

V
E
N
E
2

VENI E

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ ALGEBRE

ZA II RAZRED GIMNAZIJE

$$\log_b a = n \rightarrow b^n = a$$



savremena administracija

PAŠIĆ AZIM

Pašić

Alum

BOGOSLAVOV VENE

Kelcan

Pašić

ZBIRKA

REŠENIH ZADATAKA IZ ALGEBRE
za II razred gimnazije

Drugo izdanje

M 1
5

1971.
»SAVREMENA ADMINISTRACIJA«
BEOGRAD

Recenzent:
dr RAJKO RALEVIĆ

IZDANJE:
»SAVREMENA ADMINISTRACIJA«
izdavačko-štamarsko preduzeće
Beograd, Knez Mihailova 6/V
telefoni: 624-096 i 622-369
poštanski fah 479

Glavni i odgovorni urednik:
MILUTIN SRDIĆ

Urednik:
ĐORĐE MILJKOVIĆ

Tehnički urednik:
VUKAŠIN OGNJENović

Štampanje: »SRBIJA«, Beograd, Mije Kovačevića 5.

PREDGOVOR

Ova zbirka namenjena je učenicima II razreda gimnazije prirodnomatematičkog smera, mada može koristiti i učenicima II razreda društvenojazikskog smera, kao i učenicima II razreda ostalih škola drugog stupnja.

Na početku svake glave date su u vidu uvoda skoro sve važnije definicije, oznake i teoreme bez dokaza. Zadaci su sređeni, kako po srodnosti, tako i po težini, tj. od lakših, jednostavnijih ka težim, složenijim kako bi se učeniku omogućilo postupno ulaženje u tehniku rešavanja zadataka. Veliki broj zadataka je urađen tako kako bi se olakšalo korišćenje zbirke, dok su skoro za sve zadatke date postavke, uputstva i rezultati.

Zbirka za II razred gimnazije predstavlja nastavak moje zbirke za I razred, te su svi simboli i oznake date na početku prve knjige, zadržani i u ovoj zbirci.

Recenzentu ove zbirke dr Rajku Raleviću zahvaljujem na pažljivom čitanju i redigovanju rukopisa. Takođe zahvaljujem Dragani Božoviću, studentu Građevinskog fakulteta u Beogradu koji je izradio sve crteže.

I, najzad, zahvaljujem svojoj supruzi Nadeždi Bogoslavov, koja mi je pomagala na sređivanju i pripremi rukopisa.

VERE BOGOSLAVOV

S A D R Ž A J

I GLAVA

	Strana
1. Pojam iracionalnog broja — — — — —	3
Racionalisanje imenioca — — — — —	3

II GLAVA

2. Kompleksni brojevi — — — — —	14
---------------------------------	----

III GLAVA

3. Kvadratne funkcije — — — — —	20
---------------------------------	----

IV GLAVA

4. Kvadratna jednačina s jednom nepoznatom — — — — —	29
5. Znak kvadratnog trinoma — — — — —	57

V GLAVA

Jednačine s jednom nepoznatom koje se svode na kvadrate —	62
6. Bikvadratne jednačine — — — — —	62
7. Binomne jednačine — — — — —	65
8. Iracionalne jednačine — — — — —	66

VI GLAVA

9. Eksponencijalne funkcije i jednačine — — — — —	71
10. Logaritmi. Logaritamske funkcije, jednačine i identiteti — —	74

R E Š E N J A

I GLAVA

1. Pojam iracionalnog broja	— — — — —	Strana
Racionalisanje imenioca	— — — — —	89

II GLAVA

2. Kompleksni brojevi	— — — — —	109
-----------------------	-----------	-----

III GLAVA

3. Kvadratna funkcija	— — — — —	115
-----------------------	-----------	-----

IV GLAVA

4. Kvadratna jednačina s jednom nepoznatom	— — — — —	136
5. Znak kvadratnog trinoma	— — — — —	166

V GLAVA

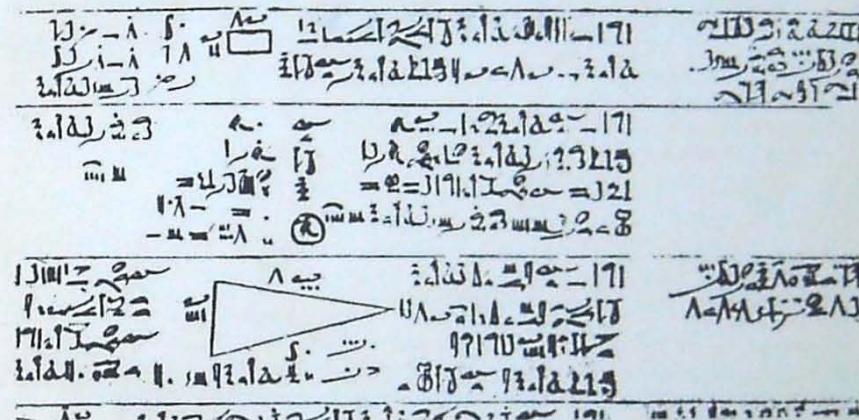
Jednačine s jednom nepoznatom koje se svode na kvadratne jednačine	— — — — —	170
6. Bikvadratne jednačine	— — — — —	170
7. Binomne jednačine	— — — — —	173
8. Iracionalne jednačine	— — — — —	176

VI GLAVA

9. Eksponencijalne funkcije i jednačine	— — — — —	183
10. Logaritmi, Logaritamske funkcije, jednačine i identiteti	— — — — —	195
Literatura	— — — — —	214

IZ DREVNE ISTORIJE ALGEBRE

Isečak iz Ahmesovog papirusa. Ova stara knjiga čuva se sada u Britanskom muzeju u Londonu.



U 17. veku pre naše ere egipatski sveštenik Ahmes je napisao pomenuti papirus, po ugledu na neki još stariji rukopis, u kome je skupio uglavnom sva dotadašnja znanja iz geometrije i algebre. Papirus sadrži osamdeset zadataka iz algebre, svaki sa sopstvenim rešenjem. Mnogi od tih zadataka su bili »Odredi broj«. Ovako je glasio jedan Ahmesov zadatak. »Gomila, njene dve trećine, jedna polovina i tri sedmine, sabrane zajedno daju 33. Odrediti gomilu«. Neki su bili očigledno samo za zabavu kao na primer »Ima 7 kuća u svakoj kući ima po 7 mačaka, svaka mačka ubije 7 miševa, svaki miš pojede po 7 klasova pšenice. Svaki klas pšenice će dati 7 hekata zrna. Koliko je žita spaseno?«. Većina zadataka je vezana za svakodnevni život (za hleb, pivo, hranjenje stoke, itd.).

ZADACI

I. G L A V A

1. POJAM IRACIONALNOG BROJA

Racionalisanje imenioca.

Obrasci:

$$1. \quad a^{\frac{p}{n}} \cdot a^{\frac{q}{n}} = a^{\frac{p}{n} + \frac{q}{n}}$$

$$2. \quad \frac{a^{\frac{p}{n}}}{a^{\frac{q}{n}}} = a^{\frac{p}{n} - \frac{q}{n}}$$

$$3. \quad (a^{\frac{1}{n}})^m = a^{\frac{m}{n}}$$

$$4. \quad (a^{\frac{1}{n}})^{\frac{1}{m}} = a^{\frac{1}{mn}}, \text{ odnosno } \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

$$5. \quad (abc)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}}, \text{ odnosno } \sqrt[n]{abc} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c};$$

$$\text{ili } a^{\frac{1}{n}} b^{\frac{1}{n}} c^{\frac{1}{n}} = (a \cdot b \cdot c)^{\frac{1}{n}}, \text{ odnosno } \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}.$$

$$6. \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}, \text{ odnosno } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}};$$

$$\text{ili } \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}, \text{ odnosno } \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

$$7. \quad \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}, \text{ odnosno } \sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

1. Dokazati da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.
2. Dokazati da je broj $\sqrt{5}$ iracionalan.
3. Dokazati da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{17}$ iracionalan.
4. Dokazati da $\sqrt[3]{2}$ nije kvadratni iracionalitet*)
5. Dokazati da je $n + \sqrt{n}$ iracionalan broj, ako n nije kvadrat nekog celog broja.
6. Dokazati da je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj, ako je $a > 0$, $b > 0$ i $a^2 + b^2 = 6ab$.

Racionalisati imenioc:

7. $\frac{\sqrt{10} + 2\sqrt{5}}{\sqrt{5} + \sqrt{10}}$
8. $\frac{8\sqrt{2} - 4\sqrt{5}}{2\sqrt{2} - \sqrt{5}}$
9. $\frac{\sqrt{0,3} + \sqrt{0,2}}{\sqrt{0,9} + \sqrt{0,6}}$
10. $\frac{x\sqrt{y} + y\sqrt{x}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$
11. $\frac{ab - b^2}{\sqrt{b^3} - \sqrt{ab^2}}$
12. $\frac{8}{3 - \sqrt{5}} - \frac{2}{2 + \sqrt{5}}$
13. $\frac{4}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} + \frac{7}{2\sqrt{5} + 3\sqrt{3}}$
14. $\frac{2}{3 + \sqrt{7}} + \frac{3}{\sqrt{7} - 2} - \frac{5}{4 - \sqrt{11}}$
15. $\frac{2\sqrt{2} + x}{\sqrt{2} - x} - \frac{x\sqrt{2} - x}{\sqrt{2} + x} - \frac{2x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$
16. $\frac{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}} + \frac{a + 2 - \sqrt{a^2 - 4}}{a + 2 + \sqrt{a^2 - 4}}$
17. $\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} + \frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}$

*) Kvadratni iracionalitet je izraz oblika $p + q\sqrt{2}$.

18. $\frac{1}{x^2} \sqrt{x^3 \sqrt{x^4}} + \frac{11\sqrt{3}}{5\sqrt{3} - 8} - \frac{24}{\sqrt{3}}$
19. $\frac{1}{a} \sqrt{a^3 \sqrt{a^4}} + \frac{4\sqrt{5}}{7 + 3\sqrt{5}} - \frac{35}{\sqrt{5}} + 16$

Racionalisati imenioc:

20. $\frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}}$
21. $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$
22. $\frac{18}{3 + \sqrt{5} - \sqrt{2}}$
23. $\frac{2}{\sqrt{5} - \sqrt{3} + \sqrt{8}}$
24. Neka su a, b, m tri pozitivna broja, i da je $a > b$. Uporedi brojeve
 $A = \sqrt{a + m} - \sqrt{a}$ i $B = \sqrt{b + m} - \sqrt{b}$
25. $\left(1 + \frac{1}{2 + \sqrt{3}}\right)^{-1} + \left(1 + \frac{1}{2 - \sqrt{3}}\right)^{-1}$
26. Pokazati da je $R = [(A + A^{-1}) - (B + B^{-1})]^{\frac{1}{2}}$ racionalan broj za
 $A = \frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$ i $B = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$
27. Odrediti vrednost izraza
 $[(A + 1)^{-1} + (B + 1)^{-1}]^{\frac{1}{2}}$ za $A = (2 + \sqrt{3})^{-1}$, $B = (2 - \sqrt{3})^{-1}$.
28. Odrediti vrednost izraza $\frac{A + B}{A - B}$
za $A = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$ i $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

29. Odrediti vrednost izraza $(A^{-1} + B^{-2})$

za $A = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$, $B = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$

30. Izračunati $2^{-1}A^{-2}(B - A)$, za $A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$, $B = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$

31. Izračunati vrednost izraza $A^{-1} - \frac{11}{12}A$, za

$A = (1 - 0,5 \cdot 3^{\frac{-1}{2}})^{-1}$.

Uprostiti izraze:

32. $\left(2 + \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{m} - \sqrt{n}}\right) \left(1 - \frac{\sqrt{m} - \sqrt{n}}{\sqrt{m} + \sqrt{n}}\right)$, $m, n > 0$, $m \neq n$

33. $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

34. $\left(\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 1} - \frac{1}{\sqrt{3} + 3}\right) \left(\frac{\sqrt{3} + 2}{\sqrt{3} + 3} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1}\right)^{-1}$

35. $3 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} - \frac{1}{1 - \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}}$.

36. $\left(\frac{15}{\sqrt{6} + 1} + \frac{4}{\sqrt{6} - 2} - \frac{12}{3 - \sqrt{6}}\right)(\sqrt{6} + 11)$.

37. $\left(\frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{8} + \sqrt{12}}\right) - \frac{1}{\sqrt{3}}$

Izračunati vrednost izraza

38. $\left(\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{1-x^3}} + \frac{\sqrt{1-x^3}}{x\sqrt{x}}\right)^{-1}$ za $x = \sqrt[3]{\frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{2a}}$.

Uprostiti izraze:

39. $\left(\frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n} - \sqrt{1-n}} + \frac{1-n}{\sqrt{1-n^2} - 1+n}\right) \cdot \frac{\sqrt{1-n^2} - 1}{n} \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{n^2} - 1} - \frac{1}{n}\right)$, $0 < n < 1$.

40. $\left(\sqrt[3]{\frac{(1-n)\sqrt[3]{1+n}}{n}} \cdot \sqrt{\frac{3n^2}{4-8n+4n^2}}\right)^{-1} : \sqrt[3]{\left(\frac{3n\sqrt{n}}{2\sqrt{1-n^2}}\right)^{-1}}$,
ako je $0 < n < 1$.

41. $\sqrt[3]{\frac{(1+a)\sqrt[3]{1+a}}{3a}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3}}{9 + 18a^{-1} + 9a^{-2}}}$, $a > 0$.

42. $\frac{a\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2b\sqrt{a}}\right)^{-1} + b\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{2a\sqrt{b}}\right)^{-1}}{\left(\frac{a + \sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1} + \left(\frac{b + \sqrt{ab}}{2ab}\right)^{-1}}$, $a > 0$, $b > 0$.

43. $\left(\frac{\sqrt{a} + \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} + \sqrt{x}}\right)^{-2} - \left(\frac{\sqrt{a} - \sqrt{x}}{\sqrt{a+x}} - \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{a} - \sqrt{x}}\right)^{-2}$,
 $a > 0$, $x > 0$.

44. $\frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2 + a} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a}}\right) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + a}}}{x + \sqrt{x^2 + a}}$.

45. $\left[\frac{(a + \sqrt[3]{a^2x}) : (x + \sqrt[3]{ax^2}) - 1}{\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right]^6$

46. $\left[\frac{(\sqrt{a} + 1)^2 - (a - \sqrt{ax})(\sqrt{a} - \sqrt{x})^{-1}}{(\sqrt{a} + 1)^3 - a\sqrt{a} + 2}\right]^{-3}$

47. $x^3 \left[\frac{(\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{y})^2 + (\sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y})^2}{x + \sqrt{xy}}\right]^5 \sqrt[3]{x\sqrt{x}}$.

$$48. \left\{ \left[\left(\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \right)^{-2} + 1 \right] \cdot \frac{4\sqrt{xy}}{x+y+2\sqrt{xy}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad x > 0, y > 0.$$

$$49. \frac{a+\sqrt{ab}}{a+b} \left[a^{\frac{1}{2}} (a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}})^{-1} - \left(\frac{a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}} \right)^{-1} \right], \quad a > 0, b > 0.$$

$$50. \left[\left(\frac{\frac{1}{a^3} + 1}{\frac{1}{a^3} - 1} \right) + 3 \right] \cdot \left[\left(\frac{\frac{1}{a^3} - 1}{\frac{1}{a^3} + 1} \right) + 3 \right]^{-1} \cdot \frac{a-1}{a+1} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - 1}$$

$a \neq \pm 1.$

$$51. \frac{y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} - \left\{ \frac{72-9y}{8} : \left[\left(\frac{4+y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} \right) + 1 \right] \right\}^{-\frac{1}{4}}$$

$$52. (p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})^{-2} (p^{-1} + q^{-1}) + \frac{2}{(p^{\frac{1}{2}} + q^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}}} \cdot (p^{-\frac{1}{2}} + q^{-\frac{1}{2}}).$$

Uprostiti brojne izraze:

$$53. \left[\frac{1}{(a^{\frac{1}{2}} + b^{\frac{1}{2}})^{-2}} - \left(\frac{\frac{1}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}}{\frac{3}{a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}}} \right)^{-1} \right] (ab)^{-\frac{1}{2}}$$

$$54. A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(12+6\sqrt{3})} \text{ i } B = \sqrt{\frac{1}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{1}{9+4\sqrt{5}}}.$$

55. Dat je niz brojeva x_n definisan sa

$$x_n = \frac{\sqrt{3} + x_{n-1}}{1 - \sqrt{3} \cdot x_{n-1}}, \text{ a } x_1 = 1.$$

Pokazati da je ovaj niz periodičan.

56. Izračunati vrednost izraza

$$y = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}} + \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}} \quad \text{za } x = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Izračunati vrednost izraza:

$$57. y = \frac{(x-1)\sqrt{3}}{\sqrt{x^2-x+1}} \quad \text{za a) } x = 2 + \sqrt{3}; \text{ b) } x = 2 - \sqrt{3}.$$

$$58. \frac{1-2x}{1+2x} \sqrt{\frac{1+3x}{1-3x}}, \quad \text{za } x = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$59. \frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} \quad \text{za } x = \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} \right).$$

Uprostiti izraze:

$$60. \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{a+b}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{a+b}} \cdot \left[1 - \frac{2 - (a^2 + b^2)}{2ab} \right].$$

Izračunati brojnu vrednost rezultata za $a = 1$; $b = \frac{1}{2}$ sa tačnošću od 0,01.

$$61. \left(\frac{1}{\sqrt{a}-\sqrt{a-b}} + \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-b}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \right).$$

$$62. \frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} - 1}{x + \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{2\sqrt{xy}} \cdot \left(\frac{\sqrt{y}}{x - \sqrt{xy}} + \frac{\sqrt{y}}{x + \sqrt{xy}} \right).$$

$$63. \left(\frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{a - \sqrt{a^2 - b^2}} - \frac{a - \sqrt{a^2 - b^2}}{a + \sqrt{a^2 - b^2}} \right) : \frac{4a\sqrt{a^2 - b^2}}{b^2}$$

$$64. \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^3 + \frac{2a^2}{\sqrt{a}} + b\sqrt{b}}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} + \frac{3\sqrt{ab} - 3b}{a-b}.$$

65. $\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1} + \frac{3}{\sqrt{3}-2} + \frac{15}{3-\sqrt{3}} \right) \cdot (\sqrt{3} + 5)^{-1}$.

Izračunati vrednost izraza:

66. $\frac{xy - (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}{xy + (x^2 - 1)^{\frac{1}{2}}(y^2 - 1)^{\frac{1}{2}}}$ za $x = 2^{-1}(a + a^{-1})$ i $y = 2^{-1}(b + b^{-1})$ ($a \geq 1, b \geq 1$).

67. $\left(\frac{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} - \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}}{\sqrt{m+x}\sqrt{x+n} + \sqrt{m-x}\sqrt{x-n}} \right)^{-2}$ za $x = \sqrt{mn}, m > n > 0$.

68. $\frac{(a+bx)^{\frac{1}{2}} + (a-bx)^{\frac{1}{2}}}{(a+bx)^{\frac{1}{2}} - (a-bx)^{\frac{1}{2}}}$, za $x = \frac{2am}{b(1+m^2)}$, $|m| < 1$.

69. $\left[\frac{(x^2 + a^2)^{\frac{1}{2}} + (x^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}} - (x^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}} \right]^{-2}$ za $x = a \left(\frac{m^2 + n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}$; ($a > 0, n > m > 0$).

70. Izračunati vrednost y za $x = \sqrt{\frac{m - \sqrt{m^2 - 4}}{2m}}$,

ako je $y = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

71. Izračunati vrednost izraza

$\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} + \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x-1}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right)$ za $x = \frac{a^2 + b^2}{2ab}$, $a > 0, b > 0$.

72. Izračunati vrednost izraza $\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$ za $x = 2^{-1}(a + a^{-1})$

gde je a realno i različito od nule.

73. Uprostiti izraz $A = (a + x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}} + (a - x^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}$, gde je $x = 4(a - 1)$. Posmatrati slučajeve:

$1 < a < 2$ i $a > 2$.

74. Izračunati

$(x + x^{-1}) : (x - x^{-1})$ za $x = \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1}$.

75. Dokazati identitet (Lagranžev identitet)

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

($a > 0, b > 0, b < a^2$).

76. Koristeći Lagranžev identitet, uprostiti i izračunati sa tačnošću do 0,01 izraze:

a) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}}$; b) $\sqrt{2 + \sqrt{3}}$; c) $\sqrt{5 - \sqrt{21}}$;

d) $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$; e) $\sqrt{31 + 12\sqrt{3}}$.

77. Dokazati da je vrednost izraza

$$A = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{3}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2} - \sqrt{3}}$$
 iracionalan broj

Uprostiti izraz

78. $\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}}$, ako je $x \leq 2$.

79. Izraz $\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}}$ predstaviti kao razliku dva redukovana razlomka. Primenom ovog rezultata izračunati sumu:

$$S = \frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{100\sqrt{9} + 99\sqrt{100}}$$

80. Pokazati da je $\sqrt[3]{ax^3 + by^3 + cz^3} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$, ako je

$ax^3 = by^3 = cz^3$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

81. Ako je $a_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$
 $b_n = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$,

Dokazati da je

$$a_{m+n} = a_m a_n - \frac{a_{m-n}}{2^n}$$

$$b_{m+n} = b_m b_n + \frac{b_{m-n}}{2^n}.$$

82. Izračunati vrednost izraza

$$(1-ax)(1+ax)^{-1}(1+bx)^{\frac{1}{2}}(1-bx)^{-\frac{1}{2}} \text{ za}$$

$$x = a^{-1} \left(2 \frac{a}{b} - 1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (0 < a < b < 2a).$$

Dokazati da je

83. $(4 + \sqrt{15})(\sqrt{10} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{4 - \sqrt{15}}) = 2$

84. $\sqrt{3 - \sqrt{5}} \cdot (3 + \sqrt{5})(\sqrt{10} - \sqrt{2}) = 8.$

85. $\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}} \cdot (2 - \sqrt{3}) = 1$

86. $\frac{7 - 4\sqrt{3}}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}.$

87. $\frac{\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} \cdot (\sqrt{2} - 1)}{\sqrt{4 + 2\sqrt{3}} - \sqrt{3}} = 1$

88. $A = \frac{\sqrt{x - 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 - 4x\sqrt{2} + 8}} - \frac{\sqrt{x + 2\sqrt{2}}}{\sqrt{x^2 + 4x\sqrt{2} + 8}} \text{ za } x = 3.$

89. Dokazati identitet ($2x > y > x > 0$)

$$\frac{1 - \sqrt{\frac{2x-y}{y}}}{1 + \sqrt{\frac{2x-y}{y}}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \frac{y}{x} \sqrt{\frac{2x-y}{y}}}{1 - \frac{y}{x} \sqrt{\frac{2x-y}{y}}}} = 1.$$

90. Izračunati vrednost izraza

$$y = x^3 + 12x, \text{ za } x = \sqrt[3]{4(\sqrt{5} + 1)} - \sqrt[3]{4(\sqrt{5} - 1)}.$$

91. Izračunati vrednost izraza

$$y = x^3 + ax + b, \text{ ako je}$$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

92. Izračunati vrednost izraza

$$y = x^3 - 3x - 2 \frac{A^2 + B}{A^2 - B} \text{ za}$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}.$$

II. G L A V A

2. KOMPLEKSNI BROJEVI

Oznaka, obrasci i definicije u vezi sa kompleksnim brojevima.

1. Definicija: $i^2 \stackrel{\text{def.}}{=} -1$.

2. Opšti oblik kompleksnog broja $z = a + ib$.

Konjugovano kompleksni broj za z je $\bar{z} = a - ib$.

3. $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ — modul kompleksnog broja

4. Definicija: Aritmetičke operacije sa kompleksnim brojevima definisane su ovako:

Jednakost: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.

Sabiranje: $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

Množenje: $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$.

Oduzimanje: Razlika kompleksnih brojeva z_1 i z_2 ,

$(z_1 - z_2)$ je kompleksni broj z takav da je $z_1 = z_2 + z$.

Deljenje: Podeliti kompleksni broj z_1 , kompleksnim brojem z_2 ($z_2 \neq 0$) znači naći kompleksni broj z takav da je $z_1 = z_2 \cdot z$.

93. Izračunati

a) $\sqrt{-36} - \sqrt{-16} - \sqrt{-64} + \sqrt{-49}$;

b) $\sqrt{-18} - \sqrt{-50} + \sqrt{-72} - \sqrt{-98}$;

c) $\sqrt{-a^2} - \sqrt{-a^2 + 2ab - b^2} + \sqrt{-b^2}$.

94. Naći zbir datih kompleksnih brojeva

a) $(3 + 2i) + (5 - 8i)$;

b) $(-3 - 4i) + (8 + 2i)$;

c) $(8 + 4i) + (7 - 2i) + (-6 + i)$;

d) $(1,8 + i) + (2,4 - 3i) + (1 + 2,4i)$

95. Naći razliku datih kompleksnih brojeva

a) $(7 + 9i) - (-8 + 3i)$; b) $(4 - 5i) - (-7 + 9i)$;

Izvrši naznačene operacije:

96. a) $(7 + 3i) - (2 + 8i) + (9 - 12i)$;

b) $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}i\right) + \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i\right) - \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{2}i\right)$;

c) $(5x - 2yi) + (3x + 5yi) - (x + yi) + 2x$;

97. a) $(-5 + 2i)(3 + 2i)$, b) $(-7 + 2i)(6 + 3i)$;

c) $(\sqrt{3} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i\sqrt{2})$; d) $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$

98. a) $\frac{2 + 3i}{2 - 3i}$; b) $\frac{5 - 2i}{1 - i}$

99. a) $\frac{1 - 3i}{1 + i} - \frac{i}{2 + i}$; b) $\frac{1 + i}{2 + i}(3 + 2i)$

100. Dat je kompleksni broj z .

a) $z = \frac{3 + i}{(2 - i)^2}$; b) $z = \frac{3 - 2i}{2 + i} + \frac{2 - i}{3 + i}$

Odrediti $\operatorname{Re} \{z\}$; $\operatorname{Im} \{z\}$

101. Pokazati da su $z_1 = 2 + 3i$ i $z_2 = -2 + i$ nule funkcije $f(z) = z^2 - 4iz - 7 - 4i$.

102. Izračunati vrednost izraza:

a) $\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}}$ ako je $Z = 1 + i$;

b) $\frac{z + \bar{z}}{2z + 3}$ ako je $z = \frac{i - 1}{2}$.

103. Izračunati:

$$\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} + i^{24}$$

104. Dokazati da je

$$\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 1.$$

105. Izvršiti naznačene operacije

$$a) \frac{2+i}{2-i} + \frac{2-i}{2+i}; \quad b) \frac{1+3i}{(-1+i)^2} + \frac{(-4+i)(-4-i)}{1+i}.$$

106. Ako je $f(z) = 2 + z + 3z^2$, izračunati $f(z)$ i $f(\bar{z})$ za $z = 3 + 2i$

107. Izračunati:

$$a) y = z^2 + 2z - 3 \text{ za } z = 2 \pm i;$$

$$b) y = 2z^2 + z - 1 \text{ za } z = 3 \pm 5i.$$

108. Neka su z_1 i z_2 dva kompleksna broja.

$$\text{Dokazati: } |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

109. Izračunati:

$$\frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2} \cdot \left(\frac{3-i}{2+i} - \frac{2-i}{3+i}\right).$$

110. Odrediti module kompleksnih brojeva

$$a) z = \frac{(2+i)^2}{3-4i}; \quad b) z = \frac{\sqrt{3}+i}{6-8i}; \quad c) z = \frac{2i}{1+i\sqrt{3}}.$$

111. Odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ tako da budu zadovoljene relacije:

$$a) \operatorname{Re}\{z \cdot \bar{z}_1\} = -1, \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{z_2}\right\} = \frac{3}{5}; \quad b) \operatorname{Re}\{z : z_2\} = \frac{3}{5};$$

$$\operatorname{Im}\{z \cdot \bar{z}_1\} = -1 \text{ ako je } z_1 = 3 + 2i \text{ i } z_2 = 2 + i.$$

112. Dat je kompleksni broj $z_1 = 2 + i$.

a) Odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ tako da je

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{z}{z_1}\right\} = -\frac{3}{5} \quad \text{a} \quad \operatorname{Im}\{\bar{z} \cdot z_1\} = 1;$$

b) Odrediti kompleksni broj $z = x + iy$ tako da je

$$\operatorname{Im}\left\{\frac{z}{z_1}\right\} = -\frac{3}{4} \quad \text{a} \quad \operatorname{Re}\{\bar{z} \cdot z_1\} = 1.$$

113. *) Pokazati da je

$$\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}.$$

Dokazati da je:

$$114. \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3 = 2.$$

$$115. \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^4 + \left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^4 = -1.$$

$$116. \left(\frac{1+i\sqrt{7}}{2}\right)^4 + \left(\frac{1-i\sqrt{7}}{2}\right)^4 = 1.$$

117. Uprostiti izraz

$$\left[1 + \frac{1+i}{2}\right] \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^2\right] \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^4\right] \left[1 + \left(\frac{1+i}{2}\right)^8\right].$$

118. Izračunati:

$$a) i^{25} + (-i)^{50} + i^{62} + i^{83};$$

$$b) i^{20} + i^{30} + i^{40} + i^{50} + i^{60} + i^{70};$$

$$c) (-i)^{63} - i^{102} + i^{-112} + i^{201};$$

$$d) i^{-256} + i^{602} + i^{408}$$

119. Odredi realni i imaginarni deo broja

$$z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n \text{ gde je } n \text{ prirodan broj}$$

*) Lajbnicova jednakost. Lajbnic je matematičar 18. v.

120. Izračunati $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}}$, ako je n prirodan broj.

121. Pokazati da je $(1+i)^4 - (1-i)^4$ realan broj.

122. Naći x i y iz jednačine

$$(3i-8)x + (2i-5)y = i$$

gde su x i y realni brojevi

123. Naći x i y iz jednačina:

a) $3x + xi - 2y = 12 - yi - i;$

b) $5x - 3yi + 2i = 6 - xi - y;$

c) $x + yi - 2 = 4xi + 3y + 3i;$

d) $(x+iy)(3-7i) = 2 + 4i;$

e) $(x+iy)(2+i) = 1 + 3i,$

gde su x i y realni brojevi.

124. $\frac{(x-4) + (y-1)i}{1+i} = 2 - 5i.$

125. Naći kompleksni broj z iz uslova:

a) $(2+i)z + 2z - 3 = 4 + 6i,$

b) $2z(3-5i) + z - 1 = -30 - 65i.$

126. Naći kompleksni broj z iz uslova:

$$(z+i)(1+2i) + (1+zi)(3-4i) = 1 + 7i.$$

Rastaviti na kompleksne činioce sledeće binome:

127. a) $x^2 + 1;$ b) $x^2 + 81;$ c) $4x^2 + 49.$

128. a) $a^2 + b^2;$ b) $a^2 + 36b^2;$ c) $16a^2 + 25b^2.$

129. a) $a + b;$ b) $a + 1.$

130. Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 - 3i.$

a) Sastaviti broj $z = x + iy$ tako da bude

$$\operatorname{Re}\{z \cdot z_1\} = 18 \quad \text{i} \quad \operatorname{Im}\left\{\frac{z}{z_1}\right\} = \frac{17}{13} \quad \checkmark$$

b) Grafički odrediti brojeve $z + z_1$ i $z - z_1$

c) Odrediti moduo broja $z.$

131. Ako je $\alpha = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, pokazati da je

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ i $\alpha^3 = 1$, zatim odredi realni i imaginarni deo kompleksnog broja

$$z = \frac{a\alpha^2 + b\alpha}{a + b\alpha^2}.$$

132. Pokazati da je

$$z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6} \text{ imaginaran broj.}$$

133. Dokazati da je

a) $(1+i)^{4k}$ realan broj;

b) $(1+i)^{4k+2}$ imaginaran broj ako je k prirodan.

III G L A V A

3. KVADRATNE FUNKCIJE

Izraz oblika $ax^2 + bx + c$ za $a \neq 0$ naziva se polinom funkcija drugog stepena sa jednom promenljivom, gde su a, b, c konstante, a x nezavisno promenljiva (argument), ovaj oblik se često naziva i opšti oblik kvadratne funkcije.

Za $a \neq 0, b = c = 0$, navedeni polinom svodi se na ax^2 .

Za $a \neq 0, c \neq 0, b = 0$ isti polinom svodi se na $ax^2 + c$.

Za $a \neq 0, b \neq 0, c = 0$ isti polinom svodi se na $ax^2 + bx$.

Polinomi: $ax^2, ax^2 + c$ i $ax^2 + bx$ su nepotpuni oblici kvadratnog polinoma.

Kvadratni trinom transformisan u obliku

$$y = ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

naziva se kanonički oblik kvadratnog trinoma.

Prethodni izraz kraće se piše

$$y = a(x - \alpha)^2 + \beta,$$

$$\text{gde je } \alpha = -\frac{b}{2a} \text{ i } \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Tačka $T(\alpha, \beta)$ je teme parabole, koja interpretira grafik posmatranog trinoma u Dekartovoj ravni XOY .

134. Date su funkcije: 1° : $y = x^2; y = 2x^2; y = \frac{1}{2}x^2$ i:

$$2^\circ: y = -x^2; y = -2x^2; y = -\frac{1}{2}x^2.$$

- Konstruisati grafik ovih funkcija u istom koordinatnom sistemu XOY
- Pomoću dobijenog grafika odrediti tok (rašćenje, opadanje, znak, nule i ekstremne vrednosti) datih funkcija.
- U zavisnosti znaka i promene koeficijenta, a što se može reći za grafik datih funkcija.

135. Data je funkcija $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$:

- Konstruisati grafik ove funkcije
- Pomoću grafika odrediti tok date funkcije.

136. Data je funkcija $y = -\frac{1}{4}x^2 + 1$:

- Konstruisati grafik ove funkcije,
- Pomoću grafika odrediti tok date funkcije.

137. Date su funkcije:

- $y = -x^2 + 9$; b) $y = \frac{1}{3}x^2 - 3$; c) $y = 2x^2 + 1$;
- $y = -\frac{1}{2}x^2 - 1$; e) $y = x^2 - 4$; f) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Konstruisati grafik datih funkcija i odrediti njihove promene za $x \in (-\infty, +\infty)$.

138. Konstruisati grafik funkcije $y = |x^2 - 1|$ i ispitati njene promene kad se nezavisno promenljiva x menja od $-\infty$ do $+\infty$.

139. Konstruisati grafik funkcije $y = |4 - x^2|$ i ispitati njen tok kod $x \in (-\infty, +\infty)$.

Date su funkcije (u zadacima od 140—144). Konstruisati njihove grafike u istom koordinatnom sistemu i ispitati promene za svako x :

140. a) $y = x^2 - 4x + 4$; b) $y = -x^2 - 4x - 4$.
 141. a) $y = x^2 - 6x + 9$; b) $y = -x^2 + 6x - 9$.
 142. a) $y = \frac{1}{3}(x-1)^2$; b) $y = -\frac{1}{3}(x-1)^2$.
 143. a) $y = 2x^2 - 8x + 8$; b) $y = -2x^2 - 8x - 8$.
 144. a) $y = -\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}$; b) $y = \frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}$.

Svedi na kanoničan oblik, zatim konstruiši grafik i odredi tok sledećih funkcija:

145. a) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x$; b) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.
 146. a) $y = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{2}$; b) $y = -2x^2 + 4x + 6$.
 c) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + 8$.
 147. a) $y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 1\frac{1}{2}$; b) $y = -\frac{1}{3}x^2 + 2x - 4$.
 c) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x + 4$.
 148. Konstruisati grafik i ispitati promene funkcije
 a) $y = |x - x^2| - x$; b) $y = x - |x + x^2|$.
 149. a) $y = x^2 - |x|$; b) $y = |x^2 - 3x + 2|$.
 150. $y = |x^2 - 1| - 1$.

151. Konstruisati grafik funkcije $y = -x^2 + 6|x| - 5$ i ispitati njene promene kad se x menja od $-\infty$ do $+\infty$.

152. Nacrtati grafik funkcije $y = 2x^2 - 4|x| - 6$ i ispitati njen tok.

153. a) $y = -|x^2 - x| + 2$; b) $y = -x^2 + 3|x| + 4$.

154. Data je funkcija $y = ax^2 + 2x + c$. Odrediti vrednost parametra a i c tako da funkcija ima nulu -2 , a njen grafik prolazi kroz tačku $M(3,5)$, zatim nacrtati grafik dobijene funkcije i proučiti njen tok.

155. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Odrediti koeficijente a, b i c tako da funkcija ima nulu 3, ekstremnu vrednost za $x = 1$ i da je $f(2) = -3$, zatim nacrtati grafik dobijene funkcije i ispitati njene promene.

156. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Odrediti koeficijente a, b i c tako da je

$f(2) = 0$, $f(3) = -7$ i $f(-2) = 8$, zatim ispitati promene dobijene funkcije.

157. Data je funkcija $f(x) = ax^2 + dx + c$.

Odrediti vrednosti parametara a, b i c tako da grafik funkcije prolazi kroz tačke $A(5,0)$, $B(4,-3)$ i da je $f(6) = 5$, zatim ispitati tok i skicirati grafik funkcije.

158. Data je funkcija $y = x^2 + px + q$, odrediti vrednost parametara p i q tako da:

- a) grafik funkcije seče apscisu osu u tački $A(-1,0)$, a ordinatu osu u tački $B(0,3)$
 b) grafik funkcije dodiruje apscisu osu u tački $T(4,0)$
 c) funkcija ima minimum -4 za $x = 1$.

159. Odrediti vrednost parametra p i q funkcije

$y = -x^2 + px + q$ tako da

- a) grafik funkcije seče apscisu osu u tačkama $A(1,0)$ i $B(3,0)$;
 b) Grafik funkcije dodiruje apscisu osu u tački $C(3,0)$
 c) Data funkcija ima maksimalnu vrednost 3 za $x = 2$.

160. U funkciji $y = (m + 2)x^2 + (1 - m)x + m$, odrediti vrednost parametra m , tako da za $+2$ funkcija ima maksimalnu vrednost. Za dobijene vrednosti parametra nacrtati grafik i ispitati tok funkcije.
161. U funkciji $y = (m - 1)x^2 + (m - 4)x - (m + 1)$, odrediti parametar m tako da funkcija postiže najmanju vrednost za $x = 1$. Zatim za dobijenu vrednost parametra konstruisati grafik i ispitati promene funkcije.
162. U funkciji $f(x) = (1 + k)x^2 - (4 + k)x + 8$
Odrediti parametar k tako da je $f(3) = -7$. Za nađenu vrednost parametra konstruiši grafik i ispitaj tok funkcije
163. U funkciji $y = (p - 1)x^2 - (p + 4)x + p + 3$, odrediti parametar p tako da funkcija ima nulu 5. Za nađenu vrednost parametra p nacrtaj grafik i ispitaj tok funkcije.
164. Data je funkcija $f(x) = (4 - \lambda)x^2 + (5 + \lambda)x - 3(\lambda + 1)$.
Odrediti parametar λ tako da grafik funkcije prolazi kroz tačku $M(3, 5)$, zatim skicirati grafik i ispitati njen tok.
165. Data je funkcija $y = ax^2 - 2x - 5$.
Odrediti parametar a tako da funkcija postiže maksimalnu vrednost -2 . Za nađenu vrednost ispitati tok i skicirati grafik funkcije.
166. U funkciji $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + c$, odrediti vrednost parametra c , tako da funkcija postiže minimum -8 .
167. U funkciji $y = x^2 + px + q$ odrediti parametre p i q tako da
a) Funkcija ima nule -2 i 3 .
b) Funkcija ima najmanju vrednost -1 za $x = 2$.
168. U funkciji $y = \lambda x^2 - (2\lambda + 1)x + 2(\lambda + 1)$
Odrediti λ tako da funkcija ima ekstremnu vrednost za $x = 2$. Za nađenu vrednost parametra ispitati tok i konstruisati grafik funkcije.
169. Dokazati da se kvadratni trinom $y = ax^2 + bx + c$ može predstaviti kao kvadrat binom ako i samo ako je $b^2 - 4ac = 0$.
170. Ako je $f(x) = ax^2 + bx + c$. Pokazati da je
 $f(x + 3) - 3f(x + 2) + 3f(x + 1) - f(x) \equiv 0$.

171. Data je $f(x) = x^2 - x + 1$; izračunati $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$, $f(a+1)$ i $f\left(\frac{1}{a}\right)$.

172. Ako je $f(x + 1) = x^2 - 3x + 2$, obrazovati funkciju $f(x)$.

173. Ako je $f(x + a) = x^2 + x + 2$, odrediti funkciju $f(x - a)$.

174. Data je funkcija $f(x) = x^2 - 6x + 6$.

Pokazati da su $3 + \sqrt{3}$ i $3 - \sqrt{3}$ nule funkcije.

175. Pokazati da je $x = \frac{\sqrt{b}}{1 - \sqrt{b}}$ nula funkcije

$$f(x) = \frac{1 - b}{\sqrt{b}}x^2 - 2x + \sqrt{b}, \text{ za } b > 0$$

176. Data je funkcija

$$y = \frac{a - b}{\sqrt{b}}x^2 - 2ax + a\sqrt{b}$$

Pokazati da su

$$x = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \text{ i } x = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \text{ nule.}$$

funkcije za $a > 0$ i $b > 0$.

177. Komad žice dug 40 m treba podeliti na četiri dela, tako da se od tih delova sastavi pravougaonik maksimalne površine. Kako treba podeliti taj komad žice?

178. Duž a podeliti na dve duži tako da suma trostrukog kvadrata prve duži i dvostrukog kvadrata druge duži bude minimalna.

179. Razložiti broj 18 na dva sabirka tako da suma kvadrata tih sabiraka bude minimalna.

180. Odrediti stranicu najmanjeg kvadrata, koji se može upisati u dati kvadrat stranice 6 cm.

181. Komad žice dužine 56 cm. treba podeliti na dva dela, od jednog dela napraviti kvadrat, od drugog pravougaonik, čija je osnovica tri puta veća od visine. Gde treba preseći žicu da bi zbir površina, tako nastalih figura bio najmanji?

182. Uglovi na većoj osnovici trapeza su po 60° , njegov obim iznosi 200 cm. Kolika mora biti osnovica trapeza da bi njegova površina bila maksimalna?

183. U pravouglom trouglu čije su katete a i b upisan je pravougaonik maksimalne površine, tako da se jedno teme pravougaonika poklapa sa temenom pravog ugla trougla, a ostala tri leže na stranama trougla. Odrediti dimenzije i površinu pravougaonika.

184. U trouglu osnovice a i visine h upisati pravougaonik maksimalne površine, tako da mu dva temena leže na osnovici trougla, a druga dva na drugim dvema stranama. Izračunati dimenzije i površinu pravougaonika.

185. U polukružnici prečnika 10 cm. upisati trapez kome je duža osnova prečnik, a da mu obim ima maksimalnu vrednost.

186. U kvadrat strane a cm upisan je pravougaonik maksimalne površine, čije su strane paralelne sa dijagonalama kvadrata. Kolike su dimenzije pravougaonika?

187. Obe katete jednog pravouglog trougla iznose a cm. Kako treba izabrati katete da bi hipotenuza bila minimalna?

188. Odrediti najmanju vrednost izraza $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ ako su x i y pozitivni realni brojevi takvi da je $x + y = 5$. (Takmičenje II stupnja iz matematičke škole 1968—69 g.)

189. Neka je M proizvoljna tačka date duži $AB = a$. Nad $AM = x$ konstruisan je kvadrat $AMCD$, pa je nad duži BC opet konstruisan kvadrat $BEFC$. Odredi položaj tačke M tako da površina šestougla $ABEFC$ bude što manja.

190. U $\triangle ABC$ poznate su dve strane $BC = a$, $AC = b$ i visina $CD = h$.

- Na datoj visini odrediti tačku M tako da zbir kvadrata njenih rastojanja od temena trougla ima najmanju moguću vrednost.
- Ako je dati trougao jednakokraničan izraziti veličinu dobijenog minimuma pomoću strane a trougla.

