude 8 su (2, 6); (3, 5); (4, 4); (5, 3); (6, 2), tj. $m=5$. Tražena verovatnoća je $P(A)=\dfrac{m}{n}=\dfrac{5}{36}$.

**1111.** $n=C_2^{18}=\binom{12}{2}=153$, $m=3\cdot 7=21$, $P(A)=0{,}098$.

**1112.** $P(A)=\dfrac{351}{4000}=0{,}13775$.

**1113.** $P(A)=\dfrac{512}{1000}=0{,}512$.

**1114.** $P(A)=\dfrac{3}{6}=0{,}5$.

**1115.** $P(A)=0{,}371$.

**1116.** $n=\dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200$, $m=1$, $P(A)=\dfrac{1}{151200}$.



**1117.** $P(A)=\dfrac{8}{500}=0{,}016$.

**1118.** $P(A)=\dfrac{1}{48}=0{,}0208$.

**1119.** a) $P(A)=0{,}4375$; b) $P(B)=0{,}325$.

**1120.** $P(A)=\dfrac{1}{120}$.

**1121.** Broj svih šestocifrenih brojeva, uključujući i 000 000 i 999 999 je $10^6$, odnosno broj varijacije od šest elemenata šeste klase sa ponavljanjem. Broj svih šestocifrenih brojeva koji imaju različite cifre (uključujući tu i one koji počinju sa nulama) jednak je broju varijacija od 10 elemenata šeste klase, tj. $10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5$. Prema tome, verovatnoća je

$$P(A)=\frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10^6}=0{,}1512.$$

**1122.** $P(A)=\dfrac{1}{10!}\approx 0{,}00000276$.

**1123.** $P(A)=\dfrac{C_2^8}{C_2^{20}}=\dfrac{28}{190}=0{,}1474$.

**1124.** $m=\binom{45}{2}$, $n=\binom{50}{2}$, $P(A)\approx 0{,}808$.

**1125.** $P(A)=\dfrac{6!\binom{10}{6}}{10^6}=0{,}1512$.

**1126.** $P(A) : P(B)=3:2$.

**1127.** $P(A)=0{,}00025$.

**1128.** $P(A)=0{,}02$.

**1129.** $P(A)=\dfrac{1}{6!}=0{,}00138$.

**1130.** $P(A)=\dfrac{\binom{n-k}{n}}{\binom{m}{n}}$.

**1131.** $P(A)=\dfrac{\binom{a}{p}\cdot\binom{b}{q}}{\binom{a+b}{p+q}}$.

**1132.** $P(A)=\dfrac{\binom{8}{2}\cdot\binom{8}{4}\cdot\binom{8}{3}\cdot\binom{8}{1}}{\binom{32}{10}}\approx 0{,}0408.$

**1133.** $P(A)=\dfrac{\binom{5}{2}\cdot\binom{7}{6}}{\binom{12}{8}}=\dfrac{14}{99}\approx 0{,}141\,414.$

**1134.** $n=V_2^{10}=10\cdot 9=90,\quad m=1,\quad P(A)\quad 0{,}01111.$

**1135.** $P(A)+P(B)+P(C)+P(D)=1\Rightarrow P(D)=0{,}1.$

**1136.** Prvi način: verovatnoća pojave jednog standardnog proizvoda

$$P(B)=\frac{C_1^5\cdot C_2^{15}}{C_3^{20}}=\frac{35}{76}.$$

Verovatnoća pojave dva standardna proizvoda je

$$P(C)=\frac{C_2^5\cdot C_1^{15}}{C_3^{20}}=\frac{\binom{5}{2}\binom{15}{1}}{\binom{20}{3}}=\frac{5}{38}.$$

Verovatnoća da se izvuku tri standardna proizvoda je

$$P(D)=\frac{C_3^5}{C_3^{20}}=\frac{\genfrac{}{}{0pt}{}{5}{3}}{\genfrac{}{}{0pt}{}{20}{3}}=\frac{1}{114}.$$

Verovatnoća da bar jedan od njih bude standardan je



$$P(A)=P(B)+P(C)+P(D)=\frac{35}{76}+\frac{5}{38}+\frac{1}{114}=\frac{137}{228}.$$

Drugi način: do rešenja možemo doći i na sledeći način: neka je $A$ događaj da bar jedan proizvod bude standardni, događaj $\bar{A}$ da nijedan nije standardan. Zato je

$$P(A)+P(\bar{A})=1 \quad \text{ili} \quad P(A)=1-P(\bar{A}).$$

Verovatnoća realizacije događaja $\bar{A}$ je

$$P(\bar{A})=\frac{C_3^{15}}{C_3^{20}}=\frac{\binom{15}{3}}{\binom{20}{3}}=\frac{91}{228}.$$

Prema tome verovatnoća $P(A)=1-P(\bar{A})=1-\dfrac{91}{228}=\dfrac{137}{228}$.

**1137.** Sa slike 118. proizlazi da se unija događaja $A+B$ može prikazati kao unija događaja $\bar{A}B$, $AB$ i $A\bar{B}$ koji se međusobom isključuju:

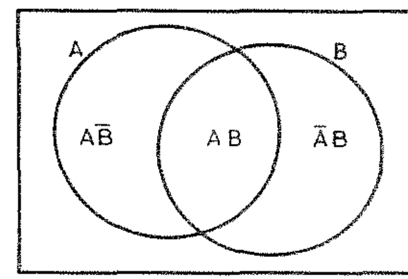
(2) $\qquad A+B=\bar{A}B+AB+A\bar{B}.$

Takođe je i

(3) $\qquad A=A\bar{B}+AB$

(4) $\qquad B=AB+\bar{A}B.$

Primenom aksiome 3 na obrazac (2) dobija se




Sl. 118

$$P(A+B)=P(A\bar{B})+P(AB)+P(\bar{A}B).$$

Ako se doda i oduzme desnoj strani ove jednakosti $P(AB)$, dobija se

$$P(A+B)=(P(A\bar{B})+P(AB))+(P(\bar{A}B)+P(AB))-P(AB)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB),$$

čime je dokaz završen.

*Primedba.* Ako se događaji $A$ i $B$ isključuju, tada se obrazac (1) svodi na aksiomu 3.

**1138.** Neka je $A+B=D$, tada se na osnovu (1) dobija

$$P(D+C)=P(D)+P(C)-P(DC)=P(A+B)+P(C)-P((A+B)C)=$$
$$=P(A)+P(B)-P(AB)+P(C)-P(AC+BC)=$$

$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-(P(AC)+P(BC)-P(AC)(BC))=$
$=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)$,
jer je $(AC)(BC)=ABC$.

**1139.** $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=\frac{30}{90}+\frac{18}{9}-\frac{30}{90}\cdot\frac{18}{90}=\frac{7}{15}$.

**1140.** $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)=\frac{4}{9}$.

**1141.** $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}82$.

**1142.** $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+$
$+P(ABC)=0{,}888$.

**1143.** a) Ako se događaji $A$ i $B$ isključuju, onda je $B\bar{A}=B$. Tada je
$P(B\bar{A})=P(B)=\frac{1}{2}$;

b) Ako je $A\subseteq B$, tada je $B=A+B\bar{A}$, pa je $P(B)=P(A)+P(B\bar{A})\Rightarrow$
$\Rightarrow P(B\bar{A})=P(B)-P(A)=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$;

c) Pošto je $B=AB+\bar{A}B$, pri čemu se događaj $AB$ i $\bar{A}B$ međusobno isključuju, imamo da je $P(B)=P(AB)+P(\bar{A}B)\Rightarrow P(\bar{A}B)=$
$=\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$.

**1144.** a) $P(\bar{A})=1-P(A)=0{,}67$;

b) $P(A+B)=P(A)+P(B)=0{,}8$;

c) Događaj $AB$ je nemoguć, jer je $AB=\emptyset$, pa je i $P(AB)=0$;

d) Kako je prema de Morganovom obrascu $\bar{A}\bar{B}=\overline{A+B}$, onda je
$P(\bar{A}\bar{B})=P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-0{,}88=0{,}12$.

**1145.** a) $P(AB)=p_1\cdot p_2$; b) $P(\bar{A}\bar{B})=(1-p_1)(1-p_2)$;

c) $P(A\bar{B})=p_1(1-p_2)$; d) $P(\bar{A}B)=(1-p_1)p_2$;

e) $P(A+B)=1-P(\overline{A+B})=1-P(\bar{A}\cdot\bar{B})=1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})=$
$=1-(1-p_1)(1-p_2)$;

f) $P(\overline{A\cdot B})=1-P(AB)=1-P(A)\cdot P(B)=1-p_1\cdot p_2$.



**1146.** a) Verovatnoća da neki događaj $A$ uzastopno nastupi $n$ puta prema proizvodu verovatnoća je:
$P(A\cdot A\cdot A\ \ldots\ A)=P(A)\cdot P(A)\cdot P(A)\ \ldots\ P(A)=(P(A))^n$.

b) Suprotna verovatnoća događaja $A$ je
$P(\bar{A})=1-P(A)$,
pa je verovatnoća da događaj $A$ ne nastupi $n$ puta
$(P(\bar{A}))^n=(1-P(A))^n$.

c) Ako verovatnoću da će se događaj $A$ realizovati bar jedanput u $n$ pokušaja označimo sa $p$, tada je
$p=1-(1-P(A))^n$.

*Primedba.* Verovatnoća da se događaj $A$ realizuje bar jedanput u $n$ pokušaja znači da će se događaj $A$ realizovati ili jedanput ili dvaput ili triput itd. ili $n$ puta.

**1147.** Događaj $A$ je da bačena kocka pokaže broj 5, a njegova verovatnoća

$$P(A)=\frac{1}{6}.$$

Na osnovu rešenja prethodnog zadatka dobija se da je

$$\frac{2}{3}=1-\left(1-\frac{1}{6}\right)^n\Leftrightarrow\left(1-\frac{1}{6}\right)^n=1-\frac{2}{3}\Leftrightarrow\left(\frac{5}{6}\right)^n=\frac{1}{3}\Leftrightarrow n\log\frac{5}{6}=-\log 3$$

$$n=\frac{0{,}47712}{0{,}77815-0{,}69897}=6{,}02.$$

Dakle, potrebno je baciti 6 puta kocku da bi se pojavio jedanput broj 5 sa verovatnoćom $\frac{2}{3}$.

**1148.** $n=\dfrac{\log(1-0{,}5)}{\log\left(1-\frac{1}{6}\right)}=\dfrac{0{,}69897-1}{0{,}92082-1}=3{,}8\Rightarrow n=4$ bacanja.

**1149.** Verovatnoća da će se na obe kocke pojaviti isti broj 4 je $p=\frac{1}{36}$.

Verovatnoća da se u $n$ bacanja dve kocke bar jedanput na obe kocke pojavi isti broj 4, je

$$p=1-\left(1-\frac{1}{36}\right)^n.$$

Iz uslova da je verovatnoća 0,5 sledi da je

$$0{,}5=1-\left(\frac{35}{36}\right)^n \Leftrightarrow n=\frac{\log 0{,}5}{\log 35-\log 36}=24{,}6.$$

Dakle, treba odigrati 25 igara da verovatnoća bude 0,5.

**1150.** $P(A+B)=0{,}25.$

**1151.** $P(\overline{A+B})=1-P(A+B)=1-(P(A)+P(B)-P(AB))=0{,}333.$

**1152.** $P(A+B+C)=0{,}5898.$

**1153.** $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}6203.$

**1154.** Bela i crna ili dve crne.

**1155.** $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{12}.$

**1156.** $P(AB)=P(A)\cdot P_A(B)=\frac{8}{12}\cdot\frac{7}{11}=0{,}4242.$

**1157.** $P(9+\bar{9}\cdot 7)=P(9)+P(\bar{9}\cdot 7)=\frac{4}{36}+\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{27}.$

**1158.** $P(AB)=P(A)\cdot P(B)=0{,}56.$

**1159.** a) $P(ABC)=P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)=0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}85=0{,}612.$

b) $P(A+B+C)=1-P(\overline{A+B+C})=1-P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C})=$
$1-P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})=0{,}997.$

**1160.** $P(A_1\cdot A_2\cdot A_3\ \dots\ A_{10})=\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{1}{1024}\approx 0{,}001.$

**1161.** $P(\bar{A}\ \bar{B}\ \bar{C})=P(\bar{A})\cdot P(\bar{B})\cdot P(\bar{C})=(1-0{,}85)^3=0{,}003375.$

**1162.** $P(A)=1-P(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3)=1-0{,}6^3=0{,}784.$

**1163.** $P(A)=1-P(\bar{A}_1\ \bar{A}_2\ \bar{A}_3)=1-0{,}4^3=0{,}936.$

**1164.** $P(A)=1-(P(\bar{A}))^3=1-\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{91}{216}.$

**1165.** a) $P(A)=0{,}6698;$ b) $P(\bar{A})=0{,}3302.$



**1166.** a) $P(A)=(1-0{,}12)^{10}=0{,}88^{10}=0{,}2785;$

b) $P(\bar{A})=1-0{,}88^{10}=0{,}7215;$

c) $P(B)=0{,}12^{10}.$

**1167.** a) $P(A)=\frac{4}{21};$ b) $P(\bar{B})=\frac{6}{7};$ c) $P(C+D)=\frac{10}{21};$

d) $P(ABCD)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)\cdot P_{ABC}(D)=\frac{1}{91}.$

**1168.** a) $P(A)=\frac{2}{11};$ b) $P(B)=\frac{28}{33};$ c) $P(C+D)=\frac{9}{22};$

d) $P(ABC)=\frac{1}{22}.$

**1169.** Stepeni sa osnovom 2 su brojevi 4, 8, 16, 32, 64; za broj 3 su 9, 27, 81; stepeni osnove 4 i 8 su istovremeno i stepeni osnove 2; stepeni osnove 9 su istovremeno stepeni osnove 3; za 25 je 5, za 36 je 6, za 49 je 7 i za 100 je 10. Verovatnoća je

$$P(A)=\frac{12}{100}=0{,}12.$$

**1170.** $P(A)=\frac{2}{3}.$

**1171.** $$P(A)=\frac{\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}\cdot\binom{4}{1}}{\binom{52}{3}}=0{,}0029.$$

**1172.** a) $$P(A)=1-\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{3}{1}\cdot\binom{2}{1}}{\binom{10}{3}}=\frac{3}{4};$$

b) $$P(A)=\frac{\binom{5}{2}\binom{2}{1}+\binom{5}{1}\binom{3}{2}}{\binom{10}{3}}=\frac{7}{14}.$$

**1173.** a) $P(A)=\frac{8}{1000}=0{,}008;$ b) $P(B)=\frac{96}{1000}=0{,}096;$

c) $P(C)=\frac{384}{1000}=0{,}384.$

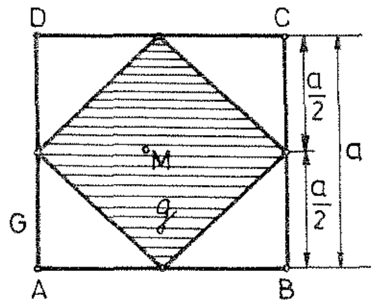
**1174.** $P(A)=\frac{500}{2000}=0{,}25.$

**1175.** *Primedba.* U nekoj oblasti $G$ sadrži se druga oblast ($g \subset G$, pri čemu $g$ i $G$ mogu biti duži, površine ili tela). Eksperiment se sastoji u tome da se na slučajan način bira tačka u oblasti $G$. Verovatnoća da slučajno izabrana tačka oblasti $G$ pripada i oblasti $g$ ($g \subset G$) je:

$$(1) \qquad P(A) \overset{\text{def.}}{=} \frac{\text{mera } g}{\text{mera } G}.$$

Ako se primeni definicija (1) na sl. 119 dobija se da je tražena verovatnoća

$$P(A)=\frac{\frac{a^2}{2}}{a^2}=0{,}5.$$



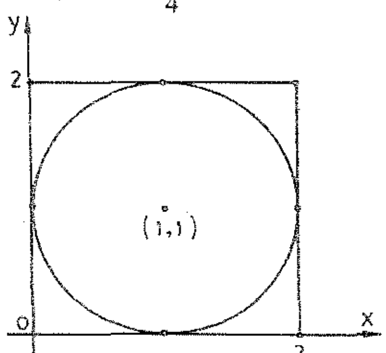

Sl. 119

**1176.** $P(A)=\frac{\pi}{4}.$

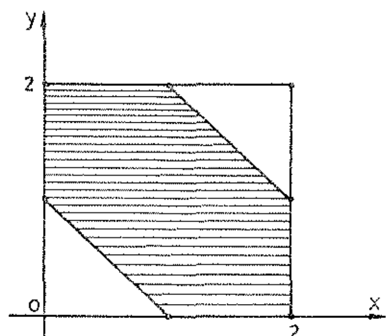
**1177.** a) Kako je površina kruga $\pi$, a površina kvadrata 4 (sl. 120) tražena verovatnoća je

$$P(A)=\frac{4-\pi}{4}=1-\frac{\pi}{4};$$

b) $P(A)=\frac{3}{4}$ (sl. 121);




Sl. 120




Sl. 121

c) $P(A)=0.$

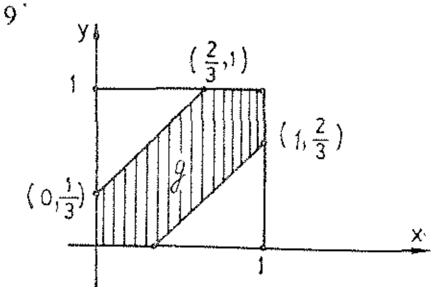


**1178.** $P(A)=\frac{\pi}{6}.$

**1179.** Ako se sa $x$ označi trenutak dolaska prve osobe, a sa $y$ trenutak dolaska druge osobe, onda će se osobe sresti ako je ispunjeno

$$|x-y| \leqslant \frac{1}{3}.$$

Na slici 122 šrafirana je oblast $g$. Tražena verovatnoća jednaka je $P(A)=\frac{5}{9}.$




Sl. 122

**1180.** Oblast $G$ čine sve tačke $(x, y)$, u ravni $xOy$, čije koordinate zadovoljavaju nejednakost $x+y<a$ (sl. 123).

