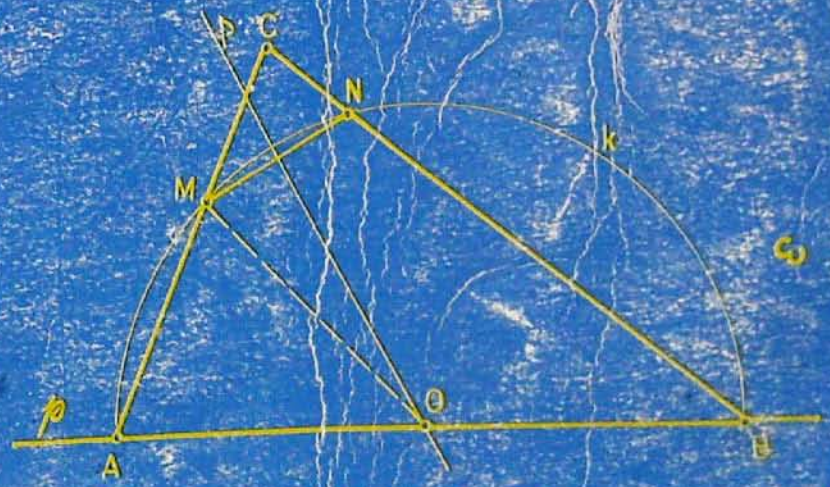
K.Б. 21125

9 788617 211255

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 1

Mr VENE T. BOGOSLAVOV

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 1



ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA • BEOGRAD

Mr VENE T. BOGOSLAVOV

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 1

DVADESET OSMO IZDANJE

ZAVOD ZA UDŽBENIKE
I NASTAVNA SREDSTVA • BEOGRAD
2001

Recenzent
Svetozar Branković, profesor
Pete beogradske gimnazije, Beograd

Urednik
Žarko Jović

Glavni i odgovorni urednik
dr **Petar Pijanović**

Za izdavača
prof. dr **Dobrosav Bjeletić**, direktor

ISBN 86-17-09031-6

S ljubavlju unuku
Jovanu

PREDGOVOR OSAMNAESTOM IZDANJU

Prvo izdanje ove zbirke izašlo je iz štampe septembra 1970. godine. Napisano je prema nastavnom programu matematike za I razred gimnazije (deo koji se odnosi na algebru).

Trinaesto i četrnaesto izdanje je izmenjeno i dopunjeno poglavljima: ***O skupovima, Matematička logika i Kombinatorika.***

U petnaesto izdanje su uneti određeni sadržaji iz geometrije.

Ovo, osamnaesto izdanje prilagođeno je novom nastavnom planu i programu iz matematike prirodno-matematičkog smera gimnazije.

Dopunjeno je sa 128 novih zadataka, pa se znatno razlikuje od prethodnih izdanja.

Recenzentu ovog izdanja, Svetozaru Brankoviću, profesoru „Pete beogradske gimnazije" u Beogradu, zahvaljujem na pažljivom čitanju rukopisa i pomoći u izboru zadataka iz skupova i kombinatorike.

Po težini se zadaci u ovoj zbirci mogu podeliti na dve grupe: lakši i srednji (80%) i teži (20%). Teži zadaci su označeni zvezdicom.

Zahvaljujem svojoj supruzi Nadeždi, koja mi je pomogla u pripremi i sređivanju rukopisa.

Beograd, septembra 1992. godine AUTOR

PREDGOVOR XXIII DOPUNJENOM IZDANJU

Ovo, dvadeset i treće izdanje dopunjeno je sa 293 nova zadatka. U svako poglavlje dodat je izvestan broj novih zadataka. Znatne promene izvršene su u poglavljima: Realni brojevi, Podudarnost i sličnost geometrijskih figura. Sa ovim dopunama, autor se nada da će se kvalitet knjige znatno poboljšati.

25. avgust 1995. godine AUTOR

PREDGOVOR XXVI DOPUNJENOM IZDANJU

Ovo, dvadeset i šesto izdanje dopunjeno je sa 409 novih zadataka. Svako poglavlje dopunjeno je novim zadacima.

Izvestan broj novih zadataka se prvi put javljaju u matematičkoj literaturi. Oni su rezultat četrdesetogodišnje nastavne prakse autora. Sa ovim dopunama, autor se nada, da je kvalitet zbirke znatno poboljšan. Da li je autor u pravu, sud će dati budući korisnici zbirke.

7. juni 1999. godine AUTOR

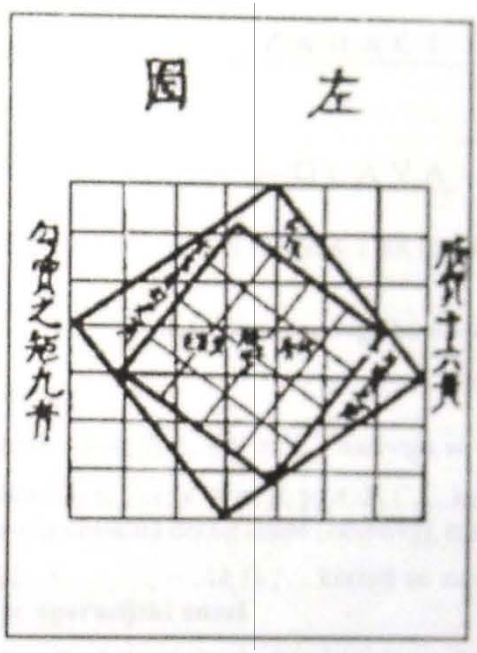
PREGLED SIMBOLA I OZNAKE

$\{....\}$	skup
N	skup svih prirodnih brojeva
Z	skup svih celih brojeva
Q	skup svih racionalnih brojeva
R	skup svih realnih brojeva
$\in$	pripada
$\notin$	ne pripada
$\forall$	univerzalni kvantifikator
$\forall x)$	znači: za svako x
$\exists$	kvantifikator egzistencije
$\exists\, x)$	znači: postoji bar jedno x
$\Rightarrow$	implikacija (logički simbol)
$A \Rightarrow B$	znači: iz A sledi B; $A \Leftarrow B$ znači: iz B sledi A
$\Leftrightarrow$	ekvivalencija (logički simbol)
$A \Leftrightarrow B$	znači: $A \Rightarrow B$ i $B \Rightarrow A$
$\wedge$	konjunkcija (logički simbol)
$A \wedge B$	znači: A i B
$\vee$	disjunkcija (logički simbol)
$A \vee B$	znači: A ili B
$\neg$	negacija
$\subset$	inkluzija
$\cup$	unija skupova
$\cap$	presek skupova
$\varnothing$	prazan skup
$x \in [a, b]$ ili $a \leq b \leq b$	zatvoreni interval
$x \in (a, b)$ ili $a < x < b$	otvoren interval

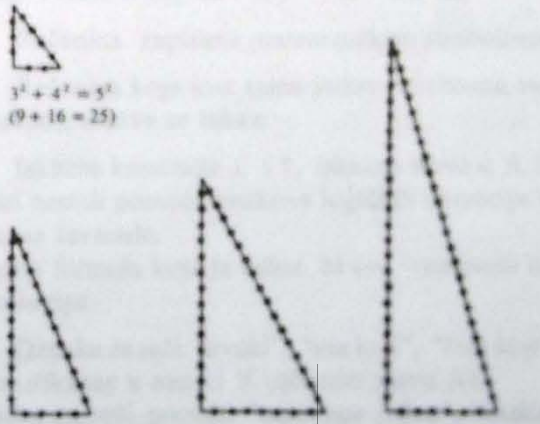
GRČKA AZBUKA

Mala	Velika	Naziv
α	A	alfa
β	B	beta
γ	Γ	gama
δ	Δ	delta
ε	E	epsilon
ζ	Z	dzeta
η	H	eta
θ	Θ	teta
ι	I	jota
κ	K	kapa
λ	Λ	lambda
μ	M	mi

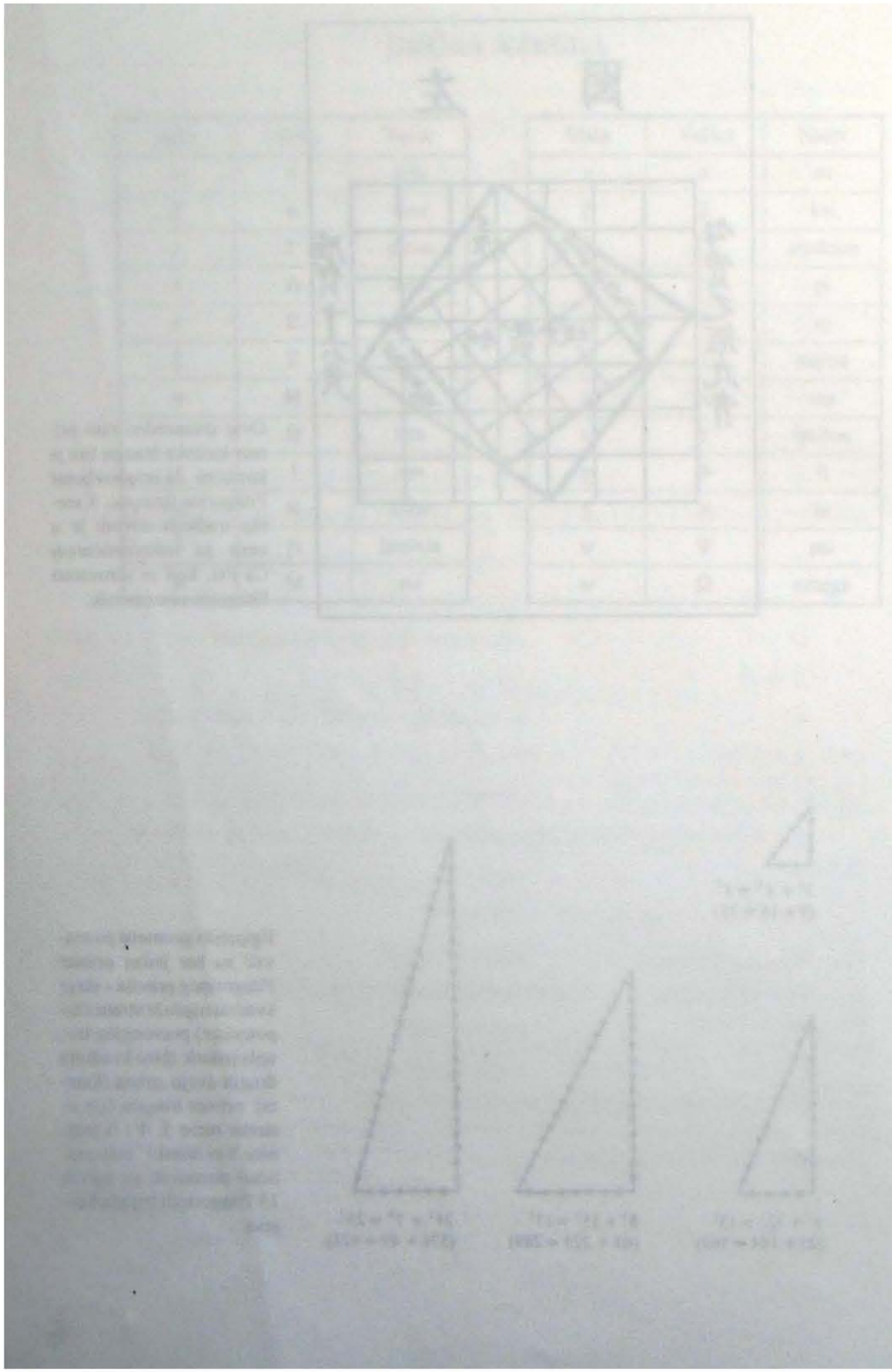
Mala	Velika	Naziv
ν	N	ni
ξ	Ξ	ksi
o	O	omikron
π	Π	pi
ρ	P	ro
σ	Σ	sigma
τ	T	tau
υ	Y	ipsilon
φ	Φ	fi
χ	X	hi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega



Ovaj izvanredno rani primer kineske štampe bio je korišćen za ustanovljenje Pitagorine teoreme. Kineska tradicija dovodi je u vezu sa matematičarem Ču Pei, koji je verovatno Pitagorin savremenik.



Egipatski geometri poznavali su bar jedan primer Pitagorinog pravila – da je kvadrat najduže strane (hipotenuze) pravouglog trougla jednak zbiru kvadrata drugih dveju strana (kateta): primer trougla čije su strane mere 5, 4 i 3 jedinice. Vavilonski matematičari poznavali su takvih 15 Pitagorinih trijada brojeva.



I GLAVA

1. LOGIKA I SKUPOVI

1.1. Osnovne logičke operacije

Primedbe:

1°. Simboli: -4, 0, 2, 5, $\sqrt{3}$, π, e,... nazivaju se **konstante**.

2°. Simboli: a, b, c, x, y, z, α, β, γ, A, B, C,... koji služe kao zajedničke oznake za više objekata nekog skupa (skupova), nazivaju se **promenljive**.

3°. Znaci: $+$, $\cdot$, $:$, $-$, $\cup$, $\cap$, ... koriste se za označavanje operacija i nazivaju se **operacijski znaci**.

4°. Znaci: $=$, $<$, $>$, $\leq$, $\cong$, $\perp$, $\|$,... koriste se za označavanje relacija i nazivaju se **relacijski znaci**.

5°. Znaci: $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ su znaci osnovnih **logičkih operacija**.

6°. Konstante i promenljive povezane znacima operacija nazivaju se **izrazi**. Primeri: $2x$, $5m+3$, $y-7$, $a+8b$, itd.

7°. Rečenica zapisana matematičkim simbolima naziva se **formula**.

8°. Rečenica koja ima samo jednu istinitosnu vrednost $\top$ (tačno) ili $\perp$ (netačno), naziva se **iskaz**.

9°. Iskazne konstante $\perp$ i $\top$, iskazna slova a, b, s, r, P, Q,... i svi složeni iskazi nastali pomoću znakova logičkih operacija $\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$ nazivaju se **iskazne formule**.
Iskazna formula koja je tačna za sve vrednosti iskaznih slova naziva se **tautologija**.

10°. Oznaka za reči: "svaki", "ma koji", "bilo koji" naziva se **univerzalni kvantifikator** u oznaci $\forall$ (obrnuto slovo A).
Oznaka za reči postoji: "najmanje jedan", "makar jedan", "neki", "bar jedan" naziva se **egzistencijalni kvantifikator** u oznaci $\exists$ (obrnuto slovo E).

1. Koje su od sledećih rečenica iskazi:
a) $1+1=2$; b) broj 16 je neparan broj; c) paran broj se može napisati u obliku $2n$, gde je n prirodan broj; d) rešenje jednačine $3x=18$ je prirodan broj; e) $(a-b)^2 \geq 0$, za svako racionalno a i b; f) $ab>0$ ako su a i b istog znaka; g) $a^2>0$ ako je a negativan broj; h) $-a^2<0$ ako je a negativan broj?

2. Koji od znakova $<, >, =, \leq, \geq$ možemo staviti umesto zvezdice (*) da bi se dobio tačan iskaz:
a) $4*4$; b) $3*5$; c) $6*5$?

3. Dat je polinom $p(x)=x^2-6x+8\leq 0$. Odrediti istinitost iskaza: $p(1)$; $p(2)$; $p(3)$; $p(4)$; $p(5)$.

4. Odrediti sve parove (x, y) za koje je formula $2x+y=10$ istinit iskaz $(x, y\in N)$.

5. Dat je skup $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti vrednost istinitosti sledećih tvrđenja: a) $(\exists x\in A)(x+3=10)$; b) $(\forall x\in A)(x+3<10)$;
c) $(\forall x\in A)(x+1>x)$; d) $(\exists x\in A)(x+3<5)$;
e) $(\exists x\in A)(x^2=x)$.

6. Odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
a) $(1<2)\wedge(2<5)$; b) $(1<3)\wedge(-3<-2)$;
c) $\neg(1<2)\wedge(\pi<9)$.

7. Date su formule:
a) $5x-4=11\,(x\in N)$; b) $x|6\,(x\in Z)$; c) $x<7\wedge x\in N$;
d) $x>3\wedge x<5\wedge x\in N$; e) $(x<1\vee x>5)\wedge x\in Z$. Rešiti date formule, odnosno naći sve vrednosti odgovarajućih promenljivih za koje je istinitosna vrednost formule tačna.

8. Rešiti date formule:
a) $x\in\{1,2,3\}$; b) $x|9\wedge x|6\ x\in Z$; c) $x^3+x<40\wedge x\in N$;
e) $x<3\vee(x>5\wedge x<8)$.

9. Popuniti tabelu:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(x>7\vee x<4)$										
$\tau(x<9\wedge x>5)$										
$\tau(3x<7)$										
$\tau(x^2=x\cdot x)$										

10. Dati su iskazi $p\equiv\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=\frac{10}{3}$;

$q\equiv\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)=-\frac{37}{6}$;

$r\equiv\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=7$; $s\equiv\frac{1}{2}-\frac{1}{3}:\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{2}{5}$.

Odrediti njihovu tačnost, pa na osnovu toga odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
a) $(p\wedge q)\vee(r\wedge s)$; b) $(p\vee q)\vee(p\wedge s)$;
c) $((p\vee r)\wedge q)\wedge(s\wedge r)$; d) $((r\vee s)\wedge(p\vee s))\wedge q$;
e) $(q\wedge(r\wedge(s\wedge p)))\vee((p\wedge q)\vee(q\wedge s))$.

11. Odrediti istinitosnu vrednost iskaza:
a) $(\top\wedge((\bot\wedge\top)\wedge(\top\wedge\top)))\wedge\bot$;
b) $(((\bot\wedge\bot)\vee(\top\wedge\bot))\vee((\bot\vee\bot)\wedge(\bot\vee\top))\wedge(\top\vee\bot)$.

12. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:

$p\equiv\frac{3+2x}{3}-\frac{2-3x}{4}=\frac{29}{24}$ za $x=0{,}5$;

$q\equiv 3(5-y)-2(y-1)=1+3y$, za $y=2$,
pa zatim odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $(p\vee q)\wedge p$; b) $(p\wedge q)\vee q$.

13. Dati su iskazi:
$p\equiv(a^3-2ax+6a-1)0{,}5a^2x=0{,}5a^5x-a^4x^2+3a^3x-0{,}5a^2x$, $a, x\in Q$,
$q\equiv(a^2+10a+25)(a-5)=a^3-125$, $a\in Q$,
$r\equiv(2x-3y)(3x+3y)-(4x-5y)^2-(6x^2+17y^2)=$
$=40xy$, $x, y\in Q$.
Odrediti njihove istinitosne vrednosti, pa na osnovu toga odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $p\Rightarrow(q\vee r)$; b) $(p\vee q)\wedge(r\Rightarrow q)$; c) $(q\Rightarrow r)\vee p$.