191. Naći maksimalnu vrednost funkcije $y = (a + x)(b - x)$

192. Naći najmanju vrednost funkcije $y = (x - a)^2 + (x - b)^2 + (x - c)^2$

193. Data su dva trinoma

$$x^2 - (a + b)x + ab \text{ i } x^2 - (a - b)x - ab.$$

Dokazati:

a) Da je zbir njihovih najmanjih vrednosti $-\frac{a^2 + b^2}{2}$;

b) Da je zbir vrednosti od x u oba trinoma za koje oni dobijaju najmanju vrednost a .

194. Dat je skup parabola $y = (m - 1)x^2 + 2mx + 4$ (m je realan broj)

- Pokazati da sve parabole datog skupa prolaze kroz dve fiksne tačke A i B i odrediti te tačke.
- Odrediti onu parabolu datog skupa koja dodiruje x -osu i parabolu čije je teme tačka B (B ne leži na x -osu).

195. Dat je skup parabola $y = x^2 - (k + 1)x + k$ (k realan broj)

- Odrediti geometrijsko mesto temena datih parabola kada se k menja.
- Odrediti fiksnu tačku kroz koju prolaze sve date parabole.
- Grafički predstaviti parabole iz datog skupa za razne vrednosti k .

196. Dat je skup parabola $y = ax^2 - 2x + 1$ (a realan broj)

- Odrediti geometrijsko mesto temena datih parabola kada se a menja.
- Odrediti fiksnu tačku kroz koju prolaze sve date parabole.
- Grafički predstaviti parabole iz datog skupa za razne vrednosti a .

197. Date su funkcije:

$$y = x^2 - mx + m - 1$$

$$y = x^2 - 2x + m,$$

- Odrediti parametar m tako da ekstremne vrednosti ovih funkcija budu jednake;
- Za nadenu vrednost parametra m rešiti algebarski i grafički sistem nejednčina:

$$x^2 - mx + m - 1 < 0$$

$$x^2 - 2x + m > 0.$$

198. Data je funkcija: $x^2 - 2kx - 1 + 2k^2 - y = 0$. Gde je k realan parametar.

- Naći geometrijsko mesto minimuma funkcije kad se k menja.
- Na osnovu tog geometrijskog mesta ispitati prirodu nula date funkcije.

199. Odrediti najmanju vrednost polinoma

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 6y^2 - 12x + 2y + 45.$$

200. Odrediti maksimalnu vrednost polinoma

$$f(x, y) = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x + 10y - 3.$$

201. Dokazati da je funkcija

$$f(x, y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x - 10y + 20$$

pozitivna za svako x i y .

IV G L A V A

4. KVADRATNA JEDNAČINA S JEDNOM NEPOZNATOM

Jednačine oblika

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ za } a \neq 0 \quad (1)$$

Naziva se potpuna kvadratna jednačina s jednom nepoznatom.

Ako su koeficijenti b ili c jednaki nuli, jednačina postaje nepotpuna kvadratna jednačina i tada mogu nastupiti sledeći slučajevi:

1° Ako je nezavisni član c jednak nuli jednačina (1) se svodi na

$$ax^2 + bx = 0 \quad (2)$$

Jednačina (2) ima dva rešenja i to

$$x_1 = 0 \text{ i } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Jedno rešenje je uvek jednako nuli; ako je i $b = 0$, jednačina (2) postaje $ax^2 = 0$, tada su oba rešenja jednaka nuli.

2° Ako je $b = 0$, a $c \neq 0$ tada jednačina (1) ima oblik

$$ax^2 + c = 0. \quad (3)$$

Jednačina (3) ima dva rešenja i to

$$x_1 = \sqrt{-\frac{c}{a}} \text{ i } x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}.$$

Ova rešenja su realna ako je $-\frac{c}{a}$ pozitivno, a imaginarna ako je $-\frac{c}{a}$ negativno.

Potpuna kvadratna jednačina (1) ima dva korena i to

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Priroda rešenja potpune kvadratne jednačine zavisi od potkorene veličine (diskriminante)

$D = b^2 - 4ac$ i mogu nastupiti ovi slučajevi:

1° $b^2 - 4ac > 0$, rešenja su realna i različita.

2° $b^2 - 4ac = 0$, rešenja su realna i jednaka.

3° $b^2 - 4ac < 0$, rešenja su konjugovano — kompleksna

Obrasci za rešavanje potpune kvadratne jednačine:

Jednačina (1) se rešava obrascem

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (A)$$

Ako jednačina (1) ima oblik $ax^2 + 2kx + c = 0$, tj. linearni koeficijent je paran broj, koristi se obrazac

$$x_{1/2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}, \quad (B)$$

za $a = 1$ obrazac (B) ima oblik

$$x_{1/2} = -k \pm \sqrt{k^2 - c} \quad (C)$$

Veze*) između rešenja i koeficijenta jednačine

*) Obrasci koji predstavljaju vezu između rešenja i koeficijenata kvadratne jednačine poznati su pod imenom Vietovi obrasci po imenu velikog francuskog matematičara Fransıo Vietee (1540—1603). Viet je jedan od osnivača simboličke algebre.

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad (1)$$

Zbir rešenja jednak je količniku koeficijenata linearnog člana sa promenjenim znakom i koeficijenta kvadratnog člana.

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad (2)$$

Proizvod rešenja jednak je količniku slobodnog člana i koeficijenta kvadratnog člana.

Rešiti jednačine:

$$202. \text{ a) } 4x^2 - 2\frac{7}{9} = 0; \quad \text{ b) } 1\frac{2}{3} - \frac{5}{36}x^2 = 1\frac{2}{5};$$

$$\text{ c) } 0,04x^2 - 0,7225 = 0.$$

$$203. \text{ a) } k^2x^2 - a^2 + 2ab - b^2 = 0; \quad \text{ b) } x(x + a) = a(x + a);$$

$$\text{ c) } y^2 - m^2 = 2(y + k)(y - k) - m^2.$$

$$204. \text{ a) } \frac{3}{4}x^2 - 1\frac{2}{3}x = \frac{1}{3}x^2 + x;$$

$$\text{ b) } (x - 2)^2 + (2x + 3)^2 = 13 - 4x;$$

$$\text{ c) } (2x - 15)(2x - 7) - (x - 36)(x - 8) + 36 = 0.$$

$$205. \text{ a) } a^2x^2 + bx = b^2x + ax; \quad \text{ b) } mx^2 - m^2x = nx^2 - n^2x;$$

$$\text{ c) } (y - m)^2 + (y + n)^2 = m^2 + n^2.$$

$$206. \text{ a) } (x - a)^2 - 2x(x - a) + a^2 = 0;$$

$$\text{ b) } m^2(x^2 - 25) = n^2(x^2 - 25);$$

$$\text{ c) } (x + a) : (x - b) = (b + x) : (a - x).$$

$$207. \text{ a) } (m + 2y)(m - 2y) = 5(2k - y)(2k + y) + m^2;$$

$$\text{ b) } (a - x)(b + x) + (1 - ax)(1 + bx) = ab(1 - x^2).$$

$$208. \text{ a) } \frac{x+4}{x-4} + \frac{x-4}{x+4} = 3 \frac{1}{3}; \quad \text{ b) } \frac{34}{4x^2-1} + \frac{2x+1}{1-2x} = \frac{2x-1}{2x+1};$$

$$\text{ c) } \frac{5-x}{x+5} + \frac{5+x}{5-x} = \frac{100}{25-x^2}; \quad \text{ d) } \frac{x+2}{x-2} + \frac{x-2}{x+2} = 2 \frac{1}{6}$$

$$209. \frac{3x^2-1}{2} + \frac{2x+1}{3} = \frac{x^2-2}{4} + \frac{1}{3}.$$

$$210. \frac{(2x+3)^2}{3} - \frac{(3x-2)^2}{5} - \frac{11}{5} = 0.$$

$$211. \frac{x-1}{3} + \frac{1}{2}x^2 = \frac{3(x-1)}{8} - \frac{x+11}{24}.$$

$$212. 1 + 2x + x^2 = \left(1 + \frac{2x}{p^2} + \frac{x^2}{p^4}\right)p^2.$$

$$213. \frac{2a+b+y}{y+2a-b} = \frac{y-2a+b}{2a+b-y}.$$

$$214. \frac{b+x}{a-x} - \frac{b-x}{a+x} = \frac{(a^2-b^2)x^2}{a^2-x^2}.$$

$$215. \frac{x^2-a^2}{b^2} - \frac{2a^2+2b^2}{ab} = \frac{b^2-x^2}{a^2} + 2.$$

$$216. \frac{x^2-a^2}{b^2} + \frac{x^2-b^2}{a^2} + \frac{x^2+a^2+b^2}{ab} = 0.$$

$$217. \frac{2x-1}{x^2+2x-3} - \frac{3x+1}{x^2-6x+5} = \frac{x-20}{x^2-2x-15}.$$

$$218. \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} = 0.$$

$$219. \text{ Data je jednačina } ax^2 - 2bx = 0. \text{ Koja relacija postoji između koeficijenata } a \text{ i } b, \text{ ako je jedno rešenje ove jednačine } 4?$$

$$220. \text{ Za koje vrednosti parametra } \lambda \text{ u jednačini } x^2 - 5(\lambda^2 - 4)x - 2\lambda + 3 = 0.$$

a) koreni su suprotni;

b) jedan koren je jednak nuli i rešiti je u oba slučaja.

$$221. \text{ Za koju vrednost parametra } \lambda \text{ jednačina } (12 - 3\lambda)x^2 - 17\lambda + 3 = 0$$

ima jedan koren -4 ?

$$222. \text{ Data je jednačina } (2a - 1)x^2 - 15b + 25 = 0.$$

Koja relacija postoji između koeficijenata a i b , ako je jedno rešenje jednačine -5 ?

$$223. \text{ Odrediti tri broja od kojih srednji je za 5 veći od najmanjeg i za 5 manji od najvećeg ako se zna da je proizvod krajnjih brojeva jednak nuli.}$$

$$224. \text{ Visina jednakokrakog trougla jednaka je } \frac{2}{3} \text{ osnovice. Odrediti stranice i visinu jednakokrakog trougla, ako mu je površina } 48 \text{ cm}^2.$$

$$225. \text{ Površina pravilnog šestougla je } 96\sqrt{3} \text{ cm}^2. \text{ Izračunati stranicu šestougla.}$$

$$226. \text{ Koji broj pomnožen sa svojom petinom daje proizvod koji je 5 puta veći od samog broja?}$$

$$227. \text{ Ako se od kvadrata nekog broja oduzme proizvod tog broja i broja 7, dobijena razlika je tri puta veća od samog broja. Odrediti taj broj.}$$

$$228. \text{ Odrediti parametar } \lambda \text{ tako da jednačine:}$$

$$\text{ a) } (\lambda - 2)x^2 - \lambda + 1 = 0; \quad \text{ b) } \lambda x^2 + 4 = x^2;$$

$$\text{ c) } x^2 - \lambda = 2\lambda x^2 + 3; \quad \text{ d) } (3 - \lambda)x^2 - 2 = \lambda;$$

$$\text{ e) } 2\lambda x^2 - 10 = x^2;$$

$$\text{ f) } (5x^2 - 1)\lambda = 10x^2.$$

imaju realna rešenja.

Rešiti jednačine:

229. $(1-x)(4\sqrt{2}-2x)(4-x\sqrt{3})=0$.
230. $(4x-12)(x\sqrt{2}-1)(2x\sqrt{3}-3)=0$.
231. a) $(x-2)^2-9=0$; b) $(x+1)^2-25=0$;
c) $(3x+4)^2+25=0$; d) $(x-5)^2+5=0$.
232. a) $x^2-5x+6=0$; b) $x^2-3x-28=0$;
c) $2x^2-5x-25=0$; d) $y^2+12y-13=0$.
233. a) $x^2-4ax+3a^2=0$; b) $x^2+2a^3x-35a^6=0$;
c) $x^2-6x+58=0$; d) $x^2-4x+13=0$.
234. a) $x^2+2bx-a^2+8ab-15b^2=0$;
b) $x^2+3ax+2a^2+a-1=0$;
c) $9x^2-36x+37=0$; d) $z^2-8z+41=0$.
235. a) $x^2-0,11x+0,001=0$; b) $0,2x^2-1,34x-0,42=0$;
c) $x^2+a^nx=a^{3n}x+a^{4n}$; d) $(a^2-b^2)x^2-(a^2+b^2)x+ab=0$.
236. a) $(z-3)^2+(z-4)^2=(z-5)^2+5$;
b) $(2x-3)^2-(2x-5)=4(x-3)^2+12$;
c) $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)+(x-3)(x-1)=0$.
237. $(x+1)(x+2)(x+3)-(x+4)(x+3)(x+2)=x-5$.
238. $\frac{2x^2}{3}-1\frac{1}{2}x-1\frac{1}{4}=1\frac{1}{3}x-3\frac{3}{4}$.
239. $\frac{2}{3}y^2-2\frac{2}{9}y-1\frac{1}{2}y+5=\frac{2}{9}y^2-\frac{17}{18}y+1$.
240. $\frac{y+1}{3}+\frac{3(y-1)}{4}=(y-3)^2+1$.

241. $\frac{(x-20)(x-10)}{10}-\frac{(34-x)(40-x)}{2}+\frac{(30-x)(5-x)}{3}=0$.
242. $\frac{2x+1}{x+3}-\frac{x-1}{x^2-9}=\frac{x+3}{3-x}-\frac{4+x}{3+x}$.
243. $\frac{2x}{x-9}-\frac{x^2+25}{x^2-81}=\frac{5}{x+9}-\frac{5}{x-9}$.
244. $\frac{5x}{2x^2-x-1}-\frac{5}{2x+1}=\frac{4x-5}{x^2-1}$.
245. $\frac{x(x+5)}{x^2-8x+12}+\frac{x+1}{x+7}=\frac{2x-2}{x+7}+\frac{12(x-1)}{x^2-8x+12}$.
246. $\frac{2x-5}{x-11}+\frac{7-3x}{(x-6)^2+1}=\frac{x-4}{x-11}+\frac{(x-3)^2}{(x-6)^2+1}$.
247. $\frac{x(x+5)}{x^2-8x+29}-\frac{x}{x+5}=\frac{4}{x+5}-\frac{3x+16}{x^2-8x+29}$.
248. $\frac{2x+1}{x^2+x-6}-\frac{x-1}{x^2-5x-6}=\frac{6}{x^2-9}$.
249. $\frac{1}{x^2-3x-10}-\frac{1}{x^2+7x+10}=\frac{1}{x^2-4}+\frac{1}{x^2-7x+10}$.
250. $(x-c)^2+(x-d)^2=c^2+d(d-2c)$.
251. $(x-a)^2+(x-b)^2=x^2-x(a+b)+a(a-b)+b^2$.
252. $x(b+x-3a)+a(2a+b)=6b^2$.
253. $(1+\sqrt{2})x^2-2(1-\sqrt{2})x-3\sqrt{2}+1=0$.
254. $x^2-(3+2\sqrt{5})x+7+3\sqrt{5}=0$.
255. $x^2-(3-2\sqrt{2})x+4-3\sqrt{2}=0$.

$$256. |x-1| + x^2 - 3x + 2 = 0. \quad 257. x^2 + 3|x| + 2 = 0.$$

$$258. x^2 - 8|x| + 15 = 0.$$

$$259. x^2 + |x+3| + |x-3| = 4,5|x| + 6.$$

$$260. x^2 + 2x - 3|x+1| + 3 = 0. \quad 261. |x-1| \cdot |x+2| = 4.$$

$$262. |x^2 - 3|x| + 1| = 1. \quad 263. |x^2 - 8x + 12| = x^2 - 8x + 12.$$

$$264. 2x|x-3| + |x+5| = 0.$$

$$265. \text{Data je jednačina } 2x^2 - x(a+b) + \sqrt{ab}(a+b-2x) = 0.$$

Pokazati da je jedno rešenje aritmetička, a drugo geometrijska sredina brojeva a i b .

$$266. \text{Data je jednačina } 2(a+b)x^2 - (a+b)^2x - 2ab(2x-a-b) = 0. \text{ Pokazati da je jedno rešenje aritmetička, a drugo harmonijska sredina brojeva } a \text{ i } b.$$

Rešiti po x jednačine:

$$267. \frac{m^2}{m-x} + \frac{x^2}{x-m} = 1 + nx$$

$$268. \frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$$

$$269. \frac{x-n}{x-m} + \frac{x-m}{x-n} = \frac{10}{3}. \quad 270. \frac{x+m}{x-n} - \frac{x-n}{x+m} = 1 \frac{1}{2}.$$

$$271. \frac{a+4b}{x+2b} - \frac{a-4b}{x-2b} = \frac{4b}{a}. \quad 272. \frac{a+6b}{x+3b} - \frac{a-6b}{x-3b} = \frac{6b}{a}.$$

$$273. \frac{a-x^2}{(a-x)^2} - \frac{1}{a} = \frac{a-1}{a^3 - ax(2a-x)}.$$

$$274. \frac{1}{2n+nx} - \frac{1}{2x-x^2} = \frac{2(n+3)}{x^2-4x}.$$

$$275. \frac{x+1}{x^2-3x} + \frac{x}{2x^2-18} - \frac{2x-3}{x^2+3x} = \frac{18}{10x-30}.$$

$$276. \frac{a}{nx-x} - \frac{a-1}{x^2-2nx^2+n^2x^2} = 1.$$

$$277. \frac{\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2}{x^2+a^2-2ax} = \frac{5}{9x^2}.$$

$$278. \text{U jednačini } 4x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3m - 1 = 0. \text{ Odrediti parametar } m \text{ tako da koreni jednačine budu jednaki.}$$

U jednačini odrediti parametar λ tako da one imaju dvostruko rešenje:

$$279. x^2 - 2(\lambda-2)x - (2\lambda-4) = 0.$$

$$280. x^2 + 2(3-\lambda)x - 3 + 2\lambda = 0.$$

$$281. 3\lambda x^2 + 2(3\lambda+4)x + 3\lambda - 5 = 0.$$

$$282. (\lambda+1)x^2 + 2(\lambda-1)x + 4\lambda + 1 = 0.$$

$$283. (2\lambda-1)x^2 + (\lambda+2)x + \lambda-1 = 0.$$

Odrediti prirodu rešenja kad se parametar m menja od $-\infty$ do $+\infty$ u sledećim jednačinama:

$$284. (m-2)x^2 - (m+1)x + m+1 = 0.$$

$$285. (m-2)x^2 - (m+1)x + 4 = 0.$$

$$286. (4m-3)x^2 + 2(3m-2)x + 7-6m = 0.$$

$$287. m^2x^2 - m(5m+1)x - (5m+2) = 0, m \neq 0$$

288. Odrediti sve vrednosti parametra a , za koje jednačina

$$\frac{2x}{a^2 + 3a} - \frac{1}{3a - a^2} = \frac{x^2 + 8}{a^2 - 9}$$

ima realna rešenja.

289. Odrediti sve vrednosti parametra b , za koje jednačina

$$\frac{9}{b^2 - 16} - \frac{2x}{b^2 + 4b} + \frac{x^2}{4b - b^2} = 0$$

ima realna rešenja.

290. Rešiti jednačinu

$$\frac{x-a}{x-2} + \frac{10}{x+2} + \frac{44}{x^2-4} = 0.$$

Za koje vrednosti parametra a jednačina ima dva realna nejednaka korena.

291. Rešiti jednačinu

$$\frac{2x}{x+3} + \frac{kx-2}{x^2-9} = \frac{x-1}{x-3}.$$

Za koje vrednosti parametra k jednačina ima dva realna nejednaka korena.

292. U sistemu

$$\begin{cases} kx + 4y = 5 \\ (k+3)x + ky = 7,5 \end{cases}$$

Odrediti parametar k tako da sistem bude nemoguć.

293. Data je jednačina $a(b-c)x^2 + b(c-a)x + c(a-b) = 0$.

Pokazati da su za svako a, b i c [ako je $a(b-c) \neq 0$] rešenja date jednačine realna i odrediti rešenja.

294. Ako je $a+b \neq 0$ jednačina

$$(a+b)^2 x^2 - (a-b)(a^2-b^2)x - 2ab(a^2+b^2) = 0.$$

ima realna rešenja. Dokazati, zatim rešiti jednačinu.

295. Data je jednačina

$$(a+b)x^2 - (a^2+4ab+b^2)x + 2ab(a+b) = 0, \text{ gde su } a \text{ i } b \text{ ma koja dva broja koja nisu istovremeno jednaki nuli, } a+b \neq 0, \text{ rešenja jednačine su realna. Dokazati.}$$

296. Dati su izrazi:

$$A = (2x^2 + x - 20)^2 - (2x - x - 16)^2$$

$$B = (x^2 - 9)(x + 3)$$

a) Skratiti razlomak $y = \frac{A}{B}$

b) Rešiti jednačine $A = 0$ i $y = 2$.

297. Uprostiti izraz

$$f(x) = x^2(x+1) \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2x^2+2x} + \frac{1}{x^3+x^2} \right)$$

zatim rešiti jednačinu:

$$f(x) = x - \frac{1}{2}.$$

298. Date su funkcije:

$$f(x) = (2x+5)^2 + 8x + 20 + 4x^2 - 25$$

$$g(x) = (3x+4)^2 - (x-1)^2$$

a) Rešiti jednačinu $f(x) = 0$

b) Skratiti razlomak $\frac{f(x)}{g(x)}$ i

rešiti jednačinu

$$\frac{f(x)}{g(x)} = 2.$$

299. Data je funkcija

$$f(x) = \frac{\frac{x+1}{x-1} - 2}{\frac{4}{x-1} - \frac{x+1}{2}}.$$

Rešiti jednačine

a) $f(x) = 0$.

b) $f(x) = 4$.

300. Ako je

$$f(x) = \frac{x^2 - 10x + 9}{(x-1)^2 - (1-x)(3-2x)}.$$

Rešiti jednačine

a) $f(x) = 3$

b) $f(x) = -1$.

301. Ako je

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 2 \\ 2x-3, & x < 2, \end{cases}$$

rešiti jednačinu $[f(x)]^2 = 4x + 1$

302. Zbir kvadrata od 3 sukcesivna parna broja je 200. Odrediti ove brojeve.

303. Naći tri sukcesivna cela broja čija je suma kvadrata 110.

304. Razlika kubova dva sukcesivna cela broja je 91. Koji su to brojevi?

305. Naći dvocifren broj, čija je cifra jedinica za 1 veća od cifre desetice, a proizvod traženog broja i zbir njegovih cifara jednak je 616.

306. Cifre desetice dvocifrenog broja je za 2 veća od cifara jedinica. Ako podelimo taj dvocifren broj zbirom njegovih cifara, dobija se količnik za 40 manji od broja napisan isti ciframa obrnutim redom i ostatak 4. Naći ovaj broj.

307. Dva planinara su krenula istovremeno na kotu koja je udaljena 30 km od njih. Jedan od njih prelazi 1 km više na čas od drugog, radi toga stiže na kotu jedan čas ranije. Koliko kilometara na čas prelazi svaki od planinara?

308. Dve slavine pune bazen za $1\frac{7}{8}$ časa, jedna slavina odvojeno može da napuni isti bazen dva časa ranije od druge. Za koje vreme svaka slavina odvojeno puni bazen?

309. Dva radnika treba da svrše jedan posao. Ako rade zajedno svršiće ga za 12 dana. Jednom radniku potrebno je 10 dana više da svrši taj posao nego drugom radniku. Za koje bi vreme svaki od njih svršio taj posao.

310. U kom mnogouglu broj strana jednak je broju dijagonala?

311. Koji poligon ima 170 dijagonala.

312. Stranica jednog kvadrata je za 2 m veća od stranice drugog kvadrata. Odrediti stranice ovih kvadrata ako se njihove površine odnose kao 9 : 4.

313. Data je kružnica poluprečnika R sa centrom u O i fiksna tačka A na njoj. Odrediti položaj promenljive tetive BC koja je normalna na poluprečnik OA tako da je

$$\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 = 4l^2 \quad (l \text{ data duž})$$

314. Data je polukružnica nad prečnikom $\overline{AB} = 2R$. Iz tačke M ove polukružnice spuštenu je normala $\overline{MN}$ na tangentu u tački B . Izračunati duž $\overline{AM} = x$ tako da je

$$\overline{AM} + \overline{MN} = \frac{9}{4} R.$$

315. Data je polukružnica nad prečnikom $AB = 2R$. Odrediti na polukružnici tačku M bliže tački A nego B tako da je tetiva MN paralelna sa AB i da je

$$AM^2 + mMN^2 = (m-1) R^2 \quad (m \text{ je dati broj})$$

316. Dat je jednakokraničan trougao ABC . Na njegovoj stranici $AB=a$ uočena je proizvoljna tačka M ; iz te tačke spuštenu je normala MP na stranicu BC , a normala MQ na stranu AC . Neka je $AM = x$

a) Izraziti duž PQ i površinu trougla MPQ u funkciji od a i x .

b) Odrediti položaj tačke M tako da duž PQ ima dužinu kh , gde je k dati pozitivan broj, h visina trougla ABC . U kojim granicama mora ležati k da zadatak bude moguć?

- c) Odrediti položaj tačke M i tako da površina trougla MPQ ima vrednost λP , gde je λ dati pozitivan broj, a P površina trougla ABC . U kojim granicama mora ležati λ da zadatak bude moguć?

317. Izračunaj hipotenuzu pravouglog trougla znajući hipotenuzinu visinu h i zbir kateta s .

Koristeći Vietove obrasce sastavi jednačinu čija su rešenja:

- 318.** a) $x_1 = -7$ i $x_2 = -3$; b) $x_1 = 2\frac{2}{3}$ i $x_2 = 1\frac{1}{2}$
c) $x_1 = 2\sqrt{3}$ i $x_2 = \sqrt{3}$; d) $x_1 = 5 + \sqrt{2}$ i $x_2 = 5 - \sqrt{2}$.

319. a) $x_1 = \frac{5 + 3\sqrt{2}}{6}$ i $x_2 = \frac{5 - 3\sqrt{2}}{6}$

b) $x_1 = 2 - 3i$ i $x_2 = 2 + 3i$;

c) $x_1 = 3 + \sqrt{3}i$ i $x_2 = 3 - \sqrt{3}i$;

d) $x_1 = \frac{1}{a}$ i $x_2 = \frac{1}{b}$.

320. a) $x_1 = \frac{a}{a+b}$ i $x_2 = \frac{b}{a-b}$;

b) $x_1 = \frac{a}{a-1}$ i $x_2 = \frac{b}{b-1}$;

c) $x_1 = a + \sqrt{b}$ i $x_2 = a - \sqrt{b}$;

d) $x_1 = \frac{2 + \sqrt{13}}{4}$ i $x_2 = \frac{2 - \sqrt{13}}{4}$

321. Data je jednačina $3x^2 - x - 7 = 0$ čija su rešenja x_1 i x_2

a) Nerešavajući jednačinu izračunaj

$$x_1^3 + x_2^3 \text{ i } x_1^3 \cdot x_2^3.$$

b) Sastavi jednačinu po y čija su rešenja

$$y_1 = x_1^3 \text{ i } y_2 = x_2^3.$$

c) Izračunati

$$A = 4x_1^3 - 3x_1x_2^3 - 3x_2x_1^3 + 4x_2^3.$$

322. Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine $5x^2 - 3x - 1 = 0$,

Izračunati vrednost sledećih izraza:

$$y_1 = 2x_1^3 - 3x_1^2x_2 + 2x_2^3 - 3x_1x_2^2$$

$$y_2 = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_1}{x_2+1} + \frac{x_2}{x_1} + \frac{x_2}{x_1+1} - \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)^2.$$

323. Data je jednačina $2x^2 - x - 2 = 0$, čija su rešenja x_1 i x_2 . Izračunati ne rešavajući jednačinu vrednost izraza.

$$A = \frac{x_1^2}{x_2+1} + \frac{x_2^2}{x_1+1}$$

324. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine $6x^2 - 5x + 1 = 0$. Ne rešavajući datu jednačinu formiraj jednačinu drugog stepena po y čija su rešenja.

$$y_1 = \frac{x_1+1}{x_1-1} \text{ i } y_2 = \frac{x_2+1}{x_2-1}.$$

325. Data je jednačina $3x^2 + 5x - 6 = 0$, čija su rešenja x_1 i x_2 . Ne rešavajući datu jednačinu, formirati jednačinu drugog stepena po y sa rešenjima:

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \text{ i } y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$$

326. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine.

$$x^2 - 2x + \lambda = 0 \quad (\lambda \neq 0)$$

i neka su y_1 i y_2 vrednosti koje dobija trinom

$$y = x^2 + \lambda x + \lambda^2,$$

kad se zameni x sa x_1 i x_2 .

Pokazati da vrednost izraza

$$E = \lambda \left(\frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3} \right) - 2 \left(\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} \right) + \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \right)$$

ne zavisi od parametra λ .

327. U jednačini $(m+3)x^2 - 3mx + 2m = 0$ odrediti parametar m tako da je $2x_1 - x_2 = 3$, gde su x_1 i x_2 rešenja odgovarajuće jednačine.

Odrediti parametar m tako da u sledećim jednačinama između rešenja postoji data relacija; zatim rešiti jednačine:

328. $mx^2 - 2(m+1)x + (m-4) = 0$, relacija

$$(4x_1 + 1)(4x_2 + 1) + 2 = 20.$$

329. $(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m = 0$, relacija $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{5}{4}$

330. $x^2 - mx - m^2 - 5 = 0$, relacija $\frac{4}{x_1 x_2} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - \frac{1}{2}$

331. $x^2 - 2mx + m^2 + 1 = 0$, relacija $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

332. $3(m-1)x^2 - 4(m-1)x + 2m - 1 = 0$, relacija $x_2 = 3x_1$.

333. $x^2 - 3mx + m^2 = 0$, relacija $x_1^2 + x_2^2 = 1,75$.

334. $(m-2)x^2 - 2mx + 2m - 3 = 0$, relacija $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = \frac{10}{3}$

335. $x^2 + (m-3)x + 1 - 2m = 0$, relacija $\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} \right) + 3 = 0$.

336. $x^2 - x + m = 0$, relacija $x_1^3 + x_2^3 = 7$.

337. U jednačini

$$kx^2 - (2k+1)x + 1 = 0$$

odrediti parametar k tako da:

a) $x_1^2 + x_2^2 = 3$,

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = 5$.

b) $x_1 x_2^2 + x_1^2 x_2 = 4$,

338. U jednačini $2x^2 + 5x + 2m^2 - 4m + 2 = 0$ odrediti m tako da njeni koreni zadovoljavaju relaciju $x_1 - 2x_2 = 1$.

339. Odrediti vrednost parametra m za koje jednačina

$$(m-2)x^2 - 2(m-1)x + m - 3 = 0 \quad (m \neq 2)$$

ima realna rešenja i formirati relaciju nezavisnu od parametra m , koja egzistira između rešenja.

340. Data je jednačina

$$8x^2 - 4(m-2)x + m(m-4) = 0, \text{ gde je } m \text{ parametar.}$$

a) za koje vrednosti parametara m data jednačina ima realna rešenja

b) Formirati relaciju nezavisnu od parametra m , koja postoji između rešenja x_1 i x_2 date jednačine.

341. Data je jednačina $x^2 - 2(m+1)x + 3m + 1 = 0$.

a) Odrediti prirodu rešenja kad se parametar m menja.

b) Odrediti parametar m tako da je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + 2)(x_2 + 2) - 2(x_1 + x_2).$$

c) Sastaviti jednačinu po y tako da joj rešenja budu

$$y_1 = 2x_1 - 3x_2 \text{ i } y_2 = 2x_2 - 3x_1.$$

U dobijenoj jednačini odrediti m tako da je

$$2y_1 - 3y_2 = 1.$$

342. Za koje vrednosti parametra m jednačina:

$$(m-2)x^2 - 2(m+1)x + m + 3 = 0.$$

je suma kvadrata njenih rešenja jednaka 52?

Reši jednačinu u ovom slučaju.

343. Za koje vrednosti parametra m jedan od korena jednačine $2x^2 - (2m + 1)x + m^2 - 9m + 39 = 0$ je dva puta veća od drugog? Za nađene vrednosti parametra m reši jednačinu.

344. U jednačini $x^2 - 2(3m - 1)x + 2m + 3 = 0$, odrediti m iz uslova da je suma njenih rešenja jednaka sumi njenih kubova.

345. Napisati kvadratnu jednačinu čija su rešenja jednaka četvrtim stepenima rešenja jednačine

$$x^2 + px + q = 0.$$

Za svaku od sledećih jednačina naći relaciju između rešenja, koja ne zavisi od parametra m .

346. $3(m - 1)x^2 - 4mx - 2m + 1 = 0.$

347. $mx^2 - (2m - 1)x + m + 2 = 0.$

348. $(m + 2)x^2 - (2m + 1)x + \frac{3m}{4} = 0.$

349. Data je jednačina $x^2 - 2(a + 1)x + 3a + 2 = 0$, gde je a realan parametar.

- Diskutovati realnost rešenja.
- Naći vezu između korena x_1 i x_2 koja je nezavisna od parametra a .
- Na osnovu te veze odrediti korene date jednačine tako da budu jednaki.
- Odrediti vrednost parametra a tako da zbir korena date jednačine bude jednak zbiru njihovih kubova.

350. Rešenja x_1 i x_2 kvadrata jednačine zadovoljavaju relacije:

$$x_1 + x_2 - 2x_1x_2 = 0.$$

$$mx_1x_2 - (x_1 + x_2) = 2m - 1.$$

- Formirati ovu jednačinu.
- Za koje vrednosti parametra m rešenja su realne.
- Odrediti parametar m da oba rešenja budu pozitivna.

351. Koreni x_1 i x_2 jedne kvadratne jednačine vezani su relacijama

$$x_1x_2 + x_1 + x_2 = a$$

$$x_1x_2 - a(x_1 + x_2) = -1.$$

Obrazovati ovu kvadratnu jednačinu i odrediti za koje su vrednosti parametra a njeni koreni realni.

352. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0).$$

Izraziti u funkciji od a , b i c sledeće izraze:

a) $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$; b) $x_1^4 + x_2^4$; c) $x_1^5 + x_2^5$;

d) $4x_1x_2^2 - x_1^3 + 2x_1x_2 + 4x_1^2x_2 - x_2^3$.

353. Data je jednačina

$$\frac{1}{x - a} + \frac{1}{x - 2a} = 1,$$

gde je a realan parametar.

- Pokazati da su koreni date jednačine realni za svako a .
- Odrediti a tako da bude

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = k,$$

gde je k dati realan broj. Koje vrednosti može imati k da bi odgovarajuće vrednosti parametra a bile realne?

- U kom intervalu mora ležati k da obe odgovarajuće vrednosti a budu pozitivne?

354. U kom intervalu mora ležati parametar m , da bi koreni jednačine

$$x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$$

ležali u intervalu $(-2, 4)$?

355. Napisati kvadratnu jednačinu po y čiji koreni su jednaki kubovima korena jednačine $ax^2 + bx + c = 0$.

356. Za koje celobrojne vrednosti parametra k koreni jednačine

$$kx^2 - (1 - 2k)x + k - 2 = 0$$

su racionalni?

357. Odrediti brojnu vrednost parametra m u jednačini

$$4x^2 - 15x + 4m^2 = 0,$$

tako da jedan koren jednačine bude kvadrat drugog. Naći korene.

358. Odrediti brojnu vrednost parametra m u jednačini

$$x^2 - mx + m - 1 = 0,$$

za koju $x_1^2 + x_2^2$ prima najmanju vrednost. (x_1 i x_2 koreni date jednačine, m realan parametar).

359. Za koje vrednosti parametra a suma kvadrata korena jednačine

$$x^2 + (a - 2)x - (a + 3) = 0$$

ima najmanju vrednost?

360. Ako su α i β koreni jednačine

$$x^2 + ax + a^2 + b = 0,$$

dokazati da važi jednakost $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 + b = 0$.

361. U jednačinama

$$x^2 - ax + b - 4 = 0$$

$$y^2 - by + a - \frac{1}{4} = 0,$$

Odrediti realne parametre a i b tako da koreni jedne od njih budu recipročne vrednosti korena druge.

362. Neka su x_1 i x_2 rešenja jednačine

$$x^2 - kx + k + 2 = 0,$$

gde je k realan parametar.

- a) Napisati jednačinu po z čija su rešenja

$$z_1 = x_1 + \frac{1}{x_2}; \quad z = x_2 + \frac{1}{x_1}$$

- b) U dobijenoj jednačini odrediti k tako da jedan koren bude dva puta veći od drugog.

363. Ako su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$3x^2 - (m + 3)x + m = 0,$$

gde je m ma koji realan broj.

- a) Formirati jednačinu po y čija su rešenja

$$y_1 = 1 - \frac{2}{x_1} \quad \text{i} \quad y_2 = 1 - \frac{2}{x_2}.$$

- b) U dobijenoj jednačini odredi parametar m tako da jedan koren bude dva puta veći od drugog.

- c) za dobijene vrednosti parametra m odredi odgovarajuće vrednosti x_1 i x_2 .

364. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$2x^2 - (a + 2)x + a = 0$$

gde je a realan broj.

- a) Odrediti jednačinu po y čiji su koreni

$$y_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{i} \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}$$

- b) U dobijenoj jednačini odrediti parametar a tako da jedan koren bude dva puta veći od drugog.

- c) Za dobijene vrednosti a odrediti odgovarajuće vrednosti x_1 i x_2

365. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$x^2 + 2px + q = 0;$$

odrediti jednačinu

$$z^2 + az + b = 0$$

čiji su koreni

$$z_1 = x_1 + \frac{1}{x_2} \quad \text{i} \quad z_2 = x_2 + \frac{1}{x_1}.$$

366. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$2x^2 - (p+2)x + p = 0$$

- a) Napiši jednačinu čiji su koreni $z_1 = x_1^2$ i $z_2 = x_2^2$.
b) U tako dobijenoj jednačini odredi parametar p tako da jedan koren bude četiri puta veći od drugog.
c) Za dobijene vrednosti p naći odgovarajuće vrednosti x_1 i x_2 .

367. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$x^2 - (1+p)x + p^2 = 0$$

a) Napiši jednačinu čiji su koreni

$$z_1 = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{i} \quad z_2 = \frac{x_2}{x_1}$$

b) U tako dobijenoj jednačini odrediti parametar p tako da jedan

koren te jednačine bude $\frac{1}{4}$.

c) Za dobijenu vrednost p naći odgovarajuće vrednosti x_1 i x_2 .

368. U jednačini $x^2 + px + q = 0$ odrediti p i q tako da razlika korena bude 4, a razlika njihovih kubova 208.

369. Proveri da li su brojevi

$$\frac{-1 + \sqrt{5}}{-3 + \sqrt{5}} \quad \text{i} \quad \frac{-1 - \sqrt{5}}{-3 - \sqrt{5}}$$

koreni jednačine

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

370. Odrediti korene jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, ako je $a + b + c = 0$.

371. Date su dve jednačine:

$$x^2 + 2x + a = 0 \quad (1)$$

$$(1+a)(x^2 + 2x + a) - 2(a-1)(x^2 + 1) = 0 \quad (2)$$

u kojima je a realan parametar, x nepoznata. Dokazati da su koreni jednačine (1) realni i različiti, ako su koreni jednačine (2) imaginarni i obrnuto da su koreni jednačine (1) imaginarni, ako su koreni jednačine (2) realni i različiti.

372. Dokazati da jednačina

$$\frac{a^2}{x-p} + \frac{b^2}{x-q} = 1$$

ima uvek realna rešenja po x .

373. U jednačini $x^2 - (m+1)x + m = 0$ odrediti m , tako da razlika kvadrata njenih korena bude 15. Za realne vrednosti parametra m rešiti jednačinu.

374. Odrediti zbir m -tih stepena korena kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

375. Neka su s i p zbir i proizvod korena jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

s_1 i p_1 zbir i proizvod korena jednačine

$$a_1x^2 + b_1x + c_1 = 0,$$

a S i P zbir i proizvod korena jednačine

$$(a + \lambda a_1)x^2 + (b + \lambda b_1)x + (c + \lambda c_1) = 0.$$

Odredi λ tako da bude

$$P = p_1 + p$$

i izrazi S kao funkciju od s , s_1 , p i p_1 .

376. Date su jednačine

$$x^2 + px + 2 = 0$$

$$x^2 + p_1x + 2 = 0.$$

Neka su koreni prve jednačine α i β , a druge α_1 i β_1 . Izračunaj

$$(\alpha - \alpha_1)(\alpha - \beta)(\beta - \alpha_1)(\beta - \beta_1),$$

kao funkciju koeficijenta gornjih jednačina.

377. Pokaži da su brojevi $\sqrt{2}$ i $1 - \sqrt{2}$ koreni jednačine

$$x^2 - x + \sqrt{2} - 2 = 0.$$

378. Data je jednačina $x^2 + x - 3 - \sqrt{3} = 0$, pokaži da je $\sqrt{3}$ koren te jednačine i nađi drugi koren.

379. Proveri da li je $\frac{1}{3} - \sqrt{2}$ koren jednačine

$$9x^2 + 9x - 22 + 15\sqrt{2} = 0 \text{ i nađi drugi koren.}$$

380. Ako su p i q neparni, to jednačina $x^2 + px + q = 0$ nema racionalnih rešenja. Dokazati.

381. Za koje vrednosti parametra m jednačine

$$2x^2 - (3m + 2)x + 12 = 0,$$

$$4x^2 - (9m - 2)x + 36 = 0$$

imaju zajednički koren?

382. Za koje vrednosti parametra m jednačine

$$x^2 + mx - 2m = 0$$

$$x^2 - 2mx + m = 0$$

imaju zajedničko rešenje?

383. Ako koeficijenti kvadratnih jednačina

$$x^2 + 2px + q = 0$$

$$x^2 + 2p_1x + q_1 = 0$$

zadovoljavaju relaciju $q + q_1 = 2pp_1$, tada su koreni bar jedne jednačine realni. Dokazati.

384. Kakvi moraju biti p i q da bi koreni jednačine

$$x^2 + px + q = 0$$

bili takođe p i q ?

385. Ako su koeficijenti kvadratne jednačine

$$x^2 + px + q = 0$$

celi brojevi, to i koreni su takođe celi brojevi. Dokazati.

386. Ako su koeficijenti kvadratne jednačine

$$ax^2 + bx + c = 0$$

celi neparni brojevi, onda koreni date jednačine ne mogu biti racionalni. Dokazati.

387. U jednačini $(k - 1)x^2 + (k - 5)x - (k + 2) = 0$ odrediti k tako da je

$$a) \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > 2; \quad b) x_1^2 + x_2^2 < 2;$$

$$c) x_1^2x_2^2 + x_1x_2^2 < 2;$$

gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

388. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$x^2 + kx + 1 = 0$$

Odrediti sve vrednosti parametra k za koje je tačna nejednakost

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 1$$

389. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine

$$p^2x^2 + p^3x + 1 = 0 \quad (p \neq 0).$$

a) Odrediti sve realne vrednosti parametra p za koje je tačna nejednakost

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 > 7.$$

b) Odrediti one vrednosti parametra p , za koje je zbir

$$y = x_1^4 + x_2^4$$

minimalan.

390. Ako su a, b i c merni brojevi strana trougla onda su koreni jednačine
 $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2 = 0$
 kompleksni. Dokazati.

391. Za koje vrednosti parametra a jednačine:

$$(1 - 2a)x^2 - 6ax - 1 = 0,$$

$$ax^2 - x + 1 = 0$$

imaju zajednički koren?

392. Ako su p, q i r racionalni brojevi, onda i rešenja jednačine

$$(p + q + r)x^2 - 2(p + q)x + p + q - r = 0$$

su racionalni. Dokazati.

393. Rešenja jednačine $x^2 + px + q = 0$ su racionalna ako je

$$p = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} \text{ i } q = \left(\frac{ab}{a^2 - b^2}\right)^2, \text{ gde su } a \text{ i } b \text{ racionalni brojevi.}$$

Dokazati.