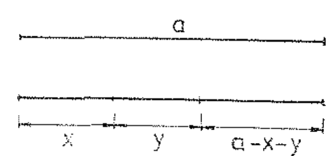
Povoljni slučajevi događaja da se od dobijene duži može konstruisati trougao, dobijaju se iz teoreme:

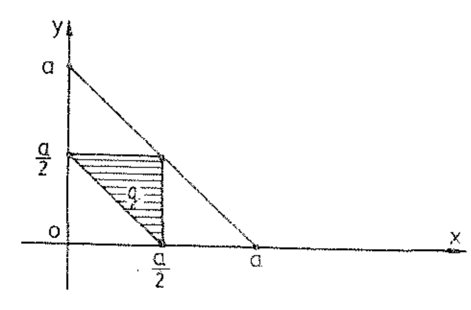
»Zbir dve stranice trougla veći je od treće stranice«. Odavde sledi:

$$x+y>a-x-y \Rightarrow x+y>\frac{a}{2},$$

$$x+(a-x-y)>y \Rightarrow y<\frac{a}{2},$$

$$y+(a-x-y)>x \Rightarrow x<\frac{a}{2}.$$




Sl. 123

Na osnovu slike 123 tražena verovatnoća je $P(A)=0{,}25$.

**1181.** $P(A)=0{,}413$.

**1182.** $P(A)=0{,}417$.

**1183.** Ovaj problem je poznat pod nazivom Bertrandov paradoks.

Prvo rešenje: Ako je fiksirana jedna krajnja tačka tetive $P(A)=\frac{1}{3}$.

Drugo rešenje: Ako je fiksiran pravac tetive, verovatnoća $P(A)=0{,}5$. Treće rešenje: Ako se zna položaj središta tetive, verovatnoća je $P(A)=0{,}25$. Rešenja su različita jer nije precizno definisano šta znači »slučajno izabrati tetivu«. To su u stvari tri različita zadatka.

**1184.** I način: Prostor elementarnih događaja da je bar jedan par petica jeste

$B=\{(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(1,5),(2,5),(3,5),(4,5),(5,5),(6,5)\}$.

Prostor elementarnih događaja parova koji daju zbir 7 je

$A=\{(5,2),(2,5)\}$.

Tražena verovatnoća je $P(A)=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$.

II način: Tražena verovatnoća događaja $A$, pod uslovom (pretpostavkom) da se događaj $B$ već realizovao, naziva se uslovna verovatnoća događaja $A$ u oznaci $P(A/B)$ i definiše se formulom

$$(1) \qquad P(A/B) \overset{\text{def.}}{=} \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

U datom primeru primenom (1) imamo

$$P(A/B)=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{12}{36}}=\frac{1}{6}.$$

**1185.** Događaj $A$: broj je deljiv sa 3: $A=\{3,6\}$.

Događaj $B$: broj je paran: $B=\{2,4,6\}$.

Primenom obrasca (1) za uslovnu verovatnoću dobija se

$$P(A/B)=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}}=\frac{1}{3}.$$



**1186.** I način: $P(A/B)=\dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}}=\dfrac{2}{91}$.

II način: $P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{5}{15}\cdot\frac{4}{14}\cdot\frac{3}{13}=\frac{2}{91}$.

**1187.** Broj lampi proizvedenih u pogonu $P_1$: $\frac{30}{100}\cdot 1000=300$. Neispravnih u pogonu $P_1$ ima $\frac{10}{100}\cdot 300=30$ lampi.

Verovatnoća da je lampa proizvedena u $P_1$ je

$P(A)=\frac{30}{1000}=0{,}003$.

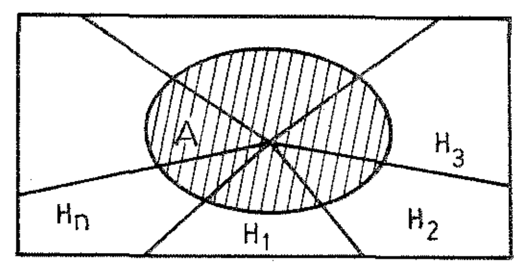
Broj neispravnih lampi iz $P_2$ je $\frac{15}{100}\cdot\frac{70\,000}{100}=105$.

$P(B)=\frac{135}{1000}=0{,}135$.

Verovatnoća da je neispravna lampa proizvedena u $P_1$ je

$P(A/B)=\frac{0{,}03}{0{,}135}=\frac{30}{135}=\frac{2}{9}$.

**1188.** Na osnovu pretpostavke imamo da je $A=A(H_1+H_2+\ldots+H_n)$ (sl. 124)




Sl. 124

Primenom distributivnog zakona $\cap$ u odnosu na $\cup$ dobija se $A=AH_1+AH_2+AH_3+\ldots+AH_n$.

Odavde, za verovatnoću događaja $A$ se dobija:

$P(A)=P(AH_1)+P(AH_2)+P(AH_3)+\ldots+P(AH_n)$.

Ako se uzme u obzir proizvod verovatnoća, imamo da je
$P(A)=P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)+\ldots+$
$P(H_n)P_{H_n}(A)$.
Kraj dokaza.

*Primedba* 1. Obrazac ($F$) se često naziva formula totalne verovatnoće.

**1189.** Uočimo sledeće događaje: proizvod neispravan događaj $A$, proizvod I pogona neispravan događaj $H_1$, proizvod II pogona neispravan događaj $H_2$ i proizvod III pogona neispravan događaj $H_3$. Tada je

$$P(H_1)=\frac{20}{100}=0{,}2;\ P(H_2)=\frac{40}{100}=0{,}4 \text{ i } P(H_3)=\frac{40}{100}=0{,}4.$$

Dalje je $P_{H_1}(A)=0{,}01$, $P_{H_2}(A)=0{,}02$ i $P_{H_3}(A)=0{,}04$.

Primenom formule ($F$) u ovom primeru dobija se

$$P(A)=P(H_1)\ P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)+P(H_3)\cdot P_{H_3}(A)=$$
$$=0{,}2\cdot0{,}01+0{,}4\cdot0{,}02+0{,}4\cdot0{,}04=0{,}026.$$

**1090.** Neka je događaj $A$ da akumulator traje duže od 5 godina, a događaj $H_1$, $H_2$, $H_3$ i $H_4$ hipoteze da je izrađen u I, II, III ili IV fabrici. Tada je

$$P(H_1)=\frac{500}{4000}=0{,}125;\quad P(H_2)=\frac{1050}{4000}=0{,}475.$$

Dalje je

$$P_{H_1}(A)=0{,}20,\ P_{H_2}(A)=0{,}25,\ P_{H_3}(A)=0{,}30 \text{ i } P_{H_4}(A)=0{,}10.$$

Tražena verovatnoća je

$$P(A)=P(H_1)\ P_{H_1}(A)+P(H_2)\ P_{H_2}(A)+P(H_3)\ P_{H_3}(A)+$$
$$+P(H_4)\ P_{H_4}(A)$$
$$=0{,}125\cdot0{,}20+0{,}2625+0{,}25+0{,}1375\cdot0{,}30+0{,}475\cdot0{,}10=$$
$$=0{,}025+0{,}066+0{,}041+0{,}048=0{,}179.$$

**1191.** $P(A)=0{,}2\cdot0{,}03+0{,}3\cdot0{,}08+0{,}3\cdot0{,}06+0{,}2\cdot0{,}05=0{,}058.$

**1192.** Odgovarajuće verovatnoće su:

$$P(H_1)=\frac{250}{2000}=0{,}175;\ P(H_2)=\frac{525}{2000}=0{,}2625;$$
$$P(H_3)=\frac{275}{2000}=0{,}1375;\ P(H_4)=\frac{950}{2000}=0{,}475.$$



Dobija se da je tražena verovatnoća
$P(A)=0{,}175\cdot0{,}15+0{,}2625\cdot0{,}30+0{,}1375\cdot0{,}20+0{,}475\cdot0{,}1=0{,}1725.$

**1193.** $P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=0{,}5\cdot0{,}9+0{,}5\cdot0{,}8=0{,}85.$

**1194.** $P(A)=P(H_1)\ P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=\frac{9}{10}\cdot\frac{19}{21}+\frac{1}{10}\cdot\frac{18}{21}=0{,}9.$

**1195.** $P(A)=\frac{15}{20}\cdot\frac{1}{3}+\frac{24}{30}\cdot\frac{1}{3}+\frac{6}{10}\cdot\frac{1}{3}=\frac{43}{60}.$

**1196.** $P(A)=0{,}4\cdot0{,}9+0{,}35\cdot0{,}8+0{,}25\cdot0{,}7=0{,}815.$

**1197.** Ako se primeni definicija uslovne verovatnoće dobija se

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_iA)}{P(A)}.$$

Na osnovu primene proizvoda verovatnoće imamo

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\ P_{H_i}(A)}{P(A)}.$$

Ako se uzme u obzir obrazac ($F$) totalne verovatnoće dobija se da je

$$P_A(H_i)=\frac{P(H_i)\ P_{H_i}(A)}{P(H_1)\ P_{H_1}(A)+P(H_2)\ P_{H_2}(A)+\ldots+P(H_n)\ P_{H_n}(A)}.$$

Kraj dokaza.

*Primedba* 1. Formula ($B$) poznata je u teoriji verovatnoće kao Bajesova formula.

**1198.** Neka je $A$ događaj da je izvučena crna kuglica. Imamo dve hipoteze: $H_1$ – da je izabrana prva posuda, $H_2$ – da je izabrana druga posuda. Tada je $P(H_1)=\frac{1}{2}$ i $P(H_2)=\frac{1}{2}$. Verovatnoća da je izvučena crna kuglica i iz prve posude je $P_{H_1}(A)=\frac{6}{14}$, a verovatnoća da je izvučena crna kuglica iz druge posude $P_{H_2}(A)=\frac{4}{14}$.

Verovatnoća da je izvučena kuglica crna, na osnovu ($F$),

$$P(A)=\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{14}+\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{14}=\frac{5}{14}.$$

a) Verovatnoća da je izvučena crna kuglica iz prve posude, na osnovu formule ($B$):

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{3}{5}.$$

b) Verovatnoća da je izvučena crna kuglica iz druge posude:

$$P_A(H_2)=\frac{P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}}{\frac{5}{14}}=\frac{2}{5}.$$

**1199.** Neka je $A$ događaj da je predmet odličnog kvaliteta. Imamo dve hipoteze: $H_1$ – predmet proizveden u prvom automatu i $H_2$ – predmet proizveden u drugom automatu. Kako je proizvodnja u prvom automatu dva puta veća, tada je

$$P(H_1)=\frac{2}{3},\ \text{a}\ P(H_2)=\frac{1}{3}.$$

Uslovna verovatnoća da je predmet odličnog kvaliteta i proizveden u prvom automatu je $P_{H_1}(A)=0{,}6$, a da je proizveden u drugom $P_{H_2}(A)=0{,}84$.

Verovatnoća da je slučajno izabrani predmet odličnog kvaliteta:

$$P(A)=P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)+P(H_2)\cdot P_{H_2}(A)=$$
$$=\frac{2}{3}\cdot 0{,}6+\frac{1}{3}\cdot 0{,}84=0{,}68.$$

Tražena verovatnoća po Bajesovoj formuli

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot 0{,}6}{0{,}68}=\frac{10}{17}=0{,}588.$$

**1200.** a) $P(A)=\frac{1}{3}\cdot 0{,}75+\frac{1}{3}\cdot 0{,}85+\frac{1}{3}\cdot 0{,}05=0{,}55;$

b) $P_A(H_1)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}75}{0{,}55}=0{,}45,\ P_A(H_2)=\dfrac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}85}{0{,}55}=0{,}52,$

$$P_A(H_3)=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0{,}05}{0{,}55}=0{,}03.$$



**1201.** $P_A(H_1)=\dfrac{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}}{\frac{25}{100}\cdot\frac{5}{100}+\frac{35}{100}\cdot\frac{4}{100}+\frac{46}{100}\cdot\frac{2}{100}}=\dfrac{25}{69};$

$$P_A(H_2)=\frac{28}{69},\ P_A(H_3)=\frac{16}{69}.$$

**1202.** Neka je $H_1$ događaj premeštanja crne kuglice (iz prve u drugu posudu), $H_2$ događaj premeštanja kuglice (iz prve u drugu posudu) koja je bela. Događaj $A$ znači da je izvučena bela kuglica. Tada je

$$P(H_1)=\frac{1}{3},\ \text{a}\ P(H_2)=\frac{2}{3}.$$

Verovatnoća da ćemo iz druge posude izvući belu kuglicu, ako je premeštena crna kuglica, je

$$P_{H_1}(A)=\frac{1}{7}.$$

Verovatnoća da ćemo iz druge posude izvući belu, ako je premeštena kuglica bila bela, je

$$P_{H_2}(A)=\frac{2}{7}.$$

Primenom Bajesove formule verovatnoća da je premeštena kuglica bila crna je

$$P_A(H_1)=\frac{P(H_1)\cdot P_{H_1}(A)}{P(H_1)P_{H_1}(A)+P(H_2)P_{H_2}(A)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}}=$$
$$=\frac{\frac{1}{21}}{\frac{1}{21}+\frac{4}{21}}=\frac{1}{5}=0{,}2.$$

**1203.** Imamo tri hipoteze: $H_1$, $H_2$, $H_3$, tj. da je izvlačenje iz prve, druge, odnosno treće posude. Događaj $A$ je da su izvučene bela i crvena kuglica. Izbor bilo koje posude jednako je moguć, pa je

$P(H_1)=P(H_2)=P(H_3)=\frac{1}{3}$. Dalje je

$$P_{H_1}(A)=\frac{3}{\binom{6}{2}}=\frac{1}{5},\ P_{H_2}(A)=\frac{2}{\binom{4}{2}}=\frac{1}{3};\ P_{H_3}(A)=\frac{12}{\binom{12}{2}}=\frac{2}{11},$$

$$P_A(H_1)=\frac{33}{118}=0{,}28;\ P_A(H_2)=\frac{55}{118}=0{,}466;\ P_A(H_3)=\frac{30}{118}=0{,}254.$$

**1204.** *Primedba.* Verovatnoća složenog događaja, koji se sastoji u tome da se u $n$ nezavisnih ogleda događaj $A$ realizuje $k$ puta, sa verovatnoćom $p$ $(0<p<1)$, a ne realizuje $n-k$ puta, određuje se po formuli

$$(1)\qquad P_{n,k,p}(k)=\binom{n}{k}p^k q^{n-k},\ \text{gde je } q=1-p.$$

Kako je $n=8$, $k=5$, $p=0{,}6$, $q=1-0{,}6=0{,}4$ primenom formule (1),

$$P_8(5)=\binom{8}{5}\cdot(0{,}6)^5\cdot(0{,}4)^3\approx 0{,}28.$$

**1205.** $P_4(7)=\binom{7}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\approx 0{,}256.$

**1206.** $P_{48}(100)=\binom{100}{48}\left(\frac{1}{2}\right)^{100-48}\left(\frac{1}{2}\right)^{48}=\binom{100}{48}2^{-100}.$

**1207.** $P(47 \text{ ili } 48)=\binom{100}{47}\left(\frac{1}{3}\right)^{53}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{47}+\binom{100}{48}\left(\frac{1}{3}\right)^{52}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{48}.$

**1208.** a) $P_5(2)=\binom{5}{2}\cdot 0{,}52^2\cdot 0{,}48^3\approx 0{,}299;$

b) $$P(A)=\binom{5}{0}q^5+\binom{5}{1}q^4p+\binom{5}{2}p^2q^3+\binom{5}{3}p^3q^2+$$
$$+\binom{5}{4}p^4q+\binom{5}{5}p^5=$$
$$=0{,}48^5+5\cdot 0{,}52\cdot 0{,}48^4+10\cdot 0{,}52^2\cdot 0{,}48^3+10\cdot 0{,}52^3\cdot 0{,}48^2+$$
$$+5\cdot 0{,}52^4\cdot 0{,}48+0{,}52^5=0{,}942.$$

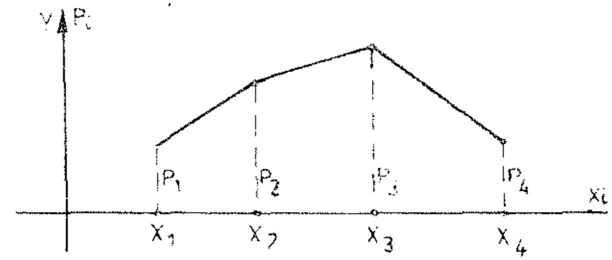
**1209.** *Primedba* 1. Zakon raspodele verovatnoća slučajne promenljive $X$ je pravilo po kome svakoj vrednosti slučajne promenljive pridružujemo odgovarajuću verovatnoću.