14. Na osnovu istinitosnih vrednosti datih iskaza:
$p\equiv 2^3\cdot 4^2=2^7$; $q\equiv(8^2\cdot 4^3):(16\cdot 64)=2^3$;
$r\equiv(27^2\cdot 64)^2:(216^3\cdot 36)=6$;
$s\equiv 2^3+3^3=5^3$; $t\equiv 3^3+3^4=3^7$.
Odrediti istinitosnu vrednost sledećih iskaza:
a) $((p\vee q)\Rightarrow(s\wedge t))\Leftrightarrow r$; b) $((p\Rightarrow q)\Rightarrow s)\Leftrightarrow((s\wedge t)\vee p)$;
c) $((q\Leftrightarrow s)\Leftrightarrow p)\Leftrightarrow(s\Rightarrow t)$; d) $((s\wedge r)\Leftrightarrow(p\vee q))\Leftrightarrow(t\Leftrightarrow(q\Rightarrow r))$.

15. Dati su iskazi:
a) $a \equiv ((4x^4y^3)^3 : (2x^2y)^5 = 2x^2y^3,\ x, y \in Q)$;
b) $b \equiv ((3x^4y^2)^3 : (3x^6y)^2 = 3xy^4,\ x, y \in Q)$;
c) $c \equiv ((4y^2 + 2x^2 - 3xy)(4xy - 2x^2 + 5y^2) =$
$= xy^3 + 14x^3y - 10x^2y^2 + 4x^4 + 20y^4,\ x, y \in Q)$;
d) $d \equiv (10x^2y^2(0{,}016 + 0{,}4y^2) - 2xy^2 - 0{,}4xy)^2 =$
$= 16x^2y^2,\ x, y \in Q$.
Odrediti njihove istinitosne vrednosti, pa na osnovu toga odrediti istinitosne vrednosti sledećih iskaza:
a) $(a \Rightarrow \neg c) \Leftrightarrow (\neg(\neg b \wedge c) \vee (\neg d))$;
b) $(\neg(\neg a \vee b) \Rightarrow (\neg c \Leftrightarrow d)) \wedge (a \Rightarrow \neg b)$;
c) $((b \Leftrightarrow \neg c) \Rightarrow \neg(\neg a \wedge d)) \vee (\neg d \Leftrightarrow c)$.

16. Ispitati da li je iskazna formula
$A = ((p \vee q) \wedge z) \Leftrightarrow ((p \wedge z) \vee (q \wedge z))$ tautologija?

17. Dokazati da je logička formula
$A = \neg(a \Rightarrow b) \Leftrightarrow (a \wedge \neg b)$ tautologija.

18. Sastaviti istinitosne tablice za sledeće iskaze:
a) $(p \vee q) \vee q$; b) $(p \vee q) \vee r$; c) $p \wedge (q \wedge r)$;
d) $p \vee (q \wedge r)$; e) $p \wedge (q \vee r)$; f) $(p \wedge q) \vee r$.

19. Odrediti istinitosne vrednosti iskaza:
a) $(p \vee \neg q) \Rightarrow r$; b) $(p \vee \neg q) \Rightarrow (\neg q \vee \neg r)$;
c) $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \neg r)$; d) $(p \Leftrightarrow r) \Leftrightarrow q$;
e) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p)$; f) $(\neg p \Leftrightarrow \neg(\neg p)) \vee (p \Rightarrow \neg p)$;
g) $(p \vee \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$; h) $((\neg p \wedge q) \Rightarrow r) \Leftrightarrow (p \vee r)$;
i) $(p \wedge \neg r) \Leftrightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

20. Dokazati da su istiniti iskazi za sve vrednosti p i q koje pripadaju skupu $\{\top, \bot\}$: a) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (Ovaj iskaz može se uzeti za definiciju implikacije.); b) $((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \Leftrightarrow ((p \Leftrightarrow q)$. (Ovaj iskaz se može uzeti za definiciju ekvivalencije.) Svaka iskazna formula tačna za sve istinitosne vrednosti iskazanih slova koja figurišu u njoj naziva se tautologija.

21. Dokazati da su sledeće iskazne formule tautologije:
a) $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$ i $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
(zakon asocijacije za $\vee$ i $\wedge$);
b) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ i $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$.
(De Morganovi obrasci);
c) $p \Rightarrow p$ (zakon refleksivnosti za implikaciju);
d) $\neg\neg p \Rightarrow p$ (zakon dvojne negacije);
e) $(p \vee p) \Leftrightarrow p$ (zakon idenpotencije disjunkcije);

f) $(p \wedge p) \Leftrightarrow p$ (zakon idenpotencije konjunkcije);
g) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ (zakon distributivnosti $\wedge$ prema $\wedge$);
h) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ (zakon distributivnosti $\vee$ prema $\wedge$);
k) $((p \Rightarrow q) \Rightarrow (q \Rightarrow r)) \Rightarrow p \Rightarrow r$ (zakon tranzitivnosti implikacije);
l) $p \vee (p \wedge q) \Leftrightarrow p$ (zakon apsorpcije – gutanja – $\vee$ prema $\wedge$);
h) $((p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$.

1.2. Osnovne skupovne operacije

1°. **Skup** je osnovni pojam u matematici. Usvaja se bez definicije u logičkom smislu te reči. Često se umesto skup kaže: množina, mnoštvo, kolekcija.

2°. **Relacija članstva.** Neka je S dati skup, a p jedan objekat iz kolekcije S, tj. p je član skupa S piše se simbolički $p \in S$. Negacijom, relacija $p \in S$ postaje $p \notin S$, što znači p nije element S. Znak $\in$ potiče od italijanskog matematičara G. Peano (1850–1932), te se relacija članstva često naziva Peanova relacija.

3°. **Podskup skupa** (Relacija "biti deo od "). Ako su A i B dva skupa, pa je svaki element skupa A istovremeno i element skupa B, onda se kaže da je A deo od B ili podskup od B ili "parče" od B i piše se $A \subseteq B$ ili $B \supseteq A$. Simbilički
$A \subseteq B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \Rightarrow x \in B\}$.
Ova relacija se često naziva Kantorova relacija po velikom nemačkom matematičaru G. Cantoru (1845–1918).

4°. **Presek skupova.** Presek (zajednički deo) datih skupova je skup sastavljen od onih i samo onih elemenata koji pripadaju svim datim skupovima. Simbolički za dva skupa:
$A \cap B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \wedge x \in B\}$.

5°. **Unija skupova.** Pod unijom (združivanjem, spojem ili zbirom) skupova podrazumevamo skup koji je sastavljen od onih i samo onih elemenata koji pripadaju bar jednom od zadanih skupova. Simbolički za dva skupa:
$A \cup B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \vee x \in B\}$.

6°. **Razlika dva skupa.** Razlika dva skupa A i B u oznaci $A \setminus B$ je skup, čiji su elementi, samo oni elementi skupa A, koji ne pripadaju skupu B. Ova

definicija simbolički:

$$A \setminus B \overset{def}{\Leftrightarrow} C = \{x | x \in A \wedge x \notin B\} \quad C \subseteq A.$$

7°. **Simetrična razlika.** Neka su A i B dva neprazna skupa, a $A \setminus B$ i $B \setminus A$ njihove razlike. Unija skupova $A \setminus B$ i $B \setminus A$ naziva se simetrična razlika. Simbolički:

$$A \Delta B \overset{def}{\Leftrightarrow} (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

8°. **Komplement skupa.** Neka je A bilo koji podskup skupa E. Razlika skupa E i ma kog njegovog podskupa A naziva se komplement skupa A i označava se sa A', kraće

$$A' \overset{def}{\Leftrightarrow} \{x | x \in E \setminus A\}.$$

Tvrđenje da $x \in A'$ znači da $x \notin A$.

9°. **Partitivni skup.** Ako je A proizvoljan neprazan skup a $P(A)$ skup svih njegovih podskupova, onda se $P(A)$ naziva partitivni skup skupa A. Simbolički:

$$P(A) \overset{def}{\Leftrightarrow} \{X | X \subseteq A\}.$$

Podskupovi skupa A su i $\varnothing$ i skup A.

10°. **Jednakost skupova.** Ako je $A \subseteq B$ i $B \subseteq A$, onda se kaže da su skupovi A i B jednaki (identični, poklapaju se). Simbolički:

$$A = B \overset{def}{\Leftrightarrow} A \subseteq B \wedge B \subseteq A.$$

11°. **Uređene dvojke.** Neka su A i B dva neprazna skupa $a \in A$ i $b \in B$ dati elementi. Kažemo da je (a,b) uređena dvojka (uređen par), ako je element "a" proglašen prvim, a element "b" drugim u tom paru. U uređenom paru (a,b) element a nazivamo prva komponenta, a b druga komponenta. Dva uredjena para su jednaka ako je tačna ekvivalencija:
$(x,y) = (a,b) \Leftrightarrow x = a \wedge y = b$.

12°. **Dekartov proizvod (Kartezija).** Dekartov proizvod nepraznih skupova A i B u oznaci $A \times B$ je skup uređenih parova (x,y) pri čemu je $x \in A$ i $y \in B$. Kraće:

$$A \times B \overset{def}{\Leftrightarrow} \{(x,y) | x \in A \wedge y \in B\}.$$

Dekartov proizvod nepraznog skupa A sa samim sobom naziva se kvadrat skupa A u oznaci $A^2 = A \times A$.
R. Dekart (1596–1650) veliki francuski matematičar i filozof, osnivač analitičke geometrije.

22. Dati su skup $S = \{0,1,2,3\}$ i relacija $x \in S$; odrediti x.

23. Dat je skup $S = \{(A,B), \perp, (1,5), (m,l,V,W)\}$; odredi card S.

24. Ako je Q skup velikih slova latinice, a R skup velikih slova ćirilice (štampanih), odrediti presek $Q \cap R$.

25. Dat je skup $P = \{0,1,2,\ldots,9\}$. a) Odrediti skupove A i B tako da su njihovi elementi ujedno i elementi skupa P i da je $A = \{x | x \geq 3\}$, a $B = \{x | x \leq 8\}$; b) odrediti skupove: $A \cap B$ i $B \setminus A$.

26. Dati su skupovi $A = \{x | x$ je ceo broj $\}$ i $B = \{x | x > 0\}$. Odrediti $A \cap B$.

27. Odrediti koja su od navedenih tvrđenja tačna a koja netačna:
a) $\varnothing = \{\varnothing\}$; b) $\varnothing \in \varnothing$; c) $0 \in \varnothing$; d) $0 = \varnothing$.

28. Dati su skupovi $A = \{x | x$ se sadrži u $12\}$, $B = \{x | x$ se sadrži u $20\}$, $C = \{x | x$ se sadrži u $32\}$. Odrediti skupove: a) $A \setminus (B \cup C)$;
b) $A \cup (B \cap C)$; c) $C \cup (A \cap B)$; d) $(A \cap B) \setminus C$; e) $A \setminus (B \setminus C)$.

29. Dat je skup $P = \{x | x = 2m + 3 \wedge x = 5m - 3\}$. a) Odrediti realan parametar m tako da skup P ne bude prazan, pa za tako navedenu vrednost parametra m odrediti elemente skupa P; b) za koje će vrednosti parametra m skup P biti prazan?

30. Dati su skupovi: $A = \{a,b,c,d\}$; $B = \{a,b,4\}$; $C = \{2,4,c\}$; $D = \{a,b,3\}$; $E = \{1,b\}$. Odrediti a, b, c i d znajući da je: $B \subset A$, $C \subset A, D \subset A, E \subset B$.

31. Dat je skup $S = \{0,1,2,\ldots,9\}$. Odrediti skupove

$$A = \{x | x \in S \wedge \frac{2x}{12-x} \in S\} \text{ i } B = \{y | y \in S \wedge \left(\frac{y^2}{2} - y\right) \in S\},$$ zatim

odrediti skupove: $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$ i $P(A \setminus B)$.

32. Dat je skup $S = \{0,1,2,\ldots,12\}$. Odrediti skupove

$$A = \{x | x \in S \wedge \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{3}\right) \in S\} \text{ i } B = \{y | y \in S \wedge \left(y + \frac{y}{2}\right) \in S\},$$

zatim odrediti i skupove: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ i $P(A \setminus B)$.

33. Ako je $P \cup Q = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$, $P \cap Q = \{c,f,h\}$,
$P \cup \{c,d,f\} = \{a,c,d,f,g,h\}$, $Q \cup \{a,f,h\} = \{a,b,c,d,e,f,h\}$,
odrediti skupove P i Q.

34. Ako je $A \cup B = \{1,2,3,\ldots,8\}$, $A \cap B = \{3,6,8\}$,
$A \cup \{1,6,8\} = \{1,2,3,\ldots,8\}$, $B \cup \{3,4,6\} = \{1,3,4,6,7,8\}$,
odrediti skupove A i B.

35. Dati su skupovi $A=\{2,5,4\}$, $B=\{1,2,4,5\}$. Odrediti koje od relacija su tačne: $A\subset B$, $A=B$, $A\supset B$, $A\neq B$, $A\in B$, $B\in A$.

36. Dati su skupovi $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{a,b,c,e\}$, $C=\{b,c,d,e,f\}$. Dokazati tačnost tvrđenja

a) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

b) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$;

c) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

37. Dati su skupovi $A=\{1,3,4,6,7,8\}$, $B=\{1,2,3,5,8,9\}$. Odrediti $A\Delta B$.

38. Odrediti elemente skupova A,B,C, ako je $A\cup B\cup C=\{1,2,3,4,5,6\}$, $(A\cap C)\cup(B\cap C)=\emptyset$, $A\setminus B=\{1,3,5\}$, $C\setminus B=\{2,4\}$ i $(A\cap B)\setminus C=\{6\}$.

39. Dat je skup $S=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i\}$ i njegovi podskupovi: $A=\{a,c,e,f,h\}$, $B=\{a,b,c,f,i\}$, $C=\{b,d,e,h\}$.

1°. Odrediti skupove:

a) $A\cup B$; b) $A\cap B$; c) $B\cup C$; d) $B\cap C$; e) $A\cup C$;

f) $A\cap C$; g) $A\cup(B\cup C)$; h) $A\cup(B\cap C)$; i) $A\cap(B\cap C)$.

2°. Odrediti i skupove: a) $\overline{A}$; b) $\overline{B}$; c) $\overline{C}$; d) $C_S(A\cup B)$;

e) $C_S(A\cup C)$; f) $C_S(B\cup C)$; g) $C_S(A\cap B)$; h) $C_S(A\cap C)$;

i) $C_S(A\cup(B\cup C))$; j) $C_S(A\cap(B\cap C))$; k) $C_S(A\cup(B\cap C))$.

3°. Pokazati da je

$(A\cap B\cap C)\cup(A\cap B\cap\overline{C})\cup(A\cap\overline{B}\cap C)\cup(A\cap\overline{B}\cap\overline{C})=A$.

40. Neka su A i B dva podskupa skupa S. Tada je:

(1) $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

(2) $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

41. Dati su skupovi $A=\{x|x$ je delilac broja $12\}$;

$B=\{x|x$ je delilac broja $18\}$; $C=\{x|x$ je delilac broja $30\}$.

Izračunati: a) $A\setminus(B\cup C)$ i pokazati da važi

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\setminus C=(A\setminus C)\setminus B=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

b) $(A\cap B)\setminus C=(A\setminus C)\cap(B\setminus C)$;

c) $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$.

Relacije b) i c) objasniti Ojler-Venovim dijagramom.

42. Dati su skupovi $A=\{1,2,3,6\}$, $B=\{3,6\}$, $C=\{1,3,5\}$. Proveriti tačnost jednakosti $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$.

43. Koristeći definicije operacija sa skupovima dokazati skupovnu jednakost $A\setminus(B\setminus C)=(A\setminus B)\cup(A\cap C)$. ($A,B,C$ su neprazni skupovi).

44. Odrediti partitivni skup skupa $S=\{\emptyset,\{\emptyset\}\}$.

45. Dati su skupovi: $A=\{x|1\leq x\leq 5\}$, $B=\{x|1<x<8\}$, $C=\{1,3,4,8\}$. Dokazati da je:

a) $A\Delta(B\Delta C)=(A\Delta B)\Delta C$;

b) Dokazati da jednakost pod a) važi za ma koje neprazne skupove.

46. Dati su skupovi:

$A=\{d,i,o,p,r,s\}$; $B=\{e,i,l,m,o,p,s,z\}$ i $C=\{e,i,j,o,p,s,t,v\}$.

Proveriti:

$card(A\cup B\cup C)=cardA+cardB+cardC-card(A\cap B)-$

$-card(A\cap B)-card(B\cap C)+card(A\cap B\cap C)$

($card\,A$ znači kardinalan broj skupa A).

47. U jednoj školi 330 učenika uči francuski, 470 učenika uči engleski, 420 učenika uči ruski, 140 učenika uči francuski i engleski, 180 francuski i ruski, 250 engleski i ruski, a 120 učenika engleski, francuski i ruski. Koliko je učenika u toj školi?

48. Dat je skup $S=\{1,2,5,8,9,11,15\}$ i njegovi podskupovi $A=\{2,8,9,15\}$, $B=\{1,2,11,15\}$, i $C=\{8,11,15\}$. Odrediti skup $M=((A\cap B)\cap C)\cup((S\setminus B)\cup(S\setminus(B\cup C)))$.

49. Ako su A i B neprazni skupovi pomoću tablice pripadnosti uveriti se da su tačna tvrđenja

a) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)=(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$;

b) $(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})=\overline{B}$.

50. Data su tri podskupa abecede:

$A=\{a,b,c,d,e\}$; $B=\{b,d,f,g,m,n\}$ i $C=\{a,c,d,f,r,s\}$.

a) Dokazati da važi antidistributivnost

1° $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$;

2° $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$;

b) Dokaz izvedi i pomoću Ojler-Venovog dijagrama.

51. Neka su A i B dva neprazna skupa. Dokazati da za njih važi zakon apsorpcije $A\cup(A\cup B)=A$ i $A\cap(A\cap B)=A$.

52.* Dat je skup $S=\{1,2,3,4,5,6\}$ i njegovi podskupovi:

$A=\{2,4,5\}$, $B=\{1,4,5,6\}$, $D=\{2,4,5,6\}$.

Odrediti komplementarne skupove

$A=C_S(A)$, $B=C_S(B)$, $D=C_S(D)$.

Zatim izračunati:

$x=(A\cup B)\cup(\overline{A}\cup B)\cup(A\cup\overline{D})$,

$y=(\overline{A}\cap\overline{B})\cup(A\cap\overline{B})\cup(\overline{A}\cap D)$,

$z=(A\cup D)\cap(\overline{A}\cup D)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$.