394. Dokazati da su koreni jednačine

$$x^2 + px + q = 0$$

racionalni brojevi, ako su $p = n + \frac{q}{n}$, gde su q i n racionalni

brojevi.

395. Ako su m, n i a ma koji realni brojevi, koreni jednačine

$$\frac{1}{x-m} + \frac{1}{x-n} = \frac{1}{a^2}$$

su takođe realni. Dokazati.

396. Data je kvadratna jednačina

$$x^2 - 2mx + 2m - 1 = 0$$

a) Pokazati da su koreni te jednačine racionalni u odnosu na m .

b) Ne rešavajući datu jednačinu, odrediti zbir kvadrata korena u funkciji od parametra m i pokazati da je taj zbir veći od izvoda korena za svako m .

397. Ako jednačina

$$(1) x^2 + px + q = 0$$

ima realna različita rešenja (p i q realni brojevi), onda i jednačina:

$$(2) x^2 + (p + 2a)x + q + ap = 0,$$

$$3x^2 + 2(a + p)x + q + ap = 0,$$

gde je a ma koji realan broj, takođe imaju realno različita rešenja.

398. Ako jednačina

$$(1) x^2 + px + q = 0$$

ima realna različita rešenja (p i q realne brojeve) onda i jednačina

$$(2) x^2 + \left(k + \frac{1}{k}\right)px + p^2 + q\left(k - \frac{1}{k}\right)^2 = 0.$$

gde je k realan parametar, takođe ima realna i različita rešenja. Dokazati.

399. Data je jednačina

$$(m + 1)x^2 - 2(m - 4)x + m + 4 = 0.$$

Diskutovati egzistenciju i znak rešenja date jednačine, ako se realni parametar m menja.

400. Data je jednačina

$$(1 - \lambda)x^2 - 2(1 + \lambda)x + 3(1 + \lambda) = 0.$$

gde je λ realan parametar.

Proučiti promene znaka rešenja kada se parametar λ menja.

401. Kako se menjaju rešenja jednačine

$$(m - 1)x^2 + 2(m - 3)x + (m + 3) = 0,$$

kada se realan parametar m menja između $-\infty$ i $+\infty$?

402. Ispitati promene znaka rešenja jednačine

$$mx^2 - 4x + 3m + 1 = 0$$

ako se parametar $m \in (-\infty, +\infty)$

403. Odrediti realan parametar a tako da koreni jednačine $ax^2 - 2(a+6)x + 4a = 0$ budu negativni.

404. U jednačini $kx^2 - 2(k-2)x + k - 3 = 0$, odrediti parametar k tako da rešenja budu istog znaka

405. U jednačini $(k-4)x^2 - 2(k-2)x + k - 4 = 0$ odrediti parametar k tako da koreni budu istog znaka

406. Data je jednačina $(m-4)x^2 + (m+2)x - m = 0$, za koje vrednosti parametar m rešenja jednačine su suprotnog znaka?

407. Data je jednačina $(m-2)x^2 - 2mx + 2m + 3 = 0$, za koje vrednosti realnog parametra m su koreni date jednačine suprotnog znaka?

408. Za koje vrednosti parametra p oba korena kvadratne jednačine $x^2 + 2(p+1)x + 9p - 5 = 0$ su negativna?

409. Za koje vrednosti parametra n oba korena jednačine $(n-2)x^2 - 2nx + n - 3 = 0$ su pozitivna?

Skratiti sledeće razlomke:

$$410. \frac{4x^2 - 19x + 12}{12x^2 - x - 6}$$

$$411. \frac{a^2 + 6a + 8}{a^3 + 5a^2 + 4a}$$

$$412. \frac{x^2 - 4ax + 3a^2}{x^2 - (a+b)x + ab}$$

$$414. \frac{x^4 - 7x^3 + 12x^2}{3x^3 - 48x}$$

$$413. \frac{(3x^2 - 48)(4x^2 - 16x + 12)}{(8x^2 - 16x - 24)(2x^2 + 2x - 24)}$$

$$415. \frac{2x^2 - 10ax - 14a^2}{x^2 - x(2a + 7) + 14a}$$

5. ZNAK KVADRATNOG TRINOMA $AX^2 + BX + C$

Ako se trinom $y = ax^2 + bx + c$ (1)

svede na oblik $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ (2)

lako se izvode sledeći zaključci:

I. U slučaju $D = b^2 - 4ac < 0$, znak trinoma (1) za svako x poklapa se sa znakom koeficijenta a .

II. U slučaju $D = b^2 - 4ac = 0$ (2) postaje $y = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2$

tj. znak trinoma se poklapa sa znakom koeficijenta a za svako x ,

a za $x = -\frac{b}{2a}$ trinom ima vrednost nula.

III. U slučaju $D > 0$ trinom ima realne različite nule i može se napisati u obliku

$y = a(x - x_1)(x - x_2)$ odakle izlazi:

da polinom ima znak koeficijenta a , osim za one vrednosti promenljive x koje su između nula polinoma.

Odrediti znak trinoma:

$$416. y = 6x^2 + 7x - 3$$

$$417. y = -2x^2 + 5x - 2$$

$$418. y = 4x^2 - 2x + 3$$

$$419. y = 9x^2 + 12x + 4$$

Rešiti nejednačine:

420. $3 < x^2 - 4x$

421. $3x^2 + 5x + 10 > 0$

422. $(2x-1)^2 - (x^2 + 3) < x - 4$ 423. $x^2 - (x+1)^2 - (x-2)^2 > 0$

424. $(x^2 - 4x - 5)(x^2 + 2x - 3) < 0$

425. $(x^2 - 6x - 7)(x^2 + 2x - 8) > 0$

426. Za koje vrednosti x razlomak

$$\frac{4x^2 - 8x - 24}{x^2 - 2x - 3}$$

je veći od 3?

427. Rešiti sistem

$$\begin{cases} x^2 + 3x - 10 > 0 \\ x^2 - 3x - 4 < 0. \end{cases}$$

428. Za koje vrednosti x razlomak

$$\frac{-x^2 + 2x - 5}{2x^2 - x - 1}$$

je manji od -1 ?

429. Dat je kvadratni trinom

$$mx^2 + (m-1)(x-1) + m.$$

Ispitati za koje će vrednosti parametra m ovaj trinom biti pozitivan za sve realne vrednosti promenljive x .

430. Data je funkcija $y = ax^2 + 2x + a - 1$, gde je a parametar nezavisan od x . Za koje vrednosti parametra a je $y > 1$ za sve vrednosti x ?

431. U kom intervalu se nalazi parametar m da kvadratni trinom $y = x^2 - (m-1)x + m$ bude pozitivan za svako x ?

432. Koji uslov zadovoljava λ da nejednačina $x^2 - (\lambda - 3)x + \lambda < 0$ nema rešenja

433. U kom intervalu leži parametar m da je trinom $-x^2 + (m+2)x + m$ manji od 1 za sve vrednosti promenljive x ?

434. U kom intervalu leži parametar a da je trinom $x^2 - 2ax - 6a + 12$ veći od -4 za sve vrednosti x ?

435. Koje uslove zadovoljavaju koeficijenti a , b i c nejednačine $ax^2 + bx + c > 0$, da njena rešenja budu $x < 2$ i $x > 3$?

436. Koje uslove zadovoljavaju koeficijenti a , b i c nejednačine $ax^2 + bx + c > 0$ da njeno rešenje bude $-1 < x < 2$?

437. Ako su a , b i c merni brojevi stranica trougla dokazati da je trinom $(a+b)x^2 - 2cx + a+b$ pozitivan za svako x .

438. Ako su a , b i c merni brojevi stranica trougla, dokazati da je trinom $b^2x^2 + (b^2 + c^2 - a^2)x + c^2$ pozitivan za svako x .

439. Dat je kvadratni trinom

$$y = (m-1)x^2 - 2mx + 3m + 1.$$

a) Odrediti interval kome pripada realan parametar m , da je $y > 0$ za sve vrednosti promenljive x .

b) Konstruisati grafik funkcije ako m predstavlja najmanji ceo broj dobijenog intervala.

440. Data je funkcija

$$y = (m-2)x^2 - (m+1)x + m - 1.$$

Odrediti parametar m da funkcija menja znak.

441. Data je funkcija

$$y = (m-2)x^2 - (m+1)x + 4$$

Odrediti m tako da funkcija bude negativna za svako x .

442. Za koje vrednosti realnog parametra a trinom

$$ax^2 - 7x + 4a$$

je negativan za sve realne vrednosti argumenta x ?

443. Naći sve realne vrednosti parametra r , za koje polinom

$$(r^2 - 1)x^2 + 2(r - 1)x + 1$$

je pozitivan za svako realno x .

444. Za koje vrednosti parametra a nejednakost

$$\frac{ax}{x^2 + 4} < 1,5$$

je ispunjena za svako realno x ?

445. Odrediti one vrednosti parametra m za koje je nejednakost

$$\frac{x^2 - 8x + 20}{mx^2 + 2(m+1)x + 9m + 4} < 0$$

ispunjena za sve realne vrednosti promenljive x .

446. Za koje vrednosti parametra m nejednakost

$$-6 < \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4$$

je ispunjeno za sve realne vrednosti x ?

447. Za koje vrednosti a sistem nejednačine $-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2$,

je zadovoljen na sve vrednosti x ?

448. Za koje vrednosti parametra p nejednakost

$$-9 < \frac{3x^2 + px - 6}{x^2 - x + 1} < 6$$

je ispunjena za sve vrednosti x ?

449. Ako je $2y + 5x = 10$ onda je ispunjena nejednakost $3xy - x^2 - y^2 < 7$.

Dokazati.

450. Odrediti k tako da za svako x bude $\left| \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 3$.

V G L A V A

JEDNAČINE SA JEDNOM NEPOZNATOM KOJE SE SVODE NA KVADRATNE

6. BIKVADRATNE JEDNAČINE

Jednačina oblika $ax^4 + bx^2 + c = 0$ naziva se bikvadratnom, ona je ekvivalentna sa jednačinom $a(x^2)^2 + bx^2 + c = 0$, koja je kvadratna u odnosu na x^2 .

Rešiti jednačine

451. $x^4 - 34x^2 + 225 = 0$. 452. $9x^4 - 38x^2 + 8 = 0$.

453. $3x^4 + 16x^2 + 5 = 0$. 454. $x^4 - (m^2 + n^2)x^2 + m^2n^2 = 0$.

455. $x^4 + (2 - k^2)x^2 - 2k^2 = 0$.

456. $b^2x^4 - (b^4 + a^2)x^2 + a^2b^2 = 0$.

457. $x^4 - \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)x^2 + 1 = 0$.

458. $a^2x^4 + (a^6 - 1)x^2 - a^4 = 0$.

459. $x^4 - 2(a^2 + b^2 - 1)x^2 + (a^2 - b^2 + 1) - 4a^2 = 0$

460. $x^2(x^2 + 3x) - (3x - 2)(3x + 2) = x^2(3x + 2)$

461. $(x^2 - 3)^2 + (x^2 + 4)^2 - (x^2 - 5)^2 = 17x^2 + 24$.

462. $4x^4 - 17x^2 + 18 = 0$.

463. $(3x^2 - 5)^2 - (3x^2 - 2)^2 = 3 - 4x^4$.

464. $(x^2 - 1)(x^2 - 2) - (2 - x^2)(x^2 - 4) = 6(2x^2 - 5)$.

465. $\frac{2x^2 - 3}{5} - \frac{(x^2 - 1)^2}{3} = 4 - \frac{x^2(7 - x^2)}{2}$

466. $x^2 - 7 + \frac{(x^2 - 6)^2}{3} = \frac{(x^2 + 4)^2}{2} - \frac{(x^2 + 2)(x^2 + 6)}{4}$

467. $\frac{x^2 + 2}{x^4 + 5x^2 - 10} = \frac{x^2 + 1}{x^4 + x^2 - 3}$

468. $\frac{x^2}{x^2 + 6} + \frac{2x^2}{x^2 - 6} = \frac{180}{4(x^4 - 36)}$

469. $\frac{x^2 + 1}{3x^2 + 4} = \frac{x^2 + 3}{3x^2 + 4} - \frac{2x^2 + 2}{5x^2 + 9}$

470. $\frac{x^4 + 2(a - b)x^2 + (a - b)^2}{x^4 - 2(a - b)x^2 + (a - b)^2} = \frac{a}{b}; a > b, b > 0 \text{ i } a \neq b$

Rešiti jednačine:

471. $x(x + 1)(x^2 + x + 1) = 42$

472. $(x^2 - 5x)^2 - 8(x^2 - 5x) - 84 = 0$.

473. $(x^2 - 3x)^2 - 38(x^2 - 3x) + 280 = 0$.

474. $6\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 35\left(x + \frac{1}{x}\right) + 50 = 0$.

475. $6\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 - 25\left(x - \frac{1}{x}\right) + 24 = 0$.

476. $\frac{x^2 + x - 5}{x} + \frac{3x}{x^2 + x - 5} + 4 = 0$.

$$477. \frac{1}{x(x+2)} - \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{12}.$$

$$478. \frac{x^2+1}{x} + \frac{x}{x^2+1} = 2,9.$$

$$479. x^2 + x + x^{-1} + x^{-2} = 4.$$

$$480. 4x^2 + 12x + \frac{12}{x} + \frac{4}{x^2} = 47.$$

$$481. \frac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3} = 4 + 2x + x^2.$$

$$482. x(x+1)(x+2)(x+3) = 0,5625$$

$$483. x(x-1)(x-2)(x-3) = 1680.$$

Skratiti razlomke:

$$484. \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^4 - 10x^2 + 9}.$$

$$485. \frac{4a^4 - 25a^2 + 6}{a^4 - 7a^2 + 6}.$$

$$486. \frac{x^5 - 17x^3 + 16x}{x^4 - 20x^2 + 64}.$$

$$487. \frac{x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2}{x^4 - (a^2 + b^2)x^2 + a^2b^2}.$$

$$488. \text{ U jednačini } x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda^2 - 2 = 0.$$

Odrediti parametar λ tako da jedan koren date jednačine bude dva puta veći od drugog.

$$489. \text{ Za koje vrednosti parametra } m \text{ je jedan koren jednačine } x^2 - (m^2 - 1)x + m^2 + 6 = 0. \\ \text{ dva puta veći od drugog.}$$

490. Za koje vrednosti parametra k jednačina

$$x^2 - (k^2 + 2)x + k^4 - 2k^2 + 1 = 0;$$

a) ima jednake korene;

b) ima jedan korena nula.

491. Hipotenuza pravouglog trougla je 17 cm, a površina mu je 60 cm². Izračunati njegove katete.

492. Odrediti stranice pravougaonika, dijagonale 10, površine 48 cm².

493. Površina pravougaonika je 60 cm², Obim opisane kružnice je 40,82 cm. Odrediti stranice pravougaonika.

494. Krak jednokrakog trougla je 10 cm, a površina je 48 cm². Naći osnovicu.

495. U pravouglom trouglu hipotenuze iznosi $2k$, a zbir projekcije jedne katete na hipotenuzi i hopotenuzama visina je $(1 + \sqrt{2})k$. Izračunaj tu katetu.

7. BINOMNE JEDNAČINE

Jednačina oblika $Ax^n \pm B = 0$ naziva se binomna jednačina (A i $B > 0$). Za $n = 3$ imamo binomnu jednačinu trećeg stepena

$Ax^3 \pm B = 0$. Smenom $y = \sqrt[3]{\frac{A}{B}}$ gde je y nova nepoznata, a $\sqrt[3]{\frac{B}{A}}$ aritmetički koren. Binomna jednačina III stepena postoje $y^3 \pm 1 = 0$, a ova je ekvivalentna jednačini $(y \pm 1)(y^2 \pm y + 1) = 0$. Rešiti sledeće binomne jednačine:

$$496. 5x^3 + 2 = 0. \quad 497. 8x^3 - 11 = 0. \quad 498. 8x^3 - 27 = 0.$$

$$499. 125x^3 + 8c^3 = 0. \quad 500. m^3x^3 - (m+n)^3 = 0.$$

$$501. 16x^4 - 81 = 0. \quad 502. 11x^4 - 17 = 0. \quad 503. x^4 - (2a - c)^4 = 0.$$

504. $x^6 - 729 = 0$. 505. $x^6 + 64 = 0$. 506. $x^3(8x^3 + 1) - 1 = 8x^3$.
 507. $512x^6 - 64x^3 = 27(1 - 8x^3)$. 508. $x^3(3x^3 + 5) = 192x^3 + 320$.

Naći sve vrednosti:

509. $x^2(27 - x^3) = 108 - 4x^3$.

510. Naći sve vrednosti:

a) $\sqrt[3]{-1}$; b) $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$; c) $\sqrt[4]{-1}$.

511. Izračunati algebarsku vrednost trećeg korena broja

a) $\sqrt[3]{125}$; b) $\sqrt[3]{\frac{-1}{8}}$; c) $\sqrt[3]{64}$.

8. IRACIONALNE JEDNAČINE

Jednačine kod kojih se nepoznata nalazi u radikalu, nazivaju se iracionalnim jednačinama, gde se uzima samo aritmetičke vrednosti korena. Jednačina oblika $\sqrt{P} = Q$ ekvivalentna je sistemu $P = Q^2$, $Q \geq 0$ tj.

$$\sqrt{P} = Q \Leftrightarrow \begin{cases} P = Q^2 \\ Q \geq 0 \end{cases}$$

512. Rešiti jednačinu $\sqrt{3x^2 - 20x + 16} = x - 4$.

Rešiti jednačine:

513. $3 + \sqrt{2x^2 - 4x + 9} = 2x$.

514. $\frac{x+2}{\sqrt{x}-1} - \sqrt{x} = 4$. 515. $\sqrt{1 - \sqrt{x^4 - x^2}} = x - 1$.

516. $\sqrt{2x+14} - \sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$.

517. Rešiti i diskutovati jednačinu

$$\sqrt{x^2 - mx} = x + m$$

518. Rešiti i diskutovati jednačinu

$$\sqrt{x^2 + 2(2m+1)x - m} = x - 2m$$

519. Rešiti jednačinu

$$\frac{x-a}{\sqrt{x}+\sqrt{a}} + \frac{x-b}{\sqrt{x}+\sqrt{b}} = \frac{x-c}{\sqrt{x}+\sqrt{c}}$$

gde su a, b i c pozitivni brojevi.

Rešiti jednačine:

520. $\sqrt{2x^2 + 7} = x^2 - 4$. 521. $\sqrt{(y-2)(4y+1)} = 2y + 2$.

522. $\sqrt{x^2 - 5x + 10} = 8 - 2x$. 523. $\sqrt{x^2 - 6\sqrt{x^2 - 33}} = 5$.

524. $\sqrt{12 - x\sqrt{x^2 - 8}} = 3$. 525. $\sqrt{4 + x\sqrt{x^2 - 7}} = 4$.

526. $\sqrt{y+1} + \sqrt{y-1} = 3$. 527. $\sqrt{y+7} + \sqrt{y^2-27} = 4$.

528. $\sqrt{x^2 - 3x + 3} + \sqrt{x^2 - 36} = x - 1$.

529. $\sqrt{m^2 + \sqrt{(a-b)x + b^2 - a^2}} = m$; $m > 0$.

530. $\sqrt{X} + \sqrt{a-x} = \sqrt{a}$, $a > 0$.

531. $x + \sqrt{2ax + x^2} = a$, $a > 0$.

532. $\sqrt{a+x} + \sqrt{2a+x} = \frac{a}{\sqrt{a+x}}$, $a > 0$.

533. $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+3}$.

534. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+16}} = 1+x$.

535. $\frac{1}{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}} - \frac{1}{\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}} = 1$.

536. $\sqrt{2x+1} + 2\sqrt{x} = \frac{21}{\sqrt{2x+1}}$. 537. $\sqrt{x} + \sqrt{x-\sqrt{1-x}} = 1$.

$$538. \sqrt{x-b} + \frac{b}{\sqrt{x-b}} = \sqrt{x+2b}. \quad 539. \sqrt{2x+15} + 2 = \frac{3x+20}{\sqrt{2x+15}}.$$

$$540. \sqrt{x+3} - \frac{2}{\sqrt{x+3}} = \sqrt{2-x}. \quad 541. \sqrt{4-x} + \frac{6}{\sqrt{4-x}} = \sqrt{52-x}.$$

$$542. \sqrt{3x+4} + \sqrt{x+9} = \frac{45}{\sqrt{3x+4}} \quad 543. \sqrt{8-\sqrt{z+1}} + \sqrt{2z^2+z+3} = 2.$$

$$544. \sqrt{3z+11} + \sqrt{5z-1} = 4. \quad 545. \sqrt{2+\sqrt{y-5}} - \sqrt{13-y} = 0.$$

$$546. \sqrt{4+15x} + \sqrt{17x+13} = \sqrt{77x-6}.$$

$$547. \sqrt{3x-3} + \sqrt{5x-19} = \sqrt{3x+4}.$$

$$548. \sqrt{a+\sqrt{b^2x}} - \sqrt{a-\sqrt{b^2x}} = \sqrt{a}; a > 0.$$

$$549. \frac{3}{5-\sqrt{x^2-3}} - \frac{3}{5+\sqrt{x^2-3}} = \frac{1}{4}.$$

$$550. \frac{3}{x-\sqrt{x^2-9}} - \frac{3}{x+\sqrt{x^2-9}} = 2 \frac{2}{3}.$$

$$551. \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{x-\sqrt{1+x^2}} = 2.$$

$$552. \frac{\sqrt{x^2-3x+11} + \sqrt{x^2-2x+4}}{\sqrt{x^2-3x+11} - \sqrt{x^2-2x+4}} = 5.$$

$$553. \frac{\sqrt{2x^2+1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x-1}} = 2.$$

$$554. \frac{\sqrt{9-x} + \sqrt{x-4}}{3\sqrt{9-x}} = \frac{\sqrt{9-x} - \sqrt{x-4}}{2\sqrt{x-4}}.$$

$$555. x^2 - 3x + \sqrt{x^2 - 3x + 11} = 1.$$

$$556. 2x^2 - 3x + \sqrt{2x^2 - 3x + 7} = 5.$$

$$557. \sqrt{x^2 - 2x} + \sqrt{x^2 - 2x + 33} = 3.$$

$$558. \sqrt{3x^2 - 7x - 2} + \sqrt{3x^2 - 7x - 5} = 2.$$

559. Odrediti racionalna rešenja jednačine

$$\frac{\sqrt{x+2}}{x} + \frac{x}{\sqrt{x+2}} = \frac{4}{3}\sqrt{3}$$

$$560. \frac{4}{x + \sqrt{x^2 + x}} - \frac{1}{x - \sqrt{x^2 + x}} = \frac{3}{x}.$$

$$561. \frac{2}{2 + \sqrt{4 - x^2}} - \frac{1}{2 - \sqrt{4 - x^2}} = \frac{1}{x}.$$

$$562. \sqrt{\frac{2x+2}{x+2}} - \sqrt{\frac{x+2}{2x+2}} = \frac{7}{12}.$$

$$563. x^2 + 11 + \sqrt{x^2 + 11} = 42.$$

$$564. \sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 = 3x + 7.$$

$$565. \sqrt{y^2 + 4y + 8} + \sqrt{y^2 + 4y + 4} = \sqrt{2(y^2 + 4y + 6)}$$

566. Rešiti jednačinu

$$2 \left(\sqrt[5]{x} + \frac{1}{\sqrt[5]{x}} \right) = 5.$$

$$567. \sqrt{\frac{6(x-1)}{x}} + \sqrt{\frac{x}{6(x-1)}} = \frac{5}{2}.$$

$$568. \sqrt{4 + x\sqrt{x^2 + 40}} - x = 2.$$

$$569. \sqrt{x - \frac{1}{x}} - \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = 1 - \frac{1}{x}.$$

$$570. \sqrt{4 + x\sqrt{2x^2 - 17}} = x + 2.$$

$$571. \frac{x\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \frac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4.$$

$$572. \sqrt{5 + \sqrt[3]{x}} + \sqrt{5 - \sqrt[3]{x}} = \sqrt[3]{x}.$$

$$573. \sqrt{x\sqrt[5]{x}} - \sqrt[5]{x\sqrt{x}} = 56.$$

$$574. 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0.$$

$$575. \sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}} + \sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}} = 2.$$

$$576. \sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} + \sqrt[5]{\frac{x-1}{16x}} = 2,5.$$

$$577. \frac{\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}} = 3.$$

VI. GLAVA

9 EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE I JEDNAČINE

Funkcija oblika $y = a^x$ ($a > 0$) naziva se eksponencijalnom funkcijom.

Osobine eksponencijalne funkcije.

a) Funkcija $y = a^x$ definisana je za svako x u skupu realnih brojeva.

b) Funkcija $y = a^x$ je pozitivno za svako x .

c) Ako je $a > 1$ i $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ funkcija je monotono rastuća.

Ako je $0 < a < 1$ i ako je $x_1 < x_2 \Rightarrow a^{x_1} < a^{x_2}$ funkcija je monotono opadajuća.

d) Ako je $a = 1$ tada je $a^x = 1^x = 1$ za svako x tj. funkcija ima konstantnu vrednost.

Ispitati precizno tok i konstruisati grafik sledećih funkcija:

$$578. y = 3^x. \quad 579. y = 3^{-x}. \quad 580. y = 0,5^x. \quad 581. y = 0,5^{-x}$$

582. U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafike funkcija:

$$y = 2^x, y = 3^x, y = 4^x \text{ i } y = \left(\frac{1}{2}\right)^x, y = \left(\frac{1}{3}\right)^x, y = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

Odrediti zajedničke i različite osobine ovih funkcija.

$$583. y = 2^{\sqrt{x^2}}. \quad 584. y = 3^{-\sqrt{x^2}}$$

$$585. y = \begin{cases} 2^x & x < -1; \\ 2^{-1} & -1 \leq x \leq 1; \\ 2^{-x} & x > 1 \text{ (sl. 24).} \end{cases}$$

$$586. y = 2^x - 2.$$

$$587. y = 3^x + 1. \quad 588. y = |3^x - 1|$$

Rešiti jednačine

$$589. 2^{x-1} = 4^5. \quad 590. \left(\frac{5}{4}\right)^{0,8x} = \frac{64}{125}. \quad 591. 9^{-3x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}.$$

$$592. \sqrt{x} \sqrt{16} = \sqrt{4x}. \quad 593. \sqrt{x-1} \sqrt{a^{1+x}} = \sqrt{a^{2+x}}.$$

$$594. 100 \cdot 10^{2x-2} = \sqrt{1000x+1}. \quad 595. 0,25^5 = 4^{\frac{5x-3}{3}} \cdot 0,125^{6x}.$$

$$596. \sqrt{x-7} \sqrt{32x+5} = 0,25 \cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

$$597. (a^{3x+1})^2 \cdot a^{2x+3} = (a^{7x-1})^2 \cdot a^{3x-10}.$$

$$598. \sqrt{a^{x+1}} \cdot \sqrt[3]{a^{x+2}} \cdot \sqrt[4]{a^{2x-1}} = 1.$$

$$599. a^{2x-1} + a^{2x+1} = a^3 + a^5.$$

$$600. \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{x}{2}} \cdot \sqrt[3]{\left(\frac{3}{2}\right)^{2+x}} \cdot \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^{2x-1}} = 1.$$

$$601. \sqrt[7]{a^{2x+6}} \cdot \sqrt[6]{a^{2x-4}} = \sqrt[21]{a^{-8x-3}}.$$

$$602. 3^{\frac{x-1}{2}} - 2^{\frac{x+1}{3}} = 2^{\frac{x-2}{3}} + 3^{\frac{x+3}{2}}.$$

$$603. 5^{\frac{2x+2}{5}} - 4^{\frac{2x-5}{3}} = 5^{\frac{2x-3}{5}} + 4^{\frac{2x-2}{3}}.$$

$$604. b^{\frac{x+1}{2}} - b^{\frac{x-3}{2}} = (b^2 - 1)b^{\frac{x+1}{4}}.$$

$$605. 7 \cdot 3^{x+1} - 5^{x+2} = 3^{x+4} - 5^{x+3}.$$

$$606. 0,125 \cdot 4^{2x-3} = \left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}. \quad 607. 4^{x+1} + 4^x = 320.$$

$$608. 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 450. \quad 609. 5^x + 3 \cdot 5^{x-2} = 140.$$

$$610. 2^{3x-2} - 2^{3x-3} - 2^{3x-4} - 4 = 0.$$

$$611. 2^{x-1} - 2^{x-3} = 3^{x-2} - 3^{x-3}.$$

$$612. 4^{x+3} - 13 \cdot 4^{x+1} = 2^{3x-1} - 2^{3x-3}.$$

$$613. 3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}.$$

$$614. 3^{12x-1} - 9^{6x-1} - 27^{4x-1} + 81^{3x+1} = 2192.$$

$$615. 10 \cdot 2^x - 4^x = 16. \quad 616. 5^x - 5^{3-x} = 20.$$

$$617. 2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81. \quad 618. 5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3.$$

$$619. 4^{\sqrt{x-2}} + 16 = 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}}.$$

$$620. 4^x + \sqrt{x^2-2} - 5 \cdot 2^{x-1} + \sqrt{x^2-2} = 6.$$

$$621. 2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288.$$

$$622. 4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^x + \frac{1}{2} - 2^{2x-1}. \quad 623. 0,5^{x^2-20x+61,5} = \frac{8}{\sqrt{2}}.$$

$$624. 16^{\frac{1}{x}} = 0,6 \cdot \left(4 + 16^{\frac{1}{2x}}\right). \quad 625. (11^x - 11)^2 = 11^x + 99.$$

$$626. 27^x + 12^x = 2 \cdot 8^x. \quad 627. 25^{\sqrt{x}} - 124 \cdot 5^{\sqrt{x}} = 125.$$

$$628. \left(2\sqrt{12} + 3\sqrt{3} + 6\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3^{2x^2-2x-2}}.$$

$$629. 4^x = 2^{\frac{x+1}{x}}. \quad 630. 2^{\frac{x+1}{x}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = 1.$$

$$631. (\sqrt{2} - \sqrt{3})^x + (\sqrt{2} + \sqrt{3})^x = 4.$$

$$632. (\sqrt{7} + \sqrt{48})^x + (\sqrt{7} - \sqrt{48})^x = 14.$$

$$633. \sqrt{3} \cdot 3^{\frac{x}{1+\sqrt{x}}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2+\sqrt{x}+x}{2(1+\sqrt{x})}} = 81.$$

$$634. \sqrt[3]{2x \cdot \sqrt[4]{4x \sqrt{0,125}}} = 4 \cdot \sqrt[3]{2}$$

$$635. \sqrt{2} \cdot 0,5^{\frac{5}{4\sqrt{x}+10}} - \sqrt[4]{4} = 0.$$

$$636. 8^{\frac{x-3}{3x-7}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x-1} \sqrt{0,5^{3x-1}}} = 1.$$

$$637. 2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot (10^{x-1})^3$$

$$638. \text{Data je jednačina } 2^x - 5 + \frac{x}{2} = 0,$$

a) rešiti je grafički;

b) koristeći grafik naći približno $\sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}}$.

$$639. \text{Data je jednačina } 3^x - \frac{x}{2} - 8 = 0.$$

a) Rešiti je grafički

b) Koristeći grafik naći približnu vrednost izraza $\sqrt[4]{3^3}$.

10. LOGARITMI LOGARITAMSKE FUNKCIJE, JEDNAČINE I IDENTITETI

Logaritam broja a po osnovi $b > 1$ je broj n , kojim je potrebno stepenovati osnovu b da bi se dobio broj a ; simbolima

$$\log_b a = n \Leftrightarrow b^n = a.$$

a) Iz funkcije $\log_b a$ sledi da je $a > 0$, $b > 0$ i $b \neq 1$.

b) $\log_b 1 = 0$ za svako b .

c) Ako je $b > 1$, onda za $a > 1$ je $\log_b a > 0$, a za $0 < a < 1$ je $\log_b a < 0$.

Ako je $a < b < 1$ onda za $a > 1$ je $\log_b a < 0$, a za $0 < a < 1$ je $\log_b a > 0$.

d) $\log_a a = 1$.

e) Funkcija $y = \log_b x$ je definisana za svako $x > 0$.

f) Ako je $b > 1$ za svako $0 < x_1 < x_2$ sledi da je $\log_b x_1 < \log_b x_2$, a ako je $0 < b < 1$ onda za svako $0 < x_1 < x_2$ je $\log_b x_1 > \log_b x_2$.

g) $\log_b (M \cdot N \cdot P) = \log_b M + \log_b N + \log_b P$. ($M > 0$, $N > 0$, $P > 0$)

$$\log_b \frac{M}{N} = \log_b M - \log_b N, \quad (M > 0, N > 0).$$

$$\log_b M^n = n \log_b M, \quad (M > 0).$$

$$\log_b \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_b M, \quad (M > 0)$$

Izračunati vrednosti logaritama.

$$640. \log_2 \frac{1}{128}. \quad 641. \log_3 \frac{1}{81}. \quad 642. \log_{10} 1000.$$

$$643. \log_{0,1} 0,0001. \quad 644. \log_{\sqrt{2}} 8. \quad 645. \log_{\sqrt[3]{2}} 16. \quad 646. \log_{\sqrt{3}} 81.$$

$$647. \log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} 8. \quad 648. \log_2 \sqrt[3]{512}. \quad 649. \log_3 \sqrt[5]{243}.$$

$$650. \log_a \sqrt[5]{a^2}. \quad 651. \log_a \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

Odrediti x iz jednačina:

$$652. \log_2 x = 6. \quad 653. \log_{\frac{1}{2}} x = 3. \quad 654. \log_{\frac{1}{2}} x = -5.$$

$$655. \log_{\sqrt{2}} x = 6. \quad 656. \log_{\sqrt{2}} x = -8. \quad 657. \log_{\sqrt[3]{3}} x = -2.$$

$$658. \log_{\sqrt[2]{5}} x = 3. \quad 659. \log_{\sqrt[3]{2}} x = \frac{3}{4}. \quad 660. \log_{\sqrt[4]{5}} x = -\frac{3}{2}.$$

$$661. \log_a x = \frac{1}{2}, \quad a > 0.$$

Za koju osnovu:

$$662. \text{Logaritam broja 64 iznosi 3?}$$

$$663. \text{Logaritam broja 625 iznosi 4?}$$

$$664. \text{Logaritam broja } \frac{1}{256} \text{ iznosi 8?}$$

$$665. \text{Logaritam broja } \frac{1}{228} \text{ iznosi } -7?.$$

Izračunati:

$$666. 3\log_3 81. \quad 667. 10\log_{10} 1000. \quad 668. 2\log_2 512.$$

Izračunati vrednost izraza:

$$669. 3\log_5 25 + 2\log_3 27 - 4\log_2 8.$$

$$670. \frac{5}{4} \log_3 81 + 3\log_{\frac{1}{2}} 16 - 2\log_2 \frac{1}{32} + \log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}.$$

$$671. \log_3 81 \cdot \log_3 \frac{1}{27} \cdot \log_2 16 \cdot \log_2 8.$$

$$672. \log_2 16 \cdot \log_2 8 \cdot \log_2 4 \cdot \log_2 2 \cdot \log_2 1.$$

$$673. \log_2 (\log_2 256). \quad 674. \log_2 \log_2 16 + \log_3 \log_3 27.$$

$$675. 2 \cdot 5\log_5 125 + 5 \cdot 3 \log_3 81. \quad 676. 5\log_5 25 \cdot 2\log_2 8 \cdot 3\log_3 3.$$

$$677. (3\log_3 5)^4 + (2\log_2 6)^2. \quad 678. 5^{2+\log_5 125}.$$

$$679. 3^{4-\log_3 27}. \quad 680. 2^{3+\log_2 6} + 3^{4+\log_3 8}.$$

$$681. 5^{3-\log_5 25} + 3^{2-\log_3 3} - 2^{4+\log_2 5}.$$

$$682. (3\log_3 5)^3 - 2^{3\log_2 8} + 5^{2\log_5 25}.$$

$$683. 2\log_5 125 \cdot 2^{1+\log_2 4} - 3^{2\log_3 9-1}.$$

Konstruisati grafik sledećih funkcija

$$684. y = \log_3 x. \quad 685. y = \log_{\frac{1}{2}} x.$$

686. Konstruisati u jednom koordinatnom sistemu grafik sledećih funkcija $y = \log_2 x$; $y = \log_2 (x + 1)$ i $y = \log_2 x + 1$.

$$687. y = \log_{10} \sqrt{x^2}. \quad 688. y = \sqrt{(\log_3 x)^2}.$$

689. Odrediti oblast definisanosti sledećih funkcija:

$$a) y = \log_2 (-x); \quad b) y = \log_2 (1 - x);$$

$$c) y = \log_2 (1 - x^2); \quad d) y = \log_2 x^2;$$

$$e) y = \log_2 \sqrt{x}; \quad f) y = \log_2 (x^2 - 2x).$$

Konstruisati grafik funkcije $y = \log_2 (-x)$.

Odrediti za koje realne vrednosti argumenta x postoje u skupu realnih brojeva funkcije:

$$690. y = \log (x^2 - 3). \quad 691. y = \log (2x^2 - 5x - 3).$$

$$692. y = \log (x^2 - 3x - 4).$$

$$693. \text{Data je funkcija } y = \log (3x^2 - 2x).$$

a) Za koje vrednosti argumenta x funkcija ima smisla u skupu realnih brojeva.

b) Odrediti nule funkcije.

c) Odrediti x tako da za osnovu $\sqrt{5}$ vrednost funkcije bude 2.

$$694. \text{Data je funkcija } y = \log (2x^2 - x).$$

a) Odrediti oblast definisanosti date funkcije.

b) Naći nule funkcije

c) Odrediti x tako da za osnovu $\sqrt{3}$ vrednost funkcije bude 2.

Primeniti osnovna pravila logaritmovanja:

$$695. \log \frac{2x^3 \sqrt[4]{5}}{3y^2 \sqrt[3]{7}} \quad 696. \log \frac{8a^4 \sqrt{x}}{b^3 \sqrt[3]{25}} \quad 697. \log \sqrt[4]{\frac{3a^2}{2b^2c}}$$

$$698. \log \frac{5(a^2 - b^2)}{4(x^2 - y^2)}$$

Logaritmovati sledeće izraze:

$$699. x = \frac{3a^2b}{y^2 \sqrt[4]{ab^3}} \quad 700. x = (4a^2b^3 \sqrt[3]{c^2d})^3$$

$$701. x = \left(\frac{c^5x \cdot \sqrt[3]{c^2d}}{\sqrt{ab}} \right)^2 \quad 702. x = \frac{5}{a} \sqrt[3]{y} \sqrt[4]{\frac{c}{d}}$$

$$703. x = \left(\frac{6a^{-3}y \sqrt[4]{ab}}{5z \sqrt[3]{y}} \right)^5 \quad 704. x = \sqrt[5]{\left(\frac{1}{a^3b^2 \sqrt[4]{c^3}} \right)^3}$$

$$705. x = \sqrt[3]{\frac{y^{-3}}{\sqrt{yz}}} \sqrt{\frac{a}{b}} \quad 706. x = 3^{\sqrt[4]{4}} \quad 707. x = \log(a^2)$$

$$708. x = \sqrt{3}^{\log \sqrt{3}} \quad 709. x = \frac{6 \log a}{\log(a)^4} \quad 710. x = 3^{\log_3 27} \cdot 2^{\log_2 64}$$

$$711. x = 3^{\log_3 3} \cdot 5^{\log_5 5}$$

Odrediti x iz jednačina:

$$712. \log x = 2 \log m + 4 \log n - 3 \log a - 5 \log b$$

$$713. \log x = \log 5 + 4 \log m - \log 8 - 3 \log n - \log p$$

$$714. \log x = \log 8 + \frac{\log 55}{2}$$

$$715. \log x = \log 20 + \frac{\log a + \log b}{3} - \frac{\log c + \log d}{4}$$

$$716. \log x = 2 \log(a + b) - \frac{2}{3} \log(a - b) + \frac{1}{2} \log a$$

$$717. \log x = 3 \log a + \frac{1}{2} \log 7 + \frac{1}{2} \log b - 3 \log c - \log 8$$

$$718. \log x = \log 3 + \frac{1}{2} (\log a + 3 \log b) - 2 \log d - \frac{1}{3} \log c$$

Odrediti algebarski izraz A ako je:

$$719. \log A = \log x + \frac{1}{3} [\log(y - z) + \log(y^2 + yz + z^2)] - 2 \log y - \log z - \frac{1}{2} \log(x - 1)$$

$$720. \log A = \log y + 2 \log z + \frac{1}{2} \log(x - z) - 2 \log x - \frac{1}{3} [\log(y^2 - yz + z^2) + \log(y + z)]$$

$$721. \text{ Ako je } \log_{10} 2 = 0,30103, \log_{10} 3 = 0,47712, \log_{10} 5 = 0,69897 \text{ izračunati:}$$

$$\log_{10} 6, \log_{10} 15, \log_{10} 30, \log_{10} 225, \log_{10} 5400$$

$$722. \text{ Ako je } \log_{10} 2 = 0,30103; \log_{10} 3 = 0,47712; \log_{10} 5 = 0,69897; \log_{10} 7 = 0,84510 \text{ izračunati:}$$

$$\log_{10} 14; \log_{10} 35; \log_{10} 50; \log_{10} 100; \log_{10} 2 \frac{1}{2};$$

$$\log_{10} 1 \frac{2}{3}; \log_{10} \frac{2}{25}; \log_{10} 0,6$$

$$723. \text{ Ako je } \log a - \log b = m, \text{ odrediti}$$

$$\log 2a - \log 2b, \log 5a - \log \frac{b}{5}, \log \frac{a}{3} - \log \frac{b}{4}$$

$$724. \text{ Naći } \log(32^{-\frac{1}{2}})^{-3} \text{ ako je } \log 2 = 0,30103$$

725. Naći $\log \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} \right)^{-5}$, ako je $\log 3 = 0,47712$.

Primenom dekadnih logaritama izračunati:

726. $x = 2350 \cdot 1,05^{17}$. 727. $x = \left(\frac{4}{7} \right)^{0,45}$ 728. $x = 5\sqrt[11]{3,1866}$.

729. $x = \sqrt[100]{100}$. 730. $x = 9,52\sqrt[10]{10}$. 731. $x = \frac{\sqrt[3]{27,56} \cdot 0,506^4}{0,02404 \cdot \sqrt{23}}$

732. $x = \left(\frac{3}{4} \right)^{\frac{5}{6}}$. 733. $x = 3,4^{4,3}$. 734. $x = \frac{8601,6 \cdot \sqrt[3]{9,261}}{67,2^2}$

735. $x = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot 3,261}$. 736. $x = \sqrt{\frac{6 \cdot 4035}{3,142}}$

737. $x = \sqrt[15]{\frac{2000 \cdot 1,07^{12}}{7575}}$. 738. $x = \sqrt[5]{0,4203\sqrt[19]{34}}$

739. $x = \frac{0,769 \cdot \sqrt{34,5}}{0,03567}$. 740. $x = 0,0009^{0,0009}$.

741. Izračunati vrednost izraza $x = \frac{a^2\sqrt{b}}{c^3}$, za $a = 23,41$, $b = 0,3422$, $c = 1,438$.

Izračunati:

742. $x = \sqrt[3]{1 + \frac{\pi\sqrt{3}}{11}}$. 743. $x = (-5,32)^3\sqrt[4]{0,0294}$.

744. $x = \frac{500}{0,02}(1,02^{42} - 1)$. 745. $\sqrt{145,27^2 - 124,49^2}$.

746. $\sqrt[10]{\frac{11}{2,1663 - \sqrt{4919,6}}}$. 747. $\sqrt{\frac{17569}{111,11}} - \sqrt[3]{\frac{67685}{1,2365}}$

748. $1 + 0,4893^{0,285}$. 749. $\frac{(0,089)^{0,41} \cdot (3,726)^{-1,3}}{300^{\frac{1}{7}} \cdot (43,6)^{-0,7}}$

750. Zapremina pravouglog paralelopipeda je 385 m^3 . Izračunati njegove dimenzije ako stoje u odnosu $3 : 5 : 8$.

751. Izračunati ivicu kocke, ako je njena zapremina dva puta veća od zapremine kocke ivice $2,378 \text{ m}$.

752. Izračunati ivicu kocke čija je zapremina $0,5 \text{ m}^3$.

753. Izračunati poluprečnik osnove i visinu kružnog valjka zapremine $V = 401,92 \text{ cm}^3$, ako mu je osni presek kvadrat.