*Primedba* 2. Zakon raspodele se prikazuje šematski kao preslikavanje.

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & & p_n\end{pmatrix}\quad (p_1+p_2+\dots+p_n=1).$$

*Primedba* 3. Zakon raspodele može se prikazati kao skup uređenih parova $\{(x_i, p_i)\ i=1, 2 \dots n\}$ ili grafički (sl. 125).




**Sl. 125**

Pri dva bacanja novčića grb se može pojaviti ili 2 puta, ili 1 put ili 0 puta. Tada slučajna veličina $X$ uzima sledeće vrednosti: $x_1=2$, $x_2=1$ i $x_3=0$. Odgovarajuće verovatnoće po Bernulijevoj formuli su:

$$P_2(2)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25;\ P_2(1)=\binom{2}{1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=0{,}5;$$

$$P_2(0)=\binom{2}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2=0{,}25.$$

Zakon raspodele je:

$$X=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0{,}25 & 0{,}5 & 0{,}25\end{pmatrix}.$$

**1210.** Analogno prethodnom primeru dobija se

$$X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0{,}064 & 0{,}288 & 0{,}432 & 0{,}216\end{pmatrix}.$$

**1211.** $X=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ \frac{1}{216} & \frac{15}{216} & \frac{75}{216} & \frac{125}{216}\end{pmatrix}.$

**1212.** $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}.$

**1213.** $p_3=1-(p_1+p_2)=0{,}45.$

**1214.** $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & \dots & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \dots & \frac{1}{36} \end{pmatrix}.$

**1215.** $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0{,}8 & 0{,}16 & 0{,}032 & 0{,}08 \end{pmatrix}.$

$P(x=2)=(1-0{,}8)\,0{,}8=0{,}16$; $P(x=3)=(1-0{,}8)^2\cdot 0{,}8=0{,}032$;
$P(x=4)=1-(0{,}8+0{,}16+0{,}032)=0{,}008.$

**1216.** *Napomena.* Ako je $X$ diskretna slučajna promenljiva, a njena raspodela verovatnoća jednaka je:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} \quad (p_1+p_2+p_3+\dots+p_n=1),$$

onda je matematičko očekivanje promenljive $X$ dato formulom

$$(A) \qquad M(X)=x_1p_1+x_2p_2+x_3p_3+\dots+x_np_n=\sum_{i=1}^{n} x_ip_i.$$

Matematičko očekivanje za datu raspodelu verovatnoća je
$M(X)=3\cdot 0{,}1+5\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}3=0{,}3+3{,}0+0{,}6=3{,}9.$

**1217.** $M(X)=2{,}6.$

**1218.** Slučajna veličina $X$, broj pojava događaja $A$ u jednom ogledu uzima vrednost $x_1=1$ i $x_2=0$ sa verovatnoćama $p_1=p$ i $p_2=q=1-p$. Traženo matematičko očekivanje jednako je
$M(X)=1\cdot p+0\cdot q=p.$

*Primedba*: Matematičko očekivanje broja realizacija događaja, u jednom ogledu, jednako je verovatnoći događaja.

**1219.** Ako je konstanta $C$ diskretna slučajna veličina koja uzima samo jednu vrednost $C$ sa verovatnoćom $p$, tada je

$$M(C)=C\cdot 1=C.$$



**1220.** Neka je slučajna veličina $X$ data zakonom raspodele verovatnoće

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Zakon raspodele slučajne veličine $CX$ je

$$CX=\begin{pmatrix} Cx_1 & Cx_2 & \dots & Cx_n \\ p_1 & p_2 & \dots & p_n \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje slučajne veličine $CX$ jednako je

$$\begin{aligned} M(CX)&=Cx_1p_1+Cx_2p_2+\dots+Cx_np_n \\ &=C(x_1p_1+x_2p_2+\dots+x_np_n)=CM(X). \end{aligned}$$

**1221.** Neka su nezavisne slučajne veličine $X$ i $Y$ date zakonima raspodele verovatnoća:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix}, \quad Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ p' & p'' \end{pmatrix}.$$

Zakon raspodele slučajne veličine $XY$:

$$XY=\begin{pmatrix} x_1y_1 & x_2y_1 & x_1y_2 & x_2y_2 \\ p_1p' & p_2p' & p_1p'' & p_2p'' \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje slučajne veličine $XY$:

$$\begin{aligned} M(XY)&=x_1y_1\cdot p_1p'+x_2y_1\cdot p_2p'+x_1y_2\cdot p_1p''+x_2y_2p_2p'' \\ &=y_1p'(x_1p_1+x_2p_2)+y_2p''(x_1p_1+x_2p_2) \\ &=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1p'+y_2p'')=M(X)\cdot M(Y). \end{aligned}$$

**1222.** Ako su slučajne veličine $X$ i $Y$ date zakonima raspodele:

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} \text{ i } Y=\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix},$$

ako se uoče vrednosti slučajne veličine $X+Y$ (za sve moguće vrednosti $X$ dodaju se odgovarajuće vrednosti $Y$) dobija se zakon raspodele

$$X+Y=\begin{pmatrix} x_1+y_1 & x_1+y_2 & x_2+y_1 & x_2+y_2 \\ p_{11} & p_{12} & p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},$$

gde su $p_{11}$, $p_{12}$, $p_{21}$ i $p_{22}$ odgovarajuće verovatnoće. Matematičko očekivanje veličine $X+Y$ je

$$\begin{aligned} M(X+Y)&=(x_1+y_2)p_{11}+(x_1+y_2)p_{12}+(x_2+y_1)p_{21}+(x_2+y_2)p_{22} \\ &=x_1(p_{11}+p_{12})+x_2(p_{21}+p_{22})+y_1(p_{11}+p_{21})+ \\ &\quad +y_2(p_{12}+p_{22}). \end{aligned}$$

Dokažimo da je $p_{11}+p_{12}=p_1$. Događaj, koji se sastoji u tome da promenljiva $X$ uzme vrednost $x_1$ (verovatnoća tog događaja je $p_1$), povlači za sobom događaj koji se sastoji u tome da $X+Y$ uzme vrednost $x_1+y_1$ ili $x_1+y_2$ (verovatnoća tog događaja po

teoremi o zbiru verovatnoća jednaka je $p_{11}+p_{12}$) i obratno. Odakle sledi da je $p_{11}+p_{12}=p_1$.
Analogno, sledi da je

$p_{21}+p_{22}=p_2$, $p_{11}+p_{21}=p'_1$ i $p_{12}+p_{22}=p'_2$.

Tada formula (1) postaje

$$M(X+Y)=(x_1p_1+x_2p_2)+(y_1p'_1+y_2p'_2)$$
$$=M(X)+M(Y).$$

*Primedba.* Matematičko očekivanje zbira nekoliko slučajnih veličina jednako je zbiru matematičkih očekivanja njihovih sabiraka:

$$M(X+Y+Z)=M(X+Y)+(Z)=M(X+Y)+M(Z)$$
$$=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

**1223.** a) $M(XY)=1{,}53$; b) $M(X+Y)=2{,}65$.

**1224.** $X=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$, $M(X)=0\cdot\frac{1}{8}+1\cdot\frac{3}{8}+2\cdot\frac{3}{8}+3\cdot\frac{1}{8}=1{,}5$.

**1225.** $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$,

$M(X)=7$.

*Primedba* 1. Medijana $Me$ je ocena centra rasturanja koja zadovoljava $P(X<Me)=P(X>Me)=0{,}5$.

U zadatku 1225, gde je raspodela verovatnoća simetrična, medijana $Me=7$.

*Primedba* 2. Moda (ili mod) $Mo$ je najverovatnija vrednost slučajne promenljive $X$. U zadatku 1225 $Mo=7$.

*Primedba* 3. Pri simetričnim raspodelama verovatnoća, kao što je u zadatku 1225 $M(X)$, $Me$ i $Mo$ se poklapaju.

*Primedba* 4. Matematičko očekivanje, medijana i moda karakterišu centar rasturanja.

**1226.** *Primedba* 1. Disperzija slučajne promenljive

$$X=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ p_1 & p_2 & \ldots & p_n \end{pmatrix}$$



naziva se matematičko očekivanje kvadrata odstupanja slučajne promenljive $X$ od njenog matematičkog očekivanja:

(1) $$D(X)=M(x_i-M(X))^2=(x_1-M(X))^2p_1+(x_2-M(X))^2p_2+$$
$$+\ldots+(x_n-M(X))^2p_n=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2p_i:$$

*Primedba* 2. Pozitivan kvadratni koren iz disperzije

(2) $$\sigma_x=\sqrt{D(X)}$$

naziva se standardno odstupanje i predstavlja meru rasturanja vrednosti slučajno promenljive $X$ oko matematičkog očekivanja, izraženu istim jedinicama kojima su izražene i vrednosti slučajne promenljive.

*Primedba* 3. Da bi se rasturanje različitih rasporeda moglo upoređivati, uvedena je relativna mera rasturanja:

(3) $$K_v=\frac{\sigma_x}{M(X)},$$

koja se zove koeficijent korelacije.
Matematičko očekivanje slučajne veličine za datu raspodelu je

$M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}6+5\cdot 0{,}3=3{,}5$.

Zakon raspodele slučajne veličine $X^2$:

$$X^2=\begin{pmatrix} 4 & 9 & 25 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Matematičko očekivanje $M(X^2)$ je

$M(X^2)=4\cdot 0{,}1+9\cdot 0{,}6+25\cdot 0{,}3=13{,}3$.

Tražena disperzija je

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=13{,}3-3{,}5^2=1{,}05$.

**1227.** Pođimo od definicije disperzije:

$$D(X)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2p_i=\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-2x_iM(X)+(M(X))^2p_i=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i-2M(X)\sum_{i=1}^{n}x_ip_i+(M(X))^2\sum_{i=1}^{n}p_i.$$

Pošto je $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$, $\sum_{i=1}^{n}x_ip_i=M(X)$ i $\sum_{i=1}^{n}x_i^2p_i=M(X^2)$,
dobija se da je

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$.

**1228.** $X=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$;

$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 21=3{,}5;$

$M(X^2)=1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+9\cdot\frac{1}{6}+16\cdot\frac{1}{6}+25\cdot\frac{1}{6}+36\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\cdot 91=15{,}17;$

$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=3{,}82.$

**1229.** $D(X)=67{,}6404.$

**1230.** a) $D(C)=M(C-M(C))^2=M(C-C)^2=M(O)=0;$

b) $D(CX)=M(CX-M(CX))^2=M(CX-CM(X))^2=$
$=M(C^2(X-M(X))^2=C^2M(C-M(X))=C^2D(X);$

c) $D(X+Y)=M(X+Y)^2-(M(X+Y))^2=$
$=M(X^2+2XY+Y^2)-(M(X)+M(Y))^2=$
$=M(X^2)+2M(X)\,M(Y)+M(Y)^2-(M(X)^2-2M\,X\cdot M(Y)-(M(Y))^2$
$=(M(X^2)-(M(X))^2+(M(Y^2)-(M(Y))^2=D(X)+D(Y);$

d) $D(X+Y+Z)=D(X+(Y+Z))=D(X)+D(Y+Z)=$
$=D(X)+D(Y)+D(Z);$

e) $D(C+X)=D(C)+D(X)=0+D(X)=D(X);$

f) $D(X-Y)=D(X+(-Y))=D(X)+D(-Y)=$
$=D(X)+(-1)^2D(Y)=D(X)+D(Y).$

**1231.** a) Na osnovu formule pod f) prethodnog zadatka dobija se:
$D(X-1)=D(X)+D(1)=5+0=5,$ jer je $D(C)=0;$

b) $D(2X)=2^2D(X)=4\cdot 5=20 \quad (D(CX))=C^2D(X);$

c) $D(-3X+6)=D(-3X)+D(6)=(-3)^2\cdot D(X)+0=45.$

**1232.** $M(X)=C\cdot 0{,}5+(-C)\cdot 0{,}5=0,$
$M(X^2)=0{,}5\cdot C^2+0{,}5\cdot(C^2)=C^2,$
$D(X)=M(X^2)-(M(X))^2=C^2-0^2=C^2.$



**1233.** Iz formule $D(X)=M(X^2)-(M(X))^2$ dobija se da je
$M(X^2)=0{,}24+1{,}4^2=2{,}2.$
Tako je $p_1=0{,}6$, tada je $p_2=1-0{,}6=0{,}4.$
Iz sistema
$0{,}6\,x_1+0{,}4\,x_2=1{,}4 \ \wedge\ 0{,}6\,x_1^2+0{,}4\,x_2^2=2{,}2$
dobija se da je $x_1=1$ i $x_2=2$ $(x_2>x_1)$, pa je
$X=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0{,}6 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$

**1234.** $x_1=2,\quad x_2=3.$

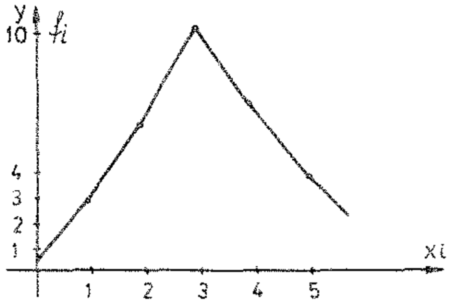
**1235.** $X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0{,}1 & 0{,}6 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$

## 7.2. Matematička statistika

**1236.** Raspodela frekvencija po vrednostima obeležja data je u tabeli:

| Ocene iz matematike $x_i$ | Skupljanje podataka | Frekvencije $f_i$ | Relativne frekvencije $f_{r_i}=\frac{f_i}{n}$ |
|---|---|---|---|
| $x_1=1$ | ||| | $f_1=3$ | $f_{r_1}=0{,}10$ |
| $x_2=2$ | ~~||||~~ | | $f_2=6$ | $f_{r_2}=0{,}20$ |
| $x_3=3$ | ~~||||~~ ~~||||~~ | $f_3=10$ | $f_{r_3}=0{,}33$ |
| $x_4=4$ | ~~||||~~ || | $f_4=7$ | $f_{r_4}=0{,}23$ |
| $x_5=5$ | |||| | $f_5=4$ | $f_{r_5}=0{,}13$ |
| Ukupno | | $n=30$ | 1 |

Poligon raspodele frekvencija određen je u koordinatnoj ravni tačkama $(x_1,\ f_1)$, tj. (1, 3), (2, 6), (3, 10), (4, 7), (5, 4) i prikazan je na sl. 126.




Sl. 126

Vrednost obeležja kojoj odgovara najveća frekvencija naziva se **modalna vrednost** ili, kraće **moda** i obeležava se sa $Mo$. U ovom slučaju $Mo=3$.