53. Odrediti elemente skupa $A = \{a,b,c,d\}$ ako je
$\{a,b,7\} \cap \{b,c\} = \{b,-5\}$; $\{a,b,13\} \cap \{b,c\} = \{b,-5\}$;
$\{a,b,13\} \subset A$; $\{b,c,d\} \subset A$; $\{b,c,d\} \cup \{a,3\} = \{a,c,d,3\}$.

54. Neka su A,B,C podskupovi skupa $S = \{a,b,c,d,e\}$ takvi da je:
$A \cap B = \{b,d\}$; $A \cup B = \{b,c,d,e\}$; $A \cap C = \{b,c\}$;
$A \cup C = \{a,b,c,d\}$.
a) Odrediti A,B i C;
b) Odrediti simetrične diferencije $A \Delta B$, $B \Delta C$ i $C \Delta A$.

55. Dati su neprazni skupovi A,B,C. Pomoću Ojler-Venovih dijagrama dokazati da je $A \setminus (B \setminus C) \neq (A \setminus B) \setminus C$ tj. da ovaj zakon nije asocijativan.

56. Dati su skupovi: $A = \{x | x$ se sadrži u $12\}$, $B = \{x | x$ se sadrži u $20\}$, $C = \{x | x$ se sadrži u $32\}$. Odrediti skupove:
a) $A \setminus (B \cup C)$; b) $A \cup B \cap C$; c) $C \cup (A \cap B)$;
d) $(B \setminus C) \cap A$; e) $(A \cap B) \setminus C$; f) $A \setminus (B \setminus C)$.

57. Dat je skup uređenih parova: $S = \{(a,b),(c,a),(c,b),(d,b),(c,e)\}$. Odrediti skup T simetričnih uređenih parova skupa S.

58. Dati su skupovi $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$. Neki učenik je napisao $A \times B = \{(a,\alpha),(a,\beta),(\gamma,c),(b,\alpha),(\beta,b),(b,\gamma),(c,\alpha),(c,\beta),(c,\gamma)\}$. Da li je ovo ispravno?

59. Dati su skupovi: $A = \{a,b,c\}$, $B = \{\alpha,\beta,\gamma\}$, $C = \{1,2\}$. Odrediti skupove:
a) $A \times B$; b) $(A \times B) \times C$; c) $A \times (B \times C)$.

60. Dati su skupovi: $S = \{a,b,c,d,f\}$, $A = \{a,c,d,f\}$, $B = \{c,d,e,f\}$.
a) Odrediti sve podskupove skupa B;
b) Napisati sve elemente skupa $P(A)$;
c) Odrediti $P(A) \cap P(B)$;
d) Odrediti $P(C_S A) \cap P(C_S B)$.

61. Dat je skup $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Odrediti skupove X i Y tako da bude:
$X \subset E \wedge \{1,2,3\} \cap X = \{2,3\}$;
$Y \subset E \wedge Y \setminus \{2,4\} = \{3,5\} \wedge Y \cap \{1,2,4\} = \{2\}$, pa odrediti $X \setminus Y$.

62. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 6, 7\}$. Odrediti skup X tako da bude $X \setminus B = \emptyset$ i $A \setminus X = \{1, 2, 3\}$.

63. Odrediti skupove A i B, čiji su elementi celi brojevi i zadovoljavaju relacije: a) $A \cup B = \{x | 1 \leq x < 7\}$; $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 4\}$, $6 \notin A$ i $5 \notin B \setminus A$; b) $A \cup B = \{x | 1 \leq x \leq 5\}$, $A \cap B = \{x | 2 < x < 6\}$, $1 \notin A \setminus B$ i $2 \notin B \setminus A$.

64. Dati su skupovi $P = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i $Q = \{1,2,3,7\}$. Odrediti skupove:
a) $P \Delta Q$; b) $Q \Delta P$; c) $(P \Delta Q) \Delta Q$; d) $(P \Delta Q) \Delta (P \cup Q)$.

65. Dati su univerzalan skup $E = \{a,b,c,d,e,f,g\}$ i njegovi podskupovi $A = \{b,d,e,g\}$ i $B = \{a,c,f\}$. Odrediti njihove komplemente A' i B'.

66. Neka je N (skup prirodnih brojeva) univerzalan skup, a skup $P = \{x | x = 2k, k \in N\}$ jedan njegov podskup. Odrediti komplement P' skupa P u odnosu na skup N.

67. Dati su skupovi: $A = \{n | n \in N, n \leq 10\}$,
$B = \{n | n \in N, 2 \leq n \leq 7\}$ i $C = \{2,3,6\}$. Odrediti skupove X i Y tako da važe relacije:
a) $X \subset A$ i $C \cup X = B$; b) $Y \subset A$ i $B \cap Y = C$.

68. Ako su elementi skupa A prosti činioci broja 546, a elementi skupa B prosti činioci broja 330, ispitati istinitost relacija:
a) $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A$; b) $(A \Delta B) \cap (A \cap B) = \emptyset$;
c) $(A \Delta B) \setminus (A \setminus B) \cup (A \cap B) = B$.

69. U jednom odeljenju od 30 učenika odgovaralo je: 19 učenika matematiku, 17 učenika fiziku, 11 učenika istoriju, 12 učenika matematiku i fiziku, 7 učenika istoriju i matematiku, 5 učenika fiziku i istoriju i 2 učenika sva tri predmeta; a) koliko učenika je odgovaralo istoriju, ali ne i matematiku; b) koliko učenika je odgovaralo dva predmeta od tri moguća; c) koliko učenika je odgovaralo samo jedan predmet?

70. Ako su A, B i C neprazni skupovi, dokazati da važi:
a) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;
b) $A \cap (A \cup B) = A$;
c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
(distributivni zakon $\cup$ prema $\cap$);
d) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$
(distributivni zakon $\cap$ prema $\cup$);
e) $(A \cup B) \cup C = (A \cup (B \cup C))$ (asocijativni zakon unije);
f) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ (De Morganov obrazac);
g) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$ (De Morganov obrazac);
h) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$;
i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$;
j) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$;
k) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

71. Na jednom kursu stranih jezika svaki slušalac uči bar jedan od tri strana jezika (engleski, francuski i nemački), i to: 18 slušalaca uči francuski, 22 slušaoca uči engleski, 15 slušalaca uči nemački,

6 slušalaca uči engleski i francuski, 11 slušalaca engleski i nemački, 1 slušalac uči sva tri jezika. Koliko ima slušalaca na tom kursu i koliko njih uči samo dva jezika?

72. Odrediti skup S tako da budu tačne (istovremeno) sledeće formule:
$S \cap \{1,3,6,9\} = \{3,6\}$,
$S \cup \{2,3,9,11\} = \{2,3,5,6,9,11\}$,
$S \subset \{3,5,6,7,9,11\}$
$\{6,11\} \subset S$.
Zatim odrediti x tako da bude $S \setminus \{1,2,6,11\} = \{x,3\}$.

73. Dati su skupovi $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{*,\square\}$. Odrediti skup $A \times B$.

74. Dati su skupovi $A = \{0,1,2\}$ i $B = \{a,b,c\}$. Odrediti skupove $A \times B$, $B \times A$ i nacrtati njihove grafove.

75. Dat je skup $A = \{a,b,c\}$. Odrediti skup A^2.

76. Dat je skup $A = \{1,2,3,4,5\}$. Sastaviti sve:
a) uređene dvojke (x,y) elemenata $x, y \in A$ takve da je $x < y$.
b) uređene trojke (x,y,z) elemenata $x, y, z \in A$ takve da je $x < y < z$.

77. Dat je skup
$A \times B = \{(a,1);(a,3);(b,1);(b,2);(c,1);(a,2);(b,3);(c,3);(c,2)\}$.
Odrediti skupove A i B.

78. Dati su skupovi $A = \{a,b,c\}$ i $B = \{b,c,d\}$. Odrediti skupove:
a) $(A \times A) \cap (B \times B)$; b) $(A \times A) \cap (A \times B)$;
c) $(B \times B) \cap (A \times B)$.

79. Dat je skup $S = \{0,1,2,\ldots,12\}$. Odrediti elemente skupova:

$$A = \left\{x \middle| x \in S \wedge \frac{x+2}{3} \in S\right\}, \qquad B = \left\{y \middle| y \in S \wedge \left(\frac{y}{2} + \frac{y}{5}\right) \in S\right\} \text{ i}$$

$$C = \left\{z \middle| z \in S \wedge \left(\frac{z^2}{4} - 25\right) \in S\right\}, \text{ pa odrediti skupove:}$$

$A \cup (B \cap C)$, $B \setminus (A \cap C)$, $P(C \setminus (A \cup B))$ i $B \times A$.

80. Dat je skup $S = \{0,2,4,6,8,10,12\}$. Odrediti elemente skupova:

$$A = \left\{x \middle| x \in S \wedge \left(\frac{2x}{3} - \frac{x}{2}\right) \in S\right\}, \quad B = \left\{y \middle| y \in S \wedge \left(\frac{y^2}{y+4} + 1\right) \in N\right\} \text{ i}$$

$$C = \left\{z \middle| z \in S \wedge \frac{z^2}{4} > z\right\}, \text{ pa odrediti skupove: } (A \cap B) \cup C,$$

$(A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, $P((B \setminus C) \cup A)$ i $A \times C$.

1.3. Relacije i funkcije

Definicija 1. Relacija je bilo koji podskup Dekartovog proizvoda proizvoljnih nepraznih skupova A i B. Ako je $\rho \subset (A \times B)$ i $(x,y) \in \rho$, onda kažemo da je x u relaciji sa y, i zapisujemo $x \rho y$.

Definicija 2. Binarna relacija ρ skupa A je svaki dogovor, pravilo, propis kojim se svakom paru (x,y) elemenata (članova) skupa A dodeljuje $\top$ ili $\bot$.

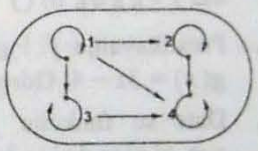
Definicija 3. Neka je zadan neprazan skup A. Preslikavanje $f: A^2 \to A$ naziva se binarna operacija.

Definicija 4. Neka su A i B neprazni skupovi. Funkcija (preslikavanje) skupa A u skup B je svaki podskup f skupa $A \times B$ koji ima ova dva svojstva:

1°. Skup svih prvih komponenata skupa f jednak je skupu A.
2°. $(x_1,y_1) \in f \wedge (x_1,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2$.
Skup A naziva se domen (oblast definisanosti funkcije), a skup B kodomen ili antidomen.

81. Dat je skup $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ i u njemu je definisana relacija $\rho: \forall (x,y) \in A: x \rho y \Leftrightarrow y = x+1$.
Odrediti elemente relacije ρ i prikazati je grafički u skupu A^2.

82. Dat je šematski prikaz (graf) jedne relacije ρ u skupu $A = \{1,2,3,4\}$ na slici 1. Odrediti sve članove relacije ρ, pa je napisati kao skup.



Sl. 1

83. U skupu $M = \{0,1,2,\ldots,10\}$ odrediti relaciju ρ definisanu na sledeći način:
$\forall (x,y) \in M: x \rho y \Leftrightarrow x + y = 10$.

84. U skupu $A = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ definisane su sledeće relacije:
a) $x \rho y \overset{def}{\Leftrightarrow} x < y$; b) $x \rho y \overset{def}{\Leftrightarrow} x = 2y$;
c) $x \rho y \overset{def}{\Leftrightarrow} x^2 = y^2$; d) $x \rho y \overset{def}{\Leftrightarrow} x + y = 2$.
Odrediti odgovarajuće skupove, nacrtati grafove i ispitati svojstva tih relacija.

85. U skupu $A = \{-1,0,1\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:
$\forall (x,y) \in A: x \rho y \Leftrightarrow x^3 = y^3$. Da li je relacija refleksivna?

86. U skupu $S=\{x|x\in N\wedge x\le 12\}$ definisana je relacija ρ na sledeći način:
$\forall(x,y)\in S: x\rho y\Leftrightarrow 3|(x-y)$*
Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije i odgovarajući količnički skup.

87. U skupu celih brojeva Z definisana je relacija ρ na sledeći način: $\forall(x,y)\in Z: x\ \rho\ y\Leftrightarrow x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 3)$*. Pokazati da je ρ relacija ekvivalencije, zatim odrediti odgovarajuće klase ekvivalencije i količnički skup Z/ρ.

88. U skupu Z celih brojeva definisana je relacija ρ, tako da je: $\forall(x,y)\in Z: x\ \rho\ y\Leftrightarrow x\equiv y\ (\mathrm{mod}\ 5)$. Dokazati da je ova relacija u stvari relacija ekvivalencije. Odrediti klase ekvivalencije i količnički skup Z/ρ.

89. U skupu $S=\{1,2,3,4,5,7,9,11\}$, relacija ρ "ima isti ostatak kod deljenja sa 4 " je relacija ekvivalencije. Dokazati.

90. U skupu N, relacija ρ "ima isti ostatak deljenja sa 7 " je relacija ekvivalencije. Dokazati, zatim naći količnički skup.

91. U skupu R data su preslikavanja:
$f: x\to 3x+5$ i $g: x\to 4x+6$.
Izračunati:
a) $(f\circ g)(6)$; b) $(f\circ g)(m)$; c) $(g\circ f)(6)$ d) $(g\circ f)(m)$.

92. Preslikavanja f i g, $R\to R$ definisana su sa $f(x)=x^2-4x+5$ i $g(x)=3x-4$. Odrediti: a) f^2; b) g^2; c) $f\circ g$; d) $g\circ f$.

93. Date su funkcije f i g definisane u $R: x\to f(x)=2x^2-1$ i $x\to g(x)=4x^3-3x$. Dokazati da za date funkcije važi, $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.

94. U skupu $S=\{a,b,c,d,e,f\}$, je jedan vojnik a, dva poručnika b,c i tri kapetana d,e,f. U skupu S uočena je relacija ρ "mora prvi pozdraviti". Kakva je to relacija?

95. Data je funkcija $x\to f(x)=3x-2$. Dokazati da je preslikavanje dato ovom formulom jedan–jedan i na.

96. Dokazati da su bijektivna (1−1 i na) preslikavanja:

a) $f(x)=4x-1$; b) $f(x)=5x-6$; c) $f(x)=\frac{3}{4}x-\frac{2}{3}$.

* $x\,|\,y$ znači x se sadrži u y ili x je činilac za y. Osim ove oznake, često pišemo $x\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ y)$ čitamo x kongruentno 0 po modulu y, znači y je deljivo sa x. Ova relacija se naziva relacija kongruencije.

97. Dati su skupovi $A=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta\}$ i $B=\{a,b,c,d,e,m\}$ i preslikavanje
$f: A\to B, f=\begin{pmatrix}\alpha & \beta & \gamma & \delta\\ b & d & e & m\end{pmatrix}$.
Dokazati da je f preslikavanje 1–1.

98. Dati su skupovi $A=\{a,b,c\}$ i $B=\{1,2,3\}$ i preslikavanje $f=\{(a,2);(b,2);(c,2)\}$. Dokazati da je preslikavanje f konstantno.

99. Data je funkcija $f=\begin{pmatrix}a & b & c & d & e\\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5\end{pmatrix}$.
Odrediti inverznu funkciju f^{-1} za datu.

100. Dato je preslikavanje $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4\end{pmatrix}$.
Odrediti: a) $f\circ f=f^2$; b) $f\circ f\circ f=f^3$; c) $f\circ f\circ f\circ f=f^4$.

101. Date su funkcije $f=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 1 & 4 & 3\end{pmatrix}$ i $g=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$.
Odrediti: a) $f\circ g$; b) $g\circ f$; c) $f^2\circ g$.

102. Date su funkcije: $x\to f(x)=3x-5$ i $x\to g(x)=5x-3$.
Odrediti: a) $f^{-1}(x)$ i $g^{-1}(x)$; b) $f\circ g$ i $g\circ f$;
c) $f^{-1}\circ g^{-1}$ i $f^{-1}\circ g$.

103. Ako je: a) $f(x+1)=5x-3$; b) $f(2x-3)=3x+1$;
c) $f(3-2x)=2x+5$; d) $f(1-x)=3-2x$, odrediti $f(x)$.

104. Date su funkcionalne jednačine $f(x+1)=3x+2$ i $g(2x+3)=2-3x$. Odrediti: a) $f(x)$ i $g(x)$; b) $f\circ g$;
c) $f^{-1}\circ g$.

105. Odrediti funkciju $f(x)$ koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu:

a) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$; b) $(x-1)f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x-1}$;

c) $f(x)+x\cdot f\left(\frac{x}{2x-1}\right)=2$.

106.* Rešiti funkcionalne jednačine:

a) $f\left(\frac{x-3}{2x+4}\right)=\frac{x+1}{3x-1}$; b) $f\left(\frac{2x+2}{x+3}\right)=\frac{4x+1}{2x-3}$;

c) $f\left(\frac{x+2}{3x+5}\right)=\frac{x+4}{2x-1}$; d) $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=\frac{x-2}{x+2}$.

107.* Odrediti funkcije $f(x)$ i $g(x)$, koje zadovoljavaju sisteme:

a) $f(2x+1)+g(x-1)=x \wedge f(2x+1)-2g(x-1)=2x^2$;

b) $f(2x+1)+2g(2x+1)=2x \wedge f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g\left(\frac{x}{x-1}\right)=x$;

c) $f(x+1)+xg(x+1)=2x \wedge f\left(\frac{x+1}{x-1}\right)+g\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=x-1$.

108.* Ako je: $f\left(\frac{1}{x}\right)-2g\left(\frac{x-1}{x}\right)=x-2 \wedge f\left(\frac{1}{x}\right)+g\left(\frac{x-1}{x}\right)=x+1$,

$(x\neq 0)$ tada je $f\circ g=g\circ f=1$. Dokazati.

1.4. Elementi kombinatorike

Primedba 1. Neka je $E=\{e_1,e_2,e_3,...,e_n\}$ dati skup, onda postoji više načina da se od njegovih elemenata, ređajući ih na razne načine, formiraju neki novi skupovi. Pri tome je važno utvrditi koliko će članova imati ti novi skupovi i kako će broj članova tog novog skupa zavisiti od broja elemenata početnog skupa.
Oblast matematike koja se bavi problemima ove vrste naziva se **kombinatorika.**

Primedba 2. Zadaci iz kombinatorike koji se rešavaju pomoću formula za permutacije $P(n)=n!$, za varijacije $V_k^n=n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$ i za kombinacije $C_k^n=\binom{n}{k}$, nisu u nastavnom planu i programu, već su namenjeni boljim učenicima za razna takmičenja.

109. Napisati sve permutacije od: a) cifara 1, 2, 3, 4; b) slova a,b,c,d; c) reči OVAJ.

110. Napisati sve permutacije od cifara 3, 4, 5, 6, 7, koje imaju 6 na prvom mestu, a 4 na drugom mestu.

111. Koliko ima petocifrenih brojeva koji se mogu formirati od cifara 1, 3, 5, 7, 9?

112. Koliko permutacija od cifara 1, 2, 3, ..., 8 počinje: a) sa 5; b) sa 123; c) sa 8 642?

113. U koliko permutacija elemenata 1, 2, 3, ..., 8 stoje elementi 2, 4, 5, 6 jedan pored drugog, i to: a) u datom poretku; b) u proizvoljnom poretku?