754. Izračunati površinu lopte poluprečnika $R = 16,68 \text{ cm}$.

755. Izračunati debljinu oble žice, čija je težina $4,975 \text{ kg}$, a dužina $16,75 \text{ dm}$, ako se zna da je specifična težina gvožđa $7,7$.

756. Izračunati površinu i zapreminu zemljine kugle, ako se uzme da je njen poluprečnik 6371 km .

757. Koristeći formulu za jednako ubrzano kretanje $s = \frac{gt^2}{2}$, odrediti put s , koji prelazi neko telo za 19 sek , sko je ubrzanje $g = 9,8 \text{ m/sek}$.

758. Koristeći prethodnu formulu za jednako ubrzano kretanje, odrediti vreme za koje jedno telo prelazi put $s = 2356 \text{ km}$.

759. Na koti visine 120 m postavljen je top iz koga je ispaljena granata u horizontalnom pravcu brzinom 839 m/sek . Izračunati na kom rastojanju od topa je pala granata, koristeći obrazac za rastojanje

$$x, \text{ tj. } x = V_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

760. Izračunati visinu sa koje treba ispaliti hitac u horizontalnom pravcu brzinom 975 m/sek , da bi pao na rastojanju $9,568 \text{ km}$ od mesta ispaljivanja.

761. Dokazati da logaritam broja $N > 0$ za osnovu $a > 1$ se ne menja, ako se stepenuje jednim istim izložiocem osnove i numerus, tj.

$$\log_a N = \log_{a^m} N^m.$$

762. Dat je logaritam broja N za bazu a ; Naći logaritam broja N za bazu b .

763. Ako su a i b dva pozitivna broja različita od jedan, tada je tačan identitet

$$\log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

764. Dokazati da je

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \text{ gde je } a > 0, b > 0 \text{ i } c > 0.$$

765. Ako je $a^2 + b^2 = 7ab$ dokazati da je

$$\log \frac{|a+b|}{3} = \frac{1}{2} (\log |a| + \log |b|).$$

766. Dokazati da je

$$\log |a+b| - \log |a-b| = \frac{1}{2} \log 2, \text{ ako je } a^2 + b^2 = 6ab.$$

Dokazati sledeće identitete:

767. $3 \log_b a + 2 \log_b \frac{1}{a} = \log_b a.$

768. $\log_b a - \log_b \frac{1}{a} - \log_b a^2 = 0.$

769. $\log_a \frac{b}{a} + \log_a \frac{a}{bx} - \log \frac{1}{a} x = 0.$

770. $\log_a by + \log_{\frac{1}{a}} by = 0.$

771. $\log_a x - 4 \log_{\frac{1}{a}} x - \log_a x^5 = 0.$

772. Dokazati da je

$$\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2 \log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a, \text{ ako su } a \text{ i } b \text{ kateta, a } c \text{ hipotenuza pravouglog trougla.}$$

773. Bez upotrebe logaritamskih tablica ispitati šta je veće $\log_2 3$ ili $\log_3 4$.

Izračunati bez upotrebe logaritamskih tablica:

774. $x = 10^{1-\log 5} + 10^{2-\log 20} - 10^{3-\log 500}.$

775. $x = 1000^{\log 3} \cdot 100^{\log \sqrt{2}} - \log \sqrt{3}.$

776. $x = 10 \cdot 100^{\frac{1}{2} \log 9 - \log 2}.$

777. $x = 49^{1-\log_7 2} + 5^{-\log_5 4}.$ 778. $x = \sqrt{10^{2+\frac{1}{2} \log 16}}.$

779. Naći $\log_c x$ ako je $\log_a x = p$; $\log_b x = q$ i $\log_{abc} x = r.$

780. Ako je $\log_5 2 = a$, $\log_5 3 = b$, izračunati $\log_{45} 100.$

781. Ako je $\log_7 2 = c$ i $\log_7 5 = d$, izračunati $\log_{70} 2,5.$

782. Izračunati $\log_8 9,8$ ako je $\log_{10} 2 = a$ i $\log_{10} 7 = b$

783. Ako je $\alpha = \log_{12} 18$, $\beta = \log_{24} 54$, onda je $\alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1.$ Dokazati.

784. Dokazati da je $\log_b a = \log_{b^n} a^n.$

785. Izračunati $\log_{\sqrt{3}} 8$, ako je $\log_{12} 3 = a.$

786. Bez upotrebe logaritamskih tablica uporediti šta je veće $\log_4 3$ ili $\log_{16} 9.$

787. Ako je $\log_a 27 = b$, izračunati $\log_{\sqrt{3}} \sqrt[6]{a}.$

788. Ako je $\log_b a = m$ i $\log_c b = n$, izračunati $\log_{bc} ab.$

789. Izračunati $\log_{\frac{1}{2}} 28$, ako je $\log_7 2 = a.$

790. Naći $\log_9 2,97$, ako je $\log_{10} 3 = a$ i $\log_{10} 11 = b.$

Rešiti sledeće logaritamske jednačine:

791. $\log x + \log(x+3) = 1.$

792. $\log x - \log \frac{1}{x-1} - \log 2 = \log(2x+3)$

$$793. 4 - \log x = 3 \sqrt{\log x}. \quad 794. \log x - (\log \sqrt[6]{x})^{-1} = 1.$$

$$795. \log(x-9) + 2 \log \sqrt{2x-1} = 2.$$

$$796. \log \sqrt{x-5} + \log \sqrt{2x-3} + 1 = \log 30. \quad 797. x^{\log x} = 100x.$$

$$798. \log_2 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}-1} \right) = 0,25^{-\frac{1}{2}} + \log_2 \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}+2} \right).$$

$$799. \log_x \sqrt{5} + \log_x 5x - 2,25 = (\log_x \sqrt{5})^2.$$

$$800. 2 \log_4 (2^x - 1) + x + \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{\sqrt{6}}{6}} 6 = 0.$$

$$801. \log_a x - \log_{a^2} x + \log_{a^4} x = \frac{3}{4}.$$

$$802. \log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7.$$

$$803. \log(152 + x^3) - 3 \log(x+2) = 0.$$

Rešiti sistem jednačina:

$$804. \begin{cases} x + \log y = 3, \\ 3x - \log y^2 = 4. \end{cases}$$

$$805. \begin{cases} \log(x-y) - 2 \log 2 = 1 - \log(x+y), \\ \log x - \log 3 = \log 7 - \log y. \end{cases}$$

$$806. \begin{cases} \log(x^2 + y^2) - 1 = \log 13, \\ \log(x+y) - \log(x-y) = 3 \log 2. \end{cases}$$

$$807. \begin{cases} \log_2(x-y) = 5 - \log_2(x+y), \\ \log x - \log 4 = -1, \\ \log y - \log 3 = -1. \end{cases}$$

$$808. \begin{cases} \log(x^2 + y^2) = 1 + \log 8, \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 3. \end{cases}$$

$$809. \begin{cases} 2 - \log_2 y = 2 \log_2(x+y), \\ \log_2(x+y) + \log_2(x^2 - xy + y^2) = 1. \end{cases}$$

Odrediti skup vrednosti promenljive x tako da:

$$810. \log(x+2) - \log x > 1. \quad 811. \log(x-2) > \log x.$$

$$812. \log(x-4) - \log(x+1) < 1.$$

$$813. x^{(\log x)^2 - 3 \log x + 1} > 1000.$$

$$814. \log_{0,5}(2x+6) > \log_{0,5}(x+8). \quad 815. 2 \log x > \log^2 x.$$

$$816. \log \frac{6}{x} > \log(x+5). \quad 817. \log_{ax} a + 3 \log_{a^2 x} a > 0, \quad a > 1.$$

$$818. \log_3(x^2 - 5x + 6) < 0.$$

$$819. \log_{ax} x + \log_a(x+1) < \log_a(2x+6), \quad (a > 1).$$

REŠENJA

1. Težja prva deljena ostane pri deljenju s 3, kadar je a deljena s 3.

Ugotovimo, da se vsi deli delijo s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.

$$a = \begin{cases} 3k \\ 3k+1 \\ 3k+2 \end{cases} \quad \text{in to je vse, kar je potrebno.}$$

Primer 2:

$$a = \begin{cases} 3k \\ 3k+1 \\ 3k+2 \end{cases} \quad \text{in to je vse, kar je potrebno.}$$

Primer 3: prva deljena ostane pri deljenju s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.

Ugotovimo, da se vsi deli delijo s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.

Ugotovimo, da se vsi deli delijo s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.
Primer 4: prva deljena ostane pri deljenju s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.
Primer 5: prva deljena ostane pri deljenju s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.

Ugotovimo, da se vsi deli delijo s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.
Primer 6: prva deljena ostane pri deljenju s 3, če je a deljen s 3, kar pomeni, da je $a = 3k$.

I G L A V A

1. POJAM IRACIONALNOG BROJA

Racionalisanje imenioca

1. Treba prvo dokazati teoremu: „ako je a^2 deljivo sa 3, onda je a deljivo sa 3“.

Uočimo da se svaki ceo broj može napisati u jednom od ovih oblika.

$$a = \begin{cases} 3n \\ 3n + 1 \\ 3n + 2 \end{cases} \quad (n \text{ ceo broj})$$

otuda je

$$a^2 = \begin{cases} 9n^2 \\ 9n^2 + 6n + 1 \\ 9n^2 + 12n + 4. \end{cases}$$

Pošto je, prema pretpostavci, a^2 deljivo sa 3, a^2 mora biti jednako sa $9n^2$.

Otuda $a = 3n$, i a je deljivo sa 3.

Dokaz da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj, izvešćemo metodom svodenja na protivurečnost. Pretpostavimo da je $\frac{p}{q}$ redukovan racionalan broj tj. da p i q nemaju zajednički faktor. Pretpostavimo takođe da je $\sqrt{3} = \frac{p}{q} \Rightarrow p = q\sqrt{3} \Rightarrow p^2 = 3q^2$.

U tom slučaju p^2 je deljivo sa 3, te je i p deljivo sa 3 (prethodna teorema). Imamo $p = 3r$, gde je r ceo broj. Tada je $9r^2 = 3q^2$

ili $3r^2 = q^2$. Otuda q^2 je deljivo sa 3, te je i q deljivo sa 3 (prethodna teorema). Prema tome p i q imaju jedan zajednički faktor 3, nasuprot našoj pretpostavci. Time je tvrđenje dokazano.

2. Dokaz je analogan kao u prethodnom primeru.
3. Pretpostavimo suprotno da e dati broj racionalan tj.

$$\sqrt{2} + \sqrt{17} = R \quad (R \text{ racionalno}).$$

odavde sledi

$$\sqrt{17} = R - \sqrt{2} \text{ ili } 15 = R^2 - 2R\sqrt{2}.$$

odakle je

$$\sqrt{2} = \frac{R^2 - 15}{2R}$$

Ovim dolazimo do apsurd da je broj $\sqrt{2} + \sqrt{17}$ zaista iracionalan broj.

4. Pretpostavimo suprotno da je $\sqrt[3]{2}$ kvadratni iracionalitet tj.

$$\sqrt[3]{2} = p + q\sqrt{2}.$$

Ako se kubira leva i desna strana onda je

$$(p^3 + 6pq^2) + (3p^2 + 2q^3)\sqrt{2} = 2 \text{ ili } p^3 + q^3\sqrt{2} = 2$$

Odakle sledi da izraz na desnoj strani je iracionalan i nikad ne može biti jednak 2, što znači da pretpostavka suprotnog nije tačna.

5. Neka je $n + \sqrt{n} = r$ racionalan broj, tada je $\sqrt{n} = r - n$, što je nemoguće, jer je na levoj strani iracionalan broj.
6. Iz pretpostavke imamo

$$(1) a^2 + 2ab + b^2 = 8ab \Rightarrow (a + b)^2 = 8ab,$$

$$(2) a^2 - 2ab + b^2 = 4ab \Rightarrow (a - b)^2 = 4ab.$$

Količnik (1) i (2) je

$$\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^2 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{a-b} = \sqrt{2},$$

tj. tvrđenje je tačno.

7. $\sqrt{2}$. 8. 4. 9. $\frac{1}{3}\sqrt{3}$. 10. $\sqrt{xy}$. 11. $-(\sqrt{a} + \sqrt{b})$.

12. 10. 13. $-\sqrt{3}$. 14. $1 - \sqrt{11}$. 15. $\sqrt{4-x^2}$. 16. a .

17. 4. 18. 16. 19. 2.

$$\begin{aligned} 20. \quad \frac{2}{1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}} &= \frac{2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} = \\ &= \frac{2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})}{2\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2} + 2 - \sqrt{6}. \end{aligned}$$

21. $\frac{2\sqrt{3} + 3\sqrt{2} + \sqrt{30}}{12}$ 22. $-3(3 + \sqrt{5} + \sqrt{2})(2 + \sqrt{5})$. 23. $4\sqrt{15}$.

24. Posmatrajmo recipročne vrednosti brojeva A i B tj.

$$\frac{1}{A} = \frac{1}{\sqrt{a+m} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a+m} + \sqrt{a}}{m},$$

$$\frac{1}{B} = \frac{1}{\sqrt{b+m} - \sqrt{a}} = \frac{\sqrt{b+m} + \sqrt{b}}{m}.$$

Iz pretpostavke $a > b$ izlazi

$$\frac{1}{A} > \frac{1}{B}, \text{ dakle } A < B.$$

25. 1. 26. $R = 2$. 27. 1. 28. $\frac{1 + \sqrt{15}}{4}$. 29. $\frac{1}{5}$.

30. Kako je $A^{-2} = \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}\right)^{-2} = \frac{(\sqrt{5} + \sqrt{3})^2}{3} = \frac{8 + 2\sqrt{15}}{3}$, a

$$B - A = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{3}(\sqrt{5}+\sqrt{3}) - \sqrt{3}(\sqrt{5}-\sqrt{3})}{5-3} = 3$$

$$\text{dakle } 2^{-1} A^{-2} (B-A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8+2\sqrt{15}}{3} \cdot 3 = 4 + \sqrt{15}.$$

31. Kako je $A = (1 - 0,5 \cdot 3^{-\frac{1}{2}})^{-1} = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} =$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)^{-1} = \frac{6}{6-\sqrt{3}},$$

onda je

$$A^{-1} - \frac{11}{12} A = \frac{6}{6-\sqrt{3}} - \frac{11}{12} \cdot \frac{6}{6-\sqrt{3}} = \frac{6-\sqrt{3}}{6} -$$

$$- \frac{11}{2(6-\sqrt{3})} = \frac{6-\sqrt{3}}{6} - \frac{6+\sqrt{3}}{6} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

32. $\frac{4\sqrt{m \cdot n}}{m-n}$ 33. $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ 34. 1. 35. $\sqrt{2}$ 36. -1 15. 37. 6.

38. Ako se izvrše naznačene operacije dati izraz postaje

$$\sqrt{x^3(1-x)^3}, \text{ za } x = \sqrt[3]{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}}$$

imamo

$$\sqrt{x^3(1-x)^3} = \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} \cdot \sqrt{1 - \frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} \cdot \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b^2}}{2a}} = \sqrt{\frac{b^2}{4a^2}} = \frac{b}{2a}.$$

39. Kako je $\frac{1-n}{\sqrt{1-n^2}-1+n} = \frac{(\sqrt{1-n})^2}{\sqrt{(1-n)(1+n)}-\sqrt{1-n}^2} =$

$$= \frac{(\sqrt{1-n^2})}{\sqrt{1-n}(\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n})} = \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}},$$

tada je

$$R = \frac{\sqrt{1+n}}{\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}} + \frac{\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}} \cdot$$

$$\cdot \frac{\sqrt{1-n^2}-1}{n} = \frac{\sqrt{1+n}+\sqrt{1-n}}{\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n}} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}-1}{n} =$$

$$= \frac{2n}{(\sqrt{1+n}-\sqrt{1-n})^2} \cdot \frac{\sqrt{1-n^2}-1}{n} = -1.$$

40. $\sqrt{\frac{2n}{1+n}}.$

41. Svodimo oba korena na jednake izloziocce tj.

$$\sqrt[6]{\frac{(1+a)^4}{27a^3}} \cdot \sqrt[6]{\frac{3a^4}{81(1+a)^4}} = \frac{1}{3} \sqrt[6]{a}.$$

42. Oslobađanjem ^{čak i u slučaju} neaktivnih izlozioca, brojilac postaje

$$\frac{2ab\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} + \frac{2ab\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} = 2ab$$

a imenilac

$$2ab \left(\frac{1}{a+\sqrt{ab}} + \frac{1}{b+\sqrt{ab}} \right)$$

Kako je $a + \sqrt{ab} = \sqrt{a^2} + \sqrt{ab} = \sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})$ i

$$b + \sqrt{ab} = \sqrt{b^2} + \sqrt{ab} = \sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b}), \text{ to}$$

imenioc postaje

$$2ab \left[\frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} + \frac{1}{\sqrt{b}(\sqrt{a} + \sqrt{b})} \right] = \frac{2ab}{\sqrt{ab}} = 2\sqrt{ab},$$

i na kraju dati izraz jednak je

$$\frac{2ab}{2\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}.$$

43. Izraz u prvoj zagradi transformiše se u

$$\left[\frac{2\sqrt{ax}}{\sqrt{a+x}(\sqrt{a} + \sqrt{x})} \right]^{-2} = \frac{(a+x)(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2}{4ax}$$

Analogno izraz u drugoj zagradi posle svođenja ima oblik

$$\frac{(a+x)(\sqrt{a} - \sqrt{x})^2}{4ax}$$

njihova razlika

$$\frac{a+x}{4ax} \left[(\sqrt{a} + \sqrt{x})^2 - (\sqrt{a} - \sqrt{x})^2 \right] = \frac{a+x}{4ax} \cdot 4\sqrt{ax} = \frac{a+x}{\sqrt{ax}}.$$

44. $\sqrt{x^2 + a}.$

45. Kako je $a + \sqrt[3]{a^2x} = \sqrt[3]{a^3} + \sqrt[3]{a^2x} = \sqrt[3]{a^2}(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})$, a
 $x + \sqrt[3]{ax^2} = \sqrt[3]{x^3} + \sqrt[3]{ax^2} = \sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{a})$

pa dati izraz postaje

$$\left[\frac{\sqrt[3]{a^2} - \sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]^6 = \left[\frac{(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x})}{\sqrt[3]{x^2}(\sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{x})} - \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right]^6 =$$

$$= \left(\frac{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^6 = \left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x^2}} \right)^6 = \frac{a^2}{x^4}.$$

46. 27. [Koristi da je $a - \sqrt{ax} = \sqrt{a}(\sqrt{a} - \sqrt{x})$]. 47. $32x.$

48. Pošto je $\left(\frac{2\sqrt{xy}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} \right)^{-2} + 1 = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}} + 1 = \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}},$ a

$$\frac{4\sqrt{xy}}{x + y + 2\sqrt{xy}} = \frac{4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}$$

onda je vrednost datog izraza

$$\left\{ \frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2}{4\sqrt{xy}} \cdot \frac{4\sqrt{xy}}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2} \right\}^{\frac{1}{2}} = 1.$$

49. Pošto je $\frac{a + \sqrt{ab}}{a + b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a + b}$, a izraz u srednjim zagradama postaje

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} - \frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a + b}{a - b}$$

onda je

$$\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{a + b} \cdot \frac{a + b}{a - b} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}.$$

50. Dati izraz se lako transformiše u:

$$\frac{4a^{\frac{2}{3}} - 4a^{\frac{1}{3}} + 4}{a^{\frac{2}{3}} - 2a^{\frac{1}{3}} + 1} \cdot \frac{a^{\frac{2}{3}} + 2a^{\frac{1}{3}} + 1}{4a^{\frac{2}{3}} + 4a^{\frac{1}{3}} + 4} \cdot \frac{a - 1}{a + 1} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} =$$

$$= \frac{(a^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{1}{3}} + 1)(a^{\frac{1}{3}} + 1)^2}{(a^{\frac{1}{3}} - 1)^2 \cdot (a^{\frac{2}{3}} + a^{\frac{1}{3}} + 1)} \cdot \frac{a - 1}{a + 1} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} =$$

$$= \frac{(a + 1)(a^{\frac{1}{3}} + 1)}{(a - 1)(a^{\frac{1}{3}} - 1)} \cdot \frac{a - 1}{a + 1} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}} + 1}{a^{\frac{1}{3}} - 1} - \frac{2}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = \frac{a^{\frac{1}{3}} - 1}{a^{\frac{1}{3}} - 1} = 1.$$

$$51. \text{ Kako je } \frac{72-9y}{8} = \frac{9(8-y)}{8} = \frac{9[2^3-(y^{\frac{1}{3}})^3]}{8} =$$

$$= \frac{9(2-y^{\frac{1}{3}})(4+2y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{8},$$

$$\text{a } \left(\frac{4+y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} \right)^3 + 1 = \frac{72+36y^{\frac{1}{3}}+18y^{\frac{2}{3}}}{(2-y^{\frac{1}{3}})^3} = \frac{18(4+2y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{(2-y^{\frac{1}{3}})^3},$$

onda je dati izraz identički jednak

$$\frac{y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} - \left[\frac{9(2-y^{\frac{1}{3}})(4+2y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})}{8} \cdot \frac{(2-y^{\frac{1}{3}})^3}{18(4+2y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}})} \right]^{-\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} - \left[\frac{16}{(2-y^{\frac{1}{3}})^4} \right]^{\frac{1}{4}} = \frac{y^{\frac{1}{3}}}{2-y^{\frac{1}{3}}} - \frac{2}{2-y^{\frac{1}{3}}} = -1.$$

52. Prvi sabirak se transformiše u ovaj izraz

$$\frac{p+q}{pq(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})},$$

a drugi

$$\frac{2(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})}{(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}} = \frac{2}{(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}.$$

Svođenjem oba sabirka na najmanji zajednički, dobija se

$$\frac{p+q+2p^{\frac{1}{2}}q^{\frac{1}{2}}}{pq(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})} = \frac{(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})^2}{pq(p^{\frac{1}{2}}+q^{\frac{1}{2}})} = \frac{1}{pq}.$$

53. Oslobodimo se negativnih izložioca, a izraz

$$a^{\frac{3}{2}} - b^{\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}})^3 - (b^{\frac{1}{2}})^3 \text{ rastavimo na činioce, i posle sredi-}$$

vanja dobija se da je dati izraz jednak 1.

54. $A = \sqrt{(\sqrt{3}-3)^2} + \sqrt{(3+\sqrt{3})^2}$. Kako je $\sqrt{3}-3 < 0$, imamo da je

$$A = -(\sqrt{3}-3) + (3+\sqrt{3}) = -\sqrt{3}+3+3+\sqrt{3} = 6$$

Pošto je $2-\sqrt{5} < 0$ imamo da je

$$B = \sqrt{\frac{1}{(2-\sqrt{5})^2}} - \sqrt{\frac{1}{(2+\sqrt{5})^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}-2} - \frac{1}{2+\sqrt{5}} =$$

$$= \frac{\sqrt{5}+2}{1} - \frac{\sqrt{5}-2}{1} = 4.$$

55. Imamo sukcesivno:

$$x_2 = \frac{\sqrt{3}+x_1}{1-\sqrt{3} \cdot x_1} = \frac{\sqrt{3}+1}{1-\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{1-3} = -(2+\sqrt{3})$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{3}+x_2}{1-\sqrt{3} \cdot x_2} = \frac{-2}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{-1}{2+\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{-(2-\sqrt{3})}{4-3} = -(2-\sqrt{3})$$

$$x_4 = \frac{\sqrt{3}-(2-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2(\sqrt{3}-1)} = 1, \quad \text{dakle } x_4 = x_1$$

Istim postupkom nalazimo da je

$$x_5 = x_2, \quad x_6 = x_3, \quad x_7 = x_4 = x_1 \dots \text{i u opštem obliku}$$

$$x_{3n+1} = x_1 = 1, \quad x_{3n+2} = x_2 = -(2+\sqrt{3}),$$

$$x_{3n+3} = x_3 = -(2-\sqrt{3}), \quad x_{3n+4} = x_1 = 1.$$

56. Označimo sa $A = \frac{1+2x}{1+\sqrt{1+2x}}$ i $B = \frac{1-2x}{1-\sqrt{1-2x}}$,

onda je $y = A + B$

$$\text{Kako je } 1+2x = 1+2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{4} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2} \right)^2$$

onda je $\sqrt{1+2x} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

te je

$$A = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1+\sqrt{3}}{2}} = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}.$$

Zatim

$$1-2x = \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)^2, \text{ odakle } -\sqrt{1-2x} = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

pa je

$$B = \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{1 + \frac{1-\sqrt{3}}{2}} = \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}.$$

na kraju

$$y = \frac{2+\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}} + \frac{2-\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(2+\sqrt{3})(3-\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{9-3} = \frac{6}{6} = 1.$$

57. a) $x = 2 + \sqrt{3}$ — u ovom slučaju vrednost brojioca

$$(x-1)\sqrt{3} = (1+\sqrt{3})(\sqrt{3}).$$

$$\text{a kvadrat imenioca } x^2 - x + 1 = (2+\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3}) + 1 = 7 + 4\sqrt{3} - 2 - \sqrt{3} + 1 = 6 + 3\sqrt{3} = 3(2+\sqrt{3}).$$

Odakle za y se dobija

$$\begin{aligned} y &= \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})} = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}(\sqrt{2+\sqrt{3}})} = \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{3}}} = \\ &= \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2}{2+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{(1+\sqrt{3})^2(2-\sqrt{3})}{(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}} = \\ &= \sqrt{\frac{(4+2\sqrt{3})(2-\sqrt{3})}{4-3}} = \sqrt{2(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})} = \sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) $x = 2 - \sqrt{3}$ — u ovom slučaju imamo

$$(x-1)\sqrt{3} = (1-\sqrt{3})\sqrt{3}$$

$$\text{i } x^2 - x + 1 = 3(2-\sqrt{3}),$$

odakle

$$y = \frac{(1-\sqrt{3})\sqrt{3}}{\sqrt{3}(2-\sqrt{3})} = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}},$$

pošto je razlika $1-\sqrt{3}$ negativna, to je

$$\begin{aligned} y &= -\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2}{2-\sqrt{3}}} = -\sqrt{\frac{(1-\sqrt{3})^2(2+\sqrt{3})}{(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})}} = - \\ &= -\sqrt{(4-2\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = \sqrt{2(2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})} = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Napomena: — Do rezultata možemo doći i na ovaj način.

Izračunajmo najpre y^2 ;

imamo

$$y^2 = \frac{3(x-1)^2}{x^2-x+1}$$

i za $x = 2 \pm \sqrt{3}$ biće

$$y^2 = \frac{3(1 \pm \sqrt{3})^2}{3(2 \pm \sqrt{3})} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{2 \pm \sqrt{3}} = 2,$$

odakle $|y| = \sqrt{2}$.

Dakle, za $x = 2 + \sqrt{3}$; $y > 0$, pa je $y = \sqrt{2}$ i za $x = 2 - \sqrt{3}$, $y < 0$ te je $y = -\sqrt{2}$.

58. 1.

59. Posle očiglednih transformacija $x = \frac{a-b}{2\sqrt{ab}}$, a

$$\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{a-b}{2\sqrt{ab}}\right)^2} = \frac{a+b}{2\sqrt{ab}}.$$

Zamenom ovih vrednosti za x i $\sqrt{1+x^2}$ u dati izraz, imamo

$$\frac{2a\sqrt{1+x^2}}{x+\sqrt{1+x^2}} = a+b.$$

$$60. \frac{(a+b+\sqrt{2})^2}{2ab} = 89,4. \quad 61. \frac{\sqrt{a-b}}{b}.$$

$$62. \frac{\sqrt{x}}{x} \text{ (Uzmi u obzir da je } x+\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$$

$$x-\sqrt{xy}=\sqrt{x}(\sqrt{x}-\sqrt{y}).$$

$$63. 1.$$

$$64. \text{ Pošto je } a\sqrt{a}+b\sqrt{b}=(\sqrt{a})^3+(\sqrt{b})^3; \quad 3\sqrt{ab}-3b=i$$

$$=3\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b}) \text{ i } a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}), \text{ posle}$$

$$\text{očiglednih transformacija vrednost datog izraza jednaka je 3.}$$

$$65. \text{ Uzeti u obzir da je } \frac{15}{3-\sqrt{3}} = \frac{15}{\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$

Posle očiglednih transformacija dati izraz je identički jednak $\frac{1}{2}$.

$$66. \text{ Zamenom } x=2^{-1}(a+a^{-1}) \text{ u izraz}$$

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{1}{4} \left(a - \frac{1}{a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left| a - \frac{1}{a} \right|.$$

Kako je po pretpostavci $a \geq 1$, to $a - \frac{1}{a} \geq 0$, pa je

$$(x^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right).$$

Na isti način nalazimo

$$(y^2-1)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(b - \frac{1}{b} \right).$$

Zamenom nađenih vrednosti u dati izraz izlazi da je njegova vrednost

$$\frac{a^2+b^2}{a^2b^2+1}.$$

67. Racionalizacijom imenioca datog izraza imamo da je

$$\left(\frac{(m+n)x - \sqrt{(m^2-x^2)(x^2-n)}}{x^2+mn} \right)^{-2} = \left(\frac{\sqrt{mn}}{m} \right)^{-2} = \frac{m}{n}.$$

68. Zamenom $x = \frac{2am}{b(1+m)^2}$ u izraze $\sqrt{a+bx}$ i $\sqrt{a-bx}$, nalazimo

$$\sqrt{a+bx} = |1+m| \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} \text{ i } \sqrt{a-bx} = |1-m| \sqrt{\frac{a}{1+m^2}}.$$

Na osnovu pretpostavke $|m| < 1$ to $1+m$ i $1-m$ su pozitivni, te dati izraz dobije sledeći oblik:

$$(1+m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} + (1-m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} = \frac{1}{m}, \quad (\text{za } a > 0).$$

$$(1+m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} - (1-m) \sqrt{\frac{a}{1+m^2}} = \frac{1}{m},$$

69. Posle očiglednih transformacija dati izraz postaje

$$\frac{x^2 - \sqrt{x^4 - a^4}}{x^2 + \sqrt{x^4 - a^4}},$$

Zamenom vrednosti $x = a \left(\frac{m^2+n^2}{2mn} \right)^{\frac{1}{2}}$ u dobiveni izraz, izlazi da je vrednost datog izraza $\frac{m^2}{n^2}$.

$$70. y = m. \quad 71. \frac{a}{b} \text{ za } a > b; \quad \frac{b}{a} \text{ za } a < b.$$

$$72. \text{ Za } x = 2^{-1}(a+a^{-1}) = \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \text{ dobija se}$$

$$\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\left[\frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \right]^2} = \frac{1}{2} \left| a - \frac{1}{a} \right|,$$

$$\text{tj. } \sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \text{ za } a \geq 1, \quad -1 < a < 0, \quad a$$

$$\sqrt{x^2-1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - a \right) \text{ za } 0 < a < 1 \text{ ili } a < -1.$$

Na osnovu toga je

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = a^2 \text{ ako je } a \geq 1 \text{ ili } -1 < a < 0$$

$$\frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}} = \frac{1}{a^2} \text{ za } 0 < a < 1 \text{ ili } a < -1.$$

73. Posle očiglednih transformacija imamo da je

$$A = \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{x}}} + \frac{1}{\sqrt{a - \sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}}}{\sqrt{a^2 - x}}$$

Brojilac se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}} &= \sqrt{(\sqrt{a - \sqrt{x}} + \sqrt{a + \sqrt{x}})^2} = \\ &= \sqrt{2(a + \sqrt{a^2 - x})} \end{aligned}$$

za $x = 4(a - 1)$ je $a^2 - x = (a - 2)^2$.

Prema tome, A postaje

$$A = \frac{\sqrt{2a + 2\sqrt{(a - 2)^2}}}{\sqrt{(a - 2)^2}}$$

Za $a > 2$ je $\sqrt{(a - 2)^2} = a - 2$, pa je

$$A = \frac{\sqrt{4a - 4}}{a - 4} = \frac{2\sqrt{a - 1}}{a - 2}$$

za $1 < a < 2$ je $\sqrt{(a - 2)^2} = -(a - 2)$, odakle je

$$A = \frac{\sqrt{2a + 2(2 - a)}}{2 - a} = \frac{2}{2 - a}.$$

74. $\frac{3}{\sqrt{5}}.$

75. Neka je $\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = x$, pa je

$$x^2 = 2(a + \sqrt{a^2 - b}) = 4 \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}.$$

Odakle

$$x = 2 \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}};$$

Dakle

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} + \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2 \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \quad (1)$$

Analogno

$$\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}} = 2 \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}. \quad (2)$$

Zbir (1) i (2) odnosno njihova razlika daje traženi identitet.

76. a) $\sqrt{11 + 4\sqrt{7}} = \sqrt{11 + \sqrt{112}} = \sqrt{\frac{11 + \sqrt{11^2 - 112}}{2}} +$

$$+ \sqrt{\frac{11 - \sqrt{11^2 - 112}}{2}} = \sqrt{\frac{11 + 3}{2}} - \sqrt{\frac{11 - 3}{2}} =$$

$$= \sqrt{7} + 2 = 2,64... + 2 = 4,64...$$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} = 1,93...$ c) $\frac{\sqrt{14} - \sqrt{6}}{2} = 0,65...$

d) $2 + \sqrt{3} = 3,73...$ e) $3\sqrt{3} + 2 = 7,19...$

77. Za izraze u imeniocu broja A treba iskoristiti Lagranževu identitetu, tada se lako dobija da je $A = \sqrt{2} \in \mathbb{J}$.

78. Koristeći Lagranžev identitet imamo

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x - 1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x - 1}} = 2 \sqrt{\frac{x + \sqrt{x^2 - 4(x - 1)}}{2}} =$$

$$= 2 \sqrt{\frac{x + \sqrt{(x - 2)^2}}{2}} = 2 \sqrt{\frac{x + 2 - x}{2}} = 2.$$

Ovde je uzeto da je $\sqrt{(x - 2)^2} = 2 - x$, jer je na osnovu pretpostavke $x \leq 2$.

79. Racionalisanjem imenioca datog izraza imamo

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n - n^2(n+1)} =$$

$$= \frac{(n+1)\sqrt{n} - n\sqrt{n+1}}{n(n+1)} = \frac{\sqrt{n}}{n} - \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$$

odakle izlazi da je

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n} + n\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

U ovoj jednakosti stavimo sukcesivno da je $n = 1, 2, 3, \dots, 98, 99$; pa je

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{3} + 3\sqrt{4}} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}},$$

$$\frac{1}{99\sqrt{98} + 98\sqrt{99}} = \frac{1}{\sqrt{98}} - \frac{1}{\sqrt{99}},$$

$$\frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}} = \frac{1}{\sqrt{99}} - \frac{1}{\sqrt{100}}.$$

Sumiranjem gornjih jednakosti izlazi

$$S = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{100}} = 1 - \frac{1}{10} = \frac{9}{10}.$$

80. Neka je

$$A = \sqrt[3]{ax^3 + by^3 + cz^3} = \sqrt[3]{\frac{ax^3}{x} + \frac{by^3}{y} + \frac{cz^3}{z}} =$$

$$= \sqrt[3]{ax^3\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right)} = x\sqrt[3]{a}$$

pošto je $ax^3 = by^3 = cz^3$ i $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Analogno dobijamo

$$A = y\sqrt[3]{b} \text{ i } A = z\sqrt[3]{c}$$

Odakle izlazi

$$\frac{A}{x} = \sqrt[3]{a}; \quad \frac{A}{y} = \sqrt[3]{b}; \quad \frac{A}{z} = \sqrt[3]{c}.$$

Sumiranjem ovih jednakosti dobijamo

$$A\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

Odavde konačno

$$A = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}.$$

81. Neka je

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} = \alpha, \quad 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} = \beta.$$

Tada je $a_n = \alpha^n + \beta^n$; $b_n = \alpha^n - \beta^n$; $\alpha\beta = \frac{1}{2}$.

Imamo:

$$a_m a_n - \frac{a_{m-n}}{2^n} = (\alpha^m + \beta^m)(\alpha^n + \beta^n) - \frac{\alpha^{m-n} + \beta^{m-n}}{2^n}$$

$$= \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} + \alpha^n \beta^n (\alpha^{m-n} + \beta^{m-n}) - \frac{\alpha^{m-n} + \beta^{m-n}}{2^n}$$

$$\text{Kako je } \alpha^n \beta^n = \frac{1}{2^n},$$

Imamo

$$a_m a_n - \frac{a_{m-n}}{2^n} = \alpha^{m+n} + \beta^{m+n} = a_{m+n}$$

Analogno se dokazuje i drugi odnos.

82. Kako je $ax = \sqrt{\frac{2a-b}{b}}$, imamo:

$$\frac{1-ax}{1+ax} = \frac{1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\frac{2a-b}{b}}} = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{2a-b}{b}}\right)^2}{1-\frac{2a-b}{b}} =$$

$$= \frac{a-b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}.$$

Analogno imamo

$$\sqrt{\frac{1+bx}{1-bx}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}} = \sqrt{\frac{1+\frac{b}{a}\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{1-\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{2a-b}{b}}} =$$

$$= \frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{\sqrt{(b-a)^2}} = \frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a}$$

(jer je $b-a > 0$). Proizvod ova dva izraza daje

$$\frac{a-b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a} \cdot \frac{a+b\sqrt{\frac{2a-b}{b}}}{b-a} = \frac{a^2 - b^2 \frac{2a-b}{b}}{(b-a)^2} = 1.$$

83. Primenom Lagranževog identiteta imamo

$$\sqrt{4-\sqrt{15}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{16-15}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{16-15}}{2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{6}),$$

dati proizvod postaje $\frac{1}{2}(4+\sqrt{15})(\sqrt{10}-\sqrt{6})^2 =$

$$= \frac{1}{2}(4+\sqrt{15})(16-4\sqrt{15}) = 2(4+\sqrt{15}) = 2.$$

84. Analogno prethodnom zadatku

$$\sqrt{3-\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{9-5}}{2}} - \sqrt{\frac{3-\sqrt{9-5}}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{10}-\sqrt{2})$$

pa je

$$\sqrt{3-\sqrt{5}}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2}) = \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})(\sqrt{10}-\sqrt{2})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(3+\sqrt{5})(12-2\sqrt{20}) = 2(3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5}) = 8.$$

85. Pošto je

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2+\sqrt{3})^3} = 2+\sqrt{3}, \text{ onda je}$$

$$\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3}) = (2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 4-3 = 1.$$

86. Kako je $\sqrt[3]{26-15\sqrt{3}} = \sqrt[3]{(2-\sqrt{3})^3} = 2-\sqrt{3},$

posle očiglednih transformacija izlazi dato tvrđenje.

87. Pošto je $\sqrt[3]{7+5\sqrt{2}} = \sqrt[3]{(\sqrt{2}+1)^3} = \sqrt{2}+1,$ a primenom Lagranževog identiteta

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{4+\sqrt{12}} = \sqrt{3}+1, \text{ pa je tvrđenje tačno.}$$

88. Primenom $x^2 \pm 4x\sqrt{2} + 8 = (x \pm 2\sqrt{2})^2,$ pa se izraz A može napisati u obliku

$$A = \frac{1}{\sqrt{x-2\sqrt{2}}} - \frac{1}{\sqrt{x+2\sqrt{2}}}.$$

Primenom Lagranževih identiteta za $x=3,$

$$\sqrt{x-2\sqrt{2}} = \sqrt{3-\sqrt{8}} = \sqrt{2}-1, \text{ a izraz}$$

$$\sqrt{x+2\sqrt{2}} = \sqrt{3+\sqrt{8}} = \sqrt{2}+1 \text{ pa je}$$

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} = 2.$$

90. Zamenimo vrednost x u izrazu $x^3 + 12x$ i koristimo identitet $(m - n)^3 = m^3 - 3mn(m - n) - n^3$.

$$y = [\sqrt[3]{4(\sqrt{5} + 1)}]^3 - 3\sqrt[3]{4(\sqrt{5} + 1)}\sqrt{4(\sqrt{5} - 1)}x - [\sqrt[3]{4(\sqrt{5} - 1)}]^3 + 12x = 4\sqrt{5} + 4 - 3\sqrt{64}x - 4\sqrt{5} + 4 + 12x = 8 - 12x + 12x = 8.$$

91. Zamenom x u datom izrazu i koristeći identitet

$$(m + n)^3 = m^3 + 3mn(m + n) + n^3$$

imamo

$$y = \left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\right)^3 + 3\sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} \cdot \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \left(\sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}\right)^3 + ax + b = -b + 3\sqrt[3]{\left(-\frac{b}{2}\right)\left(-\left(\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}\right)\right)}x + ax + b = 3\sqrt[3]{-\frac{a^3x}{27}} + ax = -ax + ax = 0.$$

92. Pošto je

$$x^3 - 3x = \left(\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}\right)^3 - 3\left(\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}\right) = \frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}} + \frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}} - 3\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}} \cdot \frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}} = \left(\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}\right) - 3\left(\sqrt[3]{\frac{A + \sqrt{B}}{A - \sqrt{B}}} + \sqrt[3]{\frac{A - \sqrt{B}}{A + \sqrt{B}}}\right) = \frac{2(A^2 + B)}{A^2 - B}, \text{ onda je}$$

$$y = x^3 - 3x - 2\frac{A^2 + B}{A^2 + B} = \frac{2(A^2 + B)}{A^2 - B} - 2\frac{A^2 + B}{A^2 - B} = 0.$$

II GLAVA

2. KOMPLEKSNI BROJEVI

93. a) $\sqrt{-36} - \sqrt{-16} - \sqrt{-64} + \sqrt{-49} = \sqrt{36}(-1) - \sqrt{16}(-1) - \sqrt{64}(-1) + \sqrt{49}(-1) = \sqrt{36}i^2 - \sqrt{16}i^2 - \sqrt{64}i^2 + \sqrt{49}i^2 = \sqrt{36}i^2 + \sqrt{49}i^2 = \sqrt{64}i^2 = -4i - 8i + 7i = -5i.$
 b) $-2i\sqrt{2}.$
 c) $\sqrt{a^2i^2} - \sqrt{(a-b)^2i^2} + \sqrt{b^2i^2} = 2bi.$
94. a) $8 - 6i.$ b) $5 - 2i.$ c) $9 + 3i.$ d) $5,2 + 0,4i.$
95. a) $15 + 6i.$ b) $11 - 13i.$
96. a) $14 - 17i.$ b) $-\frac{8}{15} + \frac{23}{20}i.$ c) $9x + 2yi.$
97. a) $-19 - 4i.$ b) $-48 - 9i.$ c) $5.$ d) $a^2 + b^2.$
98. a) $-\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i;$ b) $\frac{3}{2} - \frac{7}{2}i.$
99. a) $-\frac{6}{5}(1 + 2i);$ b) $-\frac{3}{5} + \frac{11}{5}i.$
100. a) $z = \frac{3 + i}{(2 - i)^2} = \frac{3 + i}{4 - 4i + i^2} = \frac{3 + i}{3 - 4i} = \frac{(3 + i)(3 + 4i)}{9 - 16i^2} = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i.$

Odakle izlazi

$$\operatorname{Re} \{z\} = \frac{1}{5}, \quad \operatorname{Im} \{z\} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \operatorname{Re} \{z\} = \frac{13}{10}; \quad \operatorname{Im} \{z\} = -\frac{19}{10}.$$

$$101. f(z_1) = (2 + 3i)^2 - 4i(2 + 3i) - 7 - 4i = 4 + 12i + 9i^2 - 8i - 12i^2 - 7 - 4i = 0.$$

$$f(z_1) = 0.$$

102. a) Zamenom vrednosti za z u datom izrazu imamo:

$$\frac{z - \bar{z}}{1 + z\bar{z}} = \frac{1 + i - (1 - i)}{1 + (1 + i)(1 - i)} = \frac{1 + i - 1 + i}{1 + 1 - i^2} = \frac{2}{3}i;$$

b) Kao i pod a)

$$\begin{aligned} \frac{z + \bar{z}}{2z + 3} &= \frac{\frac{i-1}{2} + \frac{-i-1}{2}}{2 \cdot \frac{i-1}{2} + 3} = \frac{\frac{-1+i-1-i}{2}}{-1+i+3} = \\ &= \frac{-1}{2+i} \cdot \frac{2-i}{2-i} = \frac{i-2}{5}. \end{aligned}$$

$$103. 1. \quad 105. \text{ a) } 1, 2; \text{ b) } 7 - 8i.$$

$$106. f(z) = f(3 + 2i) = 2 + 3 + 2i + 3(3 + 2i)^2 = 20 + 38i.$$

$$f(\bar{z}) = f(3 - 2i) = 2 + 3 - 2i + 3(3 - 2i)^2 = 20 - 38i.$$

$$107. \text{ a) } 4 \pm 6i; \text{ b) } -30 \pm 65i.$$

$$108. \text{ Neka je } z_1 = a + ib, \quad z_2 = c + id. \text{ Tada je } z_1 + z_2 = a + c + i(b + d), \quad z_1 - z_2 = a - c + i(b - d),$$

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (a + c)^2 + (b + d)^2 + (a - c)^2 + (b - d)^2 = 2(a^2 + b^2) + 2(c^2 + d^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$(b - d)^2 = 2(a^2 + b^2) + 2(b^2 + c^2) = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

$$109. -\frac{24 + 10i}{169}$$

$$110. \text{ a) } z = \frac{(2 + i)^2}{3 - 4i} = \frac{4 + 4i + i^2}{3 - 4i} = \frac{3 + 4i}{3 - 4i} = -\frac{7}{25} + \frac{24}{25}i;$$

pa je

$$|z| = \sqrt{\left(-\frac{7}{25}\right)^2 + \left(\frac{24}{25}\right)^2} = 1.$$

$$\text{b) } |z| = \frac{1}{3}; \quad \text{c) } |z| = 1.$$

111. a) Realan deo proizvoda

$z \cdot \bar{z}_1 = (3x + 2y) + i(-2x + 3y); 3x + 2y = -1$, a imaginarni deo količnika

$$\frac{z}{z_2} = \frac{x + iy}{2 + i} = \frac{2x + y}{5} + \frac{2y - x}{5}i, \quad \frac{2y - x}{5} = \frac{3}{5}.$$

Iz sistema

$$\begin{cases} 3x + 2y = -1 \\ \frac{2y - x}{5} = \frac{3}{5} \end{cases} \quad \text{izlazi } x = -1, \quad y = 1.$$

Traženi kompleksni broj je $z = -1 + i$.