**1237.** Kumulativne relativne frekvencije i kumulativna raspodela relativnih frekvencija prikazane su tabelom i grafikonom, sl. 127.

| Ocene iz matematike $x_1$ | Relativna frekvencija $f_{r_i}$ | Kumulativne relativne frekvencije $f_{r_i}(k)$ |
|---|---|---|
| 1 | 0,10 | $f_{r_1}(k)=0{,}10$ |
| 2 | 0,20 | $f_{r_2}(k)=0{,}10+0{,}20=0{,}30$ |
| 3 | 0,33 | $f_{r_3}(k)=0{,}30+0{,}33=0{,}63$ |
| 4 | 0,23 | $f_{r_4}(k)=0{,}63+0{,}23=0{,}86$ |
| 5 | 0,13 | $f_{r_5}(k)=0{,}86+0{,}13=0{,}99$ |

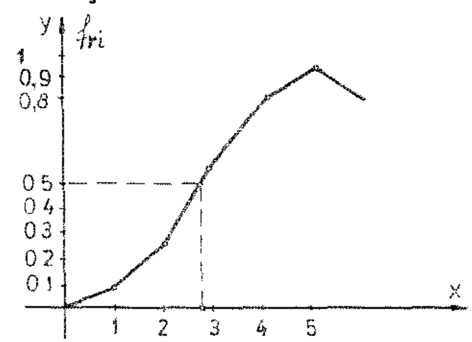
Vrednost obeležja $X$, koja raspodelu frekvencija deli na dva jednaka dela, naziva se **medijana** i obeležava se sa $Me$. U našem primeru $Me\approx 2{,}6$.

**1238.** $\bar{x}=4{,}75$.

**1239.** $K\approx 8{,}81$.

**1240.** $G=27$.

**1241.** $H\approx 5{,}77$.




Sl. 127



**1242.** Poređajmo najpre sve date brojeve po veličini. Medijana je jednaka srednjem članu, ako ih je neparan broj ili aritmetičkoj sredini srednjih članova, ako ih je paran broj.

a) 6, 7, 7, 8, 10, 12, 13, 14; $Me=\dfrac{8+10}{2}=9$.

b) 15, 17, 19, 19, 28, 29, 30, 31, 39; $Me=28$.

**1243.** Da bi se našla moda jednog skupa podataka, treba te podatke poređati u vrstu i uočiti onaj broj koji ima najveću učestalost.

a) $Mo=8$; b) Nema modu.

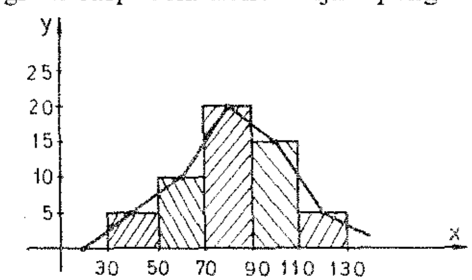
**1244.** $\bar{X}=4{,}8$; $G\approx 4{,}28$; $H\approx 3{,}77$; $K\approx 5{,}25$.

**1245.** a) $Mo=21$; $Me=21$; $\bar{x}\approx 21{,}15$; b) $Mo=37$; $\bar{x}\approx 38{,}36$.

**1246.** Numeričko obeležje $x$ ovde označava brzinu automobila. Varijacioni razlomak jednak je $R=X_{\max}-X_{\min}=130-30=100$. Broj klasa $k$ može se približno odrediti iz formule $k\approx\sqrt{n}$, gde je $n$ broj elemenata uzoraka. Prema formuli $k\approx\sqrt{50}\approx 7$, trebalo bi izabrati oko 7 klasa, ali je varijacioni razlomak dužine 100 deljiv sa 5, pa zato biramo 5 klasa.
Raspodela frekvencije po klasama data je tabelom:

| Klase | Sredina klase $x_i$ | Broj podataka po klasama | Frekvencije |
|---|---|---|---|
| 30 – 50 | $x_1=40$ | \|\|\| | 3 |
| 50 – 70 | $x_2=60$ | \|\|\|\| \|\|\|\| | 9 |
| 70 – 90 | $x_3=80$ | \|\|\|\| \|\|\|\| \|\|\|\| \|\|\|\| \| | 21 |
| 90 – 110 | $x_4=100$ | \|\|\|\| \|\|\|\| \|\|\| | 13 |
| 110 – 130 | $x_5=120$ | \|\|\|\| | 4 |
| Ukupno | | | $n=50$ |

Na sl. 128 prikazan je histogram raspodela frekvencija i poligon raspodela frekvencija.

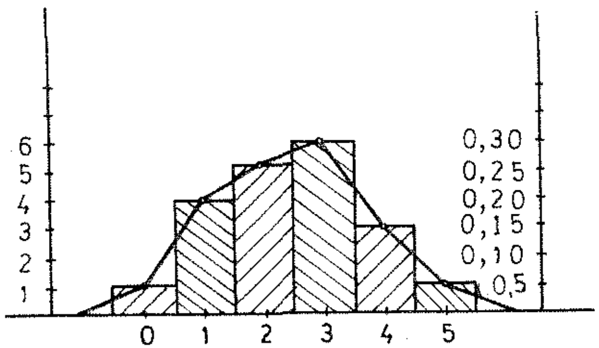



Sl. 128

**1247.** Odredimo najpre relativne frekvencije $f_{r_i}$. Primenom obrasca $f_{r_i}=\frac{f_i}{n}$ dobijamo redom odgovarajuće relativne frekvencije.

| Broj grbova $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Relativna frekvencija $f_{r_i}$ | 0,05 | 0,2 | 0,25 | 0,3 | 0,15 | 0,05 |

Kako se poligoni i histogrami apsolutne frekvencije i relativne razlikuju samo po razmeri na ordinatnoj osi, često se rezultati prikazuju na samo jednoj slici, kao što je to urađeno na sl. 129.



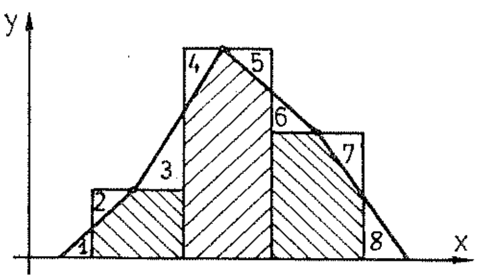
Sl. 129

**1249.** a) Apsolutne frekvencije datih obeležja date su u drugoj koloni navedene tablice;

b) Relativne frekvencije su (na tri decimale tačnosti):
1) 0,028; 2) 0,017; 3) 0,016; 4) 0,020; 5) 0,040;
6) 0,082; 7) 0,096; 8) 0,086; 9) 0,071; 10) 0,099;
11) 0,138; 12) 0,115; 13) 0,082; 14) 0,085; 15) 0,018.

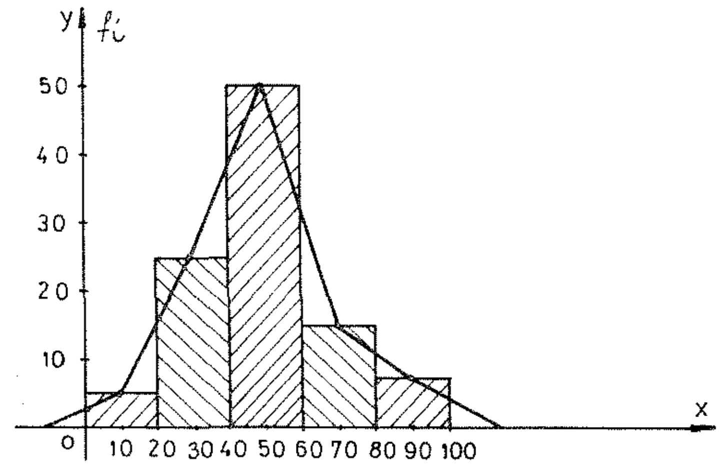
**1250.** Uputstvo. Dovoljno je pokazati da su površine označene brojevima 1 i 2 jednake, zatim 3 i 4, itd. (videti sl. 130).

Sl. 130






**1251.** Na slici 131 prikazan je histogram raspodele frekvencija (osenčeni pravougaonici)



Sl. 131

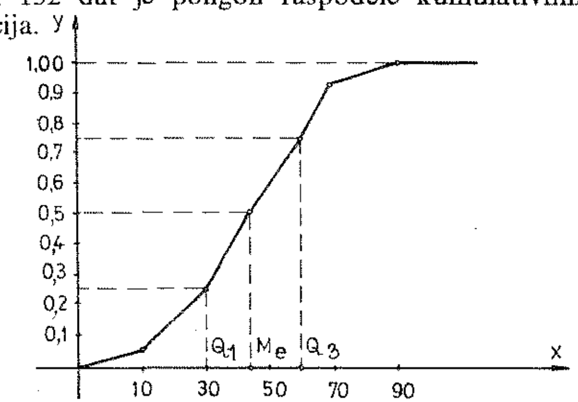
Spajanjem sredina gornjih stranica pravougaonika, koji čine histogram raspodele, dobija se poligon raspodele frekvencija.

Relativne frekvencije su:

$$f_{r_1}=\frac{4}{100}=0{,}04; \qquad f_{r_2}=\frac{25}{100}=0{,}25; \qquad f_{r_3}=\frac{50}{100}=0{,}5;$$

$$f_{r_4}=\frac{15}{100}=0{,}15; \qquad f_{r_6}=\frac{6}{100}=0{,}06.$$

Na slici 132 dat je poligon raspodele kumulativnih relativnih frekvencija.



Sl. 132

Sa slike se vidi da 50% takmičara ima do 50 poena. ($Q_1$ deli raspodelu 25% : 75% i naziva se prvi kvartal. $Q_3$ deli raspodelu 75% : 25% i naziva se treći kvartal. *Me*-medijana se naziva drugi kvartal.)

*Primedba* 1. Vrednost obeležja $x$, koja raspodelu deli na dva jednaka dela, naziva se medijana.

*Primedba* 2. Ako su podaci grupisani klasama širine $d$, onda se medijana računa prema obrascu:

$$Me = L + d\,\frac{\frac{n}{2} - (f_1 + f_2 + \ldots + f_r)}{f_{r+1}}, \tag{1}$$

gde je $L$ – donja granica klase u kojoj se nalazi medijana, $d$ – širina klase, $f_{r+1}$ — frekvencija klase u kojoj se nalazi medijana, a $f_1 + f_2 + \ldots + f_r$ – kumulativni zbir frekvencija po klasama, koje prethode klasi sa medijanom. U datom primeru imamo

$$Me = 40 + 20 \cdot \frac{50 - (4 + 25)}{50} = 48{,}4\,.$$

*Primedba* 3. Moda je najfrekventnija vrednost obeležja. Za modu se bira ona vrednost koja ima najveću frekvenciju. Ako su podaci grupisani po klasama širine $d$, ona se određuje obrascem

$$Mo = L + d\,\frac{D_1}{D_1 + D_2}, \tag{2}$$

gde je $L$ – donja granica modalne klase, $d$ – širina klase, $D_1$ — razlika frekvencija modalne klase i klase koja im prethodi; $D_2$ – razlika frekvencije modalne klase i frekvencije klase koja sledi za njom. U datom primeru je

$$Mo = 40 + 20\,\frac{50 - 25}{(50 - 25) + (50 - 15)} = 48{,}3\,; \quad \bar{X} = 48{,}8\,; \quad s = 17{,}85,$$

$K_V = 0{,}37$.

**1252.** $\bar{X} = 41$; $Me = 40$; $Mo = 39{,}44$.

**1253.** $\bar{x} = 2$.

**1254.** $\bar{x} = 41$.

**1255.** $\bar{x} = \dfrac{n_1\bar{x}_1 + n_2\bar{x}_2}{n_1 + n_2} = 4822{,}2$.

**1256.** a) $\bar{x} = 2$, $s^2 = 7{,}75$, $s = 2{,}7838$; $K_v = 1{,}3019$;



b) $\bar{x} = 2$, $s^2 = \dfrac{24}{11}$, $s = 1{,}477$, $K_v = 0{,}74$.

**1258.** $\bar{x} = 2$, $s^2 = D(x) = 1$, $s = \sqrt{D(x)} = 1$, $K_v = 0{,}5$.

**1259.** a) $\bar{x} = 4$, $D(x) = 0{,}6$; b) $\bar{x} = 6$, $D(x) = 6$.

**1260.** $\bar{x}_1 = 8$, $\bar{x}_2 = 8$, $s_1^2 = 18$, $s_2^2 = 24$, $\bar{x}_{12} = 8$, $s_{12}^2 = 20{,}25$.

**1262.** Primetimo da za proizvoljan broj $a$ važi jednakost

$$\bar{x} = E(x) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) =$$
$$= a + \frac{1}{n}((x_1 - a) + (x_2 - a) + \ldots + (x_n - a)).$$

Ova jednakost često se koristi prilikom izračunavanja srednje vrednosti u slučaju kada su $x_i$ veliki brojevi. Tako u ovom slučaju, $a = 1235$, imamo

$$\bar{X} = 1235 + \frac{1}{16}(0{,}6 + 2{,}5 - 2{,}1 + 1{,}2 + 3{,}5 - 0{,}8 + 0{,}9 - 1{,}7 - 0{,}5 + 1{,}8 +$$
$$+ 2{,}6 - 1{,}9 - 0{,}7 + 2{,}5 + 0{,}4 - 0{,}3) = 1235{,}5 \text{ m/s}\,.$$

Disperzija je $D(x) = 2{,}86\ \text{m}^2/\text{s}^2$.

**1263.** Statistička tabela za prvi uzorak ima oblik:

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj poena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Apsolutna frekvencija | 2 | 1 | 2 | 0 | 2 | 3 |

Za drugi uzorak statistička tabela glasi

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj poena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Apsolutna frekvencija | 2 | 1 | 2 | 1 | 3 | 1 |

Za treći uzorak tabela je

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj poena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Apsolutna frekvencija | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 3 |

Najzad, za osnovnu populaciju imamo

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Broj poena | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| Apsolutna frekvencija | 7 | 4 | 8 | 6 | 8 | 7 |

Srednje vrednosti $\bar{X}_1$, $\bar{X}_2$, $\bar{X}_3$ uzoraka su redom

$\bar{X}_1 = 3{,}8$, $\bar{X}_2 = 3{,}5$, $\bar{X}_3 = 4{,}125$.

Srednja vrednost za osnovnu populaciju je $\bar{X} = 3{,}625$. U odnosu na srednju vrednost, vidimo da drugi slučajni uzorak najbolje reprezentuje osnovnu populaciju.

**1264.** $s_1^2=3{,}76$; $s_2^2=2{,}85$; $s_3^2=3{,}35937$.

**1265.** Koeficijent korelacije $r$ najčešće se daje obrascem

$$(1) \qquad r=\frac{\Sigma X_i Y_i}{\sqrt{(\Sigma X_i^2)(\Sigma Y_i^2)}},$$

gde je $X_i=x_i-\bar{x}$ i $Y_i=y_i-\bar{y}$. Za određivanje koeficijenta korelacije pogodno je da se potrebna izračunavanja prikažu tabelom. U datom primeru odgovarajuća tabela je:

| $x_i$ | $y_i$ | $X_i=x_i-\bar{x}$ | $Y_i=y_i-\bar{y}$ | $X_i^2$ | $X_iY_i$ | $Y_i^2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | $-6$ | $-4$ | 36 | 24 | 16 |
| 3 | 2 | $-4$ | $-3$ | 16 | 12 | 9 |
| 4 | 4 | $-3$ | $-1$ | 9 | 3 | 1 |
| 6 | 4 | $-1$ | $-1$ | 1 | 1 | 1 |
| 8 | 5 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 9 | 7 | 2 | 2 | 4 | 4 | 4 |
| 11 | 8 | 4 | 3 | 16 | 12 | 9 |
| 14 | 9 | 7 | 4 | 49 | 28 | 16 |
| $\Sigma X_i=56$<br>$\bar{x}=\frac{56}{8}=7$ | $\Sigma Y_i=40$<br>$\bar{y}=\frac{40}{8}=5$ | | | $\Sigma X_i^2=132$ | $\Sigma X_iY_i=84$ | $\Sigma Y_i^2=56$ |

Primenom obrasca (1) koeficijent korelacije obeležja $x$ i $y$ je

$$r=\frac{84}{\sqrt{132\cdot 56}}=0{,}977.$$

*Primedba.* Ako je $|r|<0{,}25$, onda $x$ i $y$ nisu linearno povezani.

– Ako je $0{,}25\leqslant|r|\leqslant 0{,}50$ $x$ i $y$ su neznatno linearno povezani.

– Ako je $0{,}50\leqslant|r|\leqslant 0{,}70$ postoji značajna linearna veza.