114. Napiši sve četvorocifrene brojeve ciji je zbir cifara 10 a cifra desetica 5.

115. Koliko se cifara upotrebi za numerisanje od prve do 567 stranice neke knjige (svaku cifru računati onoliko puta koliko se puta pojavljuje)?

116. Date su tri različite prave i na svakoj od njih po 5 različitih tačaka. Koliko ima najvišee trouglova čija su temena date tačke.

117. Dat je skup tačaka $S=\{A,B,C,D,E,F\}$ takav da tačke A,B,C,D pripadaju pravoj a, a tačke E i F njoj paralelnoj pravoj b. Odrediti sve prave takve da svaka sadrži tačno dve tačke iz datog skupa.

118. Na Milanovom rođendanu svi su se rukovali sa Milanom i među sobom. Bilo je ukupno 136 rukovanja. Koliko je Milan imao gostiju na svom rađendanu?

119. Kvadrat stranice 6 cm podeljen je na kvadratne centimetre. Koliko se duži, a koliko kvadata može uočiti na tako dobijenoj slici?

120. Pomoću vage treba izmeriti sve celobrojne težine od 1 kg do 13 kg. Koliko nam je najmanje tegova za to potrebno i kolika je težina tih tegova?

121. U ravni su date dve klase paralelnih pravih: $p_1,p_2,p_3,...p_{10}$ i $q_1,q_2,q_3,...q_6$. Prave klase p presecaju prave klase q. Koliko je različitih paralelograma određeno ovim pravama (različiti paralelogrami su oni koji imaju bar dva temena različita).

122. Na koliko načina 7 učenika može sesti na:
a) 5 različitih stolica;
b) 9 različitih stolica?

123. Koliko se šestocifrenih brojeva može sastaviti od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5 uz uslov da se svaka cifra pojavljuje samo jednom i da su parne cifre jedna uz drugu? (0 je parna cifra).

124. Koliko ima četvorocifrenih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara 0,1,2,3,4,5,8 takvih da se:
a) cifre mogu ponavljati;
b) cifre ne mogu ponavljati;
c) cifre mogu ponavljati, a broj je deljiv sa 5?

125. Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva napisanih pomoću cifara 0,1,2,3,4,5,6 takvih da se:
a) cifre mogu ponavljati;
b) cifre ne mogu ponavljati;
c) cifre mogu ponavljati, a broj nije deljiv sa 5?

126. U neprovidnoj vrećici se nalaze 10 belih, 20 crvenih i 30 plavih kuglica. Koliko najmanje kuglica treba izvući iz vrećice da bismo sigurno imali:
a) tri crvene kuglice;
b) tri kuglice različite boje;
c) tri kuglice iste boje.

127. Na koliko načina je moguće sastaviti stražu, koja se sastoji od 5 vojnika i jednog oficira ako ima 40 vojnika i 3 oficira?

128. Koliko različitih četvorocifrenih brojeva je moguće napisati koristeći cifre 1,3,5,7,9,0 samo jedanputa?

129.* Za koje vrednosti n i k je tačna konjunkcija

$$V_{k-1}^{n+2}:V_{k-2}^{n+2}=8:1\wedge C_{k-1}^{n+2}:C_{k-2}^{n+2}=4:3\ ?$$

130.* U koliko tačaka se seče 18 pravih, od kojih 5 su paralelne, 6 se seku u tački A a 4 u tački B?

131.* Dato je u ravni 10 crvenih i 8 plavih tačaka, tako da bilo koje tri nisu kolinearne. Koliko ima trouglova sa temenima u datim tačkama kod kojih sva temena nisu iste boje?

132.* Na polici se nalaze 12 različitih knjiga, od kojih su 5 iz matematike, 4 iz fizike i 3 iz hemije. Na koliko različitih načina se mogu rasporediti knjige na polici, ako se zna da knjige iz iste oblasti moraju biti uvek jedna pored druge?

133. Elementi skupa S su tačke takve da su svake tri nekolinearne, a svake četiri nekomplanarne. Ako je elementima skupa S određeno dva puta više ravni nego pravih, koliko pravih i koliko ravni određuju elementi skupa S?

134. Skratiti razlomke: a) $\frac{20!}{18!}$; b) $\frac{102!}{100!}$; c) $\frac{n!}{(n-1)!}$; d) $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}$.

135. Koliko elemenata sadrži skup ako broj svih permutacija od njegovih elemenata: a) nije veći od 1 000; b) nije manji od 500; c) jednak je 120?

136. Dat je skup $S=\{0,1,2,3,4,5\}$. a) Koliko se različitih šestocifrenih prirodnih brojeva može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre u njima ne ponavljaju; b) koliko ima parnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

137. Obrazovati sve varijacije druge i treće klase, bez ponavljanja, od elemenata 1, 2, 3, 4 i izračunati njihov broj.

138. Koliko se signala može načiniti sa 5 različitih zastava, uzimajući ih po jednu, po dve, po tri, po četiri i po pet zajedno?

139. Koliko se brojeva izmedju 3 000 i 5 000 može napisati pomoću cifara 0, 1, 2, ..., 7 ako se ni jedna cifra ne ponavlja u jednom broju?

140. Na koliko načina se od devet kandidata mogu izabrati četiri osobe na četiri različite dužnosti?

141. Odeljenje jednog razreda broji 35 učenika. Oni su međusobno razmenili fotografije. Koliko je ukupno razmenjenih fotografija?

142. Koliko se brojeva može napisati pomoću elemenata skupa M, koji čine prosti činioci broja 2 310, ako traženi brojevi sadrže po dva različita prosta činioca?

143. Rešiti jednačine: a) $V_2^n=20$; b) $V_3^n=120$; c) $2\cdot V_3^n=V_4^n$;
d) $V_5^n=V_4^n$ (V_k^n je broj varijacije od n elemenata k–te klase).

144. Dat je skup $E=\{0,1,2,3,4,5\}$. Koliko se različitih prirodnih brojeva većih od 1 000 može formirati od elemenata skupa E, tako da cifre budu različite?

145. Napisati sve kombinacije treće i četvrte klase bez ponavljanja od elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6 i izračunati njihov broj.

146. Odrediti broj različitih trouglova, koji se mogu dobiti spajanjem svih temena šestougla.

147. Koliko se različitih grupa od po četiri učenika može izabrati od 17 kvalifikovanih, koje će reprezentovati školu na matematičkom takmičenju?

148. Na jednom šahovskom turniru učestvuje dvadeset šahista. Svaki treba da odigra partiju sa svakim. Koliko će biti odigrano partija na turniru?

149. Na šahovskom turniru odigrano je 45 partija. Ako je svaki šahista odigrao partiju sa svakim učesnikom, odrediti broj učesnika.

150. Koliko podskupova ima skup od 6 elemenata?

151. Koliko nastaje trouglova konstrukcijom svih dijagonala konveksnog dvanaestougla ako im se temena poklapaju sa temenima dvanaestougla?

152. Odrediti broj dijagonala: a) konveksnog petougla; b) konveksnog dvanaestougla; c) konveksnog dvadesetougla; d) konveksnog n-tougla.

153. Dokazati tačnost jednakosti:

a) $C_0^6 + C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 = 2^6$;

b) $C_0^5 + C_1^5 + C_2^5 = C_3^5 + C_4^5 + C_5^5$.

154.* U skupu od 12 tačaka postoji tačno 6 četvorki komplanarnih tačaka. Koliko različitih ravni određuju ovih 12 tačaka? (Opštinsko takmičenje iz matematike 1982. god.)

155. U odeljenju ima 16 devojčica i 20 dečaka. Za odeljenjsku zajednicu treba izabrati četiri učenika, od kojih je bar jedna devojčica. Na koliko načina se može načiniti izbor?

156.* Koliko ima petocifrenih prirodnih brojeva čiji je zbir cifara jednak 5? (Opštinsko takmičenje iz matematike 1984. god.)

157. Koliko se različitih prirodnih brojeva manjih od 100 000 može formirati od cifara 0, 1, 2, 3, 4, 5?

158.* Dat je skup $S = \{1,2,3,4,5,6\}$. a) Koliko se različitih šestocifrenih prirodnih brojeva manjih od 600 000 može načiniti od elemenata skupa S, tako da se u njima cifre ne ponavljaju; b) koliko ima neparnih brojeva određenih u zadatku pod a)?

159. Rešiti jednačine: a) $C_2^n = 105$; b) $C_2^n = 15n$; c) $5C_3^n = C_4^n$.

160.* Za koje vrednosti n je istinito tvrđenje:

a) $C_5^n < C_4^n$; b) $C_5^n > C_4^n$; c) $C_{k-1}^{19} < C_k^{19}$?

161.* Za koje vrednosti n i k je tačna konjunkcija:

$(V_k^n : V_{k-1}^n = 10:1) \wedge (C_k^n : C_{k-1}^n = 5:3)$?

162.* Na tiketu sportske prognoze nalazi se 12 susreta. a) Koliko različito popunjenih kolona obezbeđuje 12 tačnih pogodaka; b) koliko kolona treba popuniti ako se "zna" rezultat pet susreta; c) koliko kolona treba popuniti ako se "zna" da sedam susreta neće biti nerešeno?

163. U nekom odboru ima 7 lica (članova). a) Na koliko se načina mogu izabrati predsednik, sekretar i blagajnik tog odbora? b) Na koliko se načina svi članovi tog odbora mogu razmestiti (sesti) na 7 stolica?

164. Dat je skup $S = \{0,1,2,3,4,5\}$. a) Koliko se različitih petocifrenih brojeva, deljivih sa 6, može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre ne ponavljaju? b) Koliko se različitih petocifrenih brojeva deljivih sa 15, može formirati od elemenata skupa S, tako da se cifre u tim brojevima ne ponavljaju?

165. Zbir broja dijagonala i broja stranica konveksnog mnogougla iznosi 153. Odrediti broj različitih trouglova, koji je određen temenima ovog mnogougla.

166. Unutrašnji ugao pravilnog mnogougla veći je od odgovarajućeg spoljašnjeg ugla za toliko, za koliko je veći od sopstvene petine. Odrediti koliko je različitih pravih određeno temenima ovog mnogougla.

167. Između 3 000 i 7 000 nalaze se 1 344 broja u kojima se nijedna cifra ne ponavlja. Odrediti skup A čiji su elementi arapske cifre pomoću kojih se mogu napisati pomenuti brojevi.

168. Dat je skup $S = \{A,B,C,\ldots\}$. Elementi skupa S su temena konveksnog mnogougla, konstrukcijom svih dijagonala mnogougla dobijeno je 455 različitih trouglova. Odrediti card S da ovo važi.

169. Elementi skupa $S = \{A,B,C,\ldots\}$ su tačke od kojih su najviše dve kolinearne a najviše tri komplanarne. Odrediti kardinalan broj skupa S ako je od njegovih elemenata određeno 364 različitih ravni.

II GLAVA

2. UVOD U GEOMETRIJU, VEKTORI

2.1. Tačka, prava, ravan. Odnosi pripadanja i rasporeda

Aksiome pripadanja:

Aksioma 1. Svake dve različite tačke određuju jednu pravu.

Aksioma 2. Svaka prava sadrži bar dve razne tačke. Postoje tri nekolinearne tačke.

Aksioma 3. Svake tri nekolinearne tačke određuju jednu ravan.

Aksioma 4. Svaka ravan sadrži bar tri razne tačke. Postoje četiri nekomplanarne tačke.

Aksioma 5. Svaka prava, koja sa nekom ravni ima dve zajedničke različite tačke, pripada toj ravni.

170. Neka su A, B, C, D četiri tačke jedne ravni od kojih ni jedna trojka nije kolinearna.
a) Koliko je pravih određeno datim tačkama?
b) Koliko je trouglova određeno ovim tačkama?

171. Svaka prava koja ne pripada ravni α ima sa tom ravni najviše jednu zajedničku tačku. Dokazati.

172. Ako tačka A ne pripada pravoj p, postoji tačno jedna ravan koja sadrži tačku A i pravu p. Dokazati.

173. Ako su p i q dve prave koje se seku, postoji tačno jedna ravan koja ih sadrži. Dokazati.

174. Koliko ravni je određeno sa pet tačaka od kojih ma koje četiri nisu komplanarne?

175. Prave a i b mimoilazne su sa pravom c a međusobno su paralelne. Ako su tačke A, B i C takve da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$, koliko je najviše ravni određeno tačkama A, B, C i pravama a, b i c ?

176. Prave a i b seku se u tački P. Prave a i c su paralelne, a prave b i c mimoilazne. Ako su tačke A, B i C takve da je $A \in a$ i $A \neq P$, $B \in b$ i $B \neq P$, a $C \in c$, koliko je ravni određeno tačkama A, B, C i pravama a, b, c?

177. Prave a i b pripadaju ravni α i seku se. Kakav položaj prema ravni α može imati prava c, koja seče prave a i b?

178. Dato je 6 tačaka u prostoru. Koliko je ovim tačkama najviše određeno: a) duži; b) trouglova?

179. Date su četiri prave koje se seku u istoj tački, od kojih ma koje tri nisu komplanarne. Koliko je ravni određeno pomoću datih pravih?

180. Koliko je ravni određeno trima nekomplanarnim pravama koje imaju jednu zajedničku tačku?

181. Koliko je najviše ravni određeno jednom pravom i trima tačkama koje ne pripadaju datoj pravoj?

182. Dato je n tačaka u prostoru od kojih ma koje četiri nisu komplanarne. Koliko je ravni određeno datim tačkama?

183. Koji je najmanji broj tačaka kojima je određeno 36 pravih?

184. Date su mimoilazne prave a i b, tačke A_1, A_2, A_3 na pravoj a, tačke B_1, B_2, B_3, B_4 na pravoj b i tačka C van ovih pravih. Koliko najviše različitih ravni određuju date tačke i prave?

185. Date su paralelne prave a i b i tačke A_1, A_2, A_3, A_4 na pravoj a, tačke B_1, B_2, B_3, B_4 na pravoj b i tačka C van ovih pravih. Koliko je najviše različitih ravni određeno datim tačkama i pravama?

186. Date su prave a i b koje se seku u tački P, tačke A_1, A_2, A_3 različite od P na pravoj a, tačke B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 na pravoj b i tačka C van ovih pravih. Koliko je najviše različitih ravni određeno datim tačkama i pravama?

187. Dato je 5 različitih tačaka u ravni koje ne pripadaju jednoj ravni. Za svaki od različitih položaja datih tačaka, odrediti broj pravih koje one određuju.

188. Date su dve paralelne prave a i b. Na pravoj a date su tačke A, B, C, D i na pravoj b tačke E, F, G. Koliko je konveksnih četvorouglova određeno tim tačkama?

2.2. Paralelnost

Definicija. Prave a i b su paralelne (oznaka: $a \| b$) ako i samo ako $a = b$ ili prave a i b pripadaju jednoj ravni i nemaju zajedničkih tačaka.

Aksioma paralelnosti. Za svaku pravu a i svaku tačku A, van prave a u ravni α, postoji tačno jedna prava p ravni α koja sadrži tačku A i paralelna je pravoj a.

189. Dve različite paralelne prave određuju tačno jednu ravan. Dokazati.

190. Ako su a, b, c različite prave jedne ravni i ako je prava a paralelna pravoj b, a prava b paralelna pravoj c, tada je i prava a paralelna pravoj c. Dokazati.

191. Date su paralelne prave p i q i nekolinearne tačke A, B i C van njih. Koliko ravni određuju date prave i date tačke?

192. Dve paralelne ravni presečene trećom imaju paralelne presečne prave. Dokazati.

193. Date su prave a i b koje se seku. Prava c pripada ravni određenoj pravama a i b i ona seče bar jednu od njih. Dokazati.

194. Neka su α, β i γ tri razne ravni. Ako je $a \parallel \beta$, $\alpha \cap \gamma = a$ i $\beta \cap \gamma = b$, tada je $a \parallel b$. Dokazati.

195. Ako su dve prave koje se seku u jednoj ravni paralelne sa dve prave druge ravni, onda su te ravni paralelne. Dokazati.

196. Simetrala spoljašnjeg ugla pri vrhu jednakokrakog trougla paralelna je sa osnovicom trougla. Dokazati.

197. Ako su a, b, c tri prave jedne ravni, važi:

a) $a \perp b \wedge a \perp c \Rightarrow b \parallel c$;

b) $a \perp b \wedge a \parallel c \Rightarrow b \perp c$.

Dokazati.

198. Koliko je ravni određeno sa četiri paralelne prave od kojih ma koje tri nisu komplanarne?

199. Date su tri prave od kojih su dve paralelne, a treća je sa jednom mimoilazna, a drugu seče. Koliko je ravni određeno datim pravama?

200. Ako jedna ravan seče jednu od dve paralelne ravni, tada seče i drugu. Dokazati.

201.* Prava a seče pravu b, a prava c je paralelna sa b. Sve tri prave su komplanarne. Odrediti broj tačaka koje su jednako udaljene od sve tri prave.

2.3. Duž i ugao

Definicija 1. Neka je zadata prava a i neka su A i B dve razne tačke prave a. Skup svih tačaka prave a između tačaka A i B zajedno sa tačkama A i B naziva se duž i obeležava se AB. Tačke A i B nazivaju se krajevi duži.

Definicija 2. Neka su $[Op$ i $[Oq$ dve poluprave izvesne ravni π, sa zajedničkom početnom tačkom O. Unija poluprava $[Op$ i $[Oq$ naziva se

ugaona linija pOq. Ugaona linija pOq deli skup tačaka ravni π koje joj ne pripadaju na dva disjunktna dela. Ove skupove nazivamo ugaonim oblastima određene ugaonom linijom pOq.

Definicija 3. Ugao $\angle pOq$ je unija ugaone linije pOq i jedne od ugaonih oblasti određenih ovom ugaonom linijom.

202. Duži AB i CD pripadaju istoj pravoj i imaju isto središte O; tačke A i C su sa iste strane tačke O. Odrediti kakve su međusobno duži AC i BD, kao i duži AD i BC.

203. Zbir dužina dveju duži jednak je 9 cm, a razlika njihovih dužina je 5 cm. Izračunati dužine ovih duži.

204. Na polupravoj data su dva odsečka $OA = a$ i $OB = b$. Tačka M je središte duži AB. Odrediti dužinu odsečka OM.

205. Date su duž AB i tačka O na pravoj AB. Tačke M i N su središta odgovarajućih duži OA i OB. Odrediti dužinu duži MN ako je $OA = 3$ cm, a $OB = 7$ cm.