Odgovarajući sistem pod b)

$$\begin{cases} \frac{2x - y}{5} = \frac{3}{5} \\ -2x + 3y = -1, \end{cases}$$

odgovarajuće rešenje za $z = 2 + i$.

112. a) Analogno prethodnom zadatku dolazi se do sistema

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{odavde } x = -1, \quad y = 1.$$

Traženi kompleksni broj $z = -1 + i$.

b) $z = 1 - i$.

$$117. \frac{255}{256} (1 + i).$$

118. a) -2 ; b) 0 ; c) $2i$; d) 1 .

119. Kako je $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left[\frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)}\right]^n = \left[\frac{1+2i+i^2}{1-i^2}\right]^n = i^n$

onda je za $n = 4k$

$$z = i^n = i^{4k} = 1 \text{ pa je } \operatorname{Re}\{z\} = 1, \operatorname{Im}\{z\} = 0, \text{ za } n = 4k + 1$$

$$\operatorname{Re}\{z\} = 0, \text{ za } n = 4k + 2$$

$$z = i^n = i^{4k+1} = i \text{ pa je } \operatorname{Re}\{z\} = 0, \operatorname{Im}\{z\} = 1, \text{ za } n = 4k + 2, i^{4k+2} = -1, \operatorname{Re}\{z\} = -1$$

$$\operatorname{Im}\{z\} = 1, \text{ za } n = 4k + 2, i^{4k+2} = -1, \operatorname{Re}\{z\} = -1$$

$$\operatorname{Im}\{z\} = 0 \text{ i za } n = 4k + 3, i^{4k+3} = -i \text{ te } \operatorname{Re}\{z\} = 0, \operatorname{Im}\{z\} = -1.$$

$$\operatorname{Im}\{z\} = -1.$$

120. $\frac{(1+i)^n}{(1-i)^{n-2}} = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{n-2} (1+i)^2 = i^{n-2} \cdot 2i = 2i^{n-1} = 2,$

ako je $n-1$ oblika $4k$

$$2i^{n-1} = 2i, \text{ ako je } n-1 \text{ oblika } 4k + 1$$

$$2i^{n-1} = -2, \text{ ako je } n-1 \text{ oblika } 4k + 2.$$

$$2i^{n-1} = -2i, \text{ ako je } n-1 \text{ oblika } 4k + 3, k = 1, 2, 3, \dots$$

121. $(1+i)^4 - (1-i)^4 = [(1+i)^2 + (1-i)^2][(1+i)^2 - (1-i)^2] = 0.$

122. Data jednačina može se napisati u obliku

$$-8x - 5y + i(3x + 2y) = i.$$

Korišćenjem definicija o jednakosti kompleksnih brojeva dobijamo sistem

$$\begin{cases} -8x - 5y = 0 \\ 3x + 2y = 1, \end{cases}$$

odakle izlazi $x = -5$; $y = 8$.

123. a) $x = 2, y = -3$; b) $x = y = 1$; c) $x = y = -1$;

d) $x = -\frac{11}{29}, y = \frac{13}{29}$; e) $x = y = 1$.

124. Ako izvršimo deljenje dobija se

$$\frac{x+y-5}{2} + i \frac{y-x+3}{2} = 2-5i \Rightarrow \begin{cases} \frac{x+y-5}{2} = 2 \\ \frac{y-x+3}{2} = -5 \end{cases}$$

$$x = 11, y = -2.$$

125. a) $z = 2 + i$. b) $z = 3 - 5i$.

126. Neka je $z = x + iy$, onda je

$$(x + iy + i)(1 + 2i) + [1 + (x + iy)](3 - 4i) = 1 + 7i.$$

Posle očiglednih transformacija imamo,

$$5x - 5y + 1 + i(5x + 5y - 3) = 1 + 7i,$$

odakle izlazi

$$\begin{cases} 5x - 5y + 1 = 1 \\ 5x + 5y - 3 = 7 \end{cases} \Rightarrow x = 1; y = 1 \Rightarrow z = 1 + i.$$

127. a) $(x + i)(x - i)$, b) $(x + 9i)(x - 9i)$;

c) $(2x + 7i)(2x - 7i)$.

128. a) $(a + ib)(a - ib)$; b) $(a + 6bi)(a - 6bi)$; c) $(4a + 5bi)$

$(4a - 5bi)$.

129. a) $(\sqrt{a} + i\sqrt{b})(\sqrt{a} - i\sqrt{b})$; b) $(\sqrt{a} + i)(\sqrt{a} - i)$.

130. $z = 3 + 4i$.

131. $z = \frac{a\alpha^2 + b\alpha}{a + b\alpha^2} = \frac{a\alpha^3 + b\alpha^2}{a\alpha + b\alpha^3} = \frac{a + b\alpha^2}{\alpha(a + b\alpha^2)} = \frac{1}{\alpha} = \alpha^2$

$$\operatorname{Re}\{z\} = -\frac{1}{2}; \operatorname{Im}\{z\} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

132. Dati broj z može se napisati u obliku

$$z = \frac{[(1+i)^2]^3 - [(1-i)^2]^3}{[(1+i)(1-i)]^6}, \text{ odavde } z = -\frac{1}{4}i.$$

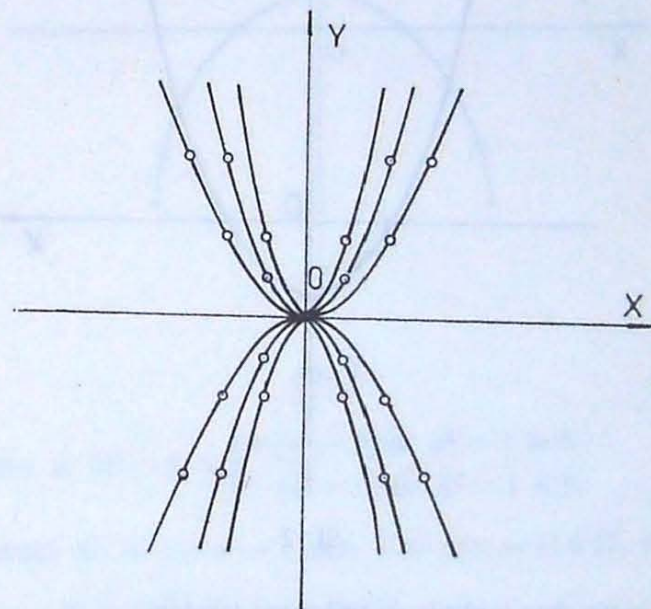
133. a) $(1+i)^{4k} = [(1+i)^2]^{2k} = (1+2i+i^2)^{2k} = (2i)^{2k} = (-4)^k.$

b) $(1+i)^{4k+2} = (1+i)^{4k} (1+i)^2 = (-4)^k \cdot 2i = (2(-4)^k)i.$

III GLAVA

3. KVADRATNA FUNKCIJA

134. Grafici datih funkcija: 1^0 imaju oblik sl. 1.



Sl. 1

Tražene funkcije 1^0 je dat sledećom tabelom

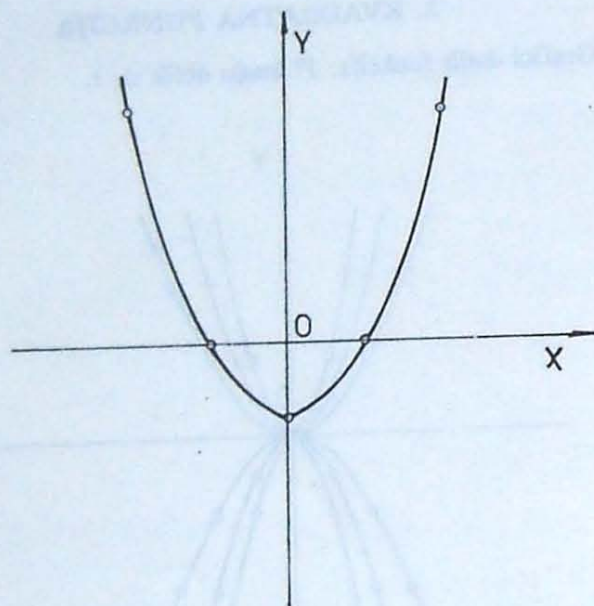
x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$+\infty$

Na celom toku funkcije 1^0 su pozitivne, $x = 0$ je njihova nula. Za $x = 0$ funkcije 1^0 imaju minimum $y = 0$. Promene funkcija 2^0 je dat tabelom.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow -\infty$

Na celom toku funkcije 2^0 su negativne, $x = 0$ je njihova nula. Za $x = 0$ imaju maksimum $y = 0$.

135.



Sl. 2

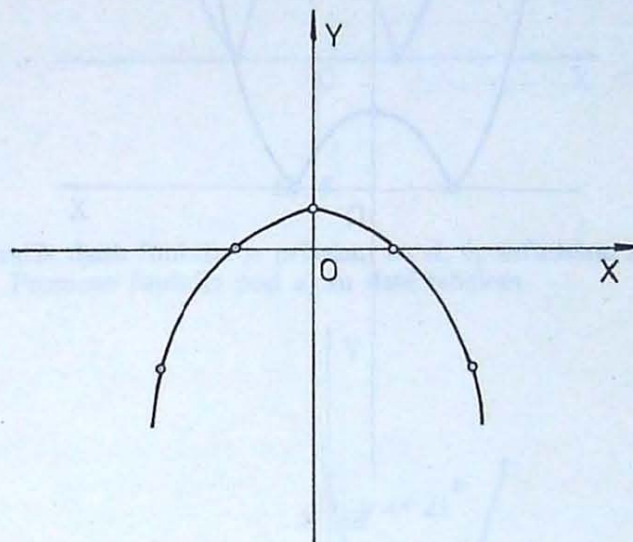
Promene date funkcije su prikazane tabelom

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow -2$	$\nearrow +\infty$

Definisana je za svako x , pozitivna je za $x < -2$ i $x > 2$, negativna za $-2 < x < 2$. Nule funkcije su $x = -2$ i $x = 2$, a za $x = 0$ funkcija ima minimum $y = -2$ (sl. 2).

136. Definisana je za svako x tj. $x \in (-\infty, +\infty)$, za $x = \pm 2$, $y = 0$ pozitivna je za $-2 < x < +2$, a negativna za $x < -2$ i $x > 2$. Funkcija ima maksimum $y = +1$ za $x = 0$. Promena je data ovom tabelom. Grafik sl. 3.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow 1$	$\searrow -\infty$



Sl. 3.

138. Pošto je $|x^2 - 1| = \begin{cases} +(x^2 - 1) & \text{za } x^2 - 1 \geq 0, \\ -(x^2 - 1) & \text{za } x^2 - 1 < 0. \end{cases}$

Imamo da je $y = x^2 - 1$ za $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$;

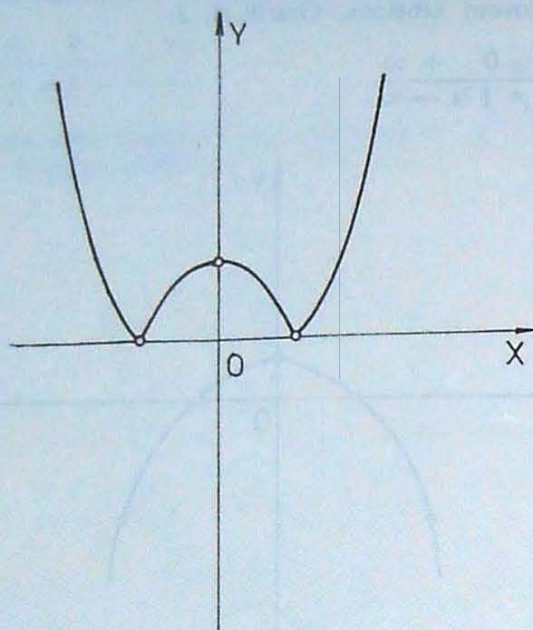
$y = -x^2 + 1$ za $x \in (-1, +1)$.

Grafik date funkcije je prikazan na sl. 4.

Promene su prikazane tabelom

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 1$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

Za $x = 0$ funkcija ima maksimum $y = 1$, a za $x = 1$ i $x = -1$, $y = 0$.



Sl. 4.

139. Kako je $|4 - x^2| = \begin{cases} +(4 - x^2) & \text{za } 4 - x^2 \geq 0. \\ -(4 - x^2) & \text{za } 4 - x^2 < 0. \end{cases}$

Odakle izlazi

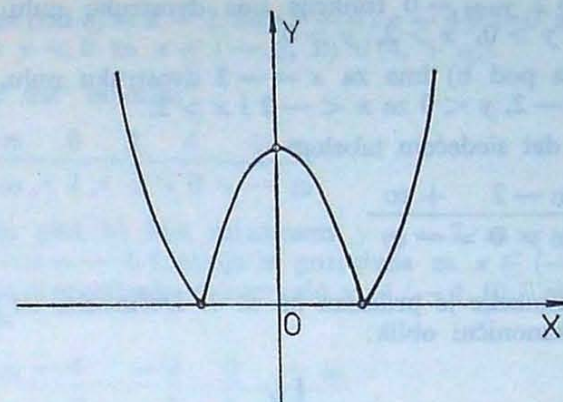
$$y = -x^2 + 4 \text{ za } x \in [-2, +2] \text{ i}$$

$$y = x^2 - 4 \text{ za } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).$$

Grafik ove funkcije je prikazan na sl. 5.

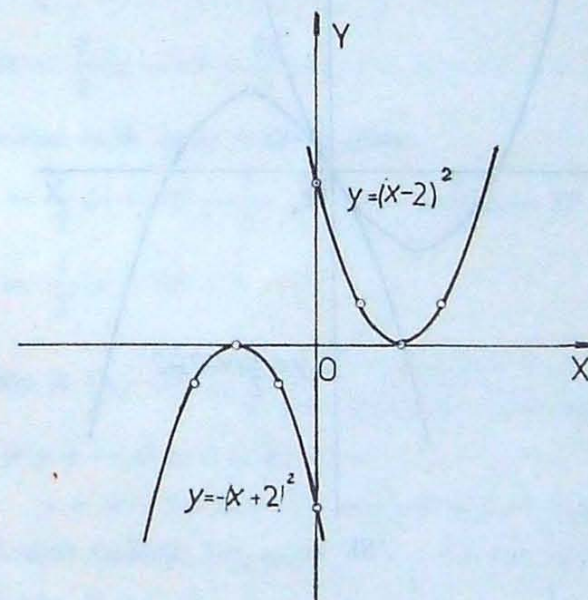
Promene su date tabelom

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$



Sl. 5.

140. Grafik datih funkcija je prikazan na sl. 6, definisane su za svako x . Promene funkcija pod a) su date tabelom



Sl. 6.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$

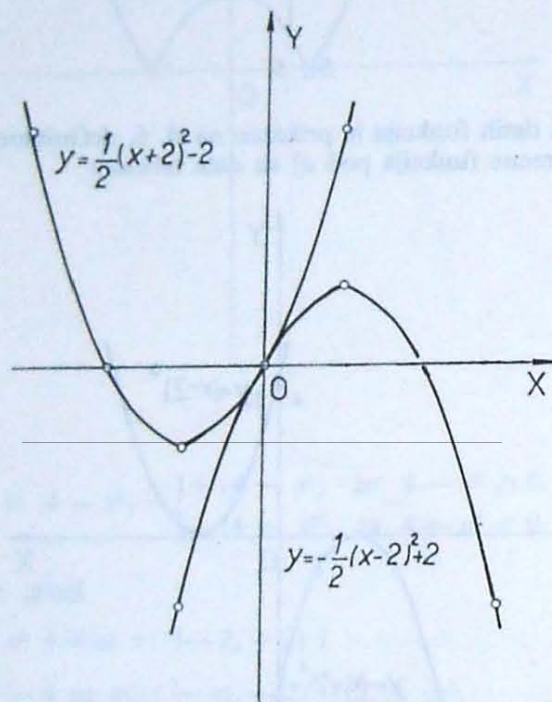
Za $x = 2$ $y_{min} = 0$ funkcija ima dvostruku nulu $x = 2$. Za $x < 2$, $y > 0$, $x > 2$, $y > 0$.

Funkcija pod b) ima za $x = -2$ dvostruku nulu, $y_{max} = 0$ za $x = -2$, $y < 0$ za $x < -2$ i $x > 2$.

Tok je dat sledećom tabelom

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow 0 \searrow$	$-\infty$

145. Grafik funkcije je prikazan na sl. 7. Definisane su za svako x , njihov kanonični oblik:



Sl. 7.

a) $y = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2$.

b) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 2$.

Funkcija pod a) za $x = 2$, nule $x = 0$ i $x = 4$, $y > 0$ za $0 < x < 4$, a $y < 0$ za $x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$.

Tok je dat tabelom

x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow 2 \nearrow$	$2 \searrow$	$0 \searrow$	$-\infty$

Funkcija pod b) ima minimum $y = -2$ za $x = -2$, nule $x = 0$ i $x = 4$, funkcija je pozitivna za $x \in (-\infty, -4) \cup (0, +\infty)$ a negativnija u intervalu $x \in (-4, 0)$. Tok je prikazan tabelom

x	$-\infty$	-4	-2	0	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-2 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

146. Kanoničan oblik datih funkcija je:

a) $y = \frac{1}{2}(x+1)^2 - 2$; b) $y = -2(x-1)^2 + 8$;

c) $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{25}{2}$.

147. Kanoničan oblik datih funkcija glasi:

a) $y = \frac{1}{2}(x+2)^2 - \frac{1}{2}$; b) $y = -\frac{1}{3}(x-3)^2 - 1$;

c) $y = \frac{1}{3}(x+3)^2 + 1$.

148. a) Kako je $|x - x^2| = \begin{cases} x - x^2 & \text{za } 0 \leq x \leq 1 \\ -(x - x^2) & \text{za } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \end{cases}$

onda je $y = -x^2$ za $x \in [0, 1]$, a

$$y = x^2 - 2x \text{ za } x \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty).$$

Grafik date funkcije ima oblik sl. 8, a tok dat tabelom

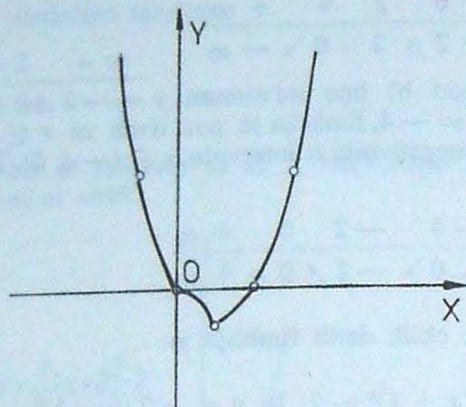
x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$
y	$+\infty$	$\searrow 0 \searrow$	$-1 \nearrow$	$0 \nearrow$	$+\infty$

- b) Pošto je $|x + x^2| = \begin{cases} x + x^2 & \text{za } x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty) \\ -(x + x^2) & \text{za } x \in (-1, 0) \end{cases}$

Imamo da je

$$y = -x^2, x \in (-\infty, -1] \cup [0, +\infty), \text{ i}$$

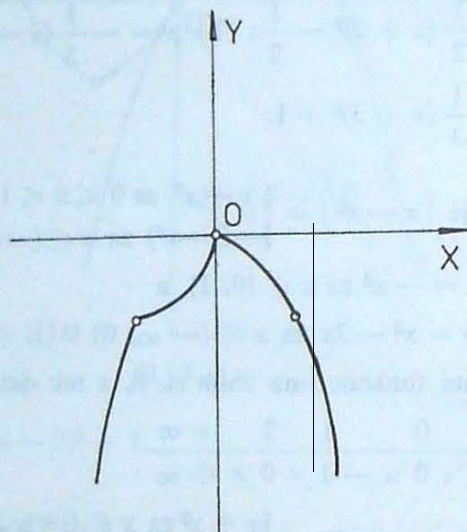
$$y = x^2 + 2x, x \in (-1, 0).$$



Sl. 8.

Grafik date funkcije je prikazan na sl. 9. a tok tabelom

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	0	$-\infty$



Sl. 9.

149.a) Na intervalu $x \in [0, +\infty)$ imamo $|x| = x$, dakle

$$y = x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}.$$

Promene ove funkcije su date sledećom tabelom:

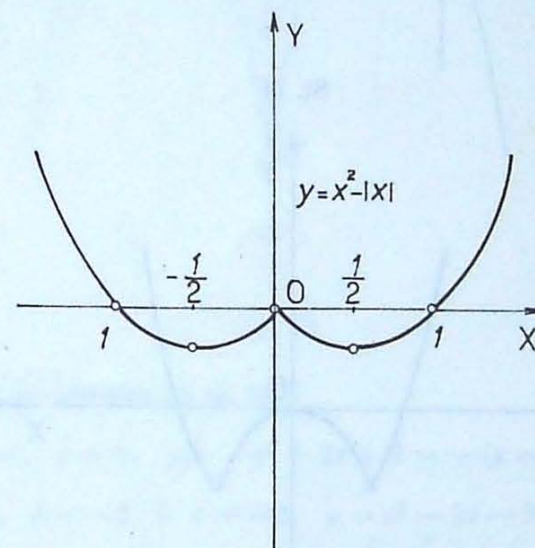
x	0	$1/2$	$+\infty$
y	0	$-1/4$	$+\infty$

Na intervalu $x \in (-\infty, 0)$ $|x|^2 = -x$, dakle

$$y = x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}, \text{ a promene ove funkcije su date tabelom:}$$

x	$-\infty$	$-1/2$	0
y	$-\infty$	$-1/4$	0

Grafik date funkcije je prikazan na sl. 10.

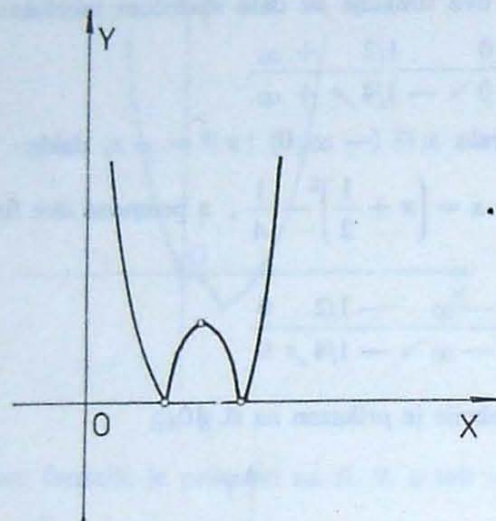


Sl. 10

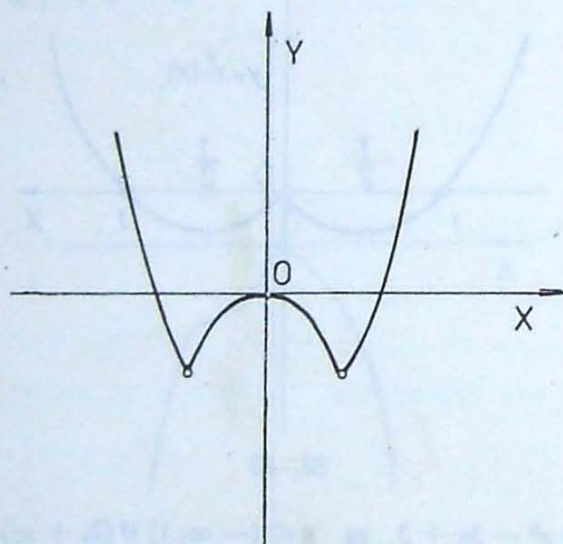
$$\text{b) } y = x^2 - 3x + 2 \text{ za } x \in (-\infty, 1) \cup (2, +\infty) \text{ } y = -x^2 + 3x - 2 \text{ za } x \in [1, 2]$$

Grafik je dat na sl. 11.

150. Za $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$, $y = x^2 - 2$, a za $x \in (-1, +1)$, $y = -x^2$. Grafik je prikazan na sl. 12.



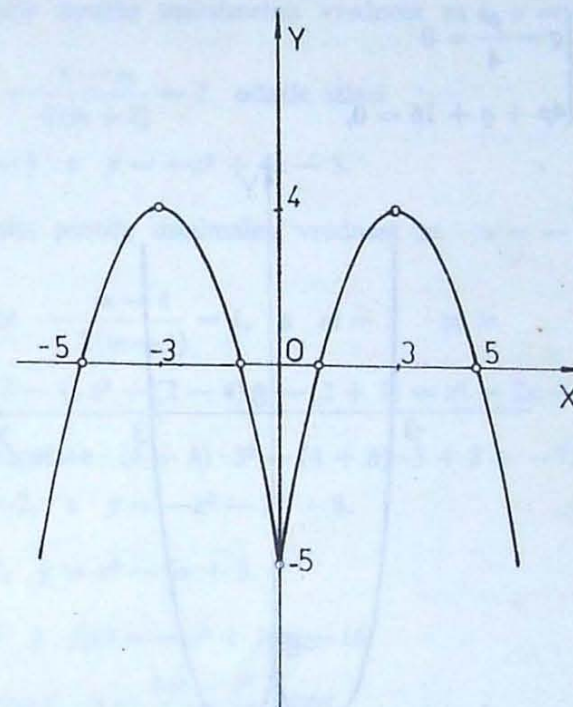
Sl. 11



Sl. 12

151. Za $x \in (-\infty, 0)$, $y = -x^2 - 6x - 5 = -x(x+3)^2 + 4$ a za $x \in [0, +\infty)$, $y = -(x-3)^2 + 4$, grafik je prikazan na sl. 13 a tok tabelom

x	$-\infty$	-5	-3	-1	0	1	3	5	$+\infty$
y	$-\infty$	$\nearrow 0$	$\searrow 4$	$\searrow 0$	-4	$\nearrow 0$	$\nearrow 4$	$\searrow 0$	$-\infty$



Sl. 13

152. Grafik je prikazan na sl. 14.

154. $a = -1$, $c = 8$; $y = -x^2 + 2x + 8 = -(x-1)^2 + 9$.

155. $a = 1$, $b = -2$ i $c = -3$. $y = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$

156. $a = -1$, $b = -2$, $c = 8$ a funkcija je

$$y = -x^2 - 2x + 8 = -(x+1)^2 + 9.$$

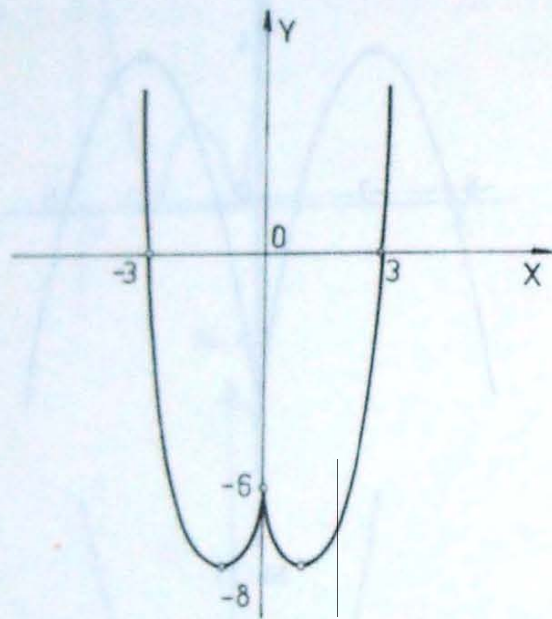
157. $y = x^2 - 6x + 5 = (x-3)^2 - 4$.

158. a) $p = 4$, $q = 3$;

b) Datu funkciju napisati u kanonički oblik tj.

$$y = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}, \text{ iz pretpostavke izlazi sistem}$$

$$\begin{cases} q - \frac{p^2}{4} = 0 \\ 4p + q + 16 = 0, \end{cases}$$



Sl. 14

rešenje sistema je $p = -8$, $q = 16$.

c) Iz pretpostavke izlazi sistem

$$\begin{cases} \frac{p}{2} = +1 \\ q - \frac{p^2}{4} = -4 \end{cases} \quad \text{dakle } p = 2, \quad q = -3$$

159. Koristeći kanonični oblik funkcije $y = -\left(x - \frac{p^2}{2}\right)^2 + q + \frac{p^2}{4}$ i uslov zadatka, izlazi:

a) $p = 4$, $q = -3$; b) $p = 6$, $q = -9$; x) $p = 4$, $q = -1$.

160. Funkcija postiže maksimalnu vrednost za $\alpha = -\frac{b}{2a}$, pa je

$$-\frac{1-m}{2(m+2)} = 2 \quad \text{odakle izlazi}$$

$$m = -3 \quad \text{a} \quad y = -x^2 + 4x - 3.$$

161. Funkcija postiže minimalnu vrednost za $\alpha = -\frac{b}{2a}$,

$$\text{Odakle } -\frac{m-4}{2(m-1)} = 1, \quad \text{a} \quad m = 2 \quad \text{te je}$$

$$y = (2-1)x^2 + (2-4)x - (2+1) = x^2 - 2x - 3.$$

162. Iz jednačine $(1+k) \cdot 3^2 - (4+k) \cdot 3 + 8 = -7$, izlazi $k = -2$, a $y = -x^2 - 2x + 8$.

163. $p = 2$, $y = x^2 - 6x + 5$.

164. $\lambda = 5$ a $f(x) = -x^2 + 10x - 16$.

165. Iz obrasca $\beta = \frac{4ac - b^2}{4a}$ izlazi,

$$\frac{4a(-5) - (-2)^2}{4a} = -2, \quad a = -\frac{1}{3},$$

$$\text{a funkcija } y = -\frac{1}{3}x^2 - 2x - 5 = -\frac{1}{3}(x+3)^2 - 2.$$

166. $c = 0$.

167. a) $p = -1$, $q = -6$; b) $p = -4$, $q = 3$.

168. $\lambda = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 3 = \frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

169. Iz pretpostavke $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow b^2 = 4ac$, pa je

$$y = ax^2 + bx + c = ax^2 + 2\sqrt{ac} \cdot x + c = (x\sqrt{a} + \sqrt{c})^2.$$

170. Imamo da je

$$f(x+3) = a(x+3)^2 + b(x+3) + c,$$

$$-3f(x+2) = -3[a(x+2)^2 + b(x+2) + c].$$

$$3f(x+1) = 3[a(x+1)^2 + b(x+1) + c].$$

$$-f(c) = -ax - bx - c.$$

171. $f(0) = 1$, $f(1) = 1$, $f(-1) = 3$, $f(a+1) = a^2 + a + 1$

$$\text{ i } f\left(\frac{1}{a}\right) = \frac{a^2 - a + 1}{a^2}.$$

172. $f(x+1) = x^2 + 2x + 1 - 5x - 5 + 6$

$$f(x+1) = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6 \Rightarrow f(x) = x^2 - 5x + 6.$$

173. Neka je $x+a = t$ tj. $x = t-a$, gde je t nova promenljiva

Tada je

$$f(t) = (t-a)^2 - (t-a) + 2. \text{ Da bi smo dobili}$$

$$f(x-a) \text{ uvedimo } x-a.$$

$$\text{ Dakle } f(x-a) = (x-2a)^2 - (x-2a) + 2$$

$$175. f\left(\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}\right) = \frac{(1-\sqrt{b})(1+\sqrt{b})}{\sqrt{b}} \cdot \left(\frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}}\right)^2 - 2 \frac{\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} +$$

$$+ \sqrt{b} = \frac{(1+\sqrt{b})\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} - \frac{2\sqrt{b}}{1-\sqrt{b}} + \sqrt{b}$$

$$= \frac{\sqrt{b} + b - 2\sqrt{b} + \sqrt{b} - b}{1-\sqrt{b}} = 0.$$

177. $P(x) = x(20-x) = -x^2 + 20x$. Za $x = -\frac{b}{2a} = 10$,

površina ima maksimalnu vrednost. Dakle, žicu treba podeliti na četiri jednaka dela, tj. pravougaonik maksimalne površine je kvadrat stranice 10 cm.

178. Ako je prva duž x druga je $a-x$ te je

$$y = 3x^3 + 2(a-x)^2 = 5x^2 - 4ax + 2a^2$$

$$\text{ odakle izlazi } x = \frac{2a}{5} \text{ i } a-x = \frac{3}{5}a.$$

179. Neka je x jedan sabirak, drugi je $18-x$, tražena suma ima oblik

$$S(x) = x^2(18-x)^2 = 2x^2 - 36x + 324.$$

Suma ima minimalnu vrednost za

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-36}{4} = 9, \text{ što znači da broj 18 treba rastaviti na dva jednaka sabirka da suma kvadrata bude minimalna.}$$

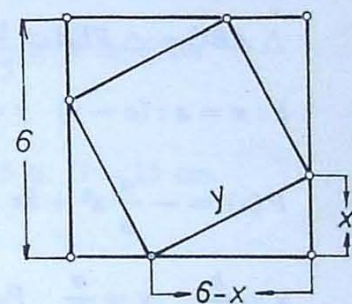
180. Površina traženog kvadrata stranice y je

$$P = y^2 = (6-x)^2 + x^2 \text{ (sl. 15)}$$

$$\text{ Dakle } P(x) = 2x^2 - 12x + 36, \text{ a}$$

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-12}{2 \cdot 2} = 3, \text{ strana traženog kvadrata}$$

$$y = \sqrt{(6-3)^2 + 3^2} = 3\sqrt{2}.$$



Sl. 15

181. Neka je strana kvadrata y , a dimenzije pravougaonika x i $3x$ onda je

$$4y + 2(3x+x) = 56, \quad P = y^2 + 3x^2, \text{ a}$$

$$P(x) = 7x^2 - 56x + 196.$$

$$\text{ Površina ima minimalnu vrednost za } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{-56}{14} = 4$$

$$y = 14 - 8 = 6.$$

te je $y = 3$, odakle izlazi da je obim kvadrata 16 cm, a obim pravougaonika 18 cm.

182. Neka je manja osnovica trapeza y , a krak x onda je veća osnovica $y + x$, te je

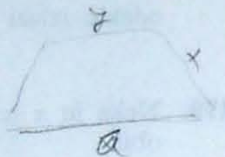
$$3x + 2y = 200$$

$$P(x) = -\frac{x^2\sqrt{3}}{2} + 50x\sqrt{3}.$$

Površina ima maksimalnu vrednost za

$$x = -\frac{b}{2a} = \frac{50\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 50,$$

osnovica $y + x = 75$.



183. Neka su dimenzije pravougaonika x i y onda je $P = xy$.

$$\triangle ABC \sim \triangle FEB \Rightarrow AC : FE = BC : FB \text{ tj.}$$

$$b : x = a : (a - y) \quad y = a - \frac{a}{b}x.$$

$$P(x) = -\frac{a}{b}x^2 + bx \text{ odavde izlazi}$$

$$x = \frac{b}{2}, \quad y = \frac{a}{2} \quad P_{max} = \frac{ab}{4}.$$

184. Neka su dimenzije pravougaonika x i y onda je

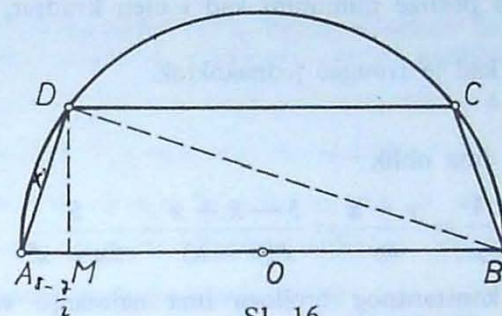
$$P(x) = hx - \frac{h}{a}x^2, \text{ odakle izlazi}$$

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{a}{2}, \quad P_{max} = \frac{ah}{4}.$$

185. Neka je krak trapeza $AD = x$ (Sl. 16), a osnova $CD = y$, onda je

$$AM = 5 - \frac{y}{2}.$$

Iz pravouglog trougla ABD imamo $AD^2 = AM \cdot AB$,
 $x^2 = \left(5 - \frac{y}{2}\right) 10$, odakle $y = \frac{50 - x^2}{5}$.



Sl. 16

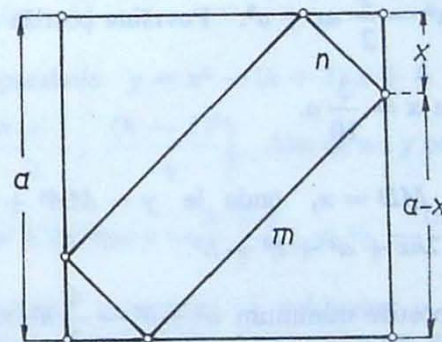
Obim trapeza u funkciji kraka

$$O(x) = 10 + \frac{50 - x^2}{5} + 2x = -\frac{1}{5}x^2 + 2x + 20,$$

obim je maksimalan za

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\left(-\frac{1}{5}\right)} = 5, \quad y = 5 \text{ tj. } O = 25 \text{ cm.}$$

186. $P(x) = -2x^2 + 2ax$,



Sl. 17

$$m = n = \frac{a}{2}\sqrt{2}, \text{ traženi pravougaonik je kvadrat.}$$

187. Katete su x i $a - x$. Primenom Pitagorine teoreme kvadrat hipotenuze je

$$f(x) = 2x^2 - 2ax + a^2$$

Hipotenuza postiže minimum kad i njen kvadrat, a to je za

$$x = \frac{a}{2} \text{ tj. kad je trougao jednakokrak.}$$

188. Dati izraz ima oblik

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{y+x}{xy} = \frac{5-x+x}{x(5-x)} = \frac{5}{5x-x^2}$$

Razlomak konstantnog brojioca ima najmanju vrednost, kad imenioc postiže maksimalnu vrednost tj.

$$f(x) = -x^2 + 5x \text{ ima maksimum}$$

$$\text{Dakle } x = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2(-1)} = \frac{5}{2},$$

$$\text{a) } y = 5 - x = 5 - \frac{5}{2} = \frac{5}{2};$$

$$\text{dati izraz ima najmanju vrednost za } x = y = \frac{5}{2}.$$

189. $P(x) = \frac{5}{2}x^2 - \frac{3}{2}ax + a^2$. Površina postiže minimum

$$P = \frac{31a^2}{40} \text{ za } x = \frac{3}{10}a.$$

190. a) Neka je $MD = x$, onda je $y = MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3x^2 - 2hx + a^2 + b^2 - h^2$.

$$\text{Funkcija postiže minimum } a^2 + b^2 - \frac{4}{3}h^2 \text{ za } x = \frac{h}{3}.$$

b) a^2 .

$$191. y_{\max} = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \text{ za } x = \frac{b-a}{2}.$$

$$192. y_{\min} = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{(a+b+c)^2}{3}, \text{ za } x = \frac{a+b+c}{2}.$$

194. Neka su $y = (m-1)x^2 + 2mx + 4$ i $y = (n-1)x^2 + 2nx + 4$ dve ma koje parabole datog skupa, pokažimo da one prolaze kroz dve fiksne tačke, tj. odredimo njihove zajedničke tačke.

$$(m-1)x^2 + 2mx + 4 = (n-1)x^2 + 2nx + 4$$

$$(m-n)x^2 + 2(m-n)x = 0, \quad m \neq n$$

$$x^2 + 2x = 0, \quad x(x+2) = 0, \quad x_1 = 0 \text{ i } x_2 = -2.$$

$$\text{a) } y_1 = 4, \quad y_2 = 0. \text{ Tražene tačke su } A(-2, 0) \quad B(0, 4)$$

b) Parabola dodiruje x-osu ako je

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = 0, \quad 4m^2 - 16(m-1) = 0, \quad m^2 - 4m + 4 = 0.$$

$$(m-2)^2 = 0, \quad m = 2. \text{ Parabola koja dodiruje x-osu ima oblik } y = x^2 + 4x + 4.$$

Parabola sa temenom u B mora da zadovoljava uslov

$$-\frac{b}{2a} = 0$$

$$-\frac{2m}{2(m-1)} = 0, \quad m = 0, \text{ tj. } y = -x^2 + 4.$$

195. a) Teme parabole $y = x^2 - (k+1)x + k$ je tačka

$$T\left(\frac{k+1}{2}, \frac{(k-1)^2}{4}\right). \text{ Ako sa } x \text{ i } y \text{ označimo koordinate}$$

$$\text{tačke } T \text{ imamo } x = \frac{k+1}{2}, \quad y = -\frac{(k-1)^2}{4},$$

eliminacijom parametra k dobijamo $y = -(x-1)^2$, što predstavlja geometrijsko mesto temena parabole.

- b) Ako uočimo parabole $y = x^2 - (k+1)x + k$ i

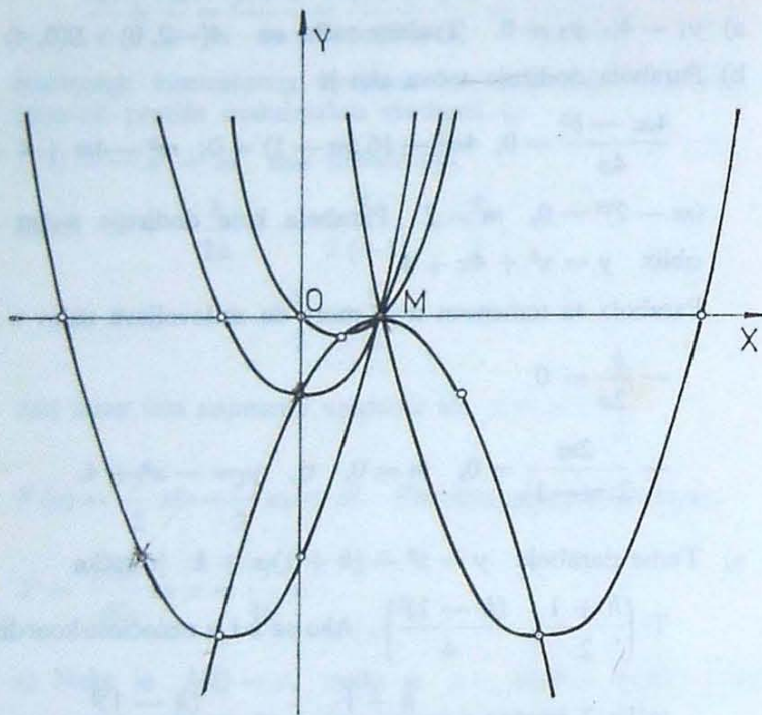
$y = x^2 - (m+1)x + m$, njihova presečna tačka $M(1, 0)$ je ujedno zajedničko tačka za sve parabole datog skupa.

c) U istom koordinatnom sistemu konstruisano je dobijeno geometrijsko mesto i parabole za $k = -3, -1, 0, 1, 5$ (Sl. 18).