– Ako je $0{,}70\leqslant r\leqslant 0{,}90$, postoji visoka značajna povezanost između obeležja $x$ i $y$.

— Ako je $0{,}90\leqslant|r|\leqslant 1$, onda je povezanost između $x$ i $y$ funkcionalna linearnog oblika.

**1266.** $r=0{,}395$. **1267.** $r=0{,}93$. **1268.** $r=0{,}896$.



# VIII GLAVA

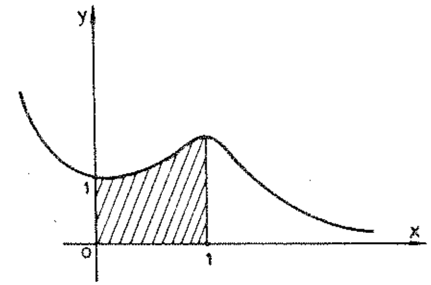
## 8. RAZNI ZADACI

**1269.** $P=5\arcsin 0{,}6-\ln 16$.

**1270.** a) $a=b=1$, $y=(x^2+x+1)\,e^{-x}$;

b) Funkcija je definisana za svako $x$, nema nula, pozitivna je za svako $x$, $y_{\min}=1$ za $x=0$, $y_{\max}=3e^{-1}$ za $x=1$, horizontalna asimptota je $x=0$ (grafik sl. 133);

c) $P=4-8e^{-1}$.



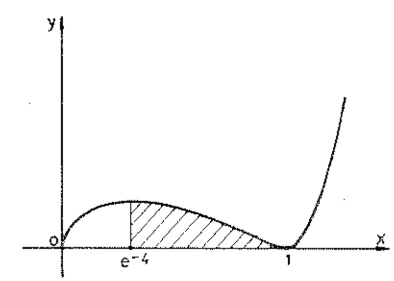

Sl. 133

**1271.** $P=2\int\limits_2^5\sqrt{x^2-16}\;dx+2\int\limits_5^{10}\frac{3}{5}\sqrt{25-(x-5)^2}\;dx=7{,}5\,\pi+9-0{,}5\ln 2$.

**1272.** a) Grafik date funkcije je prikazan na slici 134.

b) $P=\frac{16}{27}\left(1-\frac{25}{3}e^{-6}\right)$.

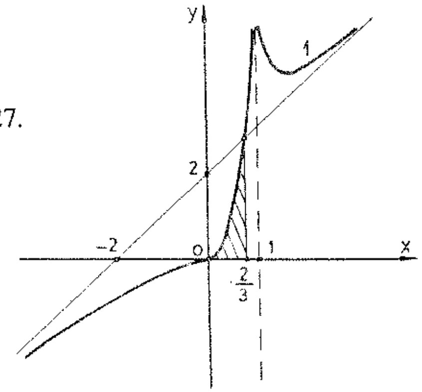
**1273.** $P=\int\limits_2^3\frac{x^2-6x+9}{x-1}\,dx=\ln 16-1{,}5$.




Sl. 134

**1274.** a) Grafik date funkcije je prikazan na slici 135.

b) $P=\int_0^{2/3}\frac{x^3}{(x-1)^2}\,dx=\frac{32}{9}-\ln 27.$




Sl. 135

**1275.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}(\pi-1)+2\ln(2+2\sqrt{2})+\frac{4}{3}\ln 2$. (Parcijalna integracija: $u=\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$, $dv=\sqrt{4+x^2}\cdot x\,dx$.)

**1276.** $\frac{\sqrt{2}}{24}(\pi-1)-\frac{1}{24}\ln(1+\sqrt{2})$. (Parcijalna integracija: $u=\operatorname{arctg}2x$, $dv=\sqrt{1+4x^2}\cdot x\,dx$.)

**1277.** Dati integral se transformiše u zbir tri integrala:

$$\int_0^{\pi/4}\cos x\cos 2x\,dx+\int_0^{\pi/4}\sin x\cos 2x\,dx+\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\sqrt{\sin 2x}\cdot\cos 2x\,dx\,.$$

Zatim se proizvod kosinusa transformiše u zbir kosinusa, proizvod sinusa i kosinusa u zbir sinusa, a za treći integral smena je $\sin 2x=t$. Vrednost datog integrala je

$$\frac{7\sqrt{2}}{6}-\frac{1}{3}.$$

**1278.** $\ln 2(\ln 2-1)^2$ (Smena $\ln x=z$).

**1279.** a) $p=-q$, $p=-2$, $q=2$; b) $p=-2$, $q=3$.

**1280.** $2<x<+\infty$.

**1281.** Smenom $\sqrt{x-1}=y$ $(y>0)$ data nejednačina postaje:

$$|y+1|+|y-1|>\frac{y^2+1}{2}.$$

Rešenje date nejednačine je interval $1\leqslant x<4\left(2+\sqrt{3}\right)$.



**1282.** Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(4a-3)$; dakle, sledi da je

$$\frac{3}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leqslant a\leqslant\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Realna rešenja su $x=\frac{\pi}{8}+\frac{(-1)^k}{2}\arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}(4a-3)\right)$, $k\in Z$.

**1283.** Ako se transformišu svi logaritmi u datoj nejednačini u logaritme sa osnovom 2, onda je ova nejednačina ekvivalentna nejednačini $\log_2 2\sin 4x<0\Leftrightarrow 0<2\sin 4x<1\Leftrightarrow 0<\sin 4x<0{,}5$. Rešenja koja zadovoljavaju interval $0<x<\frac{\pi}{4}$ su: $0<x<\frac{\pi}{24}$ i $\frac{5\pi}{24}<x<\frac{\pi}{4}$.

**1284.** Smene: $\frac{x-2}{x+1}=u$ i $\frac{x+2}{x-1}=v$. Data jednačina se transformiše u homogenu $20u^2-5v^2+4uv=0$. Odakle se dobije da je $u=-\frac{5}{2}v$ ili $u=\frac{1}{10}v$. Realna rešenja date jednačine po $x$ su $x=3\ \vee\ x=\frac{2}{3}$.

**1285.** Smene: $u=x-1$ i $v=x^2+x+1$ datu jednačinu svode na homogenu $2v^2-7u^2=13uv$. Skup rešenja date jednačine je $\left\{-1,\ -\frac{1}{2},\ 2,\ 4\right\}$.

**1286.** a) Za $x\geqslant 1$ smene $u=\sqrt[6]{x+1}$, $v=\sqrt[6]{x-1}$ svode datu jednačinu na homogenu $2u^2-uv-v^2=0$. U ovom slučaju data jednačina nema realna rešenja po $x$.

b) Za $x\leqslant -1$ i smene $u=\sqrt[6]{-1-x}$, $v=\sqrt[6]{-x+1}$ dobija se homogena jednačina $v^2-uv-2u^2=0$, a data jednačina ima jedno realno rešenje po $x$, i to $x=-\frac{65}{63}$.

**1287.** $x=\log_{\frac{2}{7}}3$ (smene: $u=2^x$, $v=7^x$).

**1288.** $x=\frac{190}{63}\ \vee\ x=\frac{2185}{728}$ (smene: $u=\sqrt[6]{x-2}$, $v=\sqrt[6]{x-3}$).

**1289.** $x=-3 \lor x=3$ (smene: $3^{\frac{x}{3}}+3^{-\frac{x}{3}}=u$).

**1290.** $\{0{,}5;\ 5\}$.

**1291.** $x=-3$.

**1292.** Ako se iskoristi osobina da je aritmetička sredina dva pozitivna broja veća ili jednaka sa njihovom geometrijskom sredinom dobijaju se nejednačine:

$$\frac{1+a_1}{2} \geqslant \sqrt{a_1}$$
$$\frac{1+a_2}{2} \geqslant \sqrt{a_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{1+a_n}{2} \geqslant \sqrt{a_n}.$$

Proizvod ovih nejednačina daje

$$\frac{1+a_1}{2}\cdot\frac{1+a_2}{2}\ \dots\ \frac{1+a_n}{2} \geqslant \sqrt{a_1\cdot a_2\ \dots\ a_n}.$$

Ako se uzme u obzir pretpostavka da je $a_1 \cdot a_2 \dots a_n=1$, poslednja nejednakost se svodi na tvrđenje

$$(1+a_1)(1+a_2)\ \dots\ (1+a_n) \geqslant 2^n.$$

**1293.** Pođimo od očiglednih nejednačina:

$$4a_1+1 \leqslant 4a_1^2+4a_1+1 \Rightarrow \sqrt{4a_1+1} \leqslant |2a_1+1|,$$
$$(1) \qquad 4a_2+1 \leqslant 4a_2^2+4a_2+1 \Rightarrow \sqrt{4a_2+1} \leqslant |2a_2+1|,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$4a_n+1 \leqslant 4a_n^2+4a_n+1 \Rightarrow \sqrt{4a_n+1} \leqslant |2a_n+1|.$$

Kako je $a_i \geqslant -\frac{1}{4}$, $i=1, 2, \dots, n$, tada je $|2a_i+1|=2a_i+1$, jer je $2a_i+1 \geqslant 0$.

Ako se sumiraju nejednačine (1), dobija se

$$\sqrt{4a_1+1}+\sqrt{4a_2+1}+\dots+\sqrt{4a_n+1} \leqslant 2(a_1+a_2+\dots+a_n)=n+2.$$

Time je dokaz završen.

**1294.** Ako se iskoristi da je geometrijska sredina od $n$ pozitivnih brojeva manja ili jednaka njihovoj aritmetičkoj sredini, tada je



$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{1\cdot 2\cdot 3\ \dots\ (n-1)\cdot n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1+2+3+\ \dots\ +(n-1)+n}{n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{n(n+1)}{2n}=\frac{n+1}{2}.$$

Kraj dokaza.

**1295.** a) $x \in \left[-\frac{5}{4},\ -1\right] \cup \left[9,\ +\infty\right]$;

b) $x \in [-8,\ 0] \cup [1,\ 2]$.

**1296.** $x=0{,}5$.

**1297.** a) $a+b=0$, $A(0,\ a+b)$;

b) $B(0,\ a+b)$ i $C\left(\log_2\left(-\frac{b}{a}\right),\ 0\right)$ (apscisa tačke $C$ je realna ako je $ab<0$).

**1298.** a) $f(t)=\sqrt{2}\cos t$, $g(t)=0{,}5\,(2\cos^2 t-1)$.

b) $t=(2k+1)\pi$; $t=\mp\frac{\pi}{3}+2n\pi$, $k, n=0, \mp 1, \mp 2, \dots$

c) $P=2\sqrt{2}$.

**1299.** a) $\varphi=60°$; b) $P=4\sqrt{3}+\frac{16}{3}\pi$.

**1300.** a) Iskoristiti identitet $\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$ i

$$1+2+3+\ \dots\ +k=\frac{k(k+1)}{2}.$$

b) Leva strana se transformiše postupno na sledeći način:

$$(\log_x 2)^{-2}\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{(n-1)n}\right)=$$
$$=(\log_x 2)^{-2}\left(\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ \dots\ \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n-1}\right)\right)=$$
$$=(\log_x 2)^{-2}\left(1-\frac{1}{n}\right)=\frac{n-1}{n}\log_2^2 x.$$

**1301.** $\frac{13a}{14}$, $a$, $\frac{15a}{14}$ $(a>0)$.

**1302.** Ako se kvadrira data relacija, dobija se

(1) $\quad a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=36.$

Zbir očiglednih nejednakosti

$(a-b)^2\geqslant 0,\quad (a-c)^2\geqslant 0$ i $(b-c)^2\geqslant 0$ svodi se na nejednakost

(2) $\quad a^2+b^2+c^2\geqslant ab+ac+bc.$

Iz (1) i (2) sledi da je

$3a^2+3b^2+3c^2\geqslant 36$; odavde se dobija tvrđenje $a^2+b^2+c^2\geqslant 12.$

**1303.** Ako se kvadrira pretpostavka i iskoristi jednakost (2) iz prethodnog zadatka, dobija se tvrđenje.

**1304.** Iskoristiti to što je aritmetička sredina dva broja veća od njihove geometrijske sredine na sledeći način:

$$\frac{a+b+c+d}{4}=\frac{\frac{a+b}{2}+\frac{c+d}{2}}{2}\geqslant\frac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd},$$

čime je dokaz završen.

**1305.** Iskoristimo rešenje prethodnog zadatka, gde je četvrti pozitivan broj $\sqrt[3]{abc}$:

$$\frac{a+b+c+\sqrt[3]{abc}}{4}\geqslant\sqrt[3]{abc\sqrt[3]{abc}}\Leftrightarrow a+b+c+\sqrt[3]{abc}\geqslant 4\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}\Leftrightarrow\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc},$$ čime je dokaz završen.

**1306.** Kako je: $a^2\geqslant a^2-(b-c)^2,$

$b^2\geqslant b^2-(c-a)^2,$

$c^2\geqslant c^2-(a-b)^2,$

množenjem ovih nejednakosti dobija se

$a^2b^2c^2\geqslant(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2,$

odakle sledi tražena nejednakost.

**1307.** Očigledna nejednakost $(a-b)^2\geqslant 0$ se postupno transformiše na ovaj način:

$(a-b)^2\geqslant 0\Leftrightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab\Leftrightarrow 2(a^2+b^2)\geqslant a^2+2ab+b^2.$

Ako se uzme u obzir pretpostavka $a^2+b^2=1$, tada poslednja nejednakost postaje

$a^2+2ab+b^2\leqslant 2\Leftrightarrow\sqrt{(a+b)^2}\leqslant\sqrt{2}\Leftrightarrow|a+b|\leqslant\sqrt{2}\Leftrightarrow-\sqrt{2}<a+b<\sqrt{2}.$



**1308.** Očigledna nejednakost

$(a+c)^2+(b-d)^2\geqslant 0$ se svodi na oblik

$a^2+b^2+c^2+d^2+2(ac-bd)\geqslant 0.$

Kako je po pretpostavci $a^2+b^2+c^2+d^2=2$, poslednja nejednakost postaje

(1) $\quad ac-bd\geqslant -1.$

Analogno iz nejednakosti

$(a-c)^2+(b+d)^2\geqslant 0$ dobija se $bd-ac\geqslant -1$ ili

(2) $\quad ac-bd\leqslant 1.$

Iz (1) i (2) sledi tvrđenje $|ac-bd|\leqslant 1.$

**1309.** Ako se iskoristi uputstvo prethodnog zadatka, iz nejednakosti

$(m-a)^2+(n-b)^2+(p-c)^2\geqslant 0$ i

$(m+a)^2+(n+b)^2+(p+c)^2\geqslant 0,$

dobija se da je

(1) $\quad ma+nb+pc\leqslant 1,$

(2) $\quad ma+nb+pc\geqslant -1.$

Iz (1) i (2) dobije se tvrđenje $|ma+nb+pc|\leqslant 1.$

**1310.** Kako je $a^2=|a|^2,\quad b^2=|b|^2,\quad ab\leqslant|a|\cdot|b|$ i $\sqrt{x^2}=|x|,$ dobija se $|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2}\leqslant$

$\leqslant\sqrt{|a|^2+2|a|\cdot|b|+|b|^2}=\sqrt{(|a|+|b|)^2}=|a|+|b|.$

Dakle, $|a+b|\leqslant|a|+|b|.$

**1311.** $|a|=|a+b-b|=|(a+b)+(-b)|\leqslant|a+b|+|-b|\Rightarrow$

$\Rightarrow|a|-|b|\leqslant|a+b|.$

**1312.** $|a-b|=\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{a^2-2ab+b^2}\geqslant\sqrt{|a|^2-2|a|\cdot|b|+|b|^2}=$

$=\sqrt{(|a|-|b|)^2}=|a|-|b|.$

**1313.** $|a+b|=\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{a^2+2ab+b^2}\geqslant\sqrt{|a|^2-2|a|\cdot|b|+|b|^2}=$

$=\sqrt{(|a|-|b|)^2}=|a|-|b|.$

$(a^2=|a|^2,\quad b^2=|b|^2$ i $ab\geqslant-|a|\cdot|b|).$

**1314.** Dokaz se izvodi indukcijom. Za $n=2$ $|a_1+a_2|\leqslant|a_1|+|a_2|$, tvrđenje je tačno. Dokažimo implikaciju

$|a_1+a_2+\ldots+a_k|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|\Rightarrow$

$\Rightarrow|a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}|\leqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{k+1}|.$

Ako se doda levoj i desnoj strani pretpostavke $|a_{k+1}|$ dobija se

(1) $\quad |a_1+a_2+\ldots+a_k+a_{k+1}| \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_k|+|a_{k+1}|$.