206. Data je duž CD. Konstruisati duž AB, tako da je $AB : CD = 3 : 4$.

207. Tačke O, A, M, B pripadaju pravoj p. Dokazati istinitost iskaza:

a) $(AM = MB \wedge O \in AB) \Rightarrow OM = \frac{1}{2}(OA + OB)$;

b) $(AM = MB \wedge O \in AB) \Rightarrow OM = \frac{1}{2}|OB - OA|$.

208. Ako su A, B, C i O tačke prave k, dokazati implikaciju:

$$(O - A - C - B \wedge CB = 2AC) \Rightarrow OC = \frac{2OA + OB}{3}.$$

209. Ako su A, B i O tačke prave p, dokazati implikaciju:

$$(O - A - B \wedge MA = 0{,}75\, MB \wedge M \in AB) \Rightarrow OM = \frac{4\,OA + 3\,OB}{7}.$$

210. Ako su A, B, C i O tačke prave l, dokazati istinitost iskaza:

$$(O - A - C - B \wedge AC : m = CB : n) \Rightarrow OC = \frac{nOA + mOB}{m + n},$$

$(m, n \in N)$.

211. Data je duž $AB = 36$ cm. Izračunati rastojanje središta duži S od tačke M, koja deli duž AB u odnosu 1 : 3.

212. Odrediti ugao koji opisuje velika kazaljka časovnika u toku jednog sata.

213. Izračunati uporedne uglove ako je jedan od njih tri puta veći od drugog.

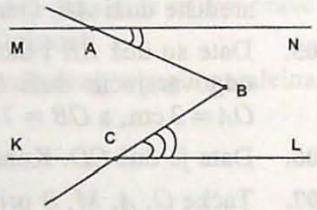
214. Odrediti dva ugla sa paralelnim kracima od kojih je jedan za 40° veći od drugog.

215. Razlika dva ugla sa normalnim kracima, od kojih je jedan oštar a drugi tup, iznosi 30°. Odrediti ove uglove.

216. Odrediti takva dva ugla sa normalnim kracima od kojih je jedan tri puta veći od drugog.

217. Prave p i q su paralelne, a l je njihova transverzala. Odrediti sve transverzalne uglove ako je razlika spoljašnjih suprotnih uglova $\frac{1}{4}\hat{d}$ ($\hat{d}$ je oznaka za prav ugao).

218. Ako je $MN \,||\, KL$, dokazati da je $\angle ABC = \angle NAB + \angle BCL$ (sl. 2).



Slika 2.

219. Poluprave Ox, Oy, Oz, Ot, koje pripadaju istoj ravni, raspoređene su ovim redom idući u pozitivnom smeru. Dokazati implikaciju: $\angle xOz = \angle yOt \Rightarrow \angle xOy = \angle zOt$.

220. Dva uporedna ugla se odnose kao 4:5. Odrediti ove uglove u stepenima.

221. Oštar ugao α i šestina njemu uporednog ugla su komplementni uglovi. Izračunati ugao α.

222. U pramenu pravih a, b, c, d sa centrom S, prava a je normalna na b, prava c je normalna na d. Odrediti uglove: $\alpha = \angle aSc$, $\beta = \angle bSd$ i $\gamma = \angle aSd$, ako je ugao $x = \angle cSb$ četiri petine ugla $y = \angle cSa$.

223. Izračunati zbir dva ugla, koji su suplementni, sa dva komplementna ugla.

224. Izračunati ugao koji je suplementan svojoj sedmini.

225. Tačkom M prave AB konstruisane su dve poluprave MC i MD, tako da je ugao $AMC = 54°$, a ugao CMD iznosi polovinu ugla AMC. Izračunati ugao DMB.

226. Na pravoj p data je tačka O. Poluprave Oa i Ob su sa iste strane prave p i grade sa njom jednake uglove, a ugao aOb je 40°. Poluprava Om normalna je na Oa i poluprava On normalna je na Ob. Izračunati uglove koji sa pravom p grade poluprave Om i On ako se:
a) Om i On nalaze sa one strane prave p sa koje se nalaze Oa i Ob;
b) Om i On ne nalaze sa iste strane prave p sa koje se nalaze Oa i Ob.

227. Prave a i b seku se u tački O. Tačka O određuje na pravoj a poluprave Om i On, a na pravoj b poluprave Op i Oq. Ugao $mOp = 72°$. Poluprava Or je simetrala ugla mOp, a poluprava Os je normalna na Or. Izračunati ugao nOs.

228.* Dve prave seku se u tački S i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova jednak je polovini jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti merne brojeve svakog od tih uglova.

229.* Prave a i b seku se i obrazuju četiri ugla: dva oštra α i γ i dva tupa β i δ. Izračunati te uglove ako je $7(\alpha + \gamma) = 5(\beta + \delta)$.

230. Razlika ugla α i njemu uporednog ugla β je 36°. Izračunati ugao γ komplementan sa β.

231. Na pravoj p date su četiri tačke $A - B - C - D$. Ako je $AD = 9$ cm, izračunati:
a) $AB + CD$; b) rastojanje sedišta duži AB i CD.

232. Rastojanje sedišta duži od ma koje tačke izabrane na produžetku te duži jednaka je poluzbiru rastojanja te tačke od krajeva te duži. Dokazati.

233. Data su dva uporedna ugla pOq i qOr. Neka su Ox i Oy njihove simetrale.
a) Dokazati da su uglovi pOx i yOr komplementni;
b) Ako je ugao $pOq = 35°$, izračunati ugao rOy.

234.* Ugao koji čine simetrala jednog ugla i ma koja poluprava konstruisana unutar tog ugla iz njegovog temena jednak je polurazlici ugla na koji je dati ugao podeljen tom polupravom. Dokazati.

235. Ako se saberu polovina, četvrtina i osmina ugla α, onda se dobija ugao suplementan uglu α. Odrediti ugao komplementan i suplementan uglu α.

236. Ako su s_1 i s_2 simetrale dva uporedna ugla, tada je $s_1 \perp s_2$. Dokazati.

237. Ako su α i β komplementni uglovi, ugao δ suplementan sa α i ugao ε suplementan sa β, odrediti zbir $\delta + \varepsilon$.

238. Uglovi α, β i γ zadovoljavaju konjunkciju $\alpha - \gamma = \hat{d} \wedge \beta + \gamma = \hat{d}$. Odrediti relaciju koju zadovoljavaju uglovi α i β. Šta se na osnovu dobijene relacije može zaključiti o uglovima α i β?

239. Uglovi $\angle COD$ i $\angle AOB$ imaju zajedničko teme O i raspoređeni sa tako da $\angle COD$ sadrži $\angle AOB$. Ako je $\angle AOB = 100°$ i $\angle COD = 140°$, izračunati ugao koji čine simetrale $\angle AOC$ i $\angle BOD$.

240. Data je duž AB. Tačka O je njeno središte. Tačke M i N su središta duži AO i OB. Dokazati da je $MN = \frac{1}{2} AB$.

241. Tačke A, B, N, C i D pripadaju pravoj p. Ako je $A - B - N - C - D$ i $AB = CD$, $AC = BD$, a N je središte duži AD. Dokazati da je N središte duži BC.

242. Na polupravoj Ox date su duži OA, OB, OC i OD, tako da kraj prve je središte druge, a kraj druge je središte treće i kraj treće je središte četvrte. Odrediti njihove dužine, ako je njihov zbir 30 cm.

243. Ako za dužine duži AB, AC i BC važi jednakost $\frac{AB}{AC} + \frac{BC}{AC} = 1$, tada tačke A, B i C pripadaju istoj pravoj. Dokazati.

244. Dato je pet tačaka A, B, C, D i P, za koje važi $AP = m$, $BP = m - b$, $CD = a$, $DP = n$ i $CP = a + n$. Dokazati da se prave AB i CD seku u tački P, i da je ona spoljašnja tačka za duži AB i CD.

245. Tačke A i B pripadaju pravoj m, a B i C pravoj n.
a) Ako je $AB + AC = BC$ prave m i n se poklapaju. Dokazati.
b) Ako je $AC = a$, $AB = b$ i $CB = a + 2b$, prave su različite. Dokazati.

246. Tačke A i B pripadaju pravoj p, a C i D pravoj q. Ako je $AD = 2\,AC = 6$ cm, $CD = 9$ cm, $AB = AC + CB = 7$ cm, tada se prave p i q poklapaju. Dokazati.

247. Ako je $\angle AOB = \angle A'OB'$ a poluprave OA i OA' pripadaju istoj pravoj, a poluprave OB i OB' pripadaju istoj poluravni sa početnom pravom AA'. Tada simetrala ugla BOB' je normalna na AA'. Dokazati.

248. Dat je ugao $AOB = 48°$. Poluprava OM deli dati ugao u odnosu 1 : 5, a poluprava ON deli njemu uporedni ugao u odnosu 1 : 2. Izračunati ugao MON.

249. Dat je ugao $AOB = 45°$. Konstruisati poluprave OA' i OB', tako da je ugao $AOA' = 25°$ i ugao $BOB' = 35°$. Izračunati ugao $A'OB'$.

III GLAVA

3. REALNI BROJEVI

3.1. Pregled brojeva. Polje realnih brojeva

1°. **Skup prirodnih brojeva** $N = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$. U skupu N definisane su operacije sabiranje $(+)$ i množenje $(\cdot)$.

2°. **Skup celih brojeva** $Z = \{\ldots -3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$. U skupu Z celih brojeva sem operacije sabiranja i množenja definisana je i operacija oduzimanje $(-)$, tj. zbir, proizvod i razlika dva cela broja je ceo broj.

3°. **Skup racionalnih brojeva** $Q = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in Z, n \in N\right\}$. U skupu Q definisane su operacije: sabiranje, oduzimanje, množenje i delenje, pri čemu je delilac različit od nule.

4°. **Skup iracionalnih brojeva** $I = \left\{x \middle| x \text{ se ne može napisati u obliku } \frac{m}{n}\right\}$.

5°. **Skup realnih brojeva** $R = Q \cup I$. U skupu realnih brojeva važe sledeći skupovni odnosi: $N \subset Z \subset Q \subset R$, $R = Q \cup I$.

250. Ako je n prirodan broj, onda je i $\frac{n^3 - n}{6}$ prirodan broj. Dokazati.

251. Dokazati identitet $(10\,n + 5)^2 = 100\,n(n+1) + 25$, zatim ga formulisati kao pravilo za kvadriranje dvocifrenih brojeva, koji na mestu jedinica imaju broj 5.

Primer: $35^2 = 100 \times 3 \times 4 + 25 = 1\,225$.

Izračunati na ovaj način $15^2, 25^2, 45^2, 55^2, 75^2, 85^2, 95^2$.

252. Ako je $b + c = 10$, onda je $(10\,a + b)(10\,a + c) = 100\,a(a+1) + bc$. Ovaj identitet može se koristiti kao pravilo za usmeno množenje dvocifrenih brojeva, koji imaju istu cifru na mestu desetica, a zbir cifara jedinica iznosi 10.
Primer: $47 \times 43 = 100 \times 45 + 7 \times 3 = 2\,000 + 21 = 2\,021$.
Izračunati na ovaj način: $32 \times 38, 54 \times 56, 77 \times 73, 92 \times 98, 22 \times 28$.

253. Dokazati identitet $\left(a+\frac{1}{2}\right)^2 = a(a+1)+\frac{1}{4}$.

Koristeći ovaj identitet izračunati:

$\left(3\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(5\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(6\frac{1}{2}\right)^2$; $\left(8\frac{1}{2}\right)^2$; $9{,}5^2$; $10{,}5^2$.

254. Ako se kvadrat ma kog neparnog broja umanji za 1, dobijeni broj je deljiv sa 8. Dokazati.

255. Dokazati da je broj 1 331 kub prirodnog broja.

256. Ako je zbir cifara dvocifrenog broja jednocifren broj, da bi se pomnožio sa 11, dovoljno je između njegovih cifara umetnuti zbir njegovih cifara. Dokazati.

257. Zbir tri uzastopna cela broja uvek je deljiv sa 3. Dokazati.

258. Dokazati da je proizvod od dva uzastopna parna broja deljiv sa 8.

259. Dokazati da je razlika kvadrata dva uzastupna neparna broja deljiva sa 8.

260. Dokazati da se kvadrat neparnog broja može napisati u obliku $8p+1$ (p je prirodan broj ili nula).

261. Dokazati da se kvadrat celog broja ne može završavati sa dve petice.

262. Dokazati da je neophodno i dovoljno da bi neki broj bio deljiv sa 72 da bude deljiv sa 8 i sa 9.

263. Ako je n ceo broj, tada je broj $n(n^2+5)$ deljiv sa 6. Dokazati.

264. Ako je srednja cifra trocifrenog broja jednaka zbiru krajnjih cifara, dokazati da je taj broj deljiv sa 11.

265. Za svako $n, n\in N$, broj n^3+11n je deljiv sa 6. Dokazati.

266. Dokazati da je za svako $n\in Z$ razlomak $\frac{21n+4}{14n+3}$ redukovan.

267. Dokazati da je razlomak $\frac{2n+3}{5n+7}$ redukovan za svako $n\in Z$.

268. Dokazati da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj.

269. Dokazati da je broj $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ iracionalan.

270. Neka je H skup svih kvadratnih iracionaliteta oblika $p+q\sqrt{2}$, gde $p\in Z$ i $q\in Z$. Ako $x\in H$ i $y\in H$, pokazati da i $x+y\in H$, $x-y\in H$ i $x\cdot y\in H$.

271. Dokazati implikacije:

a) $x=3a-1 \Rightarrow x(x-8a)+a(5x+3)=1$, $a, x\in Q$;

b) $x=a+3 \Rightarrow x(x-3a)+a(a+x)=9$, $a, x\in Q$;

c) $(x=a^3+3 \wedge y=a^3-3) \Rightarrow x(x-2y)+y(x+y)-a^6=27$, $a, x\in Q$.

272. Ako je n prirodan broj, onda je izraz $n(2n+7)(7n+1)$ deljiv sa 6. Dokazati.

273. Dokazati da su za $n\in N$ brojevi:

a) n^3-19n, deljiv sa 6;

b) n^5-n, deljiv sa 5;

c) n^7-n, deljiv sa 7.

274. Dokazati da je n^5-n (n prirodan broj) deljivo brojem 10.

275. Dokazati da je proizvod od ma koja četiri uzastopna prirodna broja deljiv sa 24.

276. Dokazati da je izraz $A=n^5-5n^3+4n$ deljiv sa 120, $n\in N$.

277. Dokazati da je broj $B=n^3+20n$ deljiv sa 48 za svako n parno.

278. Dokazati da broj $A=n^2+1$ nije deljiv sa 3, ni za jedan prirodan broj.

279. Odrediti četiri različita prirodna broja, ako se zna da je njihov zbir jednak zbiru proizvoda najmanjeg i najvećeg i proizvod ostala dva.

280. Dokazati da broj $n^2+8n+15$ nije deljiv brojem $n+4$ za svako n prirodno.

281. Ako je n prirodan broj, dokazati da je izraz $n(n^2-1)(n^2-5n+26)$ deljivo sa 120.

282. Trocifren broj napisan u brojnom sistemu sa osnovom 7 ima iste cifre, ali u obrnutom poretku, koji ima taj broj napisan u brojnom sistemu sa osnovom 9. Odrediti taj broj.

283. Data su dva dvocifrena broja. Ako je A njihov proizvod a B proizvod dvocifrenih brojeva nastalih razmenom njihovih cifara, tada je razlika $A-B$ deljiva sa 99. Dokazati.

284. Ako celi brojevi a i b imaju isti ostatak pri deljenju celim brojem c, tada razlika $a-b$ je takođe deljiva sa c. Dokazati.

285. Dokazati da je broj:

a) $38^3 + 37^3$ deljiv sa 75; b) $99^3 - 74^3$ deljiv sa 25;

c) 9 999 deljiv sa 3, 9, 11 i 101; d) $67^8 - 1$ deljiv sa 10;

e) $79^8 - 1$ deljiv sa 10; f) $54^6 - 1$ deljiv sa 5;

h) $9^{2k} + 9$ deljiv sa 10; i) $9^{2k} + 14$ deljiv sa 5;

j) $10^k - 3$ deljiv sa 3 (k prirodan broj).

286. Primenom osnovnih algebarskih identiteta dokazati jednakost:

a) $\dfrac{5^4 - 3^4}{5^4 + 2 \cdot 15^2 + 3^4} = \dfrac{8}{17}$; b) $\dfrac{5^4 - 2^6}{5^4 + 2^4 \cdot 5^2 + 2^6} = \dfrac{17}{33}$.

287.* Ako je n prirodan broj tada je broj $4^{n+2} + 5^{n+2} + 4^{n+3} + 5^{n+3}$, deljiv sa 10. Dokazati.

288.* Polinom $a^3 - 2(a-1) - a$, deljiv je sa kvadratom binom $a - 1$. Dokazati.

289. Ako je n ceo broj polinom $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$ ima za činioce četiri uzastopna broja ($n > 1$). Dokazati.

290. Ako se proizvodu od dva uzastopna parna broja doda 1, dobija se kvadrat neparnog broja, koji se nalazi između njih. Dokazati.

291.* Ako različita slova označavaju različite cifre, odrediti brojeve u jednakostima: a) $\overline{AB^C} = \overline{CDB}$; b) $\overline{MAK} = \overline{AK^A}$; c) $A^B = \overline{CBDE}$;

d) $\overline{AB^C} = \overline{DECD}$.

292. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je $\dfrac{n^3 - 1}{5}$ prost broj.

293. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je:

a) $9n^2 - 25$ prost broj; b) $16n^2 - 121$ prost broj.

294. Brojevi p, $p+2$ i $p+4$ su prosti. Odredi p.

295. Svaki prost broj veći od 3 ima oblik $6k + 1$ ili $6k + 5$. Dokazati.

296. Kvadrat prostog broja većeg od 3 ima oblik $12n + 1$. Dokazati.

297. Dokazati da prosti brojevi oblika $3k + 1$ imaju oblik $6n + 1$.

298. Odrediti sve proste brojeve p, takve da brojevi $p + 10$ i $p + 20$ su takođe prosti.

299.* Brojevi p i $8p^2 + 1$ su prosti. Dokazati da je broj $8p^2 + 2p + 1$ takođe prost.

300. Ako je p prost broj, tada je i $8p^2 + 1$ prost broj samo za $p = 3$. Dokazati.

301. Dokazati da su za ma koji prirodan broj n, brojevi $21n + 4$ i $14n + 3$ uzajamno prosti.

302. Prost broj $p > 2$ je razlika kvadrata dva prirodna broja. Odrediti ove brojeve.

303. Ako je n ceo broj, dokazati da je $n^4 - n^2$ deljivo sa 12.

304.* Dokazati da je zbir kubova tri sukcesivna cela broja deljiv sa 9.