196. a) Traženo geometrijsko mesto tačaka je prava $x + y = 1$.

b) Fiksna tačka $M(0, 1)$.

c) U datoj familiji parabola nalazi se (za $a = 0$) i jedna prava $y = -2x + 1$, ova prava je zajednička tangenta svih parabola i sve one se dodiruju u tački $(0, 1)$.



Sl. 18

197. a) Ekstremne vrednosti datih funkcija biće jednake ako je

$$\beta_1 = \beta_2 \text{ tj. } \frac{4(m-1)-m^2}{4} = \frac{4m-4}{4}$$

odakle izlazi $m = 0$.

Dakle date funkcije postaju

$$y = x^2 - 1 \text{ i } y = x^2 - 2x.$$

$$\text{b) Sistem } \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x^2 - 2x > 0 \end{cases}$$

ima rešenje $-1 < x < 0$.

198. Analogno zadatku 195, tražimo geometrijsko mesto minimuma je parabola $y = x^2 - 1$.

199. Treba dati polinom napisati dva puta kao potpun kvadrat tj.

$$\begin{aligned} f(x, y) &= x^2 - 2(y+6)x + 6y^2 + 2y + 45 = [x - (y+6)]^2 - \\ &- (y+6)^2 + 6y^2 + 2y + 45 = (x-y-6)^2 + 5y^2 - 10y + 9 = \\ &= (x-y-6)^2 + 5\left(y^2 - 2y + \frac{9}{5}\right) = (x-y-6)^2 + \\ &+ 5(y-1)^2 + 4. \end{aligned}$$

Minimalna vrednost funkcije $f(x, y)$ je 4, i dobija se za $y = 1$ $x = 7$.

$$\begin{aligned} 200. f(x, y) &= -(x^2 - 2xy + 4y^2 - 2x - 10y + 3) = \\ &= -[x^2 - 2(y+1)x + 4y^2 - 10y + 3] = \\ &= -[(x-y-1)^2 - (y+1)^2 + 4y^2 - 10y + 3] = \\ &= -[(x-y-1)^2 + 3y^2 - 12y + 2] = \\ &= -[(x-y-1)^2 + 3(y-2)^2 - 10] = \\ &= 10 - (x-y-1)^2 - 3(y-2)^2. \end{aligned}$$

Maksimalna vrednost date funkcije je 10 za $y = 2$ i $x = 3$.

$$201. f(x, y) = (x-y-1)^2 + 2\left(y - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{53}{4}.$$

IV GLAVA

4. KVADRATNA JEDNAČINA S JEDNOM NEPOZNATOM

202. a) $\pm \frac{5}{6}$; b) $\pm \frac{4}{5}\sqrt{3}$; c) $\pm 4\frac{1}{4}$.

203. a) $\pm \frac{a-b}{k}$; b) $\pm a$; c) $\pm k\sqrt{2}$.

204. a) 0; $6\frac{2}{5}$; b) 0, -2,4; c) ± 7 .

205. a) 0, $\frac{1}{a+b}$, $a+b \neq 0$; b) 0, $m+n$; c) 0, $m-n$.

206. a) $\pm a\sqrt{2}$; b) ± 5 ; c) $\pm \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

207. a) $\pm 2k\sqrt{5}$; b) ± 1 .

208. a) ± 8 ; b) ± 2 ; c) ± 5 ; d) ± 10 .

209. 0, $-\frac{8}{15}$. 210. 0, $13\frac{5}{7}$. 211. $\pm i$. 212. $\pm p$.

213. $\pm \sqrt{4a^2+b^2}$. 214. 0, $\frac{2}{a-b}$, za $x \neq \pm a$.

215. $\pm (a+b)$ za $ab \neq 0$. 216. $\pm (a-b)$ za $ab \neq 0$.

217. $\pm 3i$ za $x \neq 1$, $x \neq 5$, i $x \neq -3$.

218. Data jednačina može se napisati u obliku

$$\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} + \frac{1}{x-2} = 0$$

ili $\frac{2x}{x^2-1} + \frac{2x}{x^2-4} = 0$ odavde imamo da je

$$x \left(\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4} \right) = 0$$

Ova jednačina ekvivalentna je sistemu

$$x = 0, \quad \text{i} \quad \frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-4} = 0$$

čija rešenja su $x_1 = 0$ i $x_{2,3} = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

219. $b = 2a$.

220. a) $\lambda = \pm 2$, za $\lambda = +2$, $x = \pm 1$, a za $\lambda = -2$, $x = \pm i\sqrt{7}$.

b) $\lambda = \frac{3}{2}$, $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{35}{4}$. 221. $\lambda = 3$.

222. $10a = 3b$. 223. -10, -5, 0 ili 0, 5, 10.

224. 10 cm, 10 cm, 12 cm, $h = 8$ cm. 225. $a = 8$ cm.

226. 0, 25. 227. 0, 10.

228. a) $\lambda \in (-\infty, 1]$; b) $-\infty < \lambda < 1$; c) $-3 \leq \lambda < \frac{1}{2}$;

d) $\lambda \in [-2, 3)$; e) $\lambda \in \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$; f) $x < 0$ i $x > 2$.

229. 1, $2\sqrt{2}$, $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. 230. $3, \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{3}$.

231. a) 5, -1; b) 4, -6; c) $-\frac{4}{3} + \frac{5}{3}i$ i $-\frac{4}{3} - \frac{5}{3}i$;

d) $x = 5 \pm i\sqrt{5}$.

232. 3, 2; b) 7, -4; c) 5, -2,5; d) 1, -13.
233. a) $3a$, a ; b) $5a^3$, $-7a^3$; c) $3 + 7i$, $3 - 7i$; d) $2 + 3i$, $2 - 3i$.
234. $a - 3b$, $3b - a$; b) $2a - 1$, $a + 1$; c) $2 + \frac{1}{3}i$, $2 - \frac{1}{3}i$;
d) $4 \pm 5i$.
235. a) 0,1; 0,01; b) 7, -0,3; c) a^{3n} , $-a^n$; d) $\frac{a}{a+b}$, $\frac{b}{a-b}$.
236. a) 5, -1; b) 4; c) $2 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$. 237. -1, $-4\frac{1}{5}$.
238. 3, $1\frac{1}{4}$. 239. 4, $2\frac{1}{4}$. 240. 5, $2\frac{1}{12}$.
241. 30, 305. 242. 1, $-1\frac{1}{4}$. 243. -5, -13.
244. 2, $-\frac{5}{8}$. 245. 3, $3\frac{7}{11}$. 246. 1, -15.
247. $\frac{9}{17}$, -4. 248. 12, 1. 249. $\frac{3 \pm i\sqrt{31}}{4}$.
250. c, d. 251. a, b. 252. $2a - 3b$, $a + 2b$.
253. 1, $4\sqrt{2} - 7$. 254. $4 + 2\sqrt{5}$, $2 + 2\sqrt{5}$.
255. $1 - \sqrt{2}$, $2 - \sqrt{2}$.
256. Ako je $x \geq 1$ data jednačina postaje
 $x^2 - 2x + 1 = 0$, $x = 1$ je rešenje
za $x < 1$ data jednačina ima oblik
 $x^2 - 4x + 3 = 0$, njena rešenja su $x_1 = 3$ i $x_2 = 1$, kako ova
rešenja nisu manja od 1 — nisu rešenja date jednačine.
257. $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 2$.

258. Ako $x \geq 0$ date jednačine postaje $x^2 - 8x + 15 = 0$ i ima dva
rešenja $x_1 = 3$ i $x_2 = 5$. Za $x < 0$ ima oblik $x^2 + 8x + 15 = 0$
i ima još dva rešenja $x_1 = -3$, $x_2 = -5$.

259. Za $x < -3$ imamo $x^2 + 2,5x - 6 = 0$

Odavde $x_1 = 1,5$ i $x_2 = -4$. Datu jednačinu zadovoljava samo
drugi koren tj. $x^2 = -4$. Za $-3 \leq x \leq 0$ dobijamo

$$x^2 + 4,5x = 0$$

odakle $x_1 = 0$, $x_2 = -4,5$, zadovoljava $x = 0$

za $0 < x \leq 3$ imamo

$$x^2 - 4,5x = 0$$

Odakle $x_1 = 0$ i $x_2 = 4,5$, drugi koren ne zadovoljava datu
jednačinu.

za $x > 3$ imamo

$$x^2 - 2,5x - 6 = 0$$

Odakle $x_1 = 4$ i $x_2 = -1,5$, zadovoljava prvi koren datu jednačinu.
Dakle data jednačina ima tri korena -4, 0 i 4.

260. $x_1 = 0$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$, $x_4 = -3$.

261. $x_1 = 2$, $x_2 = -3$. 262. $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$,
 $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$, $x_7 = 3$. 263. $x \geq 6$, $x \leq 2$.

264. $x = \frac{7 - \sqrt{89}}{4}$. 265. $\frac{a+b}{2}$, $\sqrt{ab}$.

266. Posle sređivanja data jednačina postaje

$$(2a + 2b)x^2 - (a^2 + b^2 + 6ab)x + 2ab(a + b) = 0$$

odavde izlazi

$$x_{1/2} = \frac{a^2 + b^2 + 6ab \pm \sqrt{(a^2 + b^2 + 6ab)^2 - 16ab(a + b)^2}}{4(a + b)}$$

$$x_{1/2} = \frac{a^2 + b^2 + 6ab \pm \sqrt{(a^2 + b^2 - 2ab)^2}}{4(a + b)} \text{ i na kraju}$$

$$x_1 = \frac{a+b}{2}, \quad x_2 = \frac{2ab}{a+b}.$$

267. Posle očiglednih identičkih transformacija jednačina postaje

$$x^2(n-1) + (1-mn)x + m^2 - m = 0.$$

Odavde

$$x_{1/2} = \frac{mn-1 \pm \sqrt{(mn-1)^2 - 4(n-1)(m^2-m)}}{2(n-1)} =$$

$$= \frac{mn-1 \pm \sqrt{(1+mn-2m)^2}}{2(n-1)}$$

i na kraju $x = m$, $x_2 = \frac{m-1}{n-1}$ za $x \neq m$, $n \neq 1$.

268. $m+n$, $\frac{2mn}{m+n}$. 269. $\frac{3m-n}{2}$, $\frac{3n-m}{2}$.

270. $m+2n$, $\frac{n-2m}{3}$. 271. $a \pm 2b$ 272. $a \pm 3b$.

273. $1, \frac{a-1}{a+1}$. 274. $n+2$, $-2n$

276. Posle sređivanja imamo

$$[(n-1)x]^2 - a(n-1)x + a-1 = 0, \text{ smenom } (n-1)x = z$$

imamo

$$z^2 - az + a-1.$$

rešenja date jednačine su $\frac{a-1}{n-1}$, $\frac{1}{n-1}$.

277. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\left(\frac{a-x}{x}\right)^2 - \left(\frac{a}{a+b}\right)^2 = \frac{5}{9} \left(\frac{a-x}{x}\right)^2, \text{ a ova je ekvivalentna}$$

jednačini

$$\frac{4}{9} \left(\frac{a-x}{x}\right)^2 = \left(\frac{a}{a+b}\right)^2.$$

Poslednja jednačina je ekvivalentna sistemu

$$\frac{2}{3} \frac{a-x}{x} = \frac{a}{a+b} \text{ i } \frac{2}{3} \frac{a-x}{x} = -\frac{a}{a+b}, \text{ čija su rešenja}$$

$$x_1 = \frac{2a(a+b)}{5a+2b}; \quad x_2 = \frac{2a(a+b)}{2b-a}.$$

278. $m_1 = -\frac{1}{3}$; $m_2 = 5$. 279. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 2$.

280. $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$. 281. $\lambda = \frac{16}{39}$. 282. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -\frac{7}{3}$

283. $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{16}{7}$.

284. $D > 0$ ako $m \in (-1, 3)$ koreni realni različiti,

$D = 0$ ako $m = -1$ i $m = 3$ koreni realni jednaki,

$D < 0$ ako $m \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$ koreni konjugovano kompleksni.

285. Koreni su realni ako $m \in (-\infty, 3) \cup (11, +\infty)$;

realni jednaki ako je $m = 3$ i $m = 11$ i konjugovano kompleksni ako $m \in (3, 11)$.

286. Koreni su realni ako $m \in \left(-\infty, \frac{25}{33}\right) \cup (1, +\infty)$;

realni jednaki ako je $m = \frac{25}{33}$ i $m = 1$ i koreni su konjugovano-

-kompleksni ako $m \in \left(\frac{25}{33}, 1\right)$.

287. Ako je $m \neq -\frac{3}{5}$ rešenja su $x_1 = -\frac{1}{m}$, $x_2 = \frac{5m+2}{m}$; za

$m = -\frac{3}{5}$, $x_1 = x_2 = 53$. 288. $-\frac{3}{2} \leq a \leq 1$.

289. $b \in (-\infty, -2) \cup \left(-\frac{4}{5}, +\infty\right)$ 290. $a \in (-\infty, 4) \cup (12, +\infty)$

291. $k \in (-\infty, 6) \cup (10, +\infty)$. 292. $k = -2$, $k = 6$.

293. $D = b^2(c-a)^2 - 4ac(b-c)(a-b) =$
 $= b^2(c-a)^2 - 4ac[b(c+a) - b^2 - ac] =$
 $= b^2[(c-a)^2 + 4ac] - 4abc(c+a) + 4a^2c^2 =$
 $= b^2(c+a)^2 - 4abc(c+a) + 4a^2c^2 =$
 $= [b(c+a) - 2ac]^2 \geq 0,$

tj. diskriminanta je pozitivna za svako a, b, c , ako je $a(b-c) \neq 0$.
 Rešenja su

$$x_1 = \frac{-b(c-a) - [b(c+a) - 2ac]}{2a(b-c)} = \frac{-2c(b-a)}{2a(b-c)} = \frac{c(a-b)}{a(b-c)},$$

$$x_2 = \frac{-b(c-a) + [b(c+a) - 2ac]}{2a(b-c)} = \frac{2a(b-c)}{2a(b-c)} = 1.$$

294. $D = (a-b)^2(a^2-b^2)^2 + 8(a+b)^2ab(a^2+b^2) =$
 $= (a-b)^4(a+b)^2 + 8(a+b)^2ab(a^2+b^2) =$
 $= (a+b)^2[(a-b)^4 + 8ab(a^2+b^2)] =$
 $= (a+b)^2[(a^2+b^2-2ab)^2 + 8ab(a^2+b^2)] =$
 $= (a+b)^2[(a^2+b^2)^2 + 4ab(a^2+b^2+4a^2b^2)] =$
 $= (a+b)^2(a^2+b^2+2ab)^2 = (a+b)^6,$

$$x_1 = -\frac{2ab}{a+b}, \quad x = \frac{a^2+b^2}{a+b}.$$

za $a+b=0$ jednačina je nemoguća

a za $a=b=0$, rešenja jednačine će biti neodređena.

295. Za $a+b \neq 0$ diskriminanta $D = (a^2+b^2)^2$, a rešenja su

$$x_1 = a+b, \quad x_2 = \frac{2ab}{a+b}. \text{ Ako je } a+b=0, \text{ imamo samo}$$

jedno rešenje $x=0$.

296. a) $y = \frac{8(x-2)}{x+3}$; b) $A=0$ za $x_1=2$, $x_2/3 = \pm 3$,

$$y=2 \text{ za } x = \frac{11}{3}.$$

297. $f(x) = \frac{4x^2-3x}{2}$; $\frac{4x^2-3x}{2} = x - \frac{1}{2} \Rightarrow 4x^2-6x+1=0$,

$$x_1=2, \quad x_2 = \frac{1}{2}.$$

298. a) $x_1 = -\frac{5}{2}$, $x_2 = -1$ b) $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{4(x+1)}{4x+3}$, $x = \frac{5}{2}$.

299. a) nema rešenja b) $x = -\frac{5}{2}$.

300. a) $x_1=1$, $x_2=3\frac{3}{4}$; b) $x=1$.

301. $x \geq 2$ je $(x+2)^2 = 4x+1$, tj. $x^2 = -3$ pa jednačina nema rešenja. Za $x < 2$ je $(2x-3)^2 = 4x+1$, tj.

$x^2 - 4x + 2 = 0$. Rešenja ove jednačine su $x_1 = 2 + \sqrt{2}$ i $x_2 = 2 - \sqrt{2}$, međutim uzimamo samo drugo rešenje zbog uslova $x < 2$. 302. 6, 8 i 10.

303. 5, 6 i 7 ili -7, -6, -5. 304. 5 i 6, ili -6 i -5.

305. 56. 306. 64.

307. Neka je brzina jednog v , a vreme t , onda je brzina drugog $v+1$, a vreme $t-1$, te je

$$30 = vt \quad \text{ i } \quad 30 = (v+1)(t-1)$$

Odavde

$$\left(\frac{30}{v} - 1\right)(v+1) = 30,$$

dakle $v = 5$ km/č. i $v+1 = 6$ km/č.

308. $\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+2}\right) 1 \frac{7}{8} = 1$, za 3 časa i 5 časova.

309. 30 dana, 20 dana. 310. u petouglu. 311. Dvadesetougao.

312. 6 m, 4 m.

313. Neka je $AH = x$.

Iz pravouglog trougla

$$ABH \text{ imamo } BH^2 = R^2 - OH^2$$

Kako je $OH = |x - R|$ (imamo $x - R$ ako je H na OA' ,

$R - x$, ako je H na OA).

$$\text{Onda je } BH^2 = R^2 - (x - R)^2 = 2Rx - x^2.$$

$$\text{Dakle } BC^2 = 4(2Rx - x^2)$$

S druge strane

$$AB^2 = AH \cdot AA' = 2Rx.$$

$$\text{Tada uslov } AB^2 + AC^2 + BC^2 = 4l^2,$$

$$\text{postaje } 4Rx + 4(2Rx - x^2) = 4l^2$$

$$\text{Oдавде } x^2 - 3Rx = l^2 = 0$$

Konačno

$$x = \frac{3R \pm \sqrt{9R^2 - 4l^2}}{2}, \text{ rešenja su realna}$$

$$\text{za } l \leq \frac{3R}{2}.$$

314. $x = \frac{R}{2}(2 - \sqrt{2})$.

315. Neka je H projekcija tačke M na AB i $AH = x$, onda je:

$AM^2 = 2Rx$, a $MN = 2OH - 2(R - x)$, gde je O središte polukružnice. Položaj tačke M je određen promenljivom x koja se dobija iz jednačine

$$4mx^2 + 2R(1 - 4m)x + R^2(3m + 1) = 0$$

Dakle

$$x = \frac{R(4m - 1m \pm \sqrt{4m^2 - 12m + 1})}{4m}.$$

316. a) $PQ = \frac{1}{2} \sqrt{3(x^2 - ax + a^2)}$; $PMPQ = \frac{3\sqrt{3}}{16}(ax - x^2)$;

b) $x_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{4k^2 - 3}}{2} a$ uz uslov $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq k \leq 1$

c) $x_{1/2} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 48\lambda}}{6} a$ uz uslov $\lambda \leq \frac{3}{16}$.

317. Neka su a i b katete, p i q njihove projekcije na hipotenuzi a x hipotenuza.

Tada je

$$\begin{cases} a^2 = px, \\ b^2 = qx, \\ h^2 = pq, \\ a + b = s. \end{cases}$$

Proizvod prve dve jednačine daje

$$(ab)^2 = pqx^2$$

Ako se uzme u obzir treća

$$(ab)^2 = h^2x^2 \text{ ili } ab = hx.$$

Kvadriranjem treće jednačine dobijamo

$$a^2 + b^2 + 2ab = s^2$$

ili

$$x^2 + 2hx - s^2 = 0,$$

pa je hipotenuza

$$x = \sqrt{h^2 + s^2} - h.$$

318. a) $x^2 + 10x + 21 = 0$; b) $6x^2 - 25x + 24 = 0$;

c) $x^2 - 3\sqrt{3}x + 6 = 0$; d) $x^2 - 10x + 23 = 0$.

319. a) $36x^2 - 66x + 7 = 0$; b) $x^2 - 4x + 13 = 0$;
c) $x^2 - 6x + 12 = 0$; d) $abx^2 - (a + b)x + 1 = 0$.

320. a) $(a^2 - b^2)x^2 - (a^2 + b^2)x + ab = 0$;
b) $(a - 1)(b - 1)x^2 - (a + b)x + ab = 0$;
c) $x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$; d) $16x^2 - 16x - 9 = 0$.

321. a) $x_1^3 + x_2^3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3$; $x_1^3 \cdot x_2^3 = -\left(\frac{7}{3}\right)^3$.

b) $27x^2 - 64x - 243 = 0$. c) $A = \frac{193}{27}$.

322. $y_1 = \frac{189}{125}$, $y_2 = -\frac{1114}{35}$. 323. $A = \frac{31}{4}$.

324. $y^2 + 5y + 6 = 0$.

325. Neka je tražena jednačina

$$y^2 - Sy + P = 0,$$

tada je

$$S = y_1 + y_2 = x_1 + \frac{1}{x_2} + x_2 + \frac{1}{x_1} = x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$$

$$= (x_1 + x_2) \left(1 + \frac{1}{x_1 \cdot x_2}\right)$$

$$\text{ i } P = y_1 y_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + 2.$$

$$\text{Kako je } x_1 + x_2 = -\frac{5}{3} \text{ i } x_1 \cdot x_2 = -\frac{6}{3} = -2.$$

$$\text{To je } S = -\frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{6}, \quad P = -2 - \frac{1}{2} +$$

$$+ 2 = -\frac{1}{2}.$$

Tražena jednačina postaje

$$y^2 - \left(-\frac{5}{6}\right)y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{ili } 6y^2 + 5y - 3 = 0.$$

326. Kako je $x_1^2 - 2x_1 + \lambda = 0$ i $x_2^2 - 2x_2 + \lambda = 0$.

Oдавде

$$\lambda = 2x_1 - x_1^2 = 2x_2 - x_2^2$$

Tada je

$$\begin{aligned} \lambda \left(\frac{y_1}{x_1^3} + \frac{y_2}{x_2^3} \right) &= y_1 \frac{\lambda}{x_1^3} + y_2 \frac{\lambda}{x_2^3} = y_1 \frac{2x_1 - x_1^2}{x_1^3} + y_2 \frac{2x_2 - x_2^2}{x_2^3} = \\ &= y_1 \left(\frac{2}{x_1^2} - \frac{1}{x_1} \right) + y_2 \left(\frac{2}{x_2^2} - \frac{1}{x_2} \right) = 2 \left(\frac{y_1}{x_1^2} + \frac{y_2}{x_2^2} \right) - \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \right). \end{aligned}$$

Na kraju imamo $E = 0$.

327. Rešenje postavljenog zadatka sadržano je u rešenju sistema od tri jednačine sa tri nepoznate x_1 , x_2 , i m :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{3m}{m+3}, \\ 2x_1 - x_2 = 3, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{2m}{m+3}. \end{cases}$$

Prve dve jednačine daju

$$x_1 = \frac{2m+3}{m+3} \text{ i } x_2 = \frac{m-3}{m+3}$$

Zamenimo ove vrednosti u trećoj imamo

$$\frac{(2m+3)(m-3)}{(m+3)^2} = \frac{2m}{m+3},$$

Odakle se dobije $m = -1$, $m+3 \neq 0$.

Za ovu vrednost m , imamo

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ i } x_2 = -2.$$

$$328. m = 8. \quad 329. m = \begin{cases} 3 \\ 4 \end{cases} \quad 330. m_1 = 1, m_2 = -3.$$

$$331. m = \pm 3. \quad 332. m = 0. \quad 333. m = \frac{1}{2}, m_2 = -\frac{1}{2}.$$

$$334. m_1 = 3, m_2 = \frac{21}{20}. \quad 335. m = 13, m = 1. \quad 336. m = -2.$$

$$337. a) k = -1; \quad b) k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}; \quad c) k = 2.$$

$$338. m = 0 \quad \text{i} \quad m = 2.$$

339. Jednačina ima realna rešenja ako i samo ako je

$$D = (m-1)^2 - (m-2)(m-3) = 3m-5 \geq 0,$$

$$\text{tj. } m \geq \frac{5}{3}. \quad \text{za } m = \frac{5}{3} \text{ imamo } x_1 = x_2 = -2.$$

Relacija nezavisna od m između x_1 i x_2 dobija se iz obrasca

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-1)}{m-2} \quad \text{i} \quad x_1 x_2 = \frac{m-3}{m-2}$$

Da bi se eliminisali m iz ovih jednakosti napišemo ih u obliku

$$x_1 + x_2 = \frac{2(m-2) + 2}{m-2} = 2 + \frac{2}{m-2}$$

i

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{m-2-1}{m-2} = 1 - \frac{1}{m-2}.$$

Eliminacija izraza $\frac{1}{m-2}$ iz ove jednakosti, dobija se tražena relacija

$$2x_1 x_2 + (x_1 + x_2) = 4.$$

$$340. a) 2(1 - \sqrt{2}) \leq m \leq 2(1 + \sqrt{2}),$$

$$\text{za } m = 2(1 - \sqrt{2}), \quad x_1 = x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{i} \quad \text{za}$$

$$m = 2(1 + \sqrt{2}), \quad x_1 = x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

b) Tražena relacija se dobija iz:

$$x_1 + x_2 = \frac{m-2}{2} \quad \text{i} \quad x_1 x_2 = \frac{m(m-4)}{8}.$$

Prva jednakost daje $m = 2(x_1 + x_2 + 1)$, zamenom u drugoj dobijamo

$$8x_1 x_2 = 2(x_1 + x_2 + 1) \cdot 2(x_1 + x_2 - 1) = 4[(x_1 + x_2)^2 - 1],$$

odavde

$$2x_1 x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 1,$$

Konačno tražena relacija

$$x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

341. a) Rešenja su realna $m \in (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$, a konjugovano kompleksni $m \in (0, 1)$.

$$b) m = 1 \quad \text{i} \quad m = -\frac{3}{4}.$$

$$c) y^2 + (2m+2)y - 24m^2 + 27m + 1 = 0.$$

342. Imamo sistem jednačina:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 52, \\ x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m-2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{m+3}{m-2}. \end{cases}$$

Prva jednačina se može napisati u obliku

$(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 52$, ako se uzmu u obzir druga i treća imamo jednačinu

$$\frac{4(m+1)^2}{(m-2)^2} - \frac{4(m+3)}{m-2} = 52.$$

Za $m - 2 \neq 0$ imamo

$$24m^2 - 107m + 105 = 0$$

$$\text{Oдавde } m = 3 \quad \text{и} \quad m = \frac{35}{24}.$$

343. Eliminacijom x_1 i x_2 iz ove tri jednačine:

$$x_1 + x_2 = m + \frac{1}{2}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{1}{2} (m^2 - 9m + 39),$$

$$x_1 = 2x_2.$$

Dobija se odgovarajuća jednačina po m , iz koje se dobije

$$m = 10, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 3,5.$$

$$m = 7, \quad x_1 = 5, \quad x_2 = 2,5.$$

344. Postavljeni uslov se svodi na jednačinu

$$2(3m - 1)(36m^2 - 30m - 6) = 0, \text{ oдавde}$$

$$m_1 = \frac{1}{3}, \quad m_2 = 1, \quad m_3 = -\frac{1}{6}.$$

$$\mathbf{345.} \quad y^2 - (p^4 - 4p^2q + 2q^2)y + q^4 = 0.$$

$$\mathbf{346.} \quad 9(x_1 + x_2) + 12x_1x_2 = 4.$$

$$\mathbf{347.} \quad 2(x_1 + x_2) + x_1x_2 = 5.$$

$$\mathbf{348.} \quad 2(x_1 + x_2) - 4x_1x_2 = 1.$$

$$\mathbf{349.} \quad \text{Koreni su realni } a \in \left(-\infty, \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

$$\text{b) } 2x_1x_2 - 3(x_1 + x_2) + 2 = 0,$$

$$\text{c) } x_1 = x_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \quad x'_1 = x'_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

$$\text{d) } a_1 = -1, \quad a_2 = +1, \quad a_3 = -\frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{350.} \quad \text{a) } x^2(m - 2) - 2(2m - 1)x + 2m - 1 = 0.$$

$$\text{b) } m \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$$

$$\mathbf{351.} \quad x^2 + x + a - 1 = 0, \quad a \leq \frac{5}{4}.$$

$$\mathbf{352.} \quad \text{a) } \frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{3abc - b^3}{c^3};$$

$$\text{b) } x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2)^2 + (x_2^2)^2 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2x_2^2 = [(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2]^2 - 2(x_1x_2)^2 = \frac{b^4 - 4acb^2 + 2a^2c^2}{a^4};$$

$$\text{c) } x_1^5 + x_2^5 = (x_1 + x_2)^5 - 5x_1x_2(x_1^3 + x_2^3) - 10x_1^2x_2^2(x_1 + x_2) = \frac{5acb^3 - 5a^2c^2b - b^5}{a^5}.$$

$$\text{d) } \frac{b^3 - 7abc + 2a^2c}{a^3}.$$

$$\mathbf{353.} \quad \text{a) } D = a^2 + 4.$$

$$\text{b) } \text{Sve vrednosti } k, \text{ za koje je: } k \in \left(\frac{22}{9}, +\infty\right) \text{ ili}$$

$x \in (-\infty, -2)$, odgovarajuće vrednosti za a :

$$a_{1,2} = \frac{6 - 3k \pm \sqrt{(9k - 22)(k + 22)}}{2(2k - 5)}$$

$$\text{c) } 2\frac{4}{9} < k < 2\frac{1}{2}.$$

354. Koreni date jednačine su

$$x_{1,2} = m \pm \sqrt{m^2 - m^2 + 1} = m \pm 1.$$

Koristeći postavljeni uslov imamo

$$\left. \begin{array}{l} -2 < m+1 < 4 \\ -2 < m-1 < 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -3 < m < 3 \\ -2 < m < 5 \end{array} \right\} \Rightarrow -1 < m < 3.$$

355. Neka je tražena jednačina

$$y^2 - Sy + P = 0.$$

$$\text{Onda je } S = y_1 + y_2 = x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2).$$

$$\text{Kako je } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ i } x_1x_2 = \frac{c}{a}, \text{ nalazimo}$$

$$S = \frac{b^3 - 3abc}{a^3}.$$

Dalje

$$y_1y_2 = x_1^3x_2^3 = (x_1x_2)^3 = \frac{c^3}{a^3}, \text{ pa je tražena jednačina}$$

$$a^3y^2 + (b^3 - 3abc)y + c^3 = 0.$$

356. Koreni date jednačine biće racionalni, ako je njena diskriminanta potpun kvadrat.

$$\text{Pošto je } D = (1 - 2k)^2 - 4k(k - 2) = 4k + 1,$$

$4k + 1$ je potpun kvadrat za $k = 2; 6; 12; \dots$

357. Neka su x_1 i $x_2 = x_1^2$ rešenja date jednačine. Tada je

$$x_1 + x_1^2 = \frac{15}{4},$$

$$\text{tj. } 4x_1^2 + 4x_1 - 15 = 0$$

odake

$$x_1 = \frac{3}{2}; \quad x_1' = -\frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{9}{4}; \quad x_2' = \frac{25}{4}.$$

Odgovarajuće vrednosti za m :

$$m_1 = \pm \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3}{2}}; \quad m_2 = \pm \frac{5}{2} \sqrt{\frac{5}{2}} i.$$

358. Pošto je $x_1 + x_2 = m$

$$x_1x_2 = m - 1,$$

tada je

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = m^2 - 2(m - 1) = (m - 1)^2 + 1.$$

odakle izlazi da će $x_1^2 + x_2^2$ imati minimalnu vrednost

za $m - 1 = 0$ tj. $m = 1$.

$$\begin{aligned} 359. \quad f(a) &= x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (a - 2)^2 + 2(a + 3) \\ &= a^2 - 2a + 10 = (a - 1)^2 + 9. \end{aligned}$$

Tražena minimalna vrednost je 9 za $a = 1$.

$$361. \quad a_1 = \frac{9}{4} \text{ i } a_2 = -\frac{7}{4}; \quad b_1 = \frac{9}{2} \text{ i } b_2 = \frac{7}{2}.$$

$$362. \quad \text{a) } z^2(k + 2) - k(k + 3)z + (k + 3)^2 = 0$$

$$\text{b) } k = 6 \text{ i } k = \frac{3}{2}.$$

$$363. \quad \text{a) } y^2 + \frac{6}{m}y + \frac{6-m}{m} = 0; \quad \text{b) } m = 2; \quad m = 4;$$

$$\text{c) } x_1 = 1, \quad x_1 = \frac{4}{3} \text{ a } x_2 = \frac{2}{3} \text{ i } x_2 = 1.$$

$$364. \quad \text{a) } 2ay^2 - (a^2 + 4a + 4)y + (a^2 + 4a + 4) = 0;$$

$$\text{b) } a = 1 \text{ i } a = -5.$$

$$365. \text{ Kako je } a = -(z_1 + z_2) = -\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}\right) \\ = -\left(x_1 + x_2 + \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2}\right)$$

i

$$b = z_1 z_2 = \left(x_1 + \frac{1}{x_2}\right) \left(x_2 + \frac{1}{x_1}\right) = x_1 x_2 + \frac{1}{x_1 x_2} + 2$$

$$\text{to iz } x_1 + x_2 = -2p \text{ i } x_1 x_2 = q$$

$$\text{sledi } a = 2p + \frac{2p}{q} \text{ i } b = q + \frac{1}{q} + 2 = \frac{1}{q}(1 + q)^2.$$

Dakle tražena jednačina je

$$qz^2 + 2p(1 + q)z + (1 + q)^2 = 0.$$

$$366. \text{ a) } 4z^2 - (p^2 + 4)z + p^2 = 0$$

$$\text{b) } 4 \text{ i } 1 \text{ ili } -4 \text{ i } -1.$$

$$367. \text{ a) } p^2 z^2 - (1 + 2p - p^2)z + p^2 = 0; p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = -\frac{2}{7};$$

$$\text{c) } x_1 = \frac{4}{3}, x_2 = \frac{1}{3}; x'_1 = \frac{4}{7}, x'_2 = \frac{1}{7}.$$

$$368. p = \pm 8, q = 12. \quad 369. \text{ Jeste.}$$

$$370. x_1 = 1, x_2 = -\frac{a+b}{a}.$$

371. Diskriminanta jednačine (1) ima oblik $D = 1 - a$, a diskriminanta jednačine (2) je

$$D = (a + 1)^2 - (3 - a)(a^2 - a + 2) = a^3 - 3a^2 + 7a - 5$$

$$D = (a - 1)[(a - 1)^2 + 5]$$

Diskriminanta jednačine (1) je pozitivna ako $a \in (-\infty, 1)$,

a diskriminanta jednačine (2) je pozitivna ako $a \in (1, +\infty)$.

Jednačina (1) ima realne korene $a \in (-\infty, 1)$ i kompleksne kod $a \in (1, +\infty)$. Jednačina (2) obrnuto. Za $a = 1$ obe jednačine imaju dvostruka rešenja.

$$372. D = (p + a^2 - b^2 - q)^2.$$

373. Uočimo sistem

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 15 \\ x_1 + x_2 = m + 1, \\ x_1 \cdot x_2 = m \end{cases}$$

Prva jednačina može se napisati u obliku

$$x_1 - x_2 = \frac{15}{x_1 + x_2}$$

ili

$$x_1 - x_2 = \frac{15}{m + 1}.$$

Sistem

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = \frac{15}{m + 1} \\ x_1 + x_2 = m + 1, \end{cases}$$

po x_1 i x_2 ima rešenje

$$x_1 = \frac{(m + 1)^2 + 15}{2(m + 1)} \text{ i } x_2 = \frac{(m + 1)^2 - 15}{2(m + 1)},$$

tada jednačina $x_1 x_2 = m$ postaje

$$\frac{(m + 1)^2 - 15}{2(m + 1)} \cdot \frac{(m + 1)^2 + 15}{2(m + 1)} = m$$

Odakle izlazi

$$m^4 - 2m^2 - 224 = 0$$

ili

$$m^2 = 16$$

$$\text{a } m = \pm 4.$$

Odgovarajuća rešenja jednačine:

$$x_1 = 4 \text{ ili } x_1' = -4$$

$$x_2 = 1 \quad x_2' = 1.$$

374. Neka su x_1 i x_2 koreni jednačine $ax^2 + bx + c = 0$, zbir m -tih sistema je

$$S_m = x_1^m + x_2^m.$$

Da bismo ovu funkciju izrazili pomoću koeficijenta date jednačine stavimo

$$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$$

$$ax_2^2 + bx_2 + c = 0. \quad (1)$$

Ako se prva jednačina pomnoži sa x_1^m , a druga sa x_2^m

$$ax_1^{m+2} + bx_1^{m+1} + cx_1^m = 0$$

$$ax_2^{m+2} + bx_2^{m+1} + cx_2^m = 0$$

i obe saberu, dobijamo

$$aS_{m+2} + bS_{m+1} + cS_m = 0$$

Pomoću ove relacije može se izračunati

$$S_{m+2} \text{ iz } S_{m+1} \text{ i } S_m.$$

Dajući broju m vrednost $m = 0, 1, 2, \dots$

mogu se ovi zbirovi postepeno izračunati. Za $m = 0$ je $aS_2 + bS_1 + cS_0 = 0$, iz koje se jednačina može izračunati S_2 ,

$$\text{jer je } S_1 = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \text{ i } S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 2.$$

Zatim ako se stavi $m = 1, m = 2, \dots$ dobijaju se zbirovi S_3, S_4 itd.

$$375. \lambda = -\frac{a^2 c_1}{a_1^2 c}, \quad S = \frac{sp + s_1 p_1}{p + p_1}.$$

$$376. (\alpha - \alpha_1)(\beta - \beta_1)(\alpha - \beta_1)(\beta - \alpha_1) = 2(p - p_1)^2.$$

378. Za određivanje drugog korena koristi Vietove obrasce

$$x_2 = -1 - \sqrt{3}.$$

$$379. \text{ Jeste, } x_2 = \sqrt{2} - \frac{4}{3}.$$

380. Pošto je p neparno to diskriminata $p^2 - 4q$ je takođe neparan broj. Radi toga ako su koreni jednačine racionalni, mora biti.

$$p^2 - 4q = (2m + 1)^2.$$

Neka je $p = 2k + 1$; $q = 2l + 1$, dobijamo

$$(2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = 4(2l + 1).$$

Transformišemo levu stranu

$$(2k + 1)^2 - (2m + 1)^2 = 2(k + m + 1)2(k - m).$$

Ovaj broj deljiv je sa 8, je suma brojeva $k + m + 1$ i $k - m$ neparan broj $2k + 1$, radi toga jedan od njih je paran. Desna strana $4(2l + 1)$ nije deljiva sa 8. Dobijamo protivurečno tvrđenje.

381. Pretpostavimo da jednačine imaju zajednički koren $x = a$, tada mora biti

$$2a^2 - (3m + 2)a + 12 = 0,$$

$$4a^2 - (9m - 2)a + 36 = 0.$$

Množenjem prve jednačine sa -2 eliminiše se a^2 i dobijamo $(3m - 6) = 12$

odakle

$$a = \frac{4}{m-2}. \text{ Zamenom ove vrednosti u prvoj jednačini}$$

nalazimo

$$2 \cdot \frac{16}{(m-2)^2} - \frac{(3m+2)4}{m-2} + 12 = 0.$$

Dakle za $m = 3$ date jednačine imaju zajednički koren $a = 4$.

382. Za $m = 0$, zajedničko rešenje $x_0 = 1$.

$$m = 1$$

383. Pretpostavimo suprotno da su koreni obe jednačine kompleksni, tada

$$p^2 - 4q < 0, \quad p_1^2 - 4q_1 < 0$$

odakle sledi:

$$p^2 + p_1^2 - 4q - 4q_1 < 0, \quad p^2 + p_1^2 - 2pp_1 < 0$$

ili

$$(p - p_1)^2 < 0,$$

što je nemoguće.

384. Koristeći veze između korena i koeficijenta kvadratne jednačine imamo:

$$p + q = -p, \quad pq = q.$$

Rešimo ovaj sistem. Iz druge jednačine dobijamo:

$$q(p - 1) = 0$$

odakle izlazi $q = 0$ ili $p = 1$. Iz prve jednačine nalazimo:

ako je $q = 0$ to i $p = 0$; ako $p = 1$ to $q = -2$.

Dakle dve kvadratne jednačine zadovoljavaju postavljeni uslov.

$$x^2 = 0 \quad \text{i} \quad x^2 + x - 2 = 0.$$

385. Pretpostavimo da se koreni jednačine javljaju racionalni u obliku

$\frac{a}{b}$ gde $(a, b) = 1$ tj. razlomak $\frac{a}{b}$ je redukovan, tada imamo:

$$\frac{a^2}{b^2} + p \frac{a}{b} + q = 0,$$

$$\text{odakle izlazi } \frac{a^2}{b} + ap + bq = 0$$

ili

$$\frac{a^2}{b} = -(ap + bq).$$

Kako je $\frac{a}{b}$ redukovan to i razlomak $\frac{a^2}{b}$ je takođe redukovan.

Desna strana je ceo broj, što znači dobili smo da je redukovan razlomak jednak celom broju, što je nemoguće. Dakle, naša pretpostavka da jednačina $x^2 + px + q = 0$ ima razlomljen koren, otpada, kako po pretpostavci jednačina ima racionalne korene, to oni moraju biti celi.

386. Po pretpostavci imamo

$$a = 2p + 1, \quad b = 2n + 1, \quad c = 2q + 1.$$

Diskriminanta kvadratne jednačine

$$(1) \quad D = (2n + 1)^2 - 4(2p + 1) = 8 \left[\frac{n(n + 1)}{2} - 2pq - p - q - 1 \right] + 5.$$

Izraz u srednjim zagradama je ceo broj, jer je $n(n + 1)$ deljiv sa 2. Očigledno da je D neparan broj, kao zbir parnog i neparnog broja.

Ako pretpostavimo da su koreni date jednačine racionalni potrebno je da diskriminanta bude potpun kvadrat. Kako je diskriminanta neparan broj to njen kvadrat mora biti neparan broj. Iz (1) zaključujemo da pri deljenju diskriminante sa 8 dobijamo ostatak 5. Iz toga izlazi dokaz da je naša pretpostavka, da su koreni racionalni netačna. Zaista, kvadrat neparnog broja ima oblik:

$$(2n + 1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n + 1) + 1 = 4 \cdot 2m + 1 = 8m + 1,$$

tj. ostatak je 1 a ne 5.

Znači tvrđenje zadatka je tačno.

387. a) $K \in (-9, -2)$; b) Data realizacija nije nikad ispunjena.
c) $x \in (-\infty, +\infty)$.

388. Data nejednakost je zadovoljena za sve vrednosti korena koje su realne, jer ako je $x_1 > x_2$, onda je $(x_1/x_2)^2 > 1$, a ako su koreni jednaki onda je leva strana nejednačine jednaka 2.