Neka je $a_1+a_2+\ldots+a_k=y$, tada je

(2) $\quad |y|+|a_{k+1}| \geqslant |y+a_{k+1}|$.

Iz (1) i (2) sledi da je

$|a_1+a_2+\ldots+a_{k+1}| \leqslant |a_1|+|a_2|+\ldots+|a_{k+1}|$,

čime je dokaz završen.

**1315.** $-1<a<2$.

**1316.** $-2<a<4$.

**1317.** $-3<a<6$.

**1318.** $-5<a<1$.

**1319.** $0<a<4$.

**1320.** $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-2, -\dfrac{2}{3}\right) \cup (1, +\infty)$.

**1321.** $P(x)=x^3+2x^2-3x+1$.

**1322.** Smenom $\sqrt{x-1}=t \quad (t>0)$ data funkcija se transformiše na oblik $y=|t|-|t-5|$. Funkcija je konstanta $y=5$ za $0 \leqslant t \leqslant 5$, pa je $1 \leqslant x \leqslant 26$.

**1323.** $x_1+x_2=x_1 \cdot x_2+11$.

**1324.** $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{5\pi}{6}$.

**1325.** $-\dfrac{5}{4}<m<-1$.

**1326.** U oba faktora sabrati geometrijske progresije itd.

**1327.** a) $\quad (2m+1)x^2-2(3m+4)x-(3m+4)=0$;

b) $\quad m \in \left(-\infty, -\dfrac{4}{3}\right) \cup \left(-1, +\infty\right)$; $\qquad$ c) $\quad m \in \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right)$.

**1328.** $x=(-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6}+k\pi, \quad k \in Z$.

**1329.** $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi, \quad k \in Z$.

**1330.** Zbir na levoj strani grupisati u obliku

$(\operatorname{tg} 9^\circ+\operatorname{ctg} 9^\circ)+(\operatorname{tg} 15^\circ+\operatorname{ctg} 15^\circ)-(\operatorname{tg} 27^\circ+\operatorname{ctg} 27^\circ)$,

zatim tangens i kotangens pretvoriti u sinus i kosinus itd.



**1331.** $-1<x \leqslant 0{,}11 \quad$ (smena $\log(1-9x)=y$).

**1332.** Ako se uvede smena $\ x+x^{-1}=t\ $ tada je $\ x^2+x^{-2}=t^2-2$, a $x^3+x^{-3}=t^3-3t$. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$t^3+t^2-2t-8=0 \Leftrightarrow (t-2)(t^2+3t+4)=0$.

Realno rešenje $t=2$, a $\ x_1=x_2=1$.

**1333.** Da bi dati kompleksan broj bio čisto imaginaran, potrebno je da konjunkcija bude tačna $\log_2(m^2-13m+44)-2=0 \wedge \log_2 m-3>0$. Kako ova konjunkcija nije tačna, ni za jednu vrednost parametra $m$, tvrđenje je tačno.

**1334.** Ako se periodičan decimalan broj 5,3 transformiše u njegov racionalan oblik $\dfrac{16}{3}$, data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5\log x}-\left(\frac{3}{5}\right)^{0,5\log x}=\frac{16}{15}.$$

Smena $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{0,5\log x}=t$. Rezultat: $x=100$.

**1335.** Smena $\sqrt{x-1}=y \quad (y>0)$ svodi datu jednačinu na oblik

$|y-2|+|y-3|=1$, $\ $ pa je $\ 2 \leqslant y \leqslant 3\ $ a $\ 5 \leqslant x \leqslant 10$.

**1336.** $5 \leqslant x \leqslant 8$.

**1337.** Dati broj se može napisati u obliku $N=3 \cdot 10^6+x \cdot 10^4+y \cdot 10^2+3$. Brojevi $10^6$, $10^4$ i $10^2$ pri deljenju sa 13 daju ostatak, redom 1, 3 i 9. Zato je $3 \cdot 10^6=13k_1+3$, $\ x \cdot 10^4=13k_2+3x$, $\ y \cdot 10^2=13k_3+9y$, pa je $N=13k+3(x+3y+2)$, gde je $k_1+k_2+k_3=k$. Pošto je $N$ deljivo sa 13 mora i $x+3y+2$ da je deljivo sa 13, tj. $x+3y+2=13m$. Kako je $x+3y+2 \leqslant 9+3 \cdot 9+2=38$, $m$ može biti samo 1 ili 2. Za $m=1$ dobijamo $x=11-3y$. Pošto je $x \geqslant 0$, $y$ može biti 1, 2 i 3, a odgovarajuće $x$ 9, 6, 3 i 0. Za $m=2$, dobijamo $x=24-3y$. Pošto je $0 \leqslant x \leqslant 9$, $y$ uzima vrednosti 5, 6, 7, 8, a odgovarajuće $x$ 9, 6, 3, 0. Traženi brojevi su: 3080103, 3050203, 3020303, 3090503, 3030703, 3000803.

**1338.** Na osnovu pretpostavke imamo da je

$1000a+100b+10c+d=(a+b+c+d)^4$.

Da bi desna strana bila četvorocifreni broj, mora biti ispunjen uslov $6 \leqslant a+b+c+d \leqslant 9$. Kako je $6^4=1296$, onda je $a=1$, $b=2$, $c=9$, $d=6$, što ne odgovara uslovu zadatka jer je $a+b+c+d=18$.

Kako je $7^4=2401$, mora biti $a=2$, $b=4$, $c=0$, $d=1$. Odavde je $a+b+c+d=7$, pa je traženi broj 2401. Slučajevi $a+b+c+d=8$ i $a+b+c+d=9$ ne dolaze u obzir, što se može proveriti kao i u slučaju $a+b+c+d=6$.

**1339.** Neka je tražena osnova sistema $x$. Tada je, s obzirom na pretpostavku zadatka,
$x^4 \cdot 1+x^3 \cdot 0+x^2 \cdot 1+x \cdot 0+1=1333 \Leftrightarrow x^4+x^2-1332=0$,
odakle dobijamo da je $x=6$.

**1340.** Ako su $x$, $y$, $z$ $(x, y, z<7)$ cifre toga broja, onda je
$7^2x+7y+z=9^2z+9y+x \Leftrightarrow 40z+y-24=0$.
Iz poslednje jednačine sledi da je $y$ deljivo sa $8$. Kako je $y<7$, mora biti $y=0$. Prema tome, imamo $5z=3x$. Kako je $x<7$ i $y<7$ dobijamo da je $x=5$, $z=3$. Dakle, traženi broj je $5 \cdot 49+3=248$.

**1341.** (490, 488) i (166, 160).

**1342.** Neka su traženi brojevi $4x$ i $4y$. Tada je
(1) $\qquad (4x)^3-(4y)^3=64 \cdot 91\,k.$
Kako je $64 \cdot 91=5824$, onda mora biti $k=1$. Iz (1) se dobija
(2) $\qquad (x-y)(x^2+xy+y^2)=1 \cdot 91=7 \cdot 13.$
Odavde sledi da je:
$x-y=1 \wedge x^2+xy+y^2=91$ ili $x-y=7 \wedge x^2+xy+y^2=13$ ili
$x-y=13 \wedge x^2+xy+y^2=7$.
Samo prvi sistem ima realno rešenje (6, 5), pa su traženi brojevi 24 i 20.

**1343.** Kako je $a=\log_{12}18=\log_{12}3^2 \cdot 2=2\log_{12}3+\log_{12}2=$

$$=\frac{2}{\log_3 12}+\frac{1}{\log_2 12}=\frac{2}{2\log_3 2+1}+\frac{1}{2\log_2 2+\log_2 3}=\frac{\log_3 2+2}{1+2\log_3 2},$$

onda je

(1) $\qquad \log_3 2=\dfrac{2-a}{2a-1}.$

Slično je $b=\log_{24}54=\log_{24}2^3 \cdot 2=3\log_{24}3+\log_{24}2=$

$$=\frac{3}{\log_3 24}+\frac{1}{\log_2 24}=\frac{3+\log_3 2}{3\log_3 2+1}, \quad \text{pa važi}$$

(2) $\qquad \log_3 2=\dfrac{3-b}{3b-1}.$

Iz (1) i (2) imamo

$$\frac{3-b}{3b-1}=\frac{2-b}{2a-1} \Leftrightarrow ab+5(a-b)=1.$$



**1344.** Koristiti rešenje prethodnog zadatka.

**1345.** Da bi data jednačina imala realna rešenja
$(-1 \leqslant \sin x \leqslant 1, \ -1 \leqslant \cos x \leqslant 1)$ zaključujemo da je:
$(\sin x=0 \ \wedge \ (\cos x=1 \ \vee \ \cos x=-1))$ ili
$(\sin x=1 \ \vee \ \sin x=-1) \ \wedge \ (\cos x=0)$.
Obe konjunkcije su tačne ako je $x=\dfrac{k\pi}{2}$, $k \in Z$.

**1346.** Data jednačina postupno se transformiše u ekvivalentne jednačine:

$$\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x=\sin 1999x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin x\cos\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}\cos x-\sin 1999x=0$$

$$\Leftrightarrow \sin(1999x-\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin\left(1000x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(999x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(1000x-\frac{\pi}{6}\right)=0 \vee \cos\left(999\,x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x_k=\frac{1}{1000}\left(\frac{\pi}{6}+k\pi\right) \vee x_n=\frac{1}{999}\left(\frac{\pi}{3}+n\pi\right) \qquad k, n \in Z.$$

**1347.** $x=\sqrt{2^{\sqrt{5}-1}}$.

**1348.** $a=b=2-\sqrt{2}$, $c=\sqrt{2}-2$, $y_{max}=2$ za $x=-\dfrac{\pi}{4}$, $y_{min}=4-3\sqrt{2}$ za $x=-\dfrac{5\pi}{4}$.

**1349.** a) Iz jednačine $x+iy=\dfrac{1-2t^2}{1+t^2}+\dfrac{3t}{1+t^2}$ i nalazimo da je

$$x=\frac{1-2t^2}{1+t^2}, \ y=\frac{3t}{1+t^2}.$$

Eliminacijom parametra $t$ iz ovih jednačina dobija se tražena kriva $\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{9}{4}$.

b) $x^2+y^2=1$.

**1350.** Iskoristiti rešenje prethodnog zadatka.

**1351.** $a = 10$, $b = 5$, $c = 2$, $f(x) = 5 \cdot 2^x + 10$.

**1352.** Opisuje elipsu $x^2 + 9y^2 = 9$.

**1353.** $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$.

**1354.** Smena $x + \frac{1}{x} = t$, $\left\{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right\}$.

**1355.** $x = -\frac{\pi}{2} - 2k\pi$, $x = -\frac{\pi}{6} - 2n\pi$, $k, n \in Z$.

**1356.** $s = \ln\left(\frac{e^b - e^{-b}}{e^a - e^{-a}}\right)$.

**1357.** $s = \frac{1}{2}\ln(3 + \sqrt{2})$.

**1358.** $s = \ln 3$.

**1359.** Kako su $a, b, c, d$ uzastopni pozitivni članovi aritmetičkog niza, tada je
$b = a + r$, $c = a + 2r$, $d = a + 3r$.
Ako proizvod sinusa u datoj jednačini transformišemo u razliku, dobija se ekvivalentna jednačina
$\cos(2a + r)x - \cos(2a + 5r)x = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin(2a + 3r) \cdot \sin 2rx = 0$
$\Leftrightarrow x_k = \frac{k\pi}{2a + 3r} \vee x_n = \frac{n\pi}{2r}$, $k, n \in Z$.

**1360.** Leva strana date jednakosti se postupno transformiše na ovaj način:
$\operatorname{ctg} 7{,}5° - \operatorname{ctg} 67{,}5° + \operatorname{tg} 67{,}5° - \operatorname{tg} 7{,}5° =$

$$= \frac{\sin 60°}{\sin 7{,}5° \sin 67{,}5°} + \frac{\sin 60°}{\cos 7{,}5° \cos 67{,}5°} =$$

$$= \frac{\sin 60°(\cos 67{,}5° - 7{,}5°)}{\sin 7{,}5° \cos 7{,}5° \ \sin 67{,}5° \cos 67{,}5°} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sin 15° \sin 135°} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 120° - \sin 150°} = 2(3 + \sqrt{3}).$$

**1361.** Data jednačina ekvivalentna je jednačini
$2^x(4 + 2 + 1 + \ldots) = 3^x(27 + 9 + 3 + \ldots)$.
Kako su oba geometrijska reda konvergentna, posle određivanja njihovog zbira poslednja jednačina ekvivalentna je jednačini
$2^{x+4} = 3^{x+4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4$.

**1362.** Konvergira za svako $x$ iz intervala $8^{-1} < x < 8$, suma je 0,5 za $x = 2$.

**1363.** 3, 5, 7.

**1364.** Na osnovu pretpostavke, dobija se sistem
$\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 130 \wedge \frac{a_1^2(q^8 - 1)}{q^2 - 1} = 5044$.
Količnik druge i prve jednačine sistema je
(1) $\quad \frac{a_1(q^4 + 1)}{q + 1} = \frac{194}{5}$.
Ako se eliminiše $a_1$ iz prve jednačine sistema i iz jednačine (1), dobija se
$114(q^2 + q^{-2}) - 97(q + q^{-1}) - 97 = 0$.
Smenom $q + q^{-1} = x$ poslednja jednačina postaje
$114x^2 - 97x - 325 = 0$.
Rešenja ove jednačine su $x = \frac{247}{114} \vee x = -\frac{75}{114}$.
Za $x = \frac{247}{114}$ dobija se da je $q = \frac{3}{2} \vee q = \frac{2}{3}$.
Drugo rešenje za $x$ ne daje realna rešenja za $q$.
Niz je 16, 24, 36, 54, ili 54, 36, 24, 16.

**1366.** $n > \frac{2(\log k + 1)}{\log k - \log(k - 1)}$.

1367. $a_1 = \dfrac{2ab}{a^2+b}, \quad q = \dfrac{a^2-b}{a^2+b}$.

1368. Članovi niza se dobijaju iz jednakosti

(1) $\quad a_1 = \sqrt{2}, \; a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \; (n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Dovoljno je dokazati da je niz opadajući i ograničen odozgo, da bi bio konvergentan. Kako je

$$a_{n+1} - a_n = \sqrt{2+a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{2+a_n} - a_n)(\sqrt{2+a_n} + a_n)}{\sqrt{2+a_n} + a_n} = \frac{2}{\sqrt{2+a_n} + a_n} > 0,$$

niz je opadajući. Niz je ograničen odozgo, jer je nejednačina

(2) $\quad a_n < 2$ ispunjena za svako $n \in N$.

Zaista za $n = 1$ (2) je tačno, jer je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Neka je (2) tačno i za $n = k \; (k \geq 1)$, tj. $a_k < 2$. Tada je (2) ispunjeno i za $n = k + 1$, pošto je $a_{k+1} = \sqrt{2+a_k} < \sqrt{2+2} = 2$. Na osnovu principa matematičke indukcije (2) je tačno za svako $n \in N \; (n \geq 1)$.

Iz (1) posle kvadriranja sledi

(3) $\quad a_{n+1}^2 - a_n - 2 = 0$.

Ako uvedemo smenu $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$ i u (3) izvršimo granični prelaz, dobija se

(4) $\quad a^2 - a - 2 = 0$.

Rešenja jednačine (4) su $a = 2 \lor a = -1$. Pošto je granična vrednost niza pozitivna, onda je $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$.

1369. $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0{,}5\,(1 + \sqrt{1+4a})$.