305.* Ako je zbir tri uzastopna cela broja neparan broj, dokazati da je njihov proizvod deljiv sa 24.

306.* Dokazati da je broj $A = n^3 + 3n^2 - n - 3$, deljiv sa 48 za n neparno.

307. a) Dokazati da je broj $A = \dfrac{n^3}{24} + \dfrac{n^2}{8} + \dfrac{n}{12}$, ceo broj ako je n paran broj.

b) Za koliko se poveća petocifren broj ako mu se svaka cifra poveća za 1.

308. Da li su brojevi:

a) 8^{8^8}; b) 9^{9^9}; c) 5^{6^7}; d) 7^{6^5}, potpuni kvadrati?

309.* Dokazati da je proizvod četiri sukcesivna cela broja uvećan za 1 kvadrat celog broja.

310. Ako je n prirodan broj, onda je $5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2}$ deljivo sa 155. Dokazati.

311. Dokazati da je broj $n(n^2 + 2)$ deljiv sa 3 za svako $n \in N$.

312. Odrediti prirodne brojeve m i n, $(m > n)$ za koje je zbir brojeva $(m+n), (m-n), (mn), \dfrac{m}{n}$ jednak 245.

313. Dokazati da je izraz $8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2}$ deljiv sa 584, $n \in N$.

314. Zbir prvih n uzastopnih prirodnih brojeva jednak je trocifrenom broju čije su cifre jednake. Odrediti n i traženi trocifreni broj.

315. Dokazati da je za svaki prirodni broj n izraz $n^3 + 1988n$ deljiv sa 3.

316. Ako su a, b, c realni brojevi za koje važi $a + b + c = 0$ i $abc = 1999$, onda je $a(a+b)(a+c) = 1999$. Dokazati.

317. Dokazati da je izraz $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$, $n \in N$, deljiv sa 14.

318. Ako je n paran prirodan broj, onda je $n^3 - 1990n$ deljivo sa 6. Dokazati.

319. Izračunati zbir
$1999^2 - 1998^2 + 1997^2 - 1996^2 + \ldots + 3^2 - 2^2 + 1^2$.

320. Ako je n prirodan broj tada je
$(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16$, potpun kvadrat. Dokazati.

321. Dokazati da su periodični decimalni brojevi:
a) 0,777... ; b) 0,171717... ; c) 0,243243243... ; d) 2,292929... racionalni brojevi.

322. Dokazati da je broj $\sqrt{2}+\sqrt{17}$, iracionalan.

323. Dokazati da je $n+\sqrt{n}$ iracionalan broj, ako n nije kvadrat nekog celog broja.

324. Ako je $a^2+b^2=6ab$, (a i b celi pozitivni brojevi), tada je $\frac{a+b}{a-b}$ iracionalan broj. Dokazati.

Dokazati identitete (**325–330**):

325. a) $\frac{a+|a|}{2}=\begin{cases}a, a\geq 0\\ 0, a<0\end{cases}$; b) $\frac{a-|a|}{2}=\begin{cases}a, a<0\\ 0, a\geq 0\end{cases}$

326. $\frac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\begin{cases}3x, x\geq 0\\ \frac{x}{3}, x<0\end{cases}$.

327. $\frac{2x-|x|}{3}+x-|x|=\begin{cases}\frac{x}{3}, & x\geq 0\\ 3x, & x<0\end{cases}$.

328. $\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2=x^2$.

329.* $\left(\frac{a+2+|a+2|}{2}\right)^2+\left(\frac{a+2-|a+2|}{2}\right)^2=a^2+4a+4$.

330.* $\left(\frac{x-5+|x-5|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-5-|x-5|}{2}\right)^2=(x-5)^2$.

Rešiti jednačine (**331–334**):

331. a) $|x|=2x-4$; b) $|x-3|=5$.

332. a) $|x-2|=2x+4$; b) $|x+2|=2x+4$.

333. a) $|x|+|x-2|=x+4$; b) $|x+2|+|x-2|=3x+4$.

334. a) $\frac{1}{|x|}=\frac{1}{2}$; b) $\frac{1}{|x-1|}=\frac{1}{x-1}$.

Odrediti intervale u kojima se nalazi realan broj x da bi bile tačne nejednačine (**335–338**):

335. a) $|x|\leq 2$; b) $|x|\geq 3$.

336. a) $|x-2|\leq 5$; b) $|2x-3|<1$.

337. a) $|\frac{1}{2}x+3|<4$; b) $|\frac{2}{3}x+1|\geq 3$.

338. a) $|\frac{3}{2}x+5|>\frac{7}{2}$; b) $|\frac{4}{5}x-6|\leq\frac{4}{5}$.

339.* Ako je $f(x)=|x+3|+|x-3|+|x^2-1|$, tada je $f(-x)=f(x)$. Dokazati.

340.* Ako je $f(x)=\left(\frac{x+|x|}{5}\right)^2+\left(\frac{x-|x|}{5}\right)^2$, tada je $f(-x)=f(x)$. Dokazati.

3.2. Približne vrednosti. Apsolutna i relativna greška. Granica greške. Značajne cifre i zaokrugljivanje brojeva

Primedba 1. Približni broj a naziva se broj koji se razlikuje od tačne vrednosti x.

Definicija 1. Razlika $\alpha=|x-a|$ naziva se apsolutna greška približnog broja a.

Definicija 2. Granica apsolutne greške Δa približnog broja je svaki broj koji nije manji od apsolutne greške tog broja, tj. $|x-a|\leq\Delta a \Leftrightarrow -\Delta a<x-a<\Delta a \Leftrightarrow a-\Delta a\leq x\leq a+\Delta a$, kraće $x=a\pm\Delta a$.

Definicija 3. Relativna greška, u oznaci δ, približnog broja a je količnik apsolutne greške α i apsolutne vrednosti tačnog (približnog) broja ($x\neq 0$ i $a\neq 0$), tj. $\delta=\frac{\alpha}{|x|}$, odnosno $\delta=\frac{\alpha}{|a|}$, ako se ne zna tačna vrednost broja.

Definicija 4. Granica relativne greške datog približnog broja naziva se svaki pozitivan broj δ_a, koji nije manji od te greške, za koje je $\delta\leq\delta_a$, ili $\frac{\Delta a}{|x|}\leq\delta_a$, tj. $\Delta a\leq|x|\delta_a$. Pošto je $x=a$, prethodna formula postaje $\Delta a=|a|\delta_a$ ili $\delta_a=\frac{\Delta a}{|a|}$.

341. Sa $x \approx a$ označava se da je a približna vrednost za x. U sledećim primerima izračunati apsolutnu i relativnu grešku:

a) $5 \approx 4{,}6$; b) $2{,}564 \approx 2{,}56$; c) $0{,}881 \approx 0{,}88$;

d) $8 \approx 7{,}98$; e) $54{,}326 \approx 54{,}32$; f) $0{,}9991 \approx 0{,}999$.

342. U kome se intervalu nalazi broj x ako je:

a) $x = 56$ m$(\pm 0{,}02$ m$)$; b) $x = 75$ kg$(\pm 0{,}003$ kg$)$;

c) $x = 25 \pm 0{,}006$ d) $x = 8$ km$(\pm 0{,}016$ km$)$?

343. Odrediti granicu apsolutne greške načinjene pri merenju težine nekog tela ako se zna da se njegova težina nalazi izmedu 32,582 kg i 32,588 kg.

344. Odrediti relativnu grešku približnih brojeva:

a) 40 m$(\pm 0{,}006$ m$)$; b) 40 kg$(\pm 0{,}005$ kg$)$;

c) 25 m$(\pm 0{,}006$ m$)$; d) 8 km $+ (\pm 0{,}016$ km$)$.

Zatim izračunati grešku u procentima.

345. Rastojanje dva mesta na karti iznosi 24,6 cm ($\pm$ 2 cm). Izračunati rastojanje ta dva mesta u prirodi ako je razmera karte 1 : 2 500 000.

346. Pretvoriti razlomak $\frac{2}{3}$ u decimalan broj ako je granica apsolutne greške Δa: a) 0,1; b) 0,01; c) 0,001; d) 0,0001.

347. Izračunati relativnu grešku približnih brojeva:

a) 2,5 kg$(\pm 0{,}002$ kg$)$; b) 5,6 m $(\pm 0{,}07$ m$)$;

c) 17,5 km $(\pm 14$ m$)$; d) 37,5 m $(\pm 24$ mm$)$.

348. Relativna greška približnog broja $a = 8{,}64$, $\delta a = 0{,}005$. Izračunati granicu apsolutne greške približnog broja.

349. Približni brojevi: a) 9,6; b) 0,64; c) 15,0; d) 6,4 dobijeni su na osnovu pravila o zaokrugljivanju brojeva. U kojim granicama pripada broj čija je približna vrednost data? Kolika je granica relativne greške datog broja?

350. Ako je merena veličina a, apsolutna greška Δa, relativna greška δa; naći jednu od veličina ako su druge dve date:

a) $\Delta a = 0{,}1$, $a = 5{,}63$; b) $a = 6{,}425$, $\delta a\% = 4\%$;

c) $\Delta a = 7{,}8$, $\delta a = 0{,}005$.

351. Odrediti koliko pouzdanih cifara ima broj $a = 2{,}3752$ ako je relativna greška tog broja $\delta a = 0{,}01$.

352. Koliko pouzdanih cifara ima podatak 427,604 $(\pm 0{,}013)$?

353. Ako je merenjem dva predmeta utvrđeno da su im dužine $a = 5{,}43$ $(\pm 0{,}03)$ m i $b = 1{,}41$ $(\pm 0{,}01)$ m, koje je merenje tačnije?

354. Dva tela su izmerena na istoj vagi, pri čemu se dobilo: $Q_1 = 24{,}5$ $(\pm 0{,}05)$ g; $Q_2 = 12{,}380$ $(\pm 0{,}05)$ g. Koje je telo izmereno tačnije i koliko puta?

355. Odrediti razliku približnih vrednosti brojeva $a = 5{,}863 \pm 0{,}00005$, i $b = 2{,}746 \pm 0{,}0005$, zatim izračunati apsolutnu i relativnu grešku razlike.

356. Odrediti proizvod brojeva $0{,}456 \pm 0{,}0005$ i $3{,}35 \pm 0{,}0005$ i relativnu grešku proizvoda.

357. Date su približne vrednosti brojeva

$a = 7{,}2 \pm 0{,}05, b = 3{,}46 \pm 0{,}03, c = 5{,}09 \pm 0{,}004$. Izračunati $x = \frac{a}{b + c}$, Δx i δx.

358. Zaokružiti brojeve:

a) 50 864, 196 438, 75 049 do stotica;

b) 65 384, 8 546 496, 1 487 796 do jedinica trećeg reda;

c) 5,436; 83,6073; 0,8965; 8,9987 do stotih;

d) 12,3606; 6,00053; 0,5406 do trećeg decimalnog mesta.

359. Koristeći pravilo parne cifre, zaokružiti do jedinica sledeće brojeve: 83,5; 254,5; 869,5; 2 056,5.

360. Rastojanje između dva električna stuba mereno je četiri puta; u prvom merenju dobijeno je 49,05 m, u drugom 49,10 m, trećem 48,97 m i četvrtom 48,87 m. Izračunati srednje rastojanje stubova i zaokružiti ga u metrima.

361. Pretvoriti $\frac{1}{3}$ u decimalan broj, pa ga zaokružiti postupno do drugog, trećeg i četvrtog decimalnog mesta.

362. Pretvoriti u decimalan broj sledeće mešovite razlomke:

a) $2\frac{2}{7}$ (pa ga zaokružiti na dva decimalna mesta);

b) $7\frac{5}{6}$ (pa ga zaokružiti do treće važeće cifre).

IV GLAVA

4. PROPORCIONALNOST VELIČINA

4.1. Razmera i proporcija

1°. Ako su a i b realni brojevi $(b \neq 0)$, količnik $a:b=k$, odnosno $\frac{a}{b}=k$ nazivamo **razmerom brojeva** a i b, k je vrednost razmere.

2°. Jednakost dveju jednakih razmera $a:b=c:d$ naziva se **proporcija**. Članovi a i d su spoljašnji, a b i c unutrašnji članovi proporcije. Važi ekvivalencija $a:b=c:d \Leftrightarrow ad=bc, (abcd \neq 0)$.

3°. Jednakost tri ili više jednakih razmera naziva se **produžena proporcija**. Važi ekvivalencija:

$$a:m=b:n=c:p=d:q \Leftrightarrow \frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\frac{d}{q} \quad (a,b,c,d,m,n,p,q \neq 0).$$

363. Izračunati nepoznati član x u sledećim proporcijama:

a) $x:(2+x)=10{,}5:21$; b) $(x-3):15=21:35$;

c) $15:(2x-1)=\frac{5}{3}:(x-4)$; d) $(a+x):(a-x)=p:q$.

364. Iz proporcija $x:y=5:4$, $y:z=8:15$ i $z:3=6:2$ izračunati x.

365. Iz produžene proporcije $x:y:6=2:5:3$ izračunati x i y.

366. Iz proporcija $a:b=2:3$ i $b:c=6:7$ obrazovati produženu proporciju $a:b:c$.

367. Iz proporcija:

a) $x:y=8:5$ i $y:z=10:3$;

b) $x:y=3:4$ i $y:z=6:5$;

obrazovati produženu proporciju $x:y:z$.

368. Dokazati ekvivalencije:

a) $a:b=m:n \Leftrightarrow b:a=n:m$;

b) $a:b=m:n \Leftrightarrow a:m=b:n$.

369. Dokazati ekvivalencije:

a) $a:b=c:d \Leftrightarrow (a+b):b=(c+d):d$;

b) $a:b=c:d \Leftrightarrow (a-b):b=(c-d):d$;

c) $(a+b):(a-b)=(c+d):(c-d) \Leftrightarrow a:b=c:d$.

370. Dokazati implikacije:

a) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow \frac{4a-3b}{5a+2b}=\frac{4c-3d}{5c+2d}$;

b) $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p} \Rightarrow \frac{3a-b+2c}{3m-n+2p}=\frac{a-2b+3c}{m-2n+3p}$;

c) $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=\frac{d}{q} \Rightarrow \frac{a+b+c+d}{m+n+p+q}=\frac{a}{m}$.

371. Ako je $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}=4$, izračunati:

a) $\frac{a-3b+2c}{m-3n+2p}$; b) $\frac{a+b+c}{m+n+p}$.

372. Dokazati implikaciju:

$(a+b+c+d):(a-b+c-d)=$

$=(a+b-c-d):(a-b-c+d) \Rightarrow a:c=b:d$.

373. Dokazati ekvivalenciju:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}.$$

374. Data je direktna proporcionalnost formulom $y=7x$.

Izabrati četiri vrednosti x_1, x_2, x_3, x_4 za x, tako da je $x_1:x_2:x_3:x_4=1:2:1:3$. Izračunati vrednosti y_1, y_2, y_3, y_4 koje odgovaraju vrednostima x_1, x_2, x_3, x_4. Odrediti i uprostiti razmeru $y_1:y_2:y_3:y_4$.

Ispitati tačnost jednakosti $y_1:y_2:y_3:y_4=x_1:x_2:x_3:x_4$.

375. Data je obrnuta proporcionalnost formulom $y=\frac{2}{x}$. Izabrati vrednosti x_1, x_2, x_3 za x, tako da je $x_1:x_2:x_3=1:3:2$. Izračunati vrednosti y_1, y_2, y_3 obrnuto proporcionalni sa x_1, x_2, x_3.

Odrediti i uprostiti razmeru $\frac{1}{y_1}:\frac{1}{y_2}:\frac{1}{y_3}$. Ispitati tačnost jednakosti

$$\frac{1}{y_1}:\frac{1}{y_2}:\frac{1}{y_3}=x_1:x_2:x_3 \text{ i } y_1:y_2:y_3=\frac{1}{x_1}:\frac{1}{x_2}:\frac{1}{x_3}.$$

4.2. Primena proporcija

Primedba. Pri rešavanju zadataka primenom proporcija treba prvo utvrditi da li su veličine x i y direktno ili obrnuto proporcionalne. Kažemo da su x i y direktno proporcionalne ukoliko je $y = kx$, a obrnuto proporcionalne ukoliko za x i y važi $y = \frac{k}{x}$.

376. Od 66 kg prediva dobije se 165 m tkanine. Koliko se metara tkanine dobije od 112 kg prediva?

377. Zupčanik ima 54 zupca i pravi 84 obrtaja u minutu. Koliko zubaca ima zupčanik ako pravi 126 obrtaja i u prenosu je sa prvim?

378. Radeći dnevno po 8 časova, 21 radnik za 6 dana izradi 720 metalnih profila; za koliko će dana 28 radnika, radeći po 7 časova, izraditi 1 260 metalnih profila?

379. Radeći dnevno po 6 časova 40 radnika završi neki posao za 20 dana i za to prime ukupno 192 000 dinara. Koliko dana treba da radi 50 radnika ako rade po 8 časova dnevno, da bi primili ukupno 160 000 dinara?

380. Jedna prostorija osvetljena je sa 15 sijalica od 60 W. Koliko bi sijalica od 75 W davalo isto osvetljenje?

381. Za 14 kilograma robe plaćeno je 980 dinara. Koliko će se kilograma robe kupiti za 4 340 dinara?

382. 100 norveških kruna vredi 12 700 dinara. Koliko će se kruna dobiti za 571 500 dinara?

383. 65 radnika iskopa neki kanal za 23 dana. Posle 15 dana 13 radnika napusti posao. Koliko dana treba onima koji su ostali da završe ostatak posla?

384. Neki posao 6 radnika može da završi za 5 dana. Za koliko će dana biti gotov isti posao ako posle 2 dana dođe još 3 radnika?

385. Greda dužine 3 m, širine 20 cm i debljine 100 mm košta 2 000 dinara. Koliko će koštati greda dužine 4 m, širine 30 cm i debljine 110 mm?

386. Od određene količine bakra može se izvaljati 10 tabli dužine 2 m, širine 1,5 m debljine 2 mm. Koliko se tabli, dužine 1,2 m, širine 0,5 m i debljine 4 mm može izvaljati od iste količine bakra?

4.3. Račun raspodele i mešanja

Primedba. Rešavanje zadataka iz računa raspodele i mešanja se svodi na rešavanje linearnih jednačina ili na rešavanje sistema što je detaljno pokazano u rešenjima zadataka.

387. Dva radnika treba da podele premiju od 270 000 dinara srazmerno svojim zaradama, koje iznose 650 i 700 dinara po jednom radnom času. Koji deo premije pripada svakom radniku?

388. Jedan posao su uzela u akord 3 radnika i zaradila 246 000 dinara. Prvi radnik je radio 15 dana po 6 časova, drugi 9 dana po 8 časova, a treći 12 dana po 7 časova. Koji deo zarade pripada svakom radniku?