Koreni su realni ako je $D \geq 0$, odnosno $k^2 - 4 \geq 0$, odakle se dobija

$$|k| \geq 2 \quad (1)$$

Ako uzmemo u obzir i kompleksne korene, s obzirom da je

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 \text{ realno, iz zadate nejednakosti sleduje}$$

$$x_1^4 + x_2^4 > 1,$$

pošto je $x_1 x_2 = 1$, pa se gornji izraz može napisati u obliku

$$(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 > 1$$

ili

$$(k^2 - 2)^2 - 2 > 1.$$

Ova nejednačina je zadovoljena za

$$k^2 < 2 - \sqrt{3} \text{ i } k^2 > 2 + \sqrt{3} \quad (2)$$

Prema tome, ako usvojimo da je k realan parametar iz (1) i (2) dobija se da je data nejednakost zadovoljena za vrednost k koje ispunjava uslove

a) $0 \leq k < \sqrt{2 - \sqrt{3}}$ ili $\sqrt{2 + \sqrt{3}} \leq k < 2$, kada su koreni kompleksni.

b) $|k| \geq 2$, kada su koreni realni.

$$\mathbf{389.} \text{ a) } p > \sqrt[4]{5}, p < -\sqrt[4]{5};$$

$$\text{b) } p = \pm \sqrt[8]{2} \quad f_{\min} = 2(\sqrt{2} - 2).$$

390. Kako je

$$\begin{aligned} D &= (b^2 + c^2 - a^2)^2 - 4b^2 c^2 = (b^2 + c^2 - a^2)^2 - (2bc)^2 \\ &= (b^2 + c^2 - a^2 - 2bc)(b^2 + c^2 - a^2 + 2bc) = [(b - c)^2 - a^2] \\ &\quad [(b + c)^2 - a^2] \\ &= (a + b + c)(a + b - c)(b + c - a)(b - c - a), \end{aligned}$$

onda je $D < 0$, jer je „ma koja stranica trougla manja je od zbira, a veća od razlike ostalih dveju strana“. Na osnovu ove teoreme prva tri činioca u D su pozitivna a četvrta $b - c - a < 0$.

$$\mathbf{391.} \quad a = 0; \quad a = \frac{2}{9} \text{ i } a = -\frac{3}{4}.$$

$$\mathbf{395.} \quad D = (m - n)^2 + 4a^4.$$

$$\mathbf{396.} \quad x_1 = 2m - 1, \quad x_2 = 1, \quad x_1^2 + x_2^2 > x_1 x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2 > 0.$$

Odavde izlazi $4m^2 - 6m + 3 > 0$ za svako m .

397. Po pretpostavci diskriminanta jednačine (1) je pozitivna tj.

$$D = p^2 - 4q > 0 \quad (3)$$

Treba dokazati da su onda D_1 i D_2 tj. diskriminante jednačine (2) takođe pozitivne.

$$D_1 = (p + 2a)^2 - 4(q + ap) = p^2 + 4ap + 4a^2 - 4q - 4ap$$

$$D_1 = p^2 - 4q + 4a^2 = D + 4a^2 > 0, \text{ s obzirom na (3)}$$

$$\begin{aligned} D_2 &= (p + a)^2 - 3(q + ap) = p^2 + 2ap + a^2 - 3q - 3ap \\ &= p^2 - 3q + a^2 - ap = p^2 - 4q + a^2 - ap + q \end{aligned}$$

$$= D + \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q$$

$$= D + \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2 - 4q}{4} = D + \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} D$$

$$= \frac{3}{4} D + \left(a - \frac{p}{2}\right)^2 > 0,$$

s obzirom na (3) čime je dokaz završen.

398. Po pretpostavci je $p^2 - 4q > 0$, treba dokazati da je

$$D = \left(k + \frac{1}{k}\right)^2 p^2 - 4 \left[p^2 + q \left(k - \frac{1}{k}\right)^2\right] > 0.$$

Posle očiglednih transformacija imamo

$$D = k^2 p^2 - 4k^2 q - 2p^2 + 8q - 4qk^2 + 4 \frac{1}{k^2} q = k^2 (p^2 - 4q) - 2(p^2 - 4q) + \frac{1}{k^2} (p^2 - 4q) = \left(k - \frac{1}{k}\right)^2 (p^2 - 4q) > 0.$$

399. Za egzistenciju rešenja treba ispitati znak diskriminante, a za znak rešenja treba ispitati znak proizvoda rešenja tj. $P = x_1 \cdot x_2$ i znak sume rešenja $S = x_1 + x_2$.

Rešenja egzistiraju ako je

$$D = (m - 4)^2 - (m + 1)(m + 4) \geq 0$$

$$\text{tj. } D = m^2 - 4m + 4 - (m^2 + 5m + 4) > 0$$

$$\text{ili } -13m + 12 \geq 0.$$

$$\text{Dakle } m \leq \frac{12}{13}.$$

$$\text{Proizvod rešenja } P = \frac{m+4}{m+1}, \text{ a suma } S = \frac{2(m-4)}{m+1}.$$

Znak proizvoda može se predstaviti sledećom tabelom

m	$-\infty$	-4	-1	$+\infty$
$m+4$	$-$	0	$+$	$+$
$m+1$	$-$		-0	$+$
P	$+$	0	$-$	$+$

Znak sume rešenja je prikazan tabelom

m	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$m-4$	$-$		0	$+$
$m+1$		0	$+$	$+$
S	$+$		-0	$+$

Za znake rešenja upotrebiti znak D , P i S u zavisnosti od parametra m , što se može prikazati sledećom tabelom.

m	$-\infty$	-4	-1	$\frac{12}{13}$	4	$+\infty$
D	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
P	$+$	0	$-$	$+$		
S	$+$	$+$	$-$		0	
Rezultat	$0 < x_1 < x_2$	$x_1 < 0 < x_2$ $ x_1 < x_2 $	$x_1 < x_2 < 0$	nema realnih rešenja		
	$0 = x_1 < x_2$		$x = -\frac{3}{10} < 0$	$x_1 = x_2 < 0$		

Iz tabele izlazi:

- 1) $m \in (-\infty, -4)$; $D > 0$, $P > 0$ i $S > 0$ oba rešenja su pozitivna.
- 2) $m \in (-4, -1)$; $D > 0$, $P < 0$, $S > 0$ rešenja su suprotnog znaka i po apsolutnoj vrednosti je manje negativno rešenje.
- 3) $m \in \left(-1, \frac{12}{13}\right)$, $D > 0$, $P > 0$, i $S < 0$ oba rešenja su negativna.

4) $m \in \left(\frac{12}{13}, +\infty\right)$, $D < 0$ rešenja su kompleksna

Postoje tri granična slučaja tj.

a) Za $m = -4$, $P = 0$, jedno rešenje je nula, drugo rešenje jednako je sumi, dakle pozitivno.

b) Za $m = -1$ jednačina se redukuje u lineranu i ima oblik $10x + 3 = 0$, odakle izlazi $x = -\frac{3}{10}$, negativno rešenje.

c) $m = \frac{12}{13}$, Imamo dvostruko rešenje jednako polovini zbira rešenja, dakle negativno $\left(x = -\frac{8}{5}\right)$.

400. Diskriminanta date jednačine ima oblik

$$D = (1 + \lambda)^2 - 3(1 - \lambda)(1 + \lambda) = 2(\lambda + 1)(2\lambda - 1).$$

Za promenu znaka rešenja treba ispitati i znake rešenja proizvoda P i sume S rešenja.

Proizvod rešenja $P = 3 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$, a njihova suma $S = 2 \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}$

Promena znaka D , P i S u zavisnosti od parametra λ predstavljene su sledećom tabelom.

λ	$-\infty$	-1	$\frac{1}{2}$	1	$+\infty$
D	+	0	-	0	+
P	-	0	+	+	-
S	-	0	+	+	-
Re- zultat	$x_1 < 0 < x_2$	$x_1 x_2 \in K$	$0 < x_1 < x_2$	$x_1 < 0 < x_2$	

$\left| \begin{array}{c} x_1 = x_2 = 0 \\ x_1 = x_2 = 3 \end{array} \right|$

401.

m	$-\infty$	-3	1	$\frac{2}{3}$	3	$+\infty$
D	+	+	+	0	-	-
P	+	-	+	+	+	+
S	-	-	+	+	+	-
Re- zultat	$x_1 < x_2 < 0$	$x_1 < 0 < x_2$	$0 < x_1 < x_2$	$x_1 x_2 \in K$		

402.

m	$-\infty$	$-\frac{4}{3}$	$-\frac{3}{1}$	0	1	$+\infty$
D	-	+	0	+	+	-
P	-	+	-	+	+	-
S	-	-	-	+	+	-
Re- zultat	$x_1 x_2 \in K$	$x_1 < x_2 < 0$	$x_1 < 0 < x_2$	$0 < x_1 < x_2$	$x_1 x_2 \in K$	

$\left| \begin{array}{c} x_1 = x_2 = -\frac{3}{2} \\ x_1 = 0 \\ x_2 = -12 < 0 \\ x = \frac{1}{4} > 0 \\ x_1 = x_2 = 2 > 0 \end{array} \right|$

403. $-2 \leq a < 0$. 404. $-\infty < k < 0$; $3 < k < 4$.

405. $k \in (3, +\infty)$.

406. $m \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$ 407. $x \in \left(-\frac{3}{2}, 2\right)$.

408. $\frac{5}{9} < p \leq 1$, $p \geq 6$. 409. $n < -3$, $2 < n \leq 6$.

$$410. \frac{x-4}{3x+2}; x \neq \frac{3}{4}. \quad 411. \frac{a+2}{a(a+1)}, a \neq -4.$$

$$412. \frac{x-3a}{x-b}, x \neq a. \quad 413. \frac{3(x-4)(x-1)}{4(x+1)(x-3)}; x \neq -4, x \neq 3.$$

$$414. \frac{x(x-3)}{3(x+4)}; x \neq 0, x \neq 4. \quad 415. \frac{2x-7a}{x+7}, x \neq -2a.$$

5. ZNAK KVADRATNOG TRINOMA

$$416. \text{ Pozitivan za } x < -15 \text{ i } x > \frac{1}{3}; \text{ negativan za } -1,5 < x < \frac{1}{3}.$$

$$417. \text{ Pozitivan za } \frac{1}{2} < x < 2;$$

$$\text{negativan za } x < \frac{1}{2} \text{ i } x > 2.$$

$$418. \text{ Pozitivno za svako } x. \quad 419. \text{ Pozitivno za } x \neq -\frac{2}{3}.$$

$$420. x < 2 - \sqrt{7} \text{ i } x > 2 + \sqrt{7}. \quad 421. \text{ Za svako } x.$$

$$422. \frac{2}{3} < x < 1. \quad 423. \text{ Nema rešenja.}$$

$$424. -3 < x < -1 \text{ i } 1 < x < 5. \quad 425. x \in (-3, -1) \cup (1, 5)$$

$$426. x \in (-\infty, -3), x \in (-1, 3) \text{ i } x \in (5, +\infty).$$

$$427. 2 < x < 4. \quad 428. x \in \left(-3, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, 2).$$

$$429. \text{ Kvadratni trinom } ax^2 + bx + c \text{ je pozitivan za sve vrednosti promenljive } m \text{ ako je}$$

$$\begin{cases} b^2 - 4ac < 0 \\ a > 0 \end{cases}$$

tj. tražene vrednosti parametra m su rešenja sistema

$$\begin{cases} m-1)^2 - 4m^2 < 0 \\ m > 0. \end{cases}$$

$$\text{Dakle } m \in \left(0, \frac{1}{3}\right) \cup (1, +\infty).$$

$$430. a \in (1 + \sqrt{2}, +\infty). \quad 431. 3 - 2\sqrt{2} < m < 3 + 2\sqrt{2}.$$

$$432. 1 < \lambda < 9. \quad 433. -8 < m < 0. \quad 434. -8 < a < 2.$$

435. Iz pretpostavke zadatka imamo sistem

$$\begin{cases} a > 0, \\ 4a + 2b + c = 0 \\ 9a + 3b + c = 0. \end{cases}$$

Odavde imamo

$$a > 0; b = -5a; c = 6a.$$

$$436. a < 0; b = -a; c = -2a.$$

438. Diskriminanta trinoma se lako svodi na oblik

$$D = (a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(b-c-a),$$

odakle se lako izvodi i zaključak.

$$439. \frac{1 + \sqrt{3}}{2} < m < +\infty, \text{ za } m = 2 \quad y = x^2 - 4x + 7.$$

$$440. -1 < m < 3.$$

441. Funkcija ni za jedno m ne može biti negativna za svako x .

$$442. a < -\frac{7}{4}.$$

443. Dati trinom je pozitivan za svako x ako je

$$\begin{cases} r^2 - 1 > 0, \\ (r-1)^2 - (r^2-1) < 0. \end{cases}$$

Rešenje ovog sistema je $r > 1$. Ako zamenimo još vrednost $r = 1$, polinom je identički jednak 1. Dakle sve tražene vrednosti r određene su nejednačinom

$$r \geq 1.$$

444. $-6 < a < 6$. 445. $m < -\frac{1}{2}$.

446. Data jednakost ekvivalentna je sistemu nejednačina:

$$\begin{cases} \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} < 4 \\ \frac{2x^2 + mx - 4}{x^2 - x + 1} > -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2x^2 + x(m+4) - 8}{x^2 - x + 1} < 0 \\ \frac{8x^2 + x(m-6) + 2}{x^2 - x + 1} > 0 \end{cases}$$

Pošto je trinom $x^2 - x + 1$ pozitivan za svako x sistem postaje

$$\begin{cases} -2x^2 + x(m+4) - 8 < 0 \\ 8x^2 + x(m-6) + 2 > 0 \end{cases}$$

Rešenje prve nejednačine je interval $m \in (-12, 4)$, a druge interval $m \in (-2, 14)$, a sistem je zadovoljen za $m \in (-2, 4)$. Dakle data nejednakost je zadovoljena za $m \in (-2, 4)$.

447. Kako je $x^2 - x + 1 > 0$ za sve vrednosti x , jer je diskriminanta ovog trinoma $D = -3 < 0$, a koeficijent uz x^2 pozitivan, to množenjem obe nejednačine sa imeniocem dati sistem ekvivalentan je sistemu.

$$\begin{cases} -3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2, \\ x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2, \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} 4x^2 + (a-3)x + 1 > 0, \\ x^2 - (a+2)x + 4 > 0. \end{cases}$$

Prva nejednačina tačna je za svako x , ako i samo ako je diskriminanta kvadratnog trinoma manja od nule tj.

$$(a-3)^2 - 16 < 0.$$

Analogno druga nejednačina zadovoljena je za svako x ako je

$$(a+2)^2 - 16 < 0.$$

Rešenje sistema nejednačina

$$\begin{cases} (a-3)^2 - 16 < 0 \\ (a+2)^2 - 16 < 0 \end{cases}$$

po a dobija se

$$|a-3| < 4 \Rightarrow -4 < a-3 < 4 \Rightarrow -1 < a < 7,$$

$$|a+2| < 4 \Rightarrow -4 < a+2 < 4 \Rightarrow -6 < a < 2,$$

Odakle konačno imamo

$$-1 < a < 2.$$

448. $-3 < p < 6$.

449. Kako je $y = \frac{10-5x}{2}$ data nejednakost postaje

$$3x \cdot \frac{10-5x}{2} - x^2 - \frac{(10-5x)^2}{4} < 7,$$

ili

$$-59x^2 + 160x - 128 < 0.$$

Poslednja nejednakost je zadovoljena za svako x .

450. Data nejednakost ekvivalentna je skupu nejednakosti

$$-3 < \frac{x^2 - kx + 1}{x^2 + x + 1} < 3,$$

odakle izlazi da $k \in (-5, 1)$.

V G L A V A

JEDNAČINE S JEDNOM NEPOZNATOM KOJE SE SVODE NA KVADRATNE JEDNAČINE

6. BIKVADRATNE JEDNAČINE

451. $\pm 5, \pm 3$. 452. $\pm 2, \pm \frac{\sqrt{2}}{3}$. 453. $\pm \frac{\sqrt{3}}{3}; \pm i\sqrt{5}$.

454. $\pm m, \pm n$. 455. $\pm k, \pm i\sqrt{2}$. 456. $\pm \frac{a}{b}, \pm b$.

457. $\pm a, \pm \frac{1}{a}$. 458. $\pm \frac{1}{a}, \pm a^2i$.

459. $\pm \sqrt{(a+b)^2 - 1}, \pm \sqrt{(a-b)^2 - 1}$. 460. ± 1 .

461. $\pm 2\sqrt{2}$.

462. Neka je $x^2 = y$, tada je pomoćna jednačina $4y^2 - 17y + 18 = 0$

Rešenja ove jednačine su: $y = 2$ i $y = \frac{9}{4}$.

Vrednost $y = 2$ daje $x^2 = 2$, odakle $x = \pm \sqrt{2}$.

Vrednost $y = \frac{9}{4}$ daje $x^2 = \frac{9}{4}$, dakle $x = \pm \frac{3}{2}$.

Dakle data jednačina ima četiri rešenja $\pm \sqrt{2}$ i $\pm \frac{3}{2}$.

463. $\pm \sqrt{3}, \pm \sqrt{\frac{3}{2}}$. 464. $\pm 2\sqrt{2}, \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$.

465. $\pm 2, \pm \frac{\sqrt{37}}{5}$.

466. $0, \pm \sqrt{60}$. 467. $\pm \sqrt{2}, \pm i\sqrt{\frac{2}{3}}$. 468. $\pm \sqrt{3}, \pm i\sqrt{5}$.

469. $\pm 1, \pm i\sqrt{\frac{5}{3}}$. 470. $\pm (\sqrt{a} + \sqrt{b}); \pm (\sqrt{a} - \sqrt{b})$.

471. Smenom $x^2 + x = y$ data jednačina postaje $y(y+1) = 42$,
ili $y^2 + y - 42 = 0$,
koja ima dva rešenja $y = 6$ i $y = 7$.

Dakle za određivanje x imamo sledeće dve jednačine:

$x^2 + x = 6$, ili $x^2 + x - 6 = 0$, njena rešenja su $x = 2$ i $x = -3$.
i $x^2 + x = 7$, ili $x^2 + x + 7 = 0$, njena rešenja su
 $x = \frac{-1 + 3i\sqrt{3}}{2}$

472. Smenom $x^2 - 5x = y$ imamo pomoćnu jednačinu $y^2 - 8y - 84 = 0$ itd., $3, \pm 2, 7$.

473. Smena $x^2 - 3x = y; 5, -2, 7, -4$.

474. $x + \frac{1}{x} = y; 3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}$.

475. $3, -\frac{1}{3}, 2, -\frac{1}{2}$.

476. Smena $\frac{x^2 + x - 5}{x} = y; 1, -5, -1 + \sqrt{6}, -1 - \sqrt{6}$.

477. Smena $x^2 + 2x = y; 1, -3, -1 \pm i\sqrt{3}$.

478. Smena $\frac{x^2+1}{x} = y; 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{5} \pm \frac{2\sqrt{6}}{5}i$.

479. Neka je $x + x^{-1} = y \Rightarrow x^2 + x^{-2} = y^2 - 2$, tada je data jednačina ekvivalentna jednačini

$$y + y^2 - 2 = 4 \text{ ili } y^2 + y - 6 = 0$$

$$x_{1,2} = 1 \quad x_{3,4} = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

480. $x_1 = 2, x_2 = \frac{1}{2}, x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4} \left(\text{smena } x + \frac{1}{x} = y \right).$

481. Smenom $x^2 + 2x + 3 = y$, imamo $\frac{y+4}{y} = y + 1, y_1 = 2,$

$$y_2 = 2; x_{1,2} = -1, x_{3,4} = -1 \pm 2i.$$

482. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = \frac{9}{16}.$$

Smenom $x^2 + 3x = y$ imamo $16y^2 - 32y - 9 = 0$.

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{2}, x_{3,4} = -\frac{3}{2}.$$

483. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2) = 1680.$$

Smenom $x^2 - 3x = y$, tada je $y^2 + 2y - 1680 = 0$, odakle se dobija $y = 40$ i $y = -42$.

$$x_1 = 8, x_2 = -5, x_{3,4} = \frac{3 \pm i\sqrt{159}}{2}.$$

484. $\frac{x^2-4}{x^2-9}, 485. \frac{4a^2-1}{a^2-1}, 486. \frac{x(x^2-1)}{x^2-4}.$

487. $\frac{x^2-b^2}{x^2-k^4}.$

488. Iz prve dve jednačine sistema

$$\begin{cases} x_1 = 2x_2 \\ x_1 + x_2 = \lambda - 1, \\ x_1 \cdot x_2 = \lambda - 2 \end{cases}$$

Imamo $x_1 = \frac{2(\lambda^2 - 1)}{3}$ i $x_2 = \frac{\lambda^2 - 1}{3}.$

Zamenom u trećoj jednačini dobija se

$$\frac{\lambda^2 - 1}{3} \cdot \frac{2(\lambda^2 - 1)}{3} = \lambda^2 - 2,$$

ili

$$2\lambda^4 - 13\lambda^2 + 20 = 0$$

Dakle $\lambda = \pm 2$ i $\lambda = \pm \frac{\sqrt{10}}{2}, x_1 = 1, x_2 = \frac{1}{2}.$

489. $m = \pm 3; x_2 - 8x + 15 = 0.$

490. a) $k = -2, 0, 2;$ b) $k = \pm 1.$

491. 15 cm, 8cm. 492. 6 cm, 8 cm. 493. 12 cm, 5 cm.

494. 6 cm. ili 12 cm.

495. $x^4 - 2k^2(2 + \sqrt{2})x^2 + 2(3 + 2\sqrt{2})k^4 = 0.$

$$x = k\sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

7. BINOMNE JEDNAČINE

496. $x_1 = \sqrt[3]{\frac{2}{5}}; x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}}.$

497. $x_1 = \frac{\sqrt[3]{11}}{2}; x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt[3]{11}.$

$$498. x_1 = \frac{3}{2}; x_{2,3} = \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{4}.$$

$$499. x_1 = \frac{-2c}{5}; x_{2,3} = \frac{-c \pm ci\sqrt{3}}{5}.$$

$$500. x_1 = \frac{m+n}{m}; x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2m} \cdot (m+n).$$

501. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(4x^2 - 9)(4x^2 + 9) = 0. \text{ Odakle izlazi}$$

$$x_{1,2} = \pm \frac{3}{2}; x_{3,4} = \pm \frac{3}{2}i.$$

$$502. x_{1,2} = \pm \sqrt[4]{\frac{47}{11}}; x_{3,4} = \pm i \sqrt[4]{\frac{17}{11}}.$$

$$503. x_{1,2} = \pm (2a - c); x_{3,4} = \pm i(2a - c).$$

504. Data jednačina svodi se na jednačinu

$$(x^3 - 27)(x^3 + 27) = 0,$$

Odavde imamo

$$x^3 - 27 = 0 \text{ i } x^3 + 27 = 0.$$

$$\text{Dakle } x_1 = 3, x_{2,3} = \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}).$$

$$x_4 = -3, x_{5,6} = \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}).$$

505. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16) = 0$$

$$x_{1,2} = \pm 2i; x_{3,4} = -i \pm \sqrt{3}; x_{5,6} = i \pm \sqrt{3}.$$

506. Data jednačina lako se svodi na jednačinu $(8x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0$, a ova ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} 8x^3 + 1 = 0 \\ x^3 - 1 = 0 \end{cases}$$

Odakle izlazi da je

$$x_1 = -\frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}, x_4 = 1,$$

$$x_{5,6} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

507. Data jednačina postaje

$$(8x^3 - 1)(64x^3 + 27) = 0,$$

Odakle izlazi da je

$$x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}; x_4 = -\frac{3}{4};$$

$$x_{5,6} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{8}.$$

508. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} 3x^2 + 5 = 0 \\ x^3 - 64 = 0. \end{cases}$$

$$x_1 = \sqrt[3]{\frac{5}{3}}; x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \sqrt[3]{\frac{5}{3}}; x_4 = 4;$$

$$x_{5,6} = 2(1 \pm i\sqrt{3}).$$

509. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ 27 - x^3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{Odakle izlazi } x_{1,2} = \pm 2, x_{3,4} = \frac{3 \pm 3i\sqrt{3}}{2}, x_5 = 3.$$

510. a) Neka je $\sqrt[3]{-1} = x$ odakle izlazi $x^3 = -1$ ili $(x+1)(x^2-x+1)=0$.

$$\text{Dakle } x_1 = -1, \quad x_{2,3} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{b) } x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{3}.$$

511. a) Neka je $x = \sqrt[3]{125}$, odavde $x^3 = 125$ ili
 $(x-5)(x^2+5x+25)=0$.

$$\text{Dakle } x_1 = 5, \quad x_{2,3} = \frac{5(1 \pm i\sqrt{3})}{2}.$$

8. IRACIONALNE JEDNAČINE

512. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} 3x^2 - 20x + 16 = (x-4)^2 \\ x-4 \geq 0 \end{cases}$$

ili

$$\begin{cases} x(x-6) = 0 \\ x \geq 4. \end{cases}$$

Jednačina ovog sistema ima rešenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 6$. Prvo rešenje ne zadovoljava nejednačinu sistema, a $x_2 = 6$ je zadovoljava. Dakle rešenje date jednačine je $x = 6$.

513. Data jednačina ekvivalentna je jednačini $\sqrt{2x^2-4x+9} = 2x-3$, a ova je ekvivalentna sistemu

$$(1) \quad \begin{cases} 2x^2 - 4x + 9 = (2x-3)^2 \\ 2x-3 \geq 0. \end{cases}$$

Jednačina sistema (1) može se pisati sukcesivno

$$2x^2 - 4x + 9 = 4x^2 - 12x + 9,$$

$$2x^2 - 8x = 0,$$

$$x(x-4) = 0.$$

Ona ima dva rešenja $x = 0$ i $x = 4$, međutim, samo rešenje $x = 4$ zadovoljava nejednačinu sistema (1). Dakle data jednačina ima rešenje $x = 4$.

514. Za $x \neq 1$ data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$x + 2 - \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) = 4(\sqrt{x} - 1),$$

ili

$$x + 2 - x + \sqrt{x} = 4\sqrt{x} - 4,$$

Odavde

$$3\sqrt{x} = 6, \quad \sqrt{x} = 2.$$

Dakle $x = 4$ je rešenje date jednačine.

515. Primetimo da ekvivalentna rešenja date jednačine treba tražiti među brojevima x za koje je $x \geq 1$.

Data jednačina se može napisati u obliku

$$1 - \sqrt{x^4 - x^2} = x^2 - 2x + 1, \text{ ili } \sqrt{x^4 - x^2} = x(2 - x),$$

dakle

$$x^2(x^2 - 1) = x^2(2 - x)^2.$$

Rešenje $x = 0$ ne dolazi u obzir, zato ostaje jednačina

$$x^2 - 1 = (2 - x)^2$$

ili

$$-1 = 4 - 4x, \text{ odakle izlazi } x = \frac{5}{4}.$$

Ova vrednost je veća od 1 i ovo je jedino rešenje date jednačine.

516. Primetimo da su sva tri korena istovremeno definisana za

$$x - 7 \geq 0, \quad x \geq 7.$$

Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$x - 7 + x + 5 + 2\sqrt{(x-7)(x+5)} = 2x + 14$$

ili

$$\sqrt{(x-7)(x+5)} = 8,$$

posle kvadriranja izlazi $x^2 - 2x - 99 = 0$.

Poslednja jednačina ima dva rešenja $x = -9$ i $x = 11$.

Data jednačina je zadovoljena samo za $x = 11$.

517. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} x^2 - mx = (x + m)^2, \\ x + m \geq 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\quad (2)$$

Jednačina (1) sistema posle očiglednih transformacija postaje

$$-3mx = m^2, \quad (3)$$

Odakle izlazi da su moguća dva slučaja

a) $m \neq 0$, tada imamo $x = -\frac{m}{3}$ i nejednačina (2) postaje

$$-\frac{m}{3} + m \geq 0, \text{ odavde } \frac{2m}{3} \geq 0 \text{ ili } m > 0.$$

b) $m = 0$, jednačina (3) je neodređena te za rešenje možemo uzeti ma koji broj x . Pošto je nejednačina (2) u tom slučaju ispunjena za $x \geq 0$, to rešenje date jednačine je svako $x \geq 0$.

Dakle: ako je $m < 0$ jednačina nema rešenja, ako je $m = 0$ za rešenje jednačine možemo uzeti svaki pozitivan broj.

Ako je $m > 0$ jednačina ima samo jedno rešenje

$$x = -\frac{m}{3}.$$

518. Ako je $m < 0$ i $m \neq -\frac{1}{4}$ jednačina ima jedno rešenje

$$x = \frac{m}{2},$$

Ako je $m = -\frac{1}{4}$ jednačina ima bezbroj rešenja tj. svaki broj

$$x \text{ koji je } x \geq -\frac{1}{2};$$

ako je $m > 0$, jednačina nema rešenja.

519. Primetimo da nepoznatu x treba tražiti samo u skupu R^+ .

Pošto je

$x - a = (\sqrt{x} - \sqrt{a})(\sqrt{x} + \sqrt{a})$, i $x - b = (\sqrt{x} - \sqrt{b})(\sqrt{x} + \sqrt{b})$ i $x - c = (\sqrt{x} - \sqrt{c})(\sqrt{x} + \sqrt{c})$, data jednačina ekvivalentna je sledećoj jednačini

$$\sqrt{x} - \sqrt{a} + \sqrt{x} - \sqrt{b} = \sqrt{x} - \sqrt{c}$$

ili

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c}.$$

Dakle ako je $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{c}$ data jednačina ima samo jedno rešenje

$$x = (\sqrt{a} + \sqrt{b} - \sqrt{c})^2.$$

520. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} 2x^2 + 7 = (x^2 - 4)^2, & x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \\ x^2 - 4 \geq 0; & \text{ili } x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty). \end{cases}$$

Odakle izlazi da je $x = \pm 3$.

521. 2. 522. 3. 523. ± 7 ; $\pm \sqrt{37}$.

524. 3.

525. 4. 526. nema rešenja. 527. 6. 528. 10.

529. za $a \neq b$ $x = a + b$; za $a = b$ ima bezbroj mnogo rešenja.

530. 0, a. 531. $\frac{a}{4}$. 532. $-\frac{2}{3}a$. 533. 1. 534. 0, 3.

535. 1. 536. 4. 537. $x = \frac{16}{25}$.

538. za $b > 0$ $x = 2b$; za $b = 0$ ima bezkonačno mnogo rešenja i za $b < 0$ nema rešenja.

539. 5. 540. 1. 541. 3. 542. 7.

543. Posle očiglednih transformacija data jednačina se svodi na ekvivalentni sistem.

$$\begin{cases} z^2 + 31z - 222 = 0 \\ z \leq 15 \end{cases}$$

Odakle izlazi da je $z_1 = 6$ i $z_2 = -37$.

544. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$9z^2 - 35z + 26 = 0$$

$$z \leq \frac{5}{3},$$

odakle izlazi $z = 1$.

545. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} y < 11 \\ y^2 - 23y + 126 = 0, \text{ čije rešenje je } y = 9. \end{cases}$$

546. Posle očiglednih transformacija data jednačina se svodi na sistem $1005x^2 - 3122x + 321 = 0$

$$x > -\frac{4}{15}, \text{ odakle izlazi da je } x = 3.$$

547. 4. 548. $\frac{3a^2}{4b^2}$. 549. ± 2 . 550. ± 5 . 551. -1 .

552. 2; $-0,8$. 553. 2; 2,5.

554. Koreni u jednačini imaju realne vrednosti za $9 - x \geq 0, x - 4 \geq 0$

tj. $4 \leq x \leq 9$, pa je data jednačina ekvivalentna sistemu.

$$\begin{cases} 2x - x^2 - 36 = (7 - x)^2, \\ 7 - x \geq 0, \\ 4 \leq x \leq 9. \end{cases}$$

Odakle izlazi da je $x = 5$.

555. Uvedi smenu $x^2 - 3x = u, x = 2$ i $x = 1$.

556. Uvedi smenu $2x^2 - 3x = u; x = 2$ i $x = \frac{1}{2}$.

557. 3, -1 . 558. 3. 559. $x = 2, x = -\frac{4}{3}$.

560. Svođenjem, levu stranu jednačine na zajednički imenilac imamo ekvivalentnu jednačinu

$$\frac{5\sqrt{x^2 + x} - 3x}{x} = \frac{3}{x}$$

Odakle izlazi $3(x + 1) = 5\sqrt{x(x + 1)}$,

$$\text{ili } \begin{cases} 9(x + 1) = 25(x^2 + x) \\ x + 1 \geq 0. \end{cases}$$

Dakle $x = -1, x = \frac{9}{16}$. 561. $x_1 = 2, x_2 = -1,6$.

562. Smenom $\sqrt{\frac{2x + 2}{x + 2}} = z$, imamo da je $\sqrt{\frac{x + 2}{2x + 2}} = \frac{1}{z}$,

i data jednačina postaje

$$12z^2 - 7z - 12 = 0,$$

odakle je

$$z_1 = \frac{4}{3} \text{ i } z_2 = -\frac{3}{4}.$$

Drugo rešenje ne zadovoljava postavljeni uslov. Za određivanje x imamo

$$\sqrt{\frac{2x + 2}{x + 2}} = \frac{4}{3}, \text{ dakle } x = 7.$$

563. $x = \pm 5$.

564. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x^2 - 3x + 5 = 12.$$

smenom

$$\sqrt{x^2 - 3x + 5} = z \text{ imamo } z^2 + z - 12 = 0.$$

odgovara $z = 3$, a $x_1 = 4$ i $x_2 = -1$.

565. Smenom $y^2 + 4y + 6 = z$, data jednačina postaje

$$\sqrt{z+2} + \sqrt{z-2} = \sqrt{2z}.$$

(Ova jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\begin{cases} (\sqrt{z+2} + \sqrt{z-2})^2 = 2z \\ z-2 \geq 0. \end{cases}$$

Ovaj sistem ima jedinstveno rešenje $z = 2$.

Rešenjem jednačine

$$y^2 + 4y + 6 = 2, \text{ odavde } y = -2.$$

556. Smenom $\sqrt[n]{x} = z$, data jednačina postaje $2z^2 - 5z + 2 = 0$, odakle izlazi

$$z_1 = 1 \text{ i } z_2 = \frac{3}{2}, \text{ a } x_1 = 1 \text{ i } x_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

567. Smenom $u = \sqrt{\frac{6(x-1)}{x}}$ data jednačina postaje $u + \frac{1}{u} = \frac{5}{2}$.

Rešenja date jednačine su $x_1 = 5$ i $x_2 = -\frac{12}{5}$.

568. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$. 569. $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$. 570. $x = 11$.

571. Pošto je $x \neq \pm 1$, smenom $\sqrt[3]{x} = u$ data jednačina postaje $u^2 - u - 2 = 0$.

Za x imamo jedno rešenje $x = 8$.

572. Smenom $\sqrt[3]{x} = u$, data jednačina se svodi na jednostavniji oblik; njeno rešenje je $x = 4$.

573. Smena $\sqrt[10]{x^3} = u$, $x = 1024$. 574. Smena $\sqrt[6]{x} = z$, $x = 64$.

575. Smena $\sqrt{\frac{5-x}{x+3}} = z$, $x = 1$.

576. Smena $\sqrt[5]{\frac{16x}{x-1}} = z$; $x = 2$, $x = -\frac{1}{511}$.

577. Smena $\sqrt[3]{x} = u$, $x = 64$.

VI GLAVA

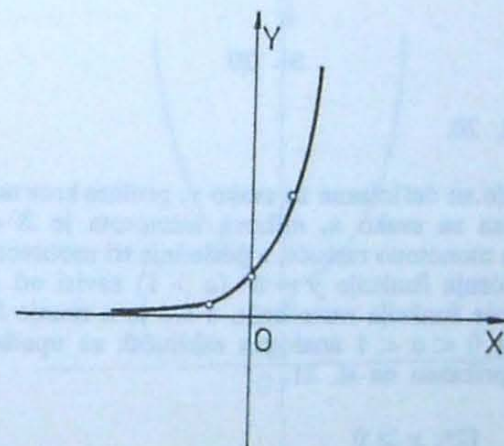
9. EKSPONENCIJALNE FUNKCIJE I JEDNAČINE

578.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27

Funkcija je definisana za svako x . Monotono rastuća je za svako x , nema nula, pozitivna je za svako x . X-osa je njena asimptota. Tok je prikazan tabelom: (grafik na slici 19).

x	$-\infty$	0	$+\infty$
3^x	0	1	$+\infty$



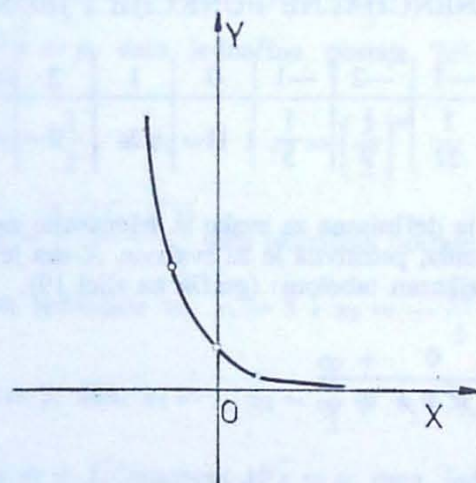
Sl. 19

579.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
3^{-x}	27	9	3	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$

Funkcija je definisana za svako x , opada za svako x , nema nula. Pozitivna je za svako x . Prava $y = 0$ je njena asimptota. Tok je predstavljen tabelom

x	$-\infty$	0	$+\infty$
3^{-x}	$+\infty$	1	0

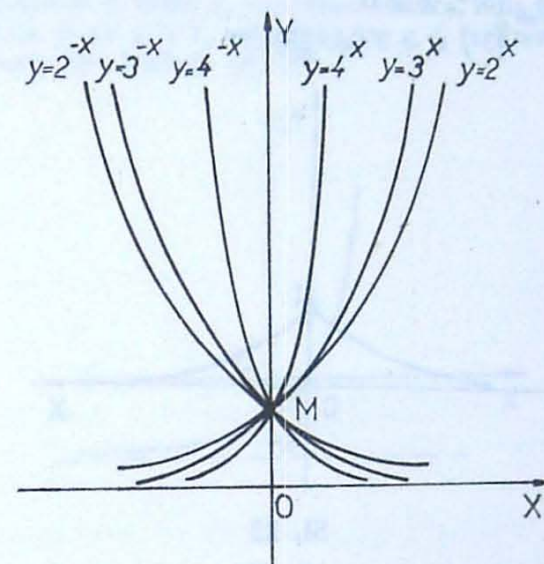


Sl. 20

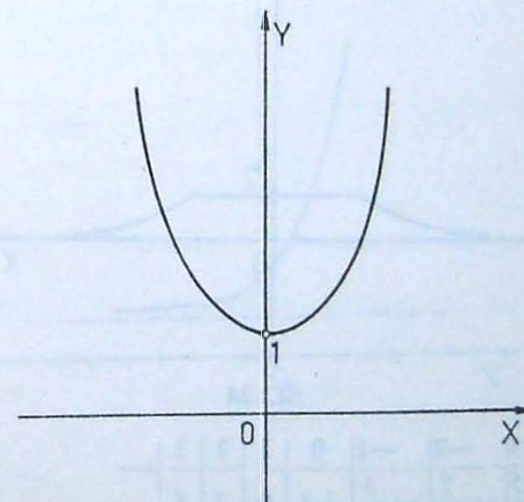
a grafik sl. 20.

582. Sve funkcije su definisane za svako x , prolaze kroz tačku $M(0, 1)$, pozitivne su za svako x , njihova asimptota je X -osa. Prve tri funkcije su monotonno rastuće, a poslednje tri monotonno opadajuće. Brzina rašćenja funkcije $y = a^x$ ($a > 1$) zavisi od parametra a ; što je a veće funkcija raste brže, a što je a manje funkcija raste sporije. Za $0 < a < 1$ analogan zaključak za opadanje funkcije, grafik je prikazan na sl. 21.

583. $y = 2^{|x|} = \begin{cases} 2^x, & x \geq 0 \\ 2^{-x}, & x < 0 \end{cases}$ (sl. 22)

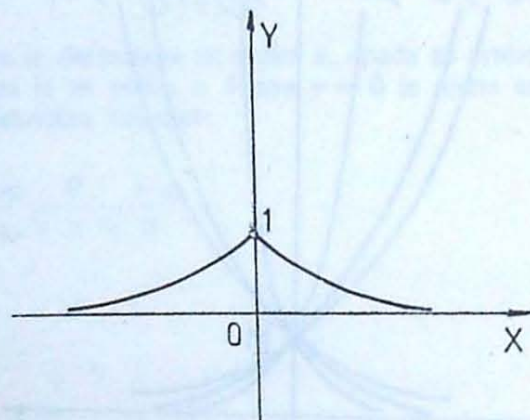


Sl. 21



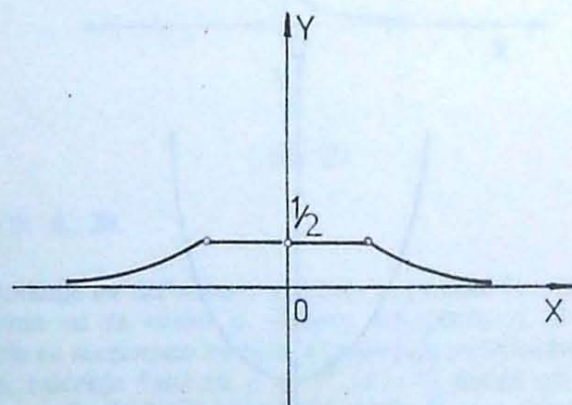
Sl. 22

584. $y = 3^{-|x|} = \begin{cases} 3^{-x}, & x \geq 0 \\ 3^x, & x < 0 \end{cases}$ (sl. 23)



Sl. 23

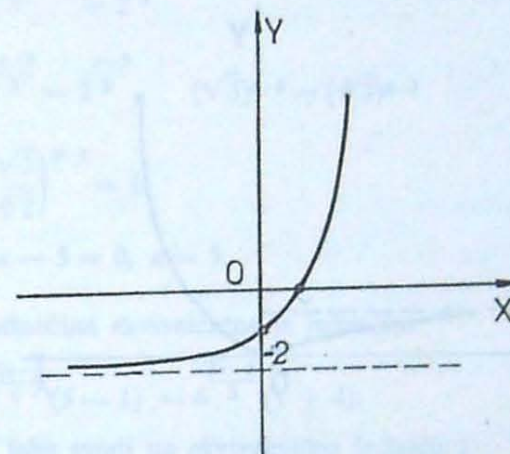
585. $\begin{array}{c|c} x & -\infty \quad -1 \qquad \qquad \qquad 1 \quad +\infty \\ \hline y & 0 \nearrow 2^{-1} \quad y = 2^{-1} \text{ const } 2^{-1} \searrow 0 \end{array}$



Sl. 24

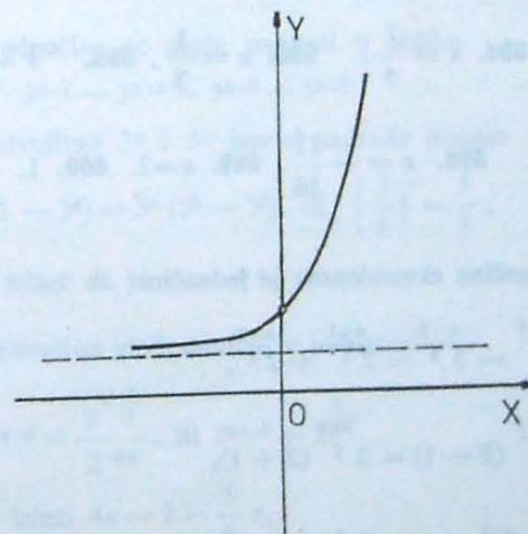
586. $\begin{array}{c|c} x & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ \hline y & -\frac{15}{8} & -\frac{7}{4} & -\frac{3}{2} & -1 & 0 & 2 & 6 \end{array}$

Definisana je za svako x , monotonno rastuća, nula funkcije $x = 1$, pozitivna je za $x > 1$, negativna za $x < 1$. Prava $y = -2$ je asimptota date funkcije (sl. 25).