1370. Ako stavimo da je $a_n = r^n$, tada se rekurentna formula svodi na diferencnu jednačinu

$$r^{n+2} = 5r^{n+1} - 6r^n \Leftrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3 \lor r_2 = 2.$$

Zato je $a_n = 3^n \lor a_n = 2^n$. Uopšte je

$$a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n.$$

Odredimo konstante $C_1$ i $C_2$ tako da je $a_1 = 3$ i $a_2 = 1$. Neka je $n = 1$ i $n = 2$, tada je $3C_1 + 2C_2 = 3 \land 9C_1 + 4C_2 = 1$. Odatle sledi da je $C_1 = -\dfrac{5}{3}$ i $C_2 = 4$. Opšti član niza je

$$a_n = -\frac{5}{3} \cdot 3^n + 4 \cdot 2^n.$$

1371. Analogno prethodnom zadatku:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

1372. Ako iskoristimo poznatu nejednakost

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2},$$

imamo

$$\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} < \frac{(1+x_1)+(1+x_2)}{2} = 1 + \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Logaritmovanjem dobija se

$$\log\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} < \log\left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right) \Leftrightarrow$$
$$-\left(\frac{\log(1+x_1) + \log(1+x_2)}{2}\right) > -\log\left(1 + \frac{x_1+x_2}{2}\right),$$

a odatle sledi da je

$$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

1373. Tvrđenje se svodi na dokaz implikacije

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos\beta - \cos\alpha = \cos\gamma - \cos\beta.$$

1374. Data jednakost postupno se svodi na ekvivalentne jednakosti na sledeći način

$$\log\frac{a-b}{2}=\log\sqrt{\frac{ab}{2}} \Leftrightarrow \frac{a-b}{2}=\sqrt{\frac{ab}{2}}$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2=4ab \Leftrightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}=4.$$
Kako je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}$ i $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}$, tada je
$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=4 \Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{1}{2} \Rightarrow \alpha=15^\circ, \text{ a } \beta=75^\circ.$$
Primenom sinusne i kosinusne teoreme imamo
$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, pa je
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{abc}R.$$
Analogno
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{a^2+c^2-b^2}{abc}R \text{ i}$$
$$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{abc}R.$$
$$\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{2}(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma) \Leftrightarrow \frac{a^2+c^2-b^2}{abc}R=$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{abc}R+\frac{a^2+b^2-c^2}{abc}R\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+b^2-c^2=\frac{1}{2}(b^2+c^2-a^2+b^2+a^2-c^2) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^2+c^2-b^2=b^2 \Leftrightarrow b^2=\frac{1}{2}(a^2+c^2),$$
čime je dokaz završen.
Iz sistema
$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2} \wedge \alpha+\beta+\gamma=\pi \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{3}.$$
Ako primenimo kosinusnu teoremu
$b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$
$a^2+c^2-ac=b^2$.
Obrnuto, iz date relacije sledi da je
$$\cos\beta=\frac{1}{2} \Rightarrow \beta=\frac{\pi}{3},$$
što sa relacijom $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ daje
$$\beta=\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$



**1377.** a) $\operatorname{tg} z=-3$;
b) $a=R\sqrt{2}$, $b=\frac{2R}{\sqrt{5}}$, $c=\frac{6R}{\sqrt{10}}$.

**1378.** $a=\frac{3}{2}d$, $b=\frac{5}{2}d$, $c=\frac{7}{2}d$, $\gamma=120^\circ$.

**1379.** $y-2x-3=0$, $y+2x+3=0$,
$S\left(-\frac{3}{2},0\right)$, $\varphi=53^\circ 7'48''$.

**1381.** $x=-3$.

**1382.** $x_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $x_n=n\pi$, $n,k\in Z$.

**1383.** Data jednačina ekvivalentna je jednačini
$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\cos 99x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos 99x \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sin\left(50x-\frac{\pi}{8}\right)\sin\left(49x+\frac{\pi}{8}\right)=0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x_k=\frac{1}{50}\left(\frac{\pi}{8}+k\pi\right) \vee x_n=\frac{1}{49}\left(-\frac{\pi}{8}+n\pi\right) \; n,k\in Z.$$

**1384.** Smenom $2^x=t$ $(t>0)$ data jednačina se svodi na:
$$\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{\sin t}{\cos t}+2\frac{\sin 2t}{\cos 2t} \Leftrightarrow$$
$\cos^2 2t-\sin^2 2t=0 \wedge (\sin t,\ \cos t,\ \cos 2t\neq 0)$.
Rešenje date jednačine je
$$x_k=\log_2\left(\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{4}\right),\ k\in Z.$$

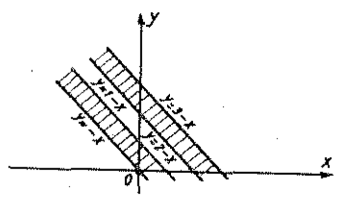
Data jednačina ekvivalentna je sistemu
$$\log_2\frac{\cos 2x+\cos\frac{x}{2}}{\sin x+\cos\frac{x}{2}}=0 \wedge$$
$$\wedge \left(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}>0 \wedge \sin x+\cos\frac{x}{2}>0\right).$$

Rešenja date jednačine su :

$x_k = \frac{\pi}{6} + 4k\pi\,,\ \ x_n = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi\,, \qquad n, k \in Z\,.$

**1386.** Kako je za uglove u I i II kvadrantu sinus pozitivan, biće $2k\pi < \pi(x+y) < (2k+1)\pi \Leftrightarrow x + y > 2k\ \wedge$ $\wedge\ x + y < 2k + 1\,,\ k \in Z\,.$
Za $k = 0$ dobijamo $y > -x\ \wedge\ y < 1 - x$. U Dekartovoj ravni to je osenčena oblast (sl. 136) između pravih $y = -x$ i $y = 1 - x$.
Za $k = 1$ osenčena oblast je između pravih čije su jednačine

$y = 2 - x$ i $y = 3 - x$ itd.




**1387.** Na osnovu pretpostavke imamo :

$f(2) = f(1) + a^2$
$f(3) = f(2) + a^3$
$f(4) = f(3) + a^4$
- - - - - - - - - - - - - - - - - -
$f(n) = f(n-1) + a^n\,.$

Ako se saberu prethodne jednakosti, dobija se $f(n) = f(1) + a^2 + a^3 + \ldots + a^n\,.$
Posle sumiranja geometrijske progresije dobija se

$$f(n) = 1 + \frac{a^2(a^{n-1} - 1)}{a - 1} \quad (\text{za } a \neq 1).$$

Za $a = 1$ $f(n) = n\,.$

**1390.** Data jednakost se postupno transformiše u identične jednakosti

$$2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$



$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 0\,.$$

Suma kvadrata u skupu realnih brojeva jednaka je nuli ako je svaki sabirak jednak nuli. Odatle je

$$\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0\ \wedge\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Iz prve jednakosti sledi da je $\alpha = \beta$, koja sa drugom daje jednakost

$$\cos\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}\,.$$

Kako je $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$, tada je i $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

**1391.** Kako je

$$\frac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k} + \frac{\sin(k-(k-1))}{\cos(k-1)\cos k} =$$

$$= \frac{\sin k\cos(k-1) - \cos k\sin(k-1)}{\cos(k-1)\cos k}\,,$$

to je

$$\frac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg}(k-1)\,.$$

Ako u ovoj jednakosti stavimo $k = 1, 2, \ldots, k$, zatim saberemo dobijene jednakosti, dobijamo traženu sumu $S$.
$S = (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \ldots$
$+ (\operatorname{tg} n - \operatorname{tg}(n-1)) = \operatorname{tg} n\,.$

## *I grupa*

**1392.** a) Kako su diskriminante za oba trinoma pozitivne, tvrđenje je jasno. b) $s = a,\ S = -\frac{a^2+b^2}{2}$.

**1393.** a) Ako se zameni $\sqrt{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sin\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{3}}$, data funkcija postaje

$y = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$, sada se lako ispituje.

b) Iz jednačine $2\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = m$, imamo

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{m}{2}$$

ili

$$-1 \le \frac{m}{2} \le 1\ ,$$

tj.
rešenja su realna za $-2 \le m \le 2$.

c) $x = 2k\pi$ i $x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

**1394.** a) Presečna tačka parabole $y^2 = 2px$ i kružnice

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2 \text{ je}$$

$A\left(\frac{3p}{2}, p\sqrt{3}\right)$. Koeficijent pravca tangente parabole u tački $A$ je $m = \frac{1}{\sqrt{3}}$, a kružnice $m_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Ugao između tangenata je $\varphi = 60°$.

b) $V = \pi \int_0^{\frac{3p}{2}} 2px + \pi \int_{\frac{3p}{2}}^{\frac{5p}{2}} \left(\frac{15p^2}{4} + px - x^2\right) dx$

$$V = \frac{9}{4}p^3\pi + \frac{5}{3}p^3\pi = \frac{47}{12}p^3\pi\ .$$

## *II grupa*

**1395.** Iz uslova da prava

$$y = \frac{3}{5}x + 5$$

dodiruje parabolu i elipsu koje imaju zajedničku žižu sledi :

$\frac{9a^2}{25} + b^2 = 25$, $\qquad 9a^2 + 25b^2 = 625$,

$p = 2 \cdot \frac{3}{5} \cdot 5$, $\qquad a^2 - b^2 = 9$.



Dakle,

$$a = 5\ ,\quad b = 4\ ,\quad p = 6\ ,$$

tj.

$$16x^2 + 25y^2 = 400$$
$$y^2 = 12x\ .$$

Dodirne tačke su $A\left(\frac{25}{3}, 10\right)$, $\quad B\left(-3, \frac{16}{5}\right)$.

Koeficijenti pravca pravih $FA$ i $FB$ su $m_1 = \frac{15}{8}$ i $m_2 = -\frac{8}{15}$

odakle sledi da je

$$\measuredangle BFA = 90°.$$

**1396.** Pogledati rešenje zadatka 1066, str. 307.

**1397.** a) Teme parabole ima koordinate:

$$T(\cos\alpha; \sin^2\alpha - \sin\alpha)\ .$$

Iz pretpostavke imamo

$\sin^2\alpha - \sin\alpha = 0$, $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Za $\alpha = 0$, $y = x^2 - 2x + 1$.

Za $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $y = x^2$.

b) $\alpha = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{6}$.

c) Ako eliminišemo $\alpha$ iz sistema

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2\cos\alpha \\ x_1 \cdot x_2 = 1 - \sin\alpha\ , \end{cases}$$

dobijamo traženu relaciju

$$(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2(x_1x_2 - 2) = 0.$$

## *III grupa*

**1398.** a) $a = 6$.

b) Nule $x_1 = x_2 = -1$, $x_3 = -4$ $\quad y_{\max} = 4$ za $x = -3$, $\quad y_{\min} = 0$, za $x = -1$.

c) $P = \int\limits_{-1}^{0} (x^3 + 6x^2 + 9x + 4)\, dx = \frac{5}{4}$.

d) $y = x + 1$,

$x + 1 = (x + 1)(x^2 + 5x + 4) \Leftrightarrow$

$(x + 1)(x^2 + 5x + 3) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0, \quad x_{2,3} = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$,

tj.

$A(-1,0) \quad B,C\left(\frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}, \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right)$.

**1399.** a) Uslov dodira prave $x - 2y + 8 = 0$ i parabole $y^2 = 2px$, tj. $p = 2mn$, $p = 4$. Iz sistema:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = e^2 \\ a^2 m^2 + b^2 = n^2 \end{cases} \quad \text{ili} \quad \begin{cases} a^2 - b^2 = 4 \\ \frac{1}{4}a^2 + b^2 = 16, \end{cases}$$

imamo $a^2 = 16$, $b^2 = 12$, pa je tražena parabola $y^2 = 8x$ i elipsa $12x^2 + 16y^2 = 192$.

b) Dodirne tačke su $A(-2, 3)$ $B(8, 8)$, a kružnica

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}.$$

c) Tražena zapremina se dobije kad se od zapremine zarubljene kupe oduzme zbir zapremina dela elipsoid i dela paraboloida, tj.

$$V = \frac{10\pi}{3}(9 + 3 \cdot 8 + 64) - \left(\pi \int\limits_{-2}^{\frac{1}{3}} \left(12 - \frac{3}{4}x^2\right) dx + \pi \int\limits_{\frac{4}{3}}^{3} 8x\, x\right),$$

$$V = \frac{970\pi}{3} - \left(\frac{10\,10\pi}{27} + \frac{2240\pi}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}\right)^3 \pi.$$

**1400.** a) Iz sistema $\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 180° \\ \alpha - \beta = 2\gamma, \end{cases}$

sledi da je

$\alpha = 90° + \frac{\gamma}{2}$, tj.

$\Delta ABC$ je tupougli.



b) Na osnovu pretpostavke sledi da je $\Delta ACD$ jednakokraki, pa je

$\measuredangle CDA = \measuredangle DAC = 180° - \alpha$. Iz $\Delta DAC$ sledi

$\measuredangle CDA + \measuredangle DAC + \measuredangle ACD = 180°$,

ili

$180° - \alpha + 180° - \alpha + \measuredangle ACD = 180°$,

$180° - 2\alpha + \measuredangle ACD = 0$, $\measuredangle ACD = 2\alpha - 180°$,

tj.

$\measuredangle ACD = \gamma$, pa je $CA$ simetrala ugla $\measuredangle BCD$.

c) Neka je $CE$ visina $\Delta ADC$ i neka je

$DE = EA = p$, pa je $b^2 = CE^2 + p^2$

$a^2 = CE^2 + (p + c)^2$.

Odavde imamo

$a^2 - b^2 = c^2 + 2pc$. Na osnovu teoreme da simetrala ugla deli naspramnu stranicu u odnosu drugih dveju stranica imamo

$$2p : c = a : b \quad \text{ili} \quad a^2 - b^2 = c^2 + c\frac{ac}{b} \Rightarrow a(a - b) = c^2.$$

## *IV grupa*

**1401.** Najmanja visina odgovara najdužoj stranici, pa je $h_c = \frac{2P}{c} = 5{,}6\,cm$.

**1402.** Vidi zadatak 379 b), str. 51.

**1403.** Vidi zadatak 1065, str. 307.

**1404.** a) Dati izraz se transformiše u oblik $\sqrt{2}\cos\frac{\pi - 8x}{4}$,

b) $-\sqrt{2} < m < \sqrt{2}$, za $m = \sqrt{2}$, $x = \frac{(8k - 1)\pi}{4}$.

**1405.** Jednačina parabole $y^2 = 12x$, jednačine elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{36} = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

## *V grupa*

**1406.** Stranice trougla su 6, 8 i 10; stranice maksimalnog pravougaonika 3 i 4, obim $O = 14$; $P : P_1 = 1 : 4$.

**1407.** $x = 10$ ili $x = 10^{-1}$. U oba slučaja progresija je 1; 5; 25, pa je $a_x = a_{10} = 5^9$.

**1408.** $N\left(\frac{9}{2}, 6\right)$, $V_1 : V_2 = 2 : 3$.

**1409.** Definisana za $x \in (-\infty, +\infty)$, nema nula, $y_{\max} = 2$ za $x = 1$, $y_{\min} = \frac{2}{3}$ za $x = -1$, $y = 1$ asimptota.

**1410.** $n = 7$, $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

## *VI grupa*

**1412.** $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$.

**1413.** Parabola $y^2 = 6x$, tangenta $8x + 4y + 3 = 0$, a seče datu pravu u tački apscise $x = -\frac{3}{2}$ a ovo je jednačina direktrise.

**1414.** Stranice 3, 5, 7.

**1415.** $P = \frac{35}{2}$.

## *VII grupa*

**1416.** a) $m \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$; b) $m = \frac{17}{7}$.

**1417.** $P = 2c\pi\,(a + c) = 648\pi$, $V = \frac{\pi h c^2}{2} = 1224\,\pi$.



**1418.** a) $P = \frac{4}{3}$; b) $V = \frac{4\pi}{3}$.

## *VIII grupa*

**1419.** $V = 24\pi\,(\sqrt{3} - 1)$.

**1420.** $x = 1$.

**1421.** Ako su stranice $a$, $b = aq$, $c = aq^2$, onda koristeći uslov da je $|b - a| < c < |aq + a|$,
dolazi se do traženog tvrđenja;
b) $q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}$.

**1422.** $B\left(\frac{27}{5}, -\frac{23}{5}\right)$; $C(-3, 2)$.

**1423** $\varphi = 39°$; $P = \frac{1}{3}$.

## *IX grupa*

**1424.** $V = 2\pi$.

**1425.** Geometrijski niz: 2, 6, 18; aritmetički: 3, 12, 21, $S_{20} = 1770$.

**1426.** Jednačina hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, a kružnice $x^2 + y^2 = 25$.

**1427.** $M = 20\sqrt{37}$.

**1428.** $a = 38$, $b = 10$, $c = 32$.

## *X grupa*

**1429.** Stranice trougla su $a = 16$, $b = 12$ i $c = 20$. $P = 96$.

**1430.** $P = (2 + 3\sqrt{5})\ \mathrm{m}^2$, $V = 3\mathrm{m}^3$.

**1431.** $x = 64$.

1432. $x=\frac{\pi}{12}+k\pi,\ x=\frac{5\pi}{12}+n\pi.$

1433. $P=\ln 8.$

## *XI grupa*

1434. $y=\pm\frac{1}{\sqrt{15}}x,\ \varphi=90^{\circ}.$

1435. $a=6,\ b=10,\ c=12.\ P=\frac{128\pi\sqrt{14}}{7}.$

1436. Vidi zadatak 1059, Zbirka 2, V. Bogoslavov.

1437. Vidi zadatak 706, Zbirka 2, V. Bogoslavov.

1438. Vidi zadatak 1285, Zbirka 2, V. Bogoslavov.

## *XII grupa*

1439. $S=3\sqrt{3}\,(\sqrt{3}\pm\sqrt{2}).$

1440. 62,8%.