389. Podeliti duž od 456 m na tri dela čije će dužine biti redom proporcionalne brojevima $\frac{2}{3}$, $\frac{9}{8}$ i $\frac{7}{12}$.

390. Jedna vrsta mesinga je legura bakra, cinka i olova, legiranih po razmeri 65 : 34 : 3. Koliko ima svakog metala u bloku mesinga težine 456 kg?

391. Sumu od 728 000 dinara podeliti na tri lica tako da svako sledeće dobije 20% više od prethodnog.

392. Iz preostale dobiti na slobodnom rasprolaganju preduzeće podeli 1 386 000 dinara na 21 visokokvalifikovanog, 63 kvalifikovana i 126 nekvalifikovanih radnika po ključu 12 : 8 : 5. Odrediti pojedinačnu dobit svakog radnika iz ove tri kategorije.

393. Drvena greda podeljena je po razmeri 5 : 3. Veći deo ima dužinu 1,5 m. Odrediti dužinu cele grede.

394. Tri električna otpora vezana u seriji stoje u razmeri 2 : 3 : 7. Ukupan otpor je 24 oma. Koliki su pojedini otpori?

395. Fabrika ima 4 pogona. Promet pogona A iznosi 8 000 000 dinara za 5 meseci, pogona B 12 000 000 dinara za 7 meseci, pogona C 5 000 000 dinara za 6 meseci i pogona D 3 000 000 dinara za 10 meseci. Kako treba rasporediti ostvarenu dobit od 5 520 000 dinara na pojedine pogone, srazmerno prometu i vremenu?

396. Koliko vode temperature 40° C i vode temperature 25° C treba pomešati da se dobije 90 litara vode temperature 30° C?

397. Mlinsko preduzeće ima dve vrste brašna, od 720 i od 480 din po 1 kg. Koliko treba uzeti od svake vrste da se dobije mešavina težine 1 200 kg čija bi cena bila 640 din. po kilogramu?

398. Jedan zlatar meša srebro finoće 600‰ i srebro finoće 900‰ dobija 600 g finoće 850‰. Koliko grama srebra treba uzeti finoće 600‰, a koliko srebra finoće 900‰?

399. Koliko treba uzeti sumporne kiseline jačine 52, a koliko jačine 88% da se dobije mešavina od 144 litra, jačine 72%?

400. Ako se pomešaju 6 kg sumporne kiseline jačine 0,45 i 14 kg jačine 0,75, odrediti jačinu mešavine.

401. Koliko zlata finoće 900‰ i zlata finoće 600‰ treba legirati da se dobije 30 kg zlata finoće 800‰?

402. Čist vazduh je smeša azota (78%) i kiseonika (21%), a ostalo čine neki retki gasovi. Koliko ima svakog sastojka u 546 *l* vazduha?

403. Tri paralelno spojena električna otpora stoje u razmeri 1 : 2 : 5. Ukupan otpor je 10 oma. Izračunati pojedine otpore.

404. Vinar hoće da pomeša sa vodom 450 *l* vina koje prodaje po 1 100 din. Koliko litara vode mora sipati da bi litar mešavine prodavao po 900 din?

4.4. Procentni i promilni račun

Primedba. U procentnom računu pojavljuju se tri promenljive veličine: p procenat, G osnovna vrednost ili glavnica i P procentni iznos ili prinos i stalna veličina 100 (procentni račun) i 1 000 (promilni račun). U zadacima glavnica se pojavljuje:

1°. Kao čista glavnica G – procentni račun **do sto.**

$$P : p = G : 100;$$

2°. Kao uvećana glavnica $(G + P)$ – procentni račun **na sto.**

$$P : p = (G + P) : (100 + p);$$

3°. Kao umanjena glavnica $(G - P)$ – procentni račun **u sto.**

$$P : p = (G - P) : (100 - p).$$

405. Izračunati 15% rabata od 55 400 dinara.

406. Sa 6% zarade roba je prodata za 1 272 000 dinara. Kolika je nabavna cena robe?

407. Roba je sa 5% gubitka prodata za 212 135 dinara. Odrediti nabavnu cenu robe.

408. Amortizacioni fond preduzeća povećan je od 5 620 000 dinara na 5 844 800 dinara. Koliko je povećanje u procentima?

409. Na jednom poljoprivrednom dobru ubrano je 13 540 vagona kukuruza. Posle sušenja težina istog kukuruza je opala na 10 832 vagona. Koliko je to u procentima?

410. Štof je pojeftinio za 12%, tj. za 840 dinara prodaje se jevtinije. Izračunati koliko je štof koštao pre, a koliko posle pojeftinjenja?

411. Norma je prebačena za 22% i proizvedeno je 89 060 jedinica proizvoda. Izračunati normu.

412. Zajedno sa povećanjem od 16% trgovina je primila za prodatu robu 371 200 dinara. Koliko je povećanje?

413. Na prodaji robe bio je gubitak 6%. Ako je roba prodata za 376 000 dinara, izračunati koliko košta roba.

414. Po odbitku 12% provizije primljeno je 4 224 000 dinara. Kolika je provizija?

415. Kaput je koštao pre pojeftinjenja 160 000 dinara, a sada košta 146 160 dinara. Za koliko je procenata cena snižena?

416. Robi je snižena cena za 20% i sada iznosi 4 640 dinara. Kolika je bila stara cena?

417. Preduzeće planira dobit od 2 542 000 dinara, a ostvari 2 389 480 dinara. Kolika je u procentima ostvarena dobit?

418. Nagrada radniku po jednom času od 6 500 dinara poraste na 7 020 dinara. Koliko je to u procentima?

419. Pri obradi gvozdenog profila otpadak iznosi 2,76 kg, a u procentima 8%. Kolika je težina profila pre obrade?

420. Sa 4% troškova za robu je plaćeno 128 960 dinara. Kolika je bila kupovna cena robe, a koliko je bilo troškova?

421. Sa povišenjem 15%, nagrada radnika je 2 875 dinara. Koliko je primao po jednom času pre povišenja?

422. Uz maržu od 15%, jedan metar štofa prodaje se po 5 980 dinara. Kolika je nabavna cena?

423. Sa 5% vlage hektolitarska težina žita je 84 kg. Kolika je hektolitarska težina žita posle sušenja ako procenat vlage ostane 2,5%?

424. Pri transportu povrće kalira 8%, tako da sada teži 10 040 kg. Koliko je kilograma povrća kupljeno?

425. Na jednom krosu u toku trke otpalo je 15%, te su na cilj stigla 102 učesnika. Koliko je učesnika startovalo?

426. Pri kupovini robe za gotovo dobija se popust od 2,5%. Ako je na računu 14 040 dinara. Kolika je prodajna cena robe?

427. Sa gubitkom od 2%, trgovinsko preduzeće proda 15 400 kg povrća za 452 760 dinara. Kolika je bila kupovna cena jednog kilograma povrća?

428. Odrediti $8\frac{7}{8}$ ‰ od 3 246 000 dinara.

429. Posrednička provizija iznosi 636 dinara, a računata je od 424 000 dinara. Odrediti promilnu stopu.

430. Provizija 7‰ iznosi 602 dinara. Od koje je sume računata?

431. Troškovi su opteretili robu sa 17‰, tako da roba košta 292 896 dinara. Koliko iznose troškovi?

432. Sa 2‰ provizije roba je ustupljena za 1 251 999 dinara. Kolika je bila kupovna cena robe?

433. Da li će se promeniti površina pravougaonika i za koliko (u procentima) ako mu se dužina poveća za 30%, a širina smanji za 30%?

434. Jedna knjiga je za 25% skuplja od druge knjige. Za koliko procenata je druga knjiga jeftinija od prve knjige?

435. Cena nekoj robi povećana je za 50%. Za koliko procenata novu cenu treba smanjiti da bi se vratili na staru cenu?

436. Na kontrolnoj pismenoj vežbi bila su data tri zadatka. Pri tome 12% učenika nije rešilo ni jedan zadatak, 32% učenika rešilo je jedan ili dva zadatka, dok je 14 učenika rešilo sva tri zadatka. Koliko je ukupno učenika radilo vežbu?

4.5. Kamatni račun

Primedba. Ako je K ulog (kapital), p kamatna stopa, I kamata, t vreme u godinama, m vreme u mesecima, d vreme u danima, tada je:

$$I = \frac{Kpt}{100}; \qquad I = \frac{Kpm}{1200}; \quad I = \frac{Kpd}{36000}.$$

437. Štediša je uložio 540 000 dinara na štednju sa 7,5% kamatne stope. Koliko će kamate dobiti štediša posle 4 godine?

438. Koliko kamate donosi ulog od 108 000 dinara, po 8% kamatne stope za 4 meseca?

439. Kolika je kamata na dug od 75 000 dinara sa 6% za 80 dana?

440. Kamatna stopa na ulog oročen na 6 meseci iznosi 75%. Koliki je ulog ako je na kraju obračunato 45 000 dinara kamate?

441. Sa kojom kamatnom stopom ulog od 540 000 dinara donese za 30 dana kamatu od 4 500 dinara?

442. Zajam od 840 000 dinara sa 9% kamatne stope uzet je 15. marta. Kada je vraćen dug ako je na ime kamate plaćeno 8 400 dinara?

443. Zajedno sa 8% kamate za 4 godine dužnik je isplatio dug sumom od 132 000 dinara. Koliki je bio dug, a koliko je platio na ime kamate?

444. Sa 6% kamate jedan ulog poraste za 75 dana na sumu 121 500 dinara. Koliki je ulog?

445. Po odbitku 4% kamate za 3 godine dužnik je primio 440 000 dinara. Koju sumu dužnik treba da vrati posle 3 godine?

446. Zajedno sa kamtom 9% za 80 dana poverilac je primio 234 600 dinara. Koliki je kapital, a kolika kamata?

447. Po odbitku 7% kamate za 55 dana, banka je isplatila 712 300 dinara. Od koje sume je računata kamata i koliko ona iznosi?

448. Zajedno sa kamatom 6% za 60 dana, dužnik je platio 222 200 dinara. Koliki je kapital, a kolika je kamata?

449. Po odbitku 6% interesa za 110 dana dužnik je po menično zajmu primio 147 250 dinara. Na koliku sumu glasi menica?

450. Po odbitku 7,5% kamate za 40 dana dužnik je primio 440 300 dinara. Koliku sumu ima da vrati?

V GLAVA

5. IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

5.1. Podudarnost figura

Primedba. U geometriji veliku primenu ima pojam **podudarne** figure: duži, uglova, trouglova itd. Dve figure su podudarne ako postoji preslikavanje koje ih dovodi do uzajamnog poklapanja. Ako su dve figure podudarne njihovi odgovarajući elementi su jednaki. Kod podudarnih trouglova važi ekvivalencija:

$\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1 \Leftrightarrow AB = A_1B_1 \wedge BC = B_1C_1 \wedge CA = C_1A_1 \wedge$
$\wedge \angle A = \angle A_1 \wedge \angle B = \angle B_1 \wedge \angle C = \angle C_1$.

Minimalan broj uslova da dva trougla budu podudarna daju se sledećim stavovima o podudarnosti trouglova.

1°. **Stav SUS:**
$AB = A_1B_1 \wedge AC = A_1C_1 \wedge \angle A = \angle A_1 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

2°. **Stav USU:**
$\angle A = \angle A_1 \wedge AB = A_1B_1 \wedge \angle B = \angle B_1 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

3°. **Stav SSS:**
$AB = A_1B_1 \wedge BC = B_1C_1 \wedge CA = C_1A_1 \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

4°. **Stav SSU:**
$AB = A_1B_1 \wedge AC = A_1C_1 \wedge \angle C = \angle C_1 \wedge AB > AC \Rightarrow \Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$.

Označimo stranice trougla ABC sa: $BC = a$, $AC = b$ i $AB = c$, naspramne uglove sa α, β i γ, odgovarajuće visine sa, h_a, h_b i h_c i simetrale uglova sa s_α, s_β i s_γ.

Dokazati da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni kada su im jednaki sledeći odgovarajući elementi (**451–453**):

451. a) $a = a_1$, $b = b_1$ i $h_b = h_{b_1}$; b) $a = a_1$, $c = c_1$ i $h_b = h_{b_1}$.

452. a) $a = a_1$, $c = c_1$ i $t_c = t_{c_1}$; b) $c = c_1$, $h_c = h_{c_1}$ i $t_c = t_{c_1}$.

453. a) $b = b_1$, $s_\gamma = s_{\gamma_1}$ i $\gamma = \gamma_1$; b) $c = c_1$, $\alpha = \alpha_1$ i $s_\beta = s_{\beta_1}$.

454. Dokazati da su dva jednakokraka trougla podudarna kada su im jednaki elementi (a osnovica, b krak jednakokrakog trougla):
a) $a = a_1$, $h_b = h_{b_1}$; b) $b = b_1$, $\gamma = \gamma_1$; c) $a = a_1$, $h_a = h_{a_1}$.

455. Dokazati da su dva pravougla trougla podudarna kada su im jednaki elementi (a i b katete, c hipotenuza trougla):
a) $a = a_1$ i $b = b_1$; b) $a = a_1$, $\alpha = \alpha_1$; c) $b = b_1$, $c = c_1$.

456. Trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su podudarni ako su D i D_1 unutrašnje tačke stranice AB i A_1B_1 ($A - D - B$, $A_1 - D_1 - B_1$) i ako je $\angle BCD \cong \angle B_1C_1D_1$. Dokazati da je $AD \cong A_1D_1$.

457. Na visini CD koja odgovara osnovici AB jednakokrakog trougla ABC uočena je tačka M, koja je spojena sa temenima A i B. Dokazati da su trouglovi AMC i BMC podudarni.

458. Dokazati da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni ako su im jednake visine $CD = C_1D_1$, uglovi $\angle CAD = C_1A_1D_1$ i $\angle CBD = \angle C_1B_1D_1$.

459. Dokazati da su trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ podudarni ako su im jednake visine $CD = C_1D_1$ i duži $AD = A_1D_1$ i $BD = B_1D_1$.

460. Dva jednakostranična trougla su podudarna ako su im jednake visine. Dokazati.

461. Dva trougla su podudarna ako su im jednake po jedna stranica, visina i medijane, koje odgovaraju tim stranicama. Dokazati.

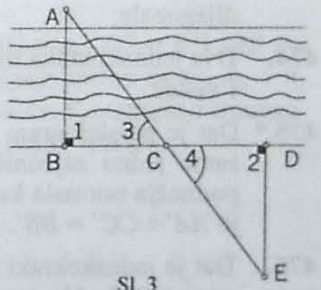
462. Ako je prava s simetrala duži AB i $M \in s$, tada je $AM = MB$. Dokazati.

463. Ako je poluprava O_s simetrala ugla xOy, tačka $M \in s$, tačka $A \in Ox$, $B \in Oy$, $MA \perp Ox$ i $MB \perp Oy$ tada je $MA = MB$. Dokazati.

464. Trougao je jednakokraki ako i samo ako su mu dve težišne linije jednake. Dokazati.

465. U svakom jednakokrakom trouglu jednake su:
a) visine koje odgovaraju kracima;
b) težišne duži koje odgovaraju kracima. Dokazati.

466. Primenom podudarnosti trouglova izračunati širinu reke AB ako je $BC = CD$, $\angle 1 = \angle 2 = 90°$. Posmatrač koji se nalazi u tački E vidi da tačke A i C pripadaju istoj pravoj, a $DE = 70$ m (sl. 3).



Sl. 3

467. Data su dva podudarna trougla. Dokazati:
a) njihove odgovarajuće težišne duži su jednake;
b) njihove odgovarajuće visine su jednake;
c) njihove odgovarajuće simetrale unutrašnjih uglova su jednake.

468. U trouglu ABC stranica $BC+2AC$, konstruisana je medijana AD. Tačka E je središte duži DC, a K središte duži AC. Presek duži AE i DK je tačka O. Dokazati:
a) Trougao ADO je jednakokraki;
b) AD je simetrala ugla BAE.

469. Dat je jednakostraničan trougao ABC. Na produžecima stranica AB,BC,CA konstruisani su odgovarajući odsečci $BC_1 = AB$, $CA_1 = BC$, $AB_1 = CA$.
a) Dokazati da je trougao $A_1B_1C_1$ jednakostraničan;
b) Ako je P presek pravih A_1B i C_1A, tačka Q presek pravih C_1A i B_1C i tačka R presek pravih A_1B i B_1C. Dokazati da je trougao PQR takođe jednakostraničan.

470. U oštrouglom trouglu ABC tačke C_1,A_1,B_1 su središta redom stranica AB, BC, AC. Tačka H je podnožje visine konstruisane iz temena A.
a) Kakav je četvorougao $B_1C_1A_1H$?
b) Prave AA_1 i B_1C_1 seku se u tački K_1. Dokazati da je $KB_1 = KC_1$;
c) Težišta trouglova ABC i $A_1B_1C_1$ se poklapaju. Dokazati.

471. Ako su kraci BA i CA jednakokrakog trougla BAC produžena preko vrha A tako da je $AE = AF$, tada je $FB = EC (F \in AC, E \in AB)$. Dokazati.

472. Počev od dva suprotna temena romba konstruišu se na svaku stranicu jednake duži. Četvorougao koji na taj način nastaje je pravougaonik. Dokazati.

473. Dokazati da su dva trapeza podudarna ako su im jednake osnovice i dijagonale.

474. Dva jednakokraka trapeza su podudarna ako su im jednake osnovice i visine.

475.* Dat je paralelogram $ABCD$ i prava p koja sa paralelogramom ima samo jednu zajedničku tačku i to je teme D. Neka su A', B', C' podnožja normala konstruisanih iz A, B, C na pravu p. Dokazati da je $AA' + CC' = BB'$.

476. Dat je jednakokraki trougao ABC i prava l koja je normalna na osnovicu AB. Ako prava l seče jedan krak u tački M, a produžetak drugog kraka u N, tada je trougao MNC jednakokrak. Dokazati.

477.* Dat je jednakostraničan trougao ABC. Svaka od stranica AB, BC, CA, produžena je preko temena B,C,A za duž d tako da je $BM = CN = AP = d$. Dokazati da je trougao MNP takođe jednakostraničan.

478. U trouglu ABC bilo koja težišna duž jednako je udaljena od druga dva temena. Dokazati.

479.* Dat je jednakokraki trougao ABC sa vrhom u A i visinom BB_1. Ako su iz ma koje tačke D osnovice BC konstruišu: $DE \perp AB$ i $DF \perp AC$, tada je zbir $BE + CF$ stalan i jednak CB_1. Dokazati.

480. U jednakokrakom ΔABC simetrala kraka BC seče produženu osnovicu AB u tački D. Na pravoj CD konstruisan je odsečak $CE = DA$, $D - C - E$. Dokazati:
1° trougao DBC je jednakokraki;
2° trougao DBE je takođe jednakokraki.