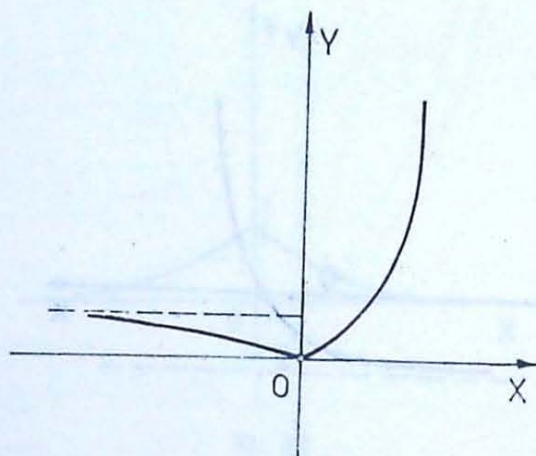
Sl. 25

587. Grafik je prikazan na (sl. 26). Definisana je za svako x , pozitivna je za svako x , monotonno rastuća, nula nema. Prava $y = 1$ je asimptota.



Sl. 26

$$588. y = \begin{cases} 3^x - 1, & x \geq 0 \\ -3^x + 1, & x < 0 \end{cases} \text{ (sl. 27)}$$



Sl. 27

$$589. x = 11. \quad 590. x = -\frac{15}{4}. \quad 591. x = 3. \quad 592. x = \pm 2.$$

$$593. x = 0. \quad 594. x = \frac{1}{5}. \quad 595. x = \frac{1}{3}. \quad 596. x = 10.$$

$$597. x = \frac{19}{9}. \quad 598. x = -\frac{11}{16}. \quad 599. x = 2. \quad 600. 1. \quad 601. x = 14.$$

602. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{x-1}{3^{\frac{x-1}{2}}} - \frac{x-3}{3^{\frac{x-3}{2}}} = \frac{x+1}{2^{\frac{x+1}{3}}} + \frac{x-2}{2^{\frac{x-2}{3}}},$$

ili

$$\frac{x-3}{3^{\frac{x-3}{2}}} (3-1) = 2^{\frac{x-2}{3}} (2+1),$$

odakle

$$2 \cdot 3^{\frac{x-3}{2}} = 3 \cdot 2^{\frac{x-2}{3}}.$$

Poslednja jednačina se može napisati u obliku

$$3^{\frac{x-3}{2}} - 1 = 2^{\frac{x-2}{3}} - 1$$

ili

$$3^{\frac{x-5}{2}} = 2^{\frac{x-5}{3}}, \quad (\sqrt{3})^{x-5} = (\sqrt[3]{2})^{x-5}$$

odakle

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[3]{2}}\right)^{x-5} = 1.$$

Dakle $x - 5 = 0$, $x = 5$.

603. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{2x-3}{5^{\frac{2x-3}{5}}} (5-1) = 4^{\frac{2x-5}{3}} (1+4),$$

koja se lako svodi na ekvivalentnu jednačinu

$$\left(\frac{\sqrt[5]{5}}{\sqrt[3]{4}}\right)^{2x-8} = 1, \text{ dakle } x = 4.$$

604. $x = 7$.

605. Data jednačina se može napisati u obliku

$$7 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+4} = 5^{x+2} - 5^{x+3}.$$

Ako izdvojimo 3^x i 5^x ispred zagrade imamo

$$3^x (7 \cdot 3 - 3^4) = 5^x (5^2 - 5^3) \text{ ili } \left(\frac{3}{5}\right)^x = \frac{5}{3},$$

odakle izlazi da je $x = -1$.

606. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2^{-3} \cdot 2^{4x-6} = \frac{2^{-\frac{x}{2}}}{2^{-3x}}, \text{ ili } 2^{4x-9} = 2^{\frac{5}{2}x}.$$

$$\text{odakle izlazi } 4x - 9 = \frac{5}{2}x,$$

dakle $x = 6$.

607. $4^x(4 + 1) = 320$; $4^x \cdot 5 = 320$; $4^x = 4^3$, $x = 3$.

608. $3^x(2 \cdot 3 - 4 \cdot 3^{-2}) = 450$,

ili

$$3^x = 81, \text{ tj. } 3^x = 3^4, x = 4.$$

609. $x = 3$.

610. Data jednačina se može napisati u obliku

$$2^{3x-4}(2^2 - 2 - 1) = 4, \text{ ili } 2^{3x-4} = 2^2$$

$$\text{odakle izlazi } 3x - 4 = 2 \text{ tj. } x = 2.$$

611. $x = 4$. 612. $x = 5$.

613. Posle očiglednih transformacija data jednačina se svodi na oblik

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2x+1} = 1 \text{ odakle izlazi } x = -\frac{1}{2}.$$

614. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$3^{12x-1} - 3^{12x-2} - 3^{12x-3} + 3^{12x-4} = 2192,$$

odakle

$$3^{12x-3}(3^2 - 3 - 1 + 3^0) = 2192,$$

$$\text{tj. } 3^{12x-3} \cdot 2192 = 2192.$$

Dakle

$$3^{12x-3} = 1, 12x - 3 = 0, x = \frac{1}{4}.$$

615. Data jednačina može se napisati u obliku

$$10 \cdot 2^x - 2^{2x} - 16 = 0.$$

Smenom $2^x = z$, poslednja jednačina postaje

$$z^2 - 10z + 16 = 0.$$

$$\text{Odakle } z_1 = 8, z_2 = 2$$

pa je

$$2^x = 2^3, 2^x = 2$$

tj.

$$x_1 = 3, x_2 = 1.$$

616. Imamo da je:

$$5^{2x} - 20 \cdot 5^x - 125 = 0,$$

smenom $5^x = z$; data jednačina postaje

$$z^2 - 20z - 125 = 0,$$

$$\text{odakle je } z_1 = 24 (z_2 = -5)$$

$$\text{pa je } 5^x = 5^2, x = 2.$$

617. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$6 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x-4} - 81 = 0$$

ili

$$81 \cdot 6 \cdot 3^x - 5 \cdot 3^{2x} - 81^2 = 0$$

$$\text{tj. } 5 \cdot 3^{2x} - 486 \cdot 3^x + 6561 = 0.$$

Neka je $3^x = z$, tada je

$$5z^2 - 486z + 6561 = 0$$

$$\text{odakle je } z_1 = 81, z_2 = \frac{81}{5}.$$

$$\text{Dakle } 3^x = 81, 3^x = \frac{81}{5}$$

$$x_1 = 4, x_2 = 4 - \frac{\log 5}{\log 3}.$$

618. Data jednačina se može napisati u obliku

$$5^{2x} \cdot 5^{-3} - 2 \cdot 5^x \cdot 5^{-2} - 3 = 0.$$

Smenom $5^x = z$ poslednja jednačina postaje

$$z^2 - 10z - 375 = 0$$

odakle je

$$z_1 = 25 (z_2 = -15)$$

pa je

$$5^x = 5^2, x = 2.$$

619. Imamo da je

$$2^{2\sqrt{x-2}} - 10 \cdot 2^{\sqrt{x-2}} + 16 = 0,$$

Smenom $2^{\sqrt{x-2}} = z$, poslednja jednačina postaje

$$z^2 - 10z + 16 = 0;$$

Njena rešenja su $z_1 = 8$, $z_2 = 2$

te je $2^{\sqrt{x-2}} = 8$ i $2^{\sqrt{x-2}} = 2$, $x_2 = 3$, $x_1 = 11$.

620. $2^{2(x+\sqrt{x^2-2})} - 5 \cdot 2^{-1} \cdot 2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 6.$

Smenom $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = z$ imamo da je

$$2z^2 - 5z - 12 = 0$$

odakle je

$$z_1 = 4, \left(z_2 = -\frac{3}{2} \right).$$

pa je $2^{x+\sqrt{x^2-2}} = 2^2$; $x = \frac{3}{2}$.

621. Posle očiglednih transformacija data jednačina se može napisati u obliku

$$24^x = 576, \text{ odakle izlazi da je } x = 2.$$

622. $2^{2x}(1+2^{-1}) = 3^{x-\frac{1}{2}}(3+1);$

$$2^{2x} \cdot 3 = 3^{x-\frac{1}{2}} \cdot 8;$$

$$2^{2x-3} = 3^{x-\frac{3}{2}};$$

$$2^{2x-3} = (\sqrt{3})^{2x-3};$$

te je

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}} \right)^{2x-3} = 1;$$

Odakle je $2x - 3 = 0$, $x = \frac{3}{2}$.

623. $x_1 = 4$, $x_2 = 16$.

624. Pošto je $0,6 = \frac{2}{3}$ to posle očiglednih transformacija data jednačina postaje

$$3 \cdot \left(2^{\frac{2}{x}} \right)^2 - 2 \cdot 2^{\frac{2}{x}} - 8 = 0.$$

smenom $2^{\frac{2}{x}} = z$ ona postaje

$$3z^2 - 2z - 8 = 0.$$

Njena rešenja su $z_1 = 2$, $\left(z_2 = -\frac{5}{3} \right)$,

a

$$2^{\frac{2}{x}} = 2, \text{ dakle } x = 2.$$

625. Posle očiglednih transformacija data jednačina postaje

$$11^{2x} - 23 \cdot 11^x + 22 = 0.$$

Smenom $11^x = z$ ona postaje

$$z^2 - 23z + 22 = 0,$$

čija rešenja su $z_1 = 22$, $z_2 = 1$,

a $11^x = 22$ i $11^x = 1$.

Dakle $x_1 = \frac{\log 22}{\log 11}$, $x_2 = 0$.

626. Ako podelimo datu jednačinu sa 8^x , ona postaje

$$\left(\frac{2}{2} \right)^{3x} + \left(\frac{3}{2} \right)^x = 2$$

Smenom $\left(\frac{3}{2} \right)^x = z$ imamo

$$z^3 + z - 2 = 0 \text{ ili } (z-1)(z^2 + z + 2) = 0$$

odakle izlazi da je

$$z = 1, \text{ a } \left(\frac{3}{2} \right)^x = 1 \text{ } x = 0.$$

627. $x = 9$.

628. $(4\sqrt{3} + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{3})^{\frac{1}{5}} = 3^{\frac{x^2-x-1}{2}}$

ili

$$(9 \cdot \sqrt{3})^{\frac{1}{5}} = 3^{x^2-x-1},$$

odavde $3^{\frac{1}{5}} = 3^{x^2-x-1}$. Dakle $x^2 - x - 1 = \frac{1}{2}$,

ili $2x^2 - 2x - 3 = 0$, $x = \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2}$.

629. Iz $2^{2x} = 2^{\frac{x+1}{x}}$ dobijamo $2x = \frac{x+1}{x}$ ($x \neq 0$) tj. kvadratnu jednačinu $2x^2 - x - 1 = 0$ čija su rešenja

$$x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

630. $x = \pm 1$.

631. Transformišemo izraz leve strane date jednačine na ovaj način.

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} \right)^x = 4,$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x + \frac{1}{(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x} = 4.$$

Neka je $\sqrt{2-\sqrt{3}} = z$

Tada je

$$z + \frac{1}{z} = 4$$

$$z^2 - 4z + 1 = 0, \text{ odakle } z_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}.$$

I tako dobijamo jednačine

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 - \sqrt{3}$$

$$(\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2 + \sqrt{3}$$

Rešavanjem ovih jednačina određujemo vrednosti x :

$$x_1 = 2, x_2 = -2.$$

632. $x_{1/2} = \pm 2$. 633. $x = 81$. 634. $x_1 = 3, x_2 = -\frac{1}{5}$.

635. $x = 25$. 636. $x = \frac{5}{3}$. 637. $x_1 = 1, x = 2$.

638. a) Rešenje date jednačine se dobije u preseku grafika eksponencijalne funkcije $y = 2^x$ i prave $y = -\frac{x}{2} + 5$ ($x = 2$).

b) $y = \sqrt[4]{\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}} = 2^{\frac{5}{4}} = 2^x$ tj. $x = \frac{5}{4}$ sa grafika funkcije $y = 2^x$ čitamo odgovarajuću vrednost y .

10. LOGARITMI, LOGARITAMSKE FUNKCIJE, JEDNAČINE I IDENTITETI

640. -7. 641. -4. 642. -3. 643. 4.

644. 6. 645. 12. 646. 8. 647. -6. 648. 3. 649. 1. 650. $\frac{2}{5}$.

651. $-\frac{1}{2}$. 652. $x = 64$. 653. $\frac{1}{8}$. 654. 32. 655. 8. 656. $\frac{1}{16}$.

657. $\frac{1}{27}$. 658. 40. 659. $54 \frac{3}{8}$. 660. $\frac{1}{8\sqrt{5}}$. 661. $\sqrt{a}$. 662. 4.

663. 5. 664. $\frac{1}{2}$. 665. 2.

666. Koristeći identitet $a^{\log_a N} = N$, imamo $3^{\log_3 81} = 81$.

667. 1000. 668. 512.

669. $3 \log_5 25 + 2 \log_3 27 - 4 \log_2 8 = 3 \log_5 5^2 + 2 \log_3 3^3 - 4 \log_2 2^3 = 3 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 3 = 6 + 6 - 12 = 0$.

670. 17. 671. -144. 672. 0. 673. 3. 674. 3. 675. 625.
676. 600. 677. 661.

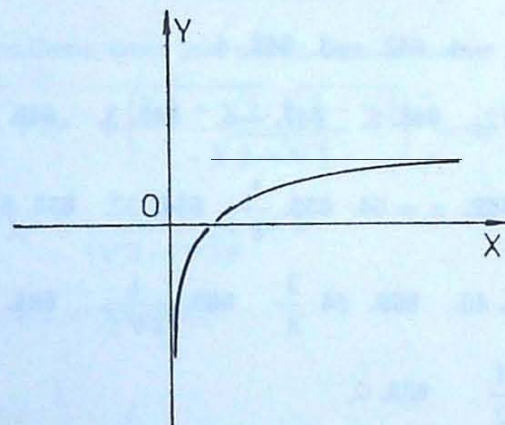
678. $5^2 + \log_5 125 = 5^2 \cdot 5 \log_5 125 = 25 \cdot 125 = 3125.$

679. 3. 680. 696. 681. $4 \frac{4}{5}$. 682. 238. 683. 21.

684. Iz $y = \log_3 x \Rightarrow x = 3^y$, ako funkcija y uzme redom vrednosti: -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 imamo tabelu

x	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{3}$	1	3	9	27
y	-3	-2	-1	0	1	2	3

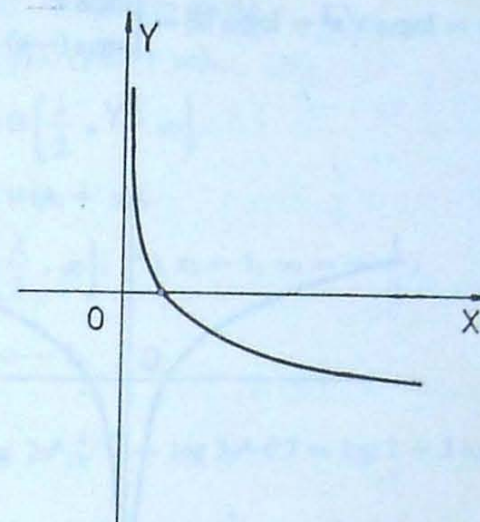
Data funkcija definisana je za $x > 0$, monotono rastuća je. $x = 1$ je nula funkcije, y — osa je vertikalna asimptota date funkcije (sl. 28).



Sl. 28

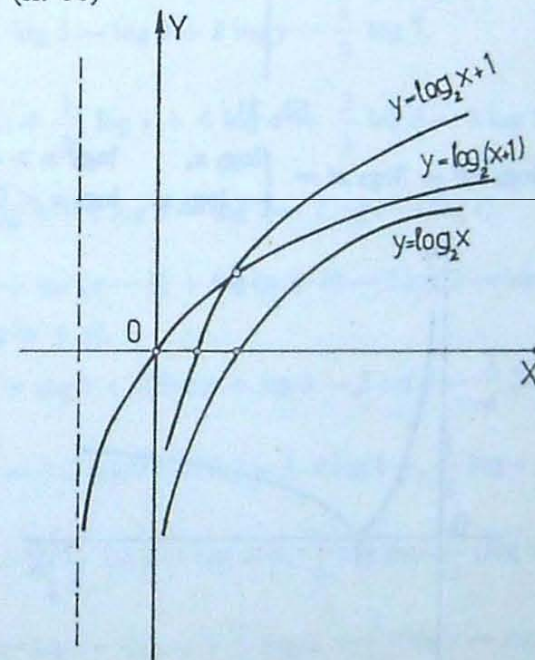
685. Definisana je za $x > 0$, monotono opadajuća, $x = 1$ nula funkcije, Y -osa je njena asimptota (sl. 29) tok je prikazan tabelom.

x	0	1	$+\infty$
y	$+\infty$	0	$-\infty$



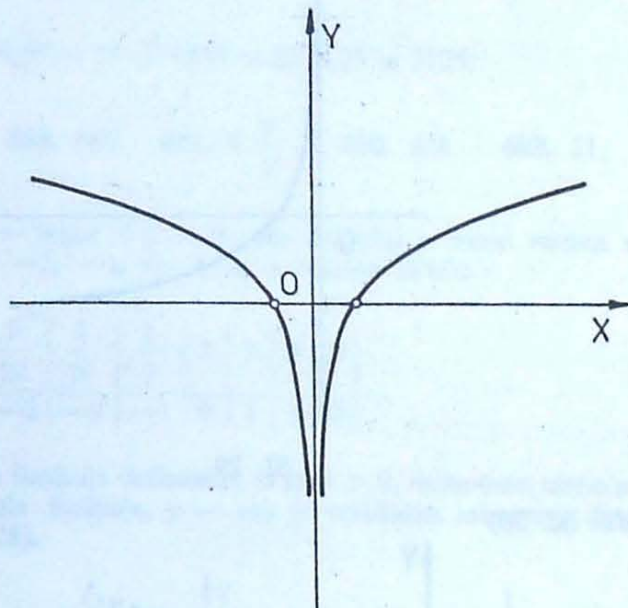
Sl. 29

686. Grafik (sl. 30)



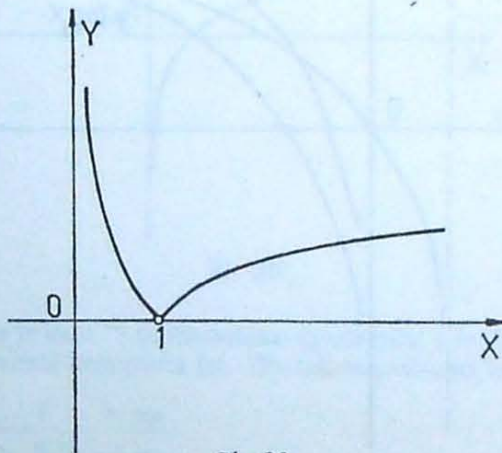
Sl. 30

687. $y = \log_{10} \sqrt{x^2} = \log_{10} |x| = \begin{cases} \log_{10} x & x > 0 \\ \log_{10} (-x) & x < 0 \end{cases}$ (sl. 31)



Sl. 31

688. $y = \sqrt{(\log_3 x)^2} = |\log_3 x| = \begin{cases} \log_3 x, & \log_3 x > 0 \\ -\log_3 x, & \log_3 x < 0 \end{cases}$ (Sl. 32)



Sl. 32

689. a) $x \in (-\infty, 0)$; b) $x \in (-\infty, 1)$.

690. $x \in (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

691. $x \in (-\infty, -3) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

692. $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

693. $x \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{3}, \infty\right)$; b) $x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{3}$;

c) $x_1 = \frac{5}{3}, x_2 = -1$.

695. $\log \frac{2x^3 \sqrt[4]{5}}{3y^2 \sqrt[3]{7}} = \log 2x^3 \sqrt[4]{5} - \log 3y^2 \sqrt[3]{7} = \log 2 + 3 \log x +$
 $+\frac{1}{4} \log 5 - (\log 3 + 2 \log y + \frac{1}{3} \log 7) = \log 2 + 3 \log x +$
 $+\frac{1}{4} \log 5 - \log 3 + 2 \log y - \frac{1}{3} \log 7.$

696. $3 \log 2 + \frac{1}{2} \log x + 4 \log a - \frac{2}{3} \log 5 - 3 \log 5.$

697. $\frac{1}{4} (\log 3 + 2 \log a - \log 2 - 2 \log b - \log c).$

698. $\log 5 + \log(a-b) + \log(a+b) - 2 \log 2 - \log(x-y) -$
 $-\log(x+y).$

699. $\log x = \log 3 + 2 \log a + \log b - 2 \log y - \frac{1}{4} (\log a + \frac{1}{4} \log b).$

700. $\log x = 3 (2 \log 2 + 2 \log a + n \log b + \frac{1}{2} \log c + \frac{1}{4} \log d).$

701. $\log x = 2 \left[\frac{17}{3} \log c + \log z + \frac{1}{3} \log d - \frac{1}{2} (\log a + \log b) \right].$

702. $\log x = \log 5 - \log a + \frac{1}{3} \log y + \frac{1}{12} (\log c - \log d).$

$$703. \log x = 5(\log 6 - \log 5) - 13,751 \log a + 3 \frac{1}{3} \log y + \\ + 1 \frac{1}{4} \log b - 5 \log z.$$

$$704. \log x = -1 \frac{4}{5} \log a - 1 \frac{1}{5} \log b - \frac{9}{20} \log c.$$

$$705. \log x = \frac{1}{3} \left[-3 \log y - \frac{1}{2} (\log y - \log z) + \frac{1}{2} (\log a - \log b) \right].$$

$$706. \log x = \sqrt[5]{4} \log 3. \quad 707. \log x = \log 2 + \log (\log a).$$

$$708. \log x = \frac{1}{4} (\log 3)^2. \quad 709. \log x = \log 3 - \log 2.$$

$$710. \log x = \log 27 + \log 64. \quad 711. \log x = \log 3 + \log 5.$$

$$712. x = \frac{m^2 n^4}{a^3 b^5}. \quad 713. x = \frac{5m^4}{8n^3 p}. \quad 714. x = 8\sqrt{55}.$$

$$715. x = \frac{20\sqrt[3]{ab}}{\sqrt[4]{cd}}. \quad 716. x = \frac{(a+b)^2 \sqrt{a}}{\sqrt[3]{(a-b)^2}}. \quad 717. x = \frac{a^3 \sqrt[3]{7b}}{8c^3}.$$

$$718. x = \frac{3\sqrt{ab^3}}{d^2 \sqrt[3]{c}}. \quad 719. A = \frac{x\sqrt[3]{y^2 - z^3}}{y^2 z \sqrt{x-1}}. \quad 720. A = \frac{yz^2 \sqrt{x-z}}{x^2 \sqrt[3]{y^3 + z^3}}.$$

$$721. 0,77815; 1,17609; 1,47712; 2,35218.$$

$$722. 1,14613; 1,54407; 1,69897; 2; 0,39794.$$

$$723. m; 2 \log 5 + m; \log 4 - \log 3 + m.$$

$$724. \log (32^{-\frac{1}{2}})^{-3} = \log 32^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log 2^5 = \frac{15}{2} \log 2 = 2,25772.$$

$$725. 3,57830. \quad 726. x = 5386,2. \quad 727. x = 0,77738.$$

$$728. x = 5,5556. \quad 729. x = 1,047712. \quad 730. x = 5,2371.$$

$$731. x = 1,71752. \quad 732. x = 0,78686. \quad 733. 192,91. \quad 734. x = 4$$

$$735. x = 8. \quad 736. x = 19,75. \quad 737. x = 0,96591.$$

$$738. x = 0,79330. \quad 739. x = 126,63. \quad 740. 0,9937.$$

$$741. x = 107,81.$$

$$742. \text{Neka je } A = \frac{\pi\sqrt{3}}{11},$$

$$\text{tada je } \log A = \log \pi + \frac{1}{3} \log 3 - \log 11$$

$$\log A = 0,49715 + 0,23856 - 1,04139$$

$$\log A = 1,69432 \Rightarrow A = 0,49678.$$

$$\text{Pa je } 1 + A = 1,494678.$$

$$\text{Dakle } \log x = \frac{1}{3} \log (1 + A) = 0,05810$$

$$\text{odakle } x = 1,14334.$$

$$743. x = -5,32^3 \sqrt[4]{0,0294}, \quad A = 5,32^3 \sqrt[4]{0,0294}, \quad \text{odakle } A = 62,34 \\ x = -62,34.$$

$$744. x = 32431.$$

$$745. \text{Ako dati izraz označimo sa } x \text{ imamo}$$

$$\log x = \frac{1}{2} [\log (145,27 + 124,49) + \log (145,27 - 124,49)]$$

$$\log x = \frac{1}{2} (\log 269,76 + \log 20,78),$$

$$\text{odakle izlazi } x = 74,87.$$

$$746. 0,4619. \quad 747. -25,395. \quad 748. 1,816. \quad 749. 0,263.$$

$$750. \text{Neka su dimenzije kvadra } a, b \text{ i } c \text{ onda je}$$

$$a : b : c = 3 : 5 : 8,$$

il

$$\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{8} = k$$

odavde $a = 3k$, $b = 5k$, i $c = 8k$.

Kako je $V = 385 \text{ m}^3$ tada je $120 k^3 = 385$,

$$a \quad k = \sqrt[3]{\frac{385}{120}}. \text{ Odavde}$$

$$\log k = \frac{1}{3} (\log 385 - \log 120) = \frac{1}{3} (2,58546 - 2,07918) = 0,16876.$$

Dakle

$$k = 1,4749,$$

$$\text{te je } a = 1,4749 \cdot 3 = 4,4247 \text{ m}$$

$$b = 1,4749 \cdot 5 = 7,3745 \text{ m}$$

$$c = 1,4749 \cdot 8 = 11,7992 \text{ m.}$$

$$751. 2,9961 \text{ m. } 752. 0,7937 \text{ m. } 753. R = 4, h = 8.$$

$$754. P = 3494 \text{ cm}^2. 755. R = \sqrt{\frac{a}{\pi h 7,7}} = 1,109; 2R \approx 2,22.$$

$$756. 509 800 000 \text{ km}^2; 1082 000 000 000 \text{ km}^3. 757. 1769 \text{ m.}$$

$$758. 22 \text{ sek. } 759. x = 5,906 \text{ km. } 760. 828, 7 \text{ m.}$$

$$761. \text{ Neka je } \log_a N = x \Rightarrow a^x = N \quad (1)$$

iz (1) imamo da je

$$(a^x)^m = N^m \text{ ili } (a^m)^x = N^m,$$

odakle izlazi

$$x \log_a m a^m = \log_a m N^m$$

$$\text{tj. } x = \log_a m N^m.$$

(2)

Iz (1) i (2) izlazi tvrđenje.

762. Neka je $\log_a N = m$ (m — poznat broj) treba izračunati $\log_b N = x$ (x — nepoznato).

tada je

$$a^m = N, b^x = N, \text{ odakle je } a^m = b^x.$$

Logaritmujeemo obe strane ove jednakosti za osnovu a :

$$m \log_a a = x \log_a b \text{ ili } m = x \log_a b$$

$$x = m \cdot \frac{1}{\log_a b}$$

Zamenom x i m dobijamo

$$\log_b N = \log_a N \cdot \frac{1}{\log_a b}$$

Činilac $\frac{1}{\log_a b}$ naziva se moduo prelaza od logaritamskog sistema

za osnovu a na sistem za osnovu b .

763. Logaritmovanje, jednakosti

$$a^{\log_a b} = b,$$

za osnovu b imamo

$$\log_b a^{\log_a b} = \log_b b$$

$$\text{ili } \log_a b \cdot \log_b a = 1.$$

764. Neka je $\log_a b = x$, odavde $a^x = b$

$$\text{ili } x \log_c a = \log_c b,$$

rešavanjem po x izlazi da je

$$x = \frac{\log_c b}{\log_c a},$$

što je trebalo dokazati (ovaj identitet nam daje mogućnost da se logaritmi svode na istu osnovu).

765. Dopunimo datu jednakost na levoj strani do potpunog kvadrata tj.

$$a^2 + 2ab + b^2 = 9ab$$

ili $(a + b)^2 = 9ab$, odavde

$$|a + b| = 3\sqrt{ab}; \frac{|a + b|}{3} = \sqrt{ab}.$$

Logaritmovanjem dobija se

$$\log \frac{|a + b|}{3} = \frac{1}{2} (\log |a| + \log |b|).$$

766. Pretpostavku jednom napisati u obliku

$$a^2 + 2ab + b^2 = 8ab, (a + b)^2 = 8ab, \quad (1)$$

a zatim u obliku

$$a^2 - 2ab + b^2 = 4ab, (a - b)^2 = 4ab. \quad (2)$$

Količnik (1) i (2) daje

$$\frac{|a + b|}{|a - b|} = \sqrt{2}.$$

Logaritmovanjem dobijamo

$$\log |a + b| - \log |a - b| = \frac{1}{2} \log 2, \text{ što je trebalo dokazati.}$$

772. Koristeći pretpostavku imamo

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c - b)(c + b).$$

Logaritmovanjem ove jednakosti za osnovu a izlazi

$$2 \log_a a = \log_a (c - b) + \log_a (c + b)$$

ili

$$2 = \frac{1}{\log_c - b a} + \frac{1}{\log_c + b a},$$

odakle izlazi

$$2 \log_c - b a \cdot \log_{c+b} a = \log_{c-b} a + \log_{c+b} a,$$

što je trebalo dokazati.

773. Iz jednakosti:

$$x = \log_2 3 \text{ i } y = \log_3 4$$

izlazi

$$2^x = 3 \text{ i } 3^y = 4.$$

za $x = 1,5$, $2^{1,5} < 3$, dok je $3^{1,5} > 4$ za $y = 1,5$

Iz ovoga izlazi da je

$$\log_2 3 > \log_3 4.$$

$$774. y = 10^{1-\log 5} + 10^{2-\log 20} - 10^{3-\log 500} =$$

$$= \frac{10}{10^{\log 5}} + \frac{10^2}{10^{\log 20}} - \frac{10^3}{10^{\log 500}} = \frac{10}{5} + \frac{100}{20} - \frac{1000}{500} = 5.$$

$$775. x = 1000^{\log 3} \cdot \frac{100^{\log \sqrt{2}}}{100^{\log \sqrt{3}}} = 100^{3 \log 3} \cdot \frac{10^{2 \log \sqrt{2}}}{10^{2 \log \sqrt{3}}} =$$

$$= 10^{\log 3^3} \cdot \frac{10^{\log 2}}{10^{\log 3}} = 27 \cdot \frac{2}{3} = 18.$$

$$776. x = 10 \cdot 10^2 \left(\frac{1}{2} \right)^{2 \log 9 - \log 2} = 10 \cdot 10^{\log 9 - 2 \log 2} = 10 \cdot 10^{\log \frac{9}{4}} =$$

$$= 10 \cdot \frac{9}{4} = 22,5.$$

$$777. x = 7^{2-2 \log 7^2} + \frac{1}{5 \log_5 4} = \frac{7^2}{7^{\log 7^2}} + \frac{1}{4} = \frac{49}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{2}.$$

$$778. x = 20.$$

$$779. r = \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} =$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{\log_a x} + \frac{1}{\log_b x} + \frac{1}{\log_c x}},$$

$$\text{tj. } r = \frac{1}{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{\log_c x}},$$

Odakle izlazi

$$\log_c x = \frac{rpq}{pq - rp - rq}.$$

780. Primenom identiteta

$$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$$

imamo

$$\begin{aligned} \log_{45} 100 &= \frac{\log_5 100}{\log_5 45} = \frac{\log_5 2^2 \cdot 5^2}{\log_5 5 \cdot 3^2} = \frac{2 \log_5 2 + 2 \log_5 5}{\log_5 5 + 2 \log_5 3} = \\ &= \frac{2a + 2}{1 + 2b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{781. } \log_{70} 2,5 &= \frac{\log_7 2,5}{\log_7 70} = \frac{\log_7 \frac{5}{2}}{\log_7 2 \cdot 5 \cdot 7} = \frac{\log_7 5 - \log_7 2}{\log_7 2 + \log_7 5 + \log_7 7} = \\ &= \frac{d - c}{c + d + 1}. \end{aligned}$$

$$\text{782. } \frac{2b + a - 1}{3a}.$$

$$\begin{aligned} \text{783. } \alpha &= \log_{12} 18 = \log_{12} 3^2 \cdot 2 = 2 \log_{12} 3 + \log_{12} 2 = \\ &= \frac{2}{\log_3 12} + \frac{1}{\log_2 12} = \frac{2}{2 \log_3 2 + 1} + \\ &+ \frac{1}{2 \log_2 2 + \log_3 3} = \frac{2 \log_2 3}{2 + \log_2 3} + \frac{1}{2 + \log_2 3} = \\ &= \frac{2 \log_2 3 + 1}{2 + \log_2 3} \Rightarrow \log_3 2 = \frac{2 - \alpha}{2\alpha - 1}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \beta &= \log_{24} 54 = \log_{24} 3^3 \cdot 2 = 3 \log_{24} 3 + \log_{24} 2 = \\ &= \frac{3}{\log_3 24} + \frac{1}{\log_2 24} = \frac{3 + \log_3 2}{3 \log_3 2 + 1} \Rightarrow \log_3 2 = \\ &= \frac{3 - \beta}{3\beta - 1}. \end{aligned} \quad (2)$$

Iz (1) i (2) imamo

$$\frac{3 - \beta}{3\beta - 1} = \frac{2 - \alpha}{2\alpha - 1} \Rightarrow \alpha\beta + 5(\alpha - \beta) = 1.$$

784. Neka je $\log_b a = x \Rightarrow b^x = a$,

stepenovanjem zadnje jednakosti sa n imamo

$$(b^n)^x = a^n.$$

Odakle izlazi

$$x = \log_{b^n} a^n.$$

$$\text{Dakle } \log_b a = \log_{b^n} a^n.$$

785. Koristeći identitet $\log_b a = \log_{b^n} a^n$

$$\text{imamo } \log_{\sqrt{3}} 8 = \frac{1}{2} \log_3 64 = \log_3 4^3 = 3 \log_3 4 = 3 \log_3 \frac{12}{3} =$$

$$= 3 (\log_3 12 - \log_3 3) = 3 \left(\frac{1}{\log_{12} 3} - 1 \right) = 3 \left(\frac{1}{a} - 1 \right) = \frac{3(1-a)}{a}.$$

786. $\log_{16} 9 = \log_4 3^2 = \log_4 3$, tj. jednaki su.

$$\text{787. } \frac{1}{b}. \quad \text{788. } \frac{m+1}{n+1} n. \quad \text{789. } \frac{2a+1}{a}.$$

$$\text{790. } \frac{3a+b-2}{2a}.$$

791. Pošto je $1 = \log 10$ imamo

$$\log x (x + 3) = \log 10$$

Ako su logaritmi dva broja jednaki, onda su i sami brojevi jednaki, tj.

$$x(x \mp 3) = 10.$$

Rešenja ove kvadratne jednačine su

$$x_1 = -5 \text{ i } x_2 = 2.$$

Negativno rešenje $x = -5$ ne zadovoljava datu jednačinu.

792. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\log x - [\log 1 - \log(x-1)] = \log 2 + \log(2x+3),$$

ili

$$\log x(x-1) = \log(4x+6).$$

Odakle izlazi da je $x = 6$.

793. $x = 10^{16}$ i $x = 10$.

794. Imamo da je $\log x - \frac{1}{\log^6 x} = 1$ ili $\log x - \frac{1}{\frac{1}{6} \log x} = 1$.

Smenom $\log x = t$ dobija se

$$t - \frac{6}{t} = 1 \text{ ili } t^2 - t - 6 = 0.$$

Dakle $x = 1000$ i $x = 0,01$.

795. Data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\log(x-9)(2x-1) = \log 100,$$

$$\text{ili } (x-9)(2x-1) = 100,$$

$$\text{tj. } 2x^2 - 19x - 91 = 0,$$

Odakle izlazi da je $x = 13$.

796. Posle očiglednih transformacija imamo da je

$$\log \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3} = \log \frac{30}{10}$$

$$\text{ili } \sqrt{x-5} \cdot \sqrt{2x-3} = 3,$$

$$\text{tj. } 2x^2 - 13x + 6 = 0.$$

Data jednačina je zadovoljena samo za $x = 6$.

797. Logaritmovanjem dobijamo

$$\log^2 x - \log x - 2 = 0$$

Odakle

$$\log x = 2 \Rightarrow x_1 = 100$$

$$\log x = -1 \Rightarrow x_2 = 0,1.$$

798. $x = 4$.

799. Kako je

$$\frac{1}{2} \log_x 5 + \log_x 5 + \log_x x - 2,25 = \left(\frac{1}{2} \log_x 5 \right)^2$$

tada je

$$\frac{3}{2} \log_x 5 - 1,25 = \frac{1}{4} (\log_x 5)^2.$$

Smenom $\log_x 5 = t$ imamo

$$t^2 - 6t + 5 = 0,$$

Odakle izlazi $t = 5$ i $t = 1$.

Dakle $x = \sqrt[5]{5}$ i $x = 5$.

800. Data jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{2}{\log_{2^{x-1}} 4} + \log_2 2^x + \frac{1}{\log_3 \frac{1}{2}} + \frac{1}{\log_6 \frac{\sqrt{6}}{6}} = 0,$$

ili

$$\frac{2}{2 \log_{2^{x-1}} 2} + \log_2 2^x + \frac{1}{-\log_3 2} + \frac{1}{\frac{1}{2} \log 6 - \log_6 6} = 0,$$

odakle

$$\log_2 (2^x - 1) + \log_2 2^x - \log_2 3 - 2 = 0,$$

$$\log_2 2^x (2^x - 1) - (\log_2 3 + \log_2 4) = 0$$

Najzad imamo

$$\log_2 [(2^x)^2 - 2^x] = \log_2 12$$

$$\text{Dakle } (2^x)^2 - 2^x - 12 = 0.$$

Smenom $2^x = t$

$$\text{Imamo } t^2 - t - 12 = 0, t_1 = -3, t_2 = 4.$$

Prvo rešenje ne odgovara, a iz $2^x = 4$, imamo

$$x = 2.$$

801. Data jednačina se može napisati u obliku

$$\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{\log_x a^2} + \frac{1}{\log_x a^4} = \frac{3}{4},$$

ili

$$\frac{1}{\log_x a} - \frac{1}{2 \log_x a} + \frac{1}{4 \log_x a} = \frac{3}{4},$$

Odakle izlazi

$$\log_x a = 1, \text{ tj. } x = a.$$

802. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\log_{16} x + \log_{16} x^2 + \log_{16} x^4 = 7,$$

$$\log_{16} x^7 = 7 \Rightarrow x^7 = 16^7 \Rightarrow x = 16.$$

803. Data jednačina se može napisati u obliku

$$\log (152 + x^3) = \log (x + 2)^3,$$

$$\text{ili } 152 + x^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8,$$

$$\text{odavde } x^2 + 2x - 24 = 0$$

Dakle $x = 4$.

$$804. x=2, y=10$$

805. Dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 40, \\ xy = 21. \end{cases}$$

Odavde $x = \pm 7, y = \pm 3$. 806. $x = \pm 9, y = \pm 7$.

$$807. x = 6, y = 2. \quad 808. x = 8, y = 4.$$

$$809. x = 1, y = 1.$$

810. Data nejednačina može se napisati u obliku

$$\log \frac{x+2}{x} > 1 \Rightarrow \frac{x+2}{x} > 10 \Rightarrow x \in \left(0, \frac{2}{9}\right).$$

811. Data nejednačina ekvivalentna je nejednačini

$$\log (x-2) - \log x > 0 \Rightarrow \log \frac{x-2}{x} > 0 \Rightarrow \frac{x-2}{x} > 1 \Rightarrow x < 0.$$

$$812. \log (x-4) - \log (x+1) < 1 \Rightarrow \frac{x-4}{x+1} < 10$$

Odakle izlazi da

$$x \in \left(-\infty, -\frac{14}{9}\right) \cup (-1, +\infty).$$

813. Data nejednakost ekvivalentna je sa

$$(\log^2 x - 3 \log x + 1) \log x > 3,$$

$$\text{tj. } (\log x - 3)(\log^2 x + 1) > 0,$$

odakle se dobija

$$\log x > 3 \text{ ili } x > 1000.$$

$$814. -8 < x < 2. \quad 815. x \in (0, 1) \cup (100, +\infty).$$

816. $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 6)$.

817. Data nejednakost ekvivalentna je nejednačini:

$$\frac{1}{\log_a ax} + \frac{3}{\log_a a^2 x} > 0$$

ili

$$\frac{5 + 4 \log_a x}{(1 + \log_a x)(2 + \log_a x)} > 0.$$

Smenom

$$\log_a x = t \text{ imamo}$$

$$\frac{5 + 4t}{(1 + t)(2 + t)} > 0 \Rightarrow -2 < t < -\frac{5}{4}, t > -1.$$

Dakle

$$-2 < \log_a x < -\frac{5}{4} \Rightarrow a^{-2} < x < a^{-\frac{5}{4}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2} < x < \frac{1}{\sqrt[4]{a^5}}$$

$$\log_a x > -1 \Rightarrow x > \frac{1}{a}.$$

818. Data nejednakost ekvivalentna je sledećoj:

$$0 < x^2 - 5x + 6 < 1$$

ili

$$\begin{cases} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ x^2 - 5x + 6 < 1 \end{cases}$$

Prva nejednakost je zadovoljena za

$$x < 2 \text{ i } x > 3,$$

a druga za

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

Pošto je $\sqrt{5} > 2$ to $\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < 2$, a $\frac{5 + \sqrt{5}}{2} > 3$

Tada je data nejednačina zadovoljena za svako x u intervalu

$$\frac{5 - \sqrt{5}}{2} < x < 2 \text{ i } 3 < x < \frac{5 + \sqrt{5}}{2}.$$

819. Zadatak ima smisla za $x > 0$, te je data nejednačina ekvivalentna sa

$$\log_a x(x + 1) < \log_a (2x + 6).$$

Kako je $a > 1$ to izlazi da je

$$x(x + 1) < 2x + 6 \text{ ili}$$

$$x^2 - x - 6 < 0.$$

Dakle ovaj trinom za $x > 0$ je negativan, $0 < x < 3$.

L I T E R A T U R A

1. Н. Анйонов, П. М. Выгодски, Б. Б. Никийин, А. М. Санкин: Сборник задач по элементарной математике, Москва 1964.
2. Ив. Анев, А. Анйелов, Сйамболов П.: Сборник от задачи по алгебра, София 1958.
3. Alendorfer i Okli: Principles of Mathematics u prevodu Beograd 1966.
4. Breard C.: Mathematiques 3e, Paris 1962.
5. Breard C.: Mathematiques 2e, Paris 1969.
6. Combes A.: Exercices & Problems de Mathematqucs, Paris 1968.
7. Dolciani, Berman, Freilich: Modern algebra Structure and Method, Book 1: Boston. New-York. Atlanta. Geneva, ill. Dallas. Palo Alto.
8. В. К. Ейерев, В. В. Зайцев, Б. А. Корденски, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойски, Г. С. Ряховска, М. И. Сканави: Сборник задач по математике для Конкурсных экзаменов во втузы, Москва 1969.
9. Д. К. Фадгеев и И. С. Соминский: Алгебра, Москва 1966.
10. Р. А. Калнин: Алгебра и элементарные функции Москва 1966.
11. В. А. Кречмар: Задачник по алгебре, Москва 1968.
12. Б. С. Кущенко: Сборник конкурсных задач по математике, Ленинград 1964.
13. V. Lespinard et R. Rernet: Algebre classe de premiere A — C — M — M, Lyon 1961.
14. В. Б. Лигский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулойков, М. И. Шабунин: Задачи по элементарной математике, Москва 1968.
15. Michel Queysanne, Andre Revuz: Mathematique tome 1 Paris 1969.
16. Р. С. Моганов: Сборник задач по специальном курсу Элементарной математике, Москва 1964.
17. Б. Пейканчин, С. Манолов, Н. Марйинов, К. Пейров: Сборник от задачи по математике за кандидат — студенти, София 1965.
18. И. Х. Сивашински: Задачник по элементарной математике, Москва 1966.
19. К. У. Шахно: Сборник задач по элементарной математике повышенной трудности Минск 1965.
20. С. И. Туманов: Алгебра, Москва 1966.