1441. b) $-2\leq m\leq 2$; c) $x=2k\pi \ \vee\ x=\frac{2\pi}{3}+2n\pi;\ V=2\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{1}{4}\right).$

1442. 1.

## *XIII grupa*

1443. $a\in[-2,\ -1]\cup(3,+\infty).$

1444. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$4\cos^2\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}-2x\right)-5=0 \Leftrightarrow x=-\frac{5\pi}{12}-k\pi,\ k\in Z.$$

1446. Vidi zadatak 1350.

1447. Vidi zadatak 1269.



## *XIV grupa*

1448. Vidi zadatak 1284.

1449. Data funkcija se svodi na oblik $y=2\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)+1$,

$$P=\frac{3\sqrt{3}+\pi}{2}.$$

1450. Vidi zadatak 948, Zbirka 3, V. Bogoslavov.

1451. Svodi se na $W_k=\sqrt[6]{i}$, njegove vrednosti su:

$$w_{0,3}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\ i\sqrt{2-\sqrt{3}}\right);\ W_{2,5}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\mp 1\pm i);$$

$$w_{1,4}=\pm\frac{1}{2}\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}+i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right).$$

1452. Iskoristi VITOVE formule za jednačinu trećeg stepena.
$x_1=5,\ x_2=12,\ x_3=13,\ m=281.$

## *XV grupa*

1453. Koristeći Vietove veze biće $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=-\frac{1}{p}$ i $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta=\frac{1}{q}$,

$$\sin^2(\alpha+\beta)\left(\operatorname{ctg}^2(\alpha+\beta)+\frac{1}{p}\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+\frac{1}{q}\right)=$$

$$=\frac{1}{1+\operatorname{ctg}^2(\alpha+\beta)}\left(\left(\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}\right)^2+\frac{1}{p}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}+\frac{1}{q}\right).$$

Zamenom zbira i proizvoda kotangensa sa $-\frac{1}{p}$ i $\frac{1}{q}$ dobija se tvrđenje.

1454. Smenom $\log_4 x=t$, dobija se konjunkcija $4\left(\frac{4}{3}\right)^{2t}-15\left(\frac{4}{3}\right)^t+9=0$ $\wedge\ \log_4 x=t$. Rešenje konjunkcije je $x=\frac{1}{4}\ \vee\ x=4^{\frac{1}{\log_3 4-1}}$.

1455. Srednji član je $T_{n+1}=\binom{2n}{n}3^{n\bar{z}^x}\cdot 3^{n(z^{-x}-1)}=\binom{2n}{n}3^{n(\bar{z}^{-x}+z^{-x}-1)}$

Na osnovu pretpostavke je $n(\bar{z}^{-x}+z^{-x}+1)=0$. Kako je $\bar{z}=\frac{1}{z}$, dobija se $z^{2x}-z^x+1=0$. Rešenja ove jednačine su
$z^x=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i=(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2})^2=z^2 \vee z^x=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i=(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2})^2=z^{-2}$.
Odatle sledi da je $x=2 \vee x=-2$.

1456. $M(\pm\frac{\sqrt{6}}{3}k, \frac{\sqrt{6}}{3}k)$. Za $k=n\sqrt{6} \wedge n\in Z$, $x$ i $y$ su celi brojevi.

1457. Neka su temena $A$ i $B$ pravougaonika $ABCD$ na poluprečniku $OM$, teme $C$ pripada luku $MN$ a teme $D$ poluprečniku $ON$, ugao $COM=x$. Tada je $AB=R\cos x-R\sin x\operatorname{ctg}\alpha$, $AD=BC=R\sin x$. $P(x)=R\sin x(\cos x-\sin x\operatorname{ctg}\alpha)$,
$P'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\alpha}{2}$, $P_{max}=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{\alpha}{2}(2\cos\frac{\alpha}{2}-1)$.

## XVI grupa

1458. a) Eliminacijom realnog broja $a$ iz Vetovih formula za datu jednačinu dobija se $x_1=\frac{1-x_2}{3x_2+1}$, odnosno $x_2=\frac{1-x_1}{3x_1+1}$.

b) $x_1>0$ za $x_2\in(-\frac{1}{3}, 1)$; $x_2>0$, $x_1\in(-\frac{1}{3}, 1)$.

c) $a\in(0, \frac{1}{9}]$.

1459. $x=\pm 0{,}5\arccos(-\frac{1}{4})+k\pi \vee x=\frac{\pi}{2}+n\pi$, $k, n\in Z$.

1460. a) $P(-6, 3)$; b) $P=\frac{39}{4}$.

1461. 1:2.

1462. $x\geqslant 2$.



## XVII grupa

1464. Stranice trougla su: $\frac{3p}{4}$, $p$, $\frac{5p}{4}$. $a:b:c=3:4:5$.

1465. a) $D=\left\{x \mid 0<x<\frac{\pi}{2}\right\}$; b) $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in Z$.

1466. $-3$.

1467. $V=\frac{32\pi}{3}$.

## XVIII grupa

1468. Vidi zadatak 1210, Zbirka 2, V. Bogoslavov.

1469. Vidi zadatak 1239, Zbirka 3, V. Bogoslavov.

1470. $x\in(-3, -\frac{1}{2})$.

1471. $T_3=40$.

1472. Vidi zadatak 340.

## XIX grupa

1474. $a=2, 5, 8, \ldots, b=14$.

1475. $p\geqslant 3$.

1476. Transformisati u proizvode izraz $(\cos 3x+\cos x)+(\cos 5x+\cos x)$ itd.

1477. Vidi zadatak 1065.

## XX grupa

1479. $x\in\left[\frac{1}{2}, 1\right)$.

**1480.** $\alpha = 45^\circ$.

**1481.** Vidi zadatak 1066, Zbirka 2, V. Bogoslavov.

**1482.** a) $a = -2$; b) $a = \pm 3$; c) $a = 2 \vee a = \frac{2}{3}$.

### *XXI grupa*

**1484.** a) $D = m^2 + 4 > 0$ za svako $m$;

b) $m \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup [-1, 0) \cup [1, +\infty)$.

**1485.** $P = 4a^2\pi\sqrt{3}$, $V = 2a^3\pi$.

**1486.** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

**1487.** $n = 17$, $k = 12$, $T_{13} = 91 \cdot 2^{-10}$.

### *XXII grupa*

**1489.** $x = \frac{(m-2)(m-5)}{4(m-1)}$, $m \in (1, 2) \cup (5, +\infty)$.

**1490.** Vidi zadatak 795.

**1492.** Smena $\log_2 x = t$, pa je $\log_4 x = \frac{t}{2}$. $0 < x \leqslant \sqrt[4]{2}$.

Univerzitet u Beogradu
Klasifikacioni ispiti iz matematike za upis na tehničke fakultete, matematički, fizički i fizičko-hemijski, svaki test ima 20 zadataka.

**25. juni 1990.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | B. | 6. | C. | 11. | C. | 16. | A. |
| 2. | E. | 7. | B. | 12. | A. | 17. | C. |
| 3. | B. | 8. | A. | 13. | E. | 18. | B. |
| 4. | E. | 9. | D. | 14. | E. | 19. | B. |
| 5. | A. | 10. | C. | 15. | D. | 20. | D. |



**25. juni 1991.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | B. | 6. | A. | 11. | B. | 16. | D. |
| 2. | C. | 7. | B. | 12. | D. | 17. | E. |
| 3. | B. | 8. | A. | 13. | C. | 18. | E. |
| 4. | C. | 9. | E. | 14. | C. | 19. | A. |
| 5. | A. | 10. | D. | 15. | D. | 20. | E. |

**5. septembar 1991.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | B. | 6. | C. | 11. | E. | 16. | A. |
| 2. | D. | 7. | B. | 12. | C. | 17. | A. |
| 3. | A. | 8. | B. | 13. | A. | 18. | D. |
| 4. | A. | 9. | D. | 14. | E. | 19. | B. |
| 5. | E. | 10. | D. | 15. | B. | 20. | E. |

**26. juni 1992.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | B. | 6. | A. | 11. | A. | 16. | D. |
| 2. | A. | 7. | B. | 12. | E. | 17. | D. |
| 3. | B. | 8. | B. | 13. | D. | 18. | D. |
| 4. | E. | 9. | C. | 14. | C. | 19. | C. |
| 5. | B. | 10. | E. | 15. | D. | 20. | C. |

**4. septembar 1992.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | D. | 6. | A. | 11. | E. | 16. | C. |
| 2. | B. | 7. | A. | 12. | B. | 17. | B. |
| 3. | E. | 8. | C. | 13. | B. | 18. | A. |
| 4. | B. | 9. | C. | 14. | D. | 19. | C. |
| 5. | B. | 10. | E. | 15. | A. | 20. | C. |

**25. juni 1993.**

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1. | B. | 6. | A. | 11. | B. | 16. | C. |
| 2. | C. | 7. | A. | 12. | A. | 17. | D. |
| 3. | B. | 8. | D. | 13. | C. | 18. | C. |
| 4. | C. | 9. | E. | 14. | E. | 19. | C. |
| 5. | C. | 10. | E. | 15. | E. | 20. | B. |

2. septembar 1993.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | D. | **6.** | A. | **11.** | B. | **16.** | B. |
| **2.** | E. | **7.** | B. | **12.** | A. | **17.** | A. |
| **3.** | D. | **8.** | E. | **13.** | C. | **18.** | E. |
| **4.** | A. | **9.** | C. | **14.** | B. | **19.** | A. |
| **5.** | E. | **10.** | B. | **15.** | D. | **20.** | C. |

1. juli 1994.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **1.** | D. | **6.** | A. | **11.** | A. | **16.** | C. |
| **2.** | B. | **7.** | B. | **12.** | D. | **17.** | C. |
| **3.** | E. | **8.** | E. | **13.** | B. | **18.** | C. |
| **4.** | E. | **9.** | D. | **14.** | E. | **19.** | C. |
| **5.** | C. | **10.** | E. | **15.** | B. | **20.** | C. |



## LITERATURA


K. Alendorfer i K. Okli: *Principi matematike*, Beograd 1966.

Н. П. Антонов, М. Я. Выгодски, Б. В. Никитин, А. И. Санкин: *Сборник задач по элементарной математике*, Москва 1964.

Н. В. Богомолов: *Практические занятия по математике*, Москва 1979 .

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz algebre za II razred gimnazije*, Beograd 1976.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za III razred gimnazije*, Beograd 1977.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za IV razred gimnazije*, Beograd 1978.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka zadataka iz matematike za IV razred usmerenog obrazovanja*, Beograd 1987.

A. Vadnej: *Elementarni uvod u račun verovatnoće*, Beograd 1963.

P. M. Vasić, R. R. Janić, V. T. Bogoslavov: *Zbirka zadataka iz matematike za II razred srednjeg usmerenog obrazovanja*, Beograd 1978.

P. M. Vasić, R. R. Janić, O. Mitrinović, D. Đ. Tošić: *Matematički priručnik za takmičenje srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima*, Beograd 1974.

V. Vranić: *Vjerovatnost i statistika*, Zagreb 1965.

S. Vukadinović: *Elementi teorije verovatnoće i matematičke statistike*, Beograd 1978.

S. Vukadinović i D. Sučević: *Matematika za III razred srednjeg usmerenog obrazovanja*, Beograd 1979.

S. Vukadinović i J. Vukadinović: *Matematika za IV razred usmerenog obrazovanja*, Beograd 1980.

В. Е. Гурман: *Теория вероятностей и математическая статистика*, Москва 1972.

R. R. Janić i D. Đ. Tošić: *Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima*, Beograd, 1987.

J. Karamata: *Kompleksni broj sa primenom na elementarnu geometriju*, Beograd 1950.

V. Lespinard et R. Pernet: *Algèbre classe de premiere A-C-M-M*, Lyon 1962.

P. M. Miličić i M. P. Ušćumlić: *Zbirka zadataka iz više matematike I*, Beograd, 1982.

D. S. Mitrinović: *Matematička indukcija. Binomna formula. Kombinatorika*, Beograd 1970.

D. S. Mitrinović: *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima I*, Beograd 1978.

D. S. Mitrinović, D. Mihailović, P. M. Vasić: *Linearna algebra. Polinomi. Analitička geometrija*, Beograd 1975.

П. С. Моденов: *Сборник задач по специальном курсу элементарной математике*, Москва 1964.

В. Е. Шнайдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов: *Кроткий курс высшей математике*, Москва 1978.

# BELEŠKA O AUTORU

Mr Vene Bogoslavov rođen je 1932. godine u selu Paralovu, opština Bosilegrad. Po završetku gimnazije u Bosilegradu, završio je matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu (1958).

Godine 1967. završio je specijalističke studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, a magistrirao je 1981. godine na Elektrotehničkom fakultetu. U 1980. godini mr Vene Bogoslavov je za izuzetne rezultate u vaspitno-obrazovnom radu stekao zvanje pedagoškog savetnika.

Radni vek započeo je kao gimnazijski profesor u beogradskim srednjim školama. Od 1965. godine radi kao profesor u Petoj beogradskoj gimnaziji.

U toku rada mr Vene Bogoslavov bio je na mnogobrojnim funkcijama: rukovodilac aktiva matematičara grada Beograda i matične škole, mentor novim profesorima, član uređivačkog tima u Zavodu za udžbenike i nastavna sredstva, član odbora za proučavanje problema nastave matematike u osnovnim i srednjim školama pri Prosvetnom savetu Srbije i dr. Pored ovih funkcija, obavljao je i druge stručne poslove kao što su: član školskog odbora i saveta škole, u sindikatu itd.

Objavio je mnogobrojne knjige i članke iz oblasti matematike koji su doživeli zapažen uspeh, imali veliki broj izdanja u milionskom tiražu. Njegove zbirke postale su opšti jugoslovenski udžbenici koji se svakodnevno koriste na svim prostorima bivše i sadašnje Jugoslavije.

Udžbenici: *Zbirka zadataka iz matematike* za IV razred gimnazije (prvo izdanje 1968., 31. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 261.802 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 1* (prvo izdanje 1970. g., 25. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 320.835 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2* (prvo izdanje 1971. g., 23. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 272.816 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike 3* (prvo izdanje 1972. g., 22. izdanje 1997. g; ukupan tiraž 235.310 primeraka); *Zbirka zadataka* za IV razred prirodno-matematičke struke – četiri izdanja (prvo izdanje 1980. g.; ukupan tiraž 32.000 primeraka); *Zbirka zadataka* za II razred usmerenog obrazovanja - dva izdanja, ukupan tiraž 120.000 primeraka, koautori: dr Petar Vasić, dr Radovan Janić; koautori: dr Petar Vasić, dr Radovan Janić i dr Dobrilo Tomić (ukupan tiraž 18.000 primeraka; *50 testova za proveru znanja iz matematike za osnovnu školu*, koautori: dr Dušan Adnađević, Gliša Nešković i Dragoslav Milić (prvo izdanje 1988. g., 7. izdanje 1995. g.; ukupan tiraž 139.000 primeraka); *Logaritamske tablice* (prvo izdanje 1993. g.; ukupan tiraž 30.000 primeraka); *Logaritamska i eksponencijalna funkcija sa zbirkom zadataka*, koautor: Svetozar Branković (prvo izdanje 1996. g.).

Mr Vene Bogoslavov bio je recenzent mnogih udžbenika matematike. On je nosilac mnogih diploma, priznanja (Arhimedes, Plaketa Zavoda za izdavanje udžbenika) i zahvalnica.

Živi u Beogradu. Penzionisan je 19. 09. 1999. g. kao profesor Pete beogradske gimnazije, sa 40 godina rada u nastavi.

# SADRŽAJ

## ZADACI

## REŠENJA



Mr Vene T. Bogoslavov: ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE, 4 • Trideset drugo izdanje • Izdavač: ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA, Beograd, Obilićev venac 5 • Likovni urednik: TAMARA POPOVIĆ-NOVAKOVIĆ • Crteži: VERONIKA POPOVIĆ • Korektori: SOFIJA BOŠKOVIĆ i mr VENE BOGOSLAVOV • Grafički urednik: DUŠAN KNEŽEVIĆ • Obim: 25 3/4 štamparskih tabaka • Format: 14 x 20 cm • Tiraž: 9000 • Rukopis predat u štampu maja 2000. godine • Štampanje završeno juna 2000. godine • Štampa: DD „KULTURA", Bački Petrovac