481.* U paralelogramu $ABCD$ tačke F i E su središta naspramnih stranica AB i CD. Odsečci AE i FC dele dijagonalu BD na tri jednaka dela. Dokazati.

482.* U jednakokrakom trouglu ABC simetrala kraka BC seče osnovicu AB u tački D, tako da je $A - D - B$. Kada je na duži CD tačka E takva da je $CE = AD$ i $C - D - E$, dokazati da je:
1° trougao DBC jednakokraki;
2° trougao DBE jednakokraki.

483.* Ako se iz ma koje tačke M koja pripada osnovici AB jednakokrakog trougla ABC konstruišu normalne duži MD i ME na oba kraka $(D \in AC, E \in BC)$, zbir ovih duži je konstantan i jednak visini trougla koja odgovara kraku. Dokazati.

484.* Dat je trougao ABC. Na njegovim stranicama spolja konstruisani su jednakostranični trouglovi ABM, BCN i ACP. Dokazati da su duži AN, BP i CM jednake.

Označimo stranice trougla ABC sa $BC = a$, $AC = b$ i $AB = c$, naspramne uglove sa α, β i γ, odgovarajuće visine sa h_a, h_b i h_c, težišne duži sa t_a, t_b i t_c i obim trougla sa $2s$. Konstruisati trougao ABC ako je on zadat sledećim elementima (**485–491**):

485. a) a, c, t_a; b) c, β, t_a.

486. a) α, β, h_b; b) β, h_a, h_c.

487. a) β, h_c, t_c; b) h_b, t_c, c.

488. a) $a + c, h_c, \beta$; b) $a + b, c, \gamma$.

489. a) $a + b, h_b, c$; b) $a - b, c, \beta\ (a > b)$.

490. a) $c - a, \beta, h_c (c > a)$; b) c, t_a, β.

491. a) $2s, \alpha, \beta$; b) s, β, h_c.

492. Konstruisati jednakokraki trougao ako su dati elementi (a osnovica, b krak):
a) a, h_b; b) b, h_a; c) $a+b, \beta$; d) $b-a, \alpha, (b>a)$.

493. Konsturisati jednakostraničan trougao ako su dati:
a) zbir stranice i visine;
b) razlika stranice i visine.

494. Konstruisati jednakokrako-pravougli trougao ako su dati:
a) zbir kraka i hipotenuze;
b) razlika hipotenuze i kraka.

495. Konstruisati pravougli trougao ako su dati:
a) kateta i jedan oštar ugao;
b) oštar ugao i težišna duž koja odgovara hipotenuzi;
c) zbir katete i hipotenuze i oštar ugao;
d) razlika kateta i oštar ugao.

496. Konstruisati kvadrat ako su dati:
a) zbir stranice i dijagonale;
b) razlika dijagonale i stranice.

497. Konstruisati pravougaonik ako su dati:
a) zbir stranica $a+b$ i dijagonala d;
b) zbir kraće stranice i dijagonale $b+d$ i stranica a;
c) dijagonala d i razlika stranica $a-b\,(a>b)$;
d) razlika dijagonale i manje stranice $d-b$ i duža stranica a.

498. Konstruisati paralelogram ako su dati:
a) stranice a, b i visina h_a;
b) stranica a i dijagonale d_1 i d_2;
c) duža stranica a, dijagonala d_1 i oštar ugao α;
d) dijagonale d_1, d_2 i visina h_a.

499. Konstruisati romb ako su dati (d_1 i d_2 su dijagonale, α – oštar ugao, h – visina, a – stranica):
a) d_1, α; b) d_1, d_2;
c) a, d_1+d_2; d) $a, d_1-d_2 (d_1>d_2)$.

500. Konstruisati trapez $ABCD$ (gde su osnovice $AB=a$, $CD=b$, kraci $BC=c$, $AD=d$ i visina koja odgovara osnovici h) ako su dati:
a) a, b, d, h; b) a, b, c, α;
c) a, b, d_1, d_2 (d_1 i d_2 dijagonale trapeza);
d) $a-b, h, d_1, (a>b)$.

501. Konstruisati jednakokraki trapez ako su dati:
a) osnovice i oštar ugao;
b) osnovice i dijagonala;
c) zbir osnovica, krak i dijagonala.

502. Konstruisati pravougli trapez ako su dati zbir osnovica i obe dijagonale.

503. Konstruisati deltoid ako su date obe dijagonale i jedna stranica.

5.2. Ortogonalnost prave i ravni. Ugao prave i ravni

Definicija. Prava p normalna je na ravan π ($p \perp \pi$) ako prava p i ravan π imaju zajedničku tačku P i prava p je normalna na sve prave ravni π koje sadrže tačku P.

Košijev stav. Ako prava p prodire ravan π u tački P i ako je pri tome ona normalna na dvema pravama a i b, koje pripadaju ravni π i sadrže tačku P, tada je prava p normalna na ravan π.

Ugao između prave i ravni. Ako prava p nije normalna na ravan π, tada oštar ugao određen pravom p i njenom ortogonalnom projekcijom p' na ravan π naziva se ugao između prave p i ravni π. Ako je prava normalna na ravan, ugao između prave i ravni je prav.

504. Ako su dve ravni paralelne sa trećom, one su paralelne i među sobom. Dokazati.

505. Prava p je paralelna sa ravni π. Dokazati da postoji jedna i samo jedna ravan $a \parallel \pi$ koja sadrži pravu p.

506. Odrediti geometrijsko mesto tačaka prostora sa osobinom da su sve tačke podjednako udaljene od krajeva date duži.

507. Koji je dovoljan uslov da su prava i ravan uzajamno normalne?

508. Ako prava p sadrži tačke M i M_1, koje su podjednako udaljene od krajeva date duži AB; dokazati da je prava p normalna na duž AB.

509. Odrediti dužinu projekcije duži čija je dužina a cm i koja obrazuje sa projekcijom ravni ugao: a) 60°; b) 30°; c) 45°.

510. Iz tačke M konstruisane su duži MA i MB do ravni π ($A, B \in \pi$). Obe duži sa ravni π zaklapaju ugao od 45°. Odrediti ugao između njih ako su njihove projekcije na ravan uzajamno normalne.

511. Iz tačke M konstruisana je na ravan π normalna duž $MM_1 = a$ i dve duži, MA i MB, koje sa ravni π obrazuju ugao od 30°, a među sobom ugao od 60°. Odrediti rastojanje između tačaka A i B.

512. Iz tačke M konstruisane su do ravni π kose duži $MA = 20$ cm i $MB = 15$ cm. Projekcija prve duži na ravan π je 16 cm. Odrediti projekciju druge duži.

513. Prava p prodire ravan π u tački K, a prave a i b pripadaju ravni π i $a \cap b = \{K\}$. Ako prave a i b zaklapaju jednake uglove sa projekcijom p_1 prave p, one zaklapaju jednake uglove i sa pravom p. Dokazati.

514. Date su dve mimoilazne prave p i q i tačka A. Konstruisati pravu koja sadrži tačku A i normalna je sa pravama p i q.

515. Dat je jednakokraki trougao osnovice $AB = 6$ m i kraka $AC = 5$ m. Osnovica pripada ravni π, a vrh C je na rastojanju 2 m od ravni. Odrediti ugao između ravni π i ravni trougla.

516. Tačka A pripada jednoj strani pravog diedra, a tačka B drugoj. Projekcije tačaka A i B na ivicu diedra su tačke A_1 i B_1. Odrediti uglove koje duž AB obrazuje sa stranama i ivicom diedra ako je $AA_1 = BB_1 = a$ cm i $A_1B_1 : AA_1 = \sqrt{2}$.

5.3. Vektori

Vektor. Orijentisana duž naziva se vektor.

Uređen par tačaka (A,B) određuje vektor $\overrightarrow{AB}$, odnosno $(A,B) = \overrightarrow{AB}$.

Suprotan vektor, vektoru (A,B) je vektor (B,A), odnosno $(A,B) = -(B,A)$.

Nula vektor je vektor $(A,A) = \vec{0}$.

Proizvod realnog broja k i vektora $\vec{v}$ je vektor $k\vec{v}$ sa svojstvima

1°. Intenzitet vektora $k\vec{v}$ je $|k\vec{v}| = |k| \cdot |\vec{v}|$,

2°. Vektori $\vec{v}$ i $k\vec{v}$ su istog pravca,

3°. Vektori $\vec{v}$ i $k\vec{v}$ su istog smera ako je $k > 0$ i suprotnog smera ako je $k < 0$.

517. Dati su vektori $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Konstruisati vektore jednake:

a) $3\vec{u} + 2\vec{v}$; b) $3\vec{u} - 2\vec{v}$.

518. Četvorougao čije dijagonale se uzajamno polove je paralelogram. Dokazati.

519. Tačka M je središte stranice BC trougla ABC. Dokazati da je $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AM}$.

520. Dokazati da je moguće konstruisati trougao čije su stranice jednake težišnim linijama datog trougla ABC.

521. Nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ konstruisan je paralelogram $ABCD$. Odrediti dijagonale paralelograma u funkciji datih vektora.

522. Nad vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ konstruisan je paralelogram. Izraziti u funkciji $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ vektore: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$, gde je $AC \cap BD = \{O\}$.

523. Dijagonale romba $ABCD$ su $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{BD}$. Izraziti preko njih vektore koji se poklapaju sa stranicama romba.

524. Središta stranica AB, BC, CA trougla ABC su redom tačke C_1, A_1, B_1, a M je proizvoljna tačka ravni trougla. Dokazati da je $\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

525. Ako je T težište trougla ABC, tada je $\overrightarrow{TA} + \overrightarrow{TB} + \overrightarrow{TC} = 0$. Dokazati.

526. Da li su središta stranica proizvoljnog četvorougla temena paralelograma?

527. Dat je pravilan šestougaonik $ABCDEF$.

a) Ako su $A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1$ sredine njegovih strana AB, BC, CD, DE, EF, FA, dokazati da je

$$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} + \overrightarrow{DD_1} + \overrightarrow{EE_1} + \overrightarrow{FF_1} = \vec{0};$$

b) Ako je $\overrightarrow{AA_1} = \vec{m}$, $\overrightarrow{BB_1} = \vec{n}$, odrediti vektore

$$\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{DD_1}, \overrightarrow{EE_1}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CC_1}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AE}.$$

528. U ΔABC tačke M i K su središta stranica AB i BC. Dokazati da je:

a) $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MK}$;

b) $\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA}\right)$.

529. Dat je pravilan šestougaonik $ABCDEF$. Ako je $\overrightarrow{AB} = \vec{p}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{q}$, izračunati vektore $\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DE}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{AC}$.

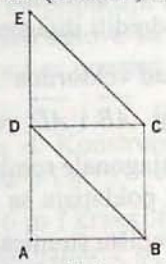
530. Dat je ΔABC, gde je $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Nad AC konstruisan je kvadrat $ACDE$ a nad BC, takođe kvadrat $BCFG$. Ako je $\overrightarrow{AD} = \vec{p}$ i $\overrightarrow{BG} = \vec{q}$, odredite vektore $\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{DF}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{DE}$ u funkciji $\vec{a}, \vec{b}, \vec{p}$ i $\vec{q}$.

531. Dokazati ekvivalenciju $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} \Leftrightarrow \overrightarrow{MP} = \overrightarrow{NQ}$.

532. Dat je kvadrat $ABCD$, gde je $CE \parallel BD, E \in AD$ (slika 4). Dokazati:

a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$;

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CE}$.



Sl. 4

533. Dat je trapez $ABCD$. Ako je M središte stranice AD, N središte stranice BC, tada je $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}\right)$. Dokazati.

534. Dat je jednakokraki pravougli ΔABC. Nad stranicama su konstruisani novi jednakokraki pravougli trouglovi BCO_1, ACO_2 i ABO_3. Ako je $\overrightarrow{CB} = \vec{r}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{p}$, $\overrightarrow{O_2C} = \vec{q}$, izračunati $\overrightarrow{O_2O_3}$, $\overrightarrow{O_1O_3}$ i $\overrightarrow{O_2O_1}$.

535. Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ proizvoljni vektori. Ispitati kolinearnost vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ ako je:

a) $\vec{p} = \sqrt{2}\vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{q} = 2\vec{a}+\sqrt{2}\vec{b}$;

b) $\vec{p} = \vec{b}$ i $\vec{q} = \sqrt{5}\vec{b}$;

c) $\vec{p} = \vec{a}-2\sqrt{3}\vec{b}$ i $\vec{q} = \sqrt{3}\vec{a}-6\vec{b}$;

d) $\vec{p} = 2\vec{a}$ i $\vec{q} = 3\vec{a}+\vec{c}$;

e) $\vec{p} = 2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$ i $\vec{q} = 2\sqrt{3}\vec{a}-\sqrt{3}\vec{b}+\sqrt{3}\vec{c}$.

536. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ proizvoljni vektori. Kada su vektori $\vec{p} = \vec{a}+\vec{b}$ i $\vec{q} = \vec{a}-\vec{b}$ kolinearni?

537. Ako je M proizvoljna tačka u ravni trougla ABC, tada je $\overrightarrow{MT} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC})$, gde je tačka T težište trougla. Dokazati.

538. Ako je M proizvoljna tačka u ravni paralelograma $ABCD$, tada je: $4\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}$, gde je O tačka preseka dijagonala paralelograma. Dokazati.

539. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$. Neka su M središte duži DE, N središte duži AM, P središte duži BC. Razložiti vektor $\overrightarrow{NP}$ po vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AF}$.

540. Neka su M i N središta neparalelnih stranica BC i AD trapeza $ABCD$, a E i F presečne tačke duži MN i dijagonala AC i BD. Tada je $\overrightarrow{EF} = \frac{\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}}{2}$. Dokazati.

541. Neka su K, L, M i N središta stranica AB, BC, CD, DA četvorougla $ABCD$. Primenom vektora dokazati da se duži MK i NL seku u tački S koja polovi svaku od ovih duži.

542. U trouglu ABC tačke P i Q dele, redom, stranice BA i BC u odnosu $BP:PA = 3:1$, $BQ:QC = 3:1$. Pomoću vektora dokazati da je $PQ \parallel AC$.

543. Dat je četvorougao $ABCD$. Neka su E i F sredine stranica AB i CD. Tada je:

a) $\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$; b) $\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BD}$;

c) $\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{EF}$;

d) Ako je G središte duži $\overrightarrow{EF}$, tada je $4\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$;

e) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = \vec{0}$. Dokazati.

544. Dati su vektori $\vec{a} = (-5,3)$ i $\vec{b} = \left(2,-\frac{3}{2}\right)$. Odrediti vektore:

a) $\vec{a}+\vec{b}$; b) $\vec{a}-\vec{b}$; c) $3\vec{a}+2\vec{b}$; d) $2\vec{a}-4\vec{b}$.

545. Dati su vektori $\vec{a} = (m-1)\vec{i}+(3m+4)\vec{j}$ i $\vec{b} = (m+1)\vec{i}+(3m+4)\vec{j}$, gde je m realan parametar. Odrediti:

a) vektor $\vec{v} = 2\vec{a}-36\vec{b}$;

b) za koje vrednosti parametra m vektor $\vec{v}$ je nula vektor?

546. Vektor $\vec{v} = (4,2)$ razložiti po vektorima $\vec{a} = (2,-1)$ i $\vec{b} = (-4,3)$. Odrediti koeficijente razlaganja.

547. Dati su vektori $\vec{a} = (4,-12)$, $\vec{b} = (5,-1)$ i $\vec{c} = (3,5)$. Dokazati da postoje dva realna broja m i n takva da je $\vec{a} = m\vec{b}+n\vec{c}$.

548. Dati su vektori $\vec{a}=(4,1)$, $\vec{b}=(5,-1)$ i $\vec{c}=(3,5)$. Vektor $\vec{c}$ razložiti po vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

549. Dat je vektor $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$, sa početkom $A_1(x_1, y_1)$ i krajem $A_2(x_1, y_1)$. Odrediti Dekartove koordinate vektora $\vec{a}$.

550. Data su temena trougla u Dekartovom koordinatnom sistemu $A(1,-4), B(2,3)$ i $C(-5,4)$. Odrediti Dekartove koordinate vektora $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AB}$ i zatim izračunati njihove intenzitete.

551. Data su temena četvorougla $A(-4,-2)$, $B(5,-5)C(1,3)$ i $D(-5,0)$. Odrediti koordinate vektora: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CD}$, zatim izračunati njihove intenzitete.

552. U pravouglom koordinatnom sistemu apscisa vektora $\vec{a}$ je 6. Ako je $|a|=10$, odrediti ordinatu vektora $\vec{a}$.

553. Odrediti y, tako da tačke $A(1,3)$, $B(3,5)$ i $C(4,y)$ pripadaju istoj pravoj.

554. Odrediti realan parametar m, tako da vektori $\vec{a}=(3,-2)$ i $\vec{b}=(m,4)$ budu kolinearni.

555. Data su tri temena paralelograma $A(2,5), B(-1,2)$ i $C(6,1)$. Odrediti četvrto teme D paralelograma.

556. Sila $\vec{F}=3\vec{i}-4\vec{j}$ razložena je na dve komponente, od kojih je jedna data vektorom $\vec{F}_1=2\vec{i}+8\vec{j}$. Odrediti drugu komponentu sile $\vec{F}$.

5.4. Osna i centralna simetrija

5.4.1. OSNA SIMETRIJA

Osna simetrija u odnosu na pravu s je preslikavanje koje proizvoljnu tačku M preslikava u tačku $M'=\delta_s(M)$, tako da je prava s simetrala duži MM'. Prava s je osa simetrije. Simbolički: $\delta_s(M)=M' \overset{def}{\Leftrightarrow} s$ simetrala duži MM'.

557. Koliko osa simetrije (u ravni) ima:
a) kvadrat;
b) pravougaonik;
c) kružnica;
d) ugao;
e) prava;
f) duž?

558. Odrediti ose simetrije figure koju obrazuju:
a) prava i kružnica;
b) dve prave;
c) dve kružnice;
d) dve koncentrične kružnice.
Koja od ovih figura ima više osa simetrije i koliko?

559. Date su koncentrične kružnice $k(O,r)$, $K(O,R)$ i prava p. Dokazati implikaciju: $(K\cap p\{A,B\}\wedge k\cap p=\{C,D\})\Rightarrow AC=BD$.

560. Date su dve koncentrične kružnice $K_1(O,r)$, $K_2(O,r_2)$ i kružnica $K_3(S,r_3)$. Dokazati implikaciju:
$(K_1\cap K_3=\{A,B\}\wedge K_2\cap K_3=\{C,D\})\Rightarrow$
$\Rightarrow (AB\,||\,CD\wedge AC=BD\wedge AD=BC)$.

561. Svaka tačka M koja pripada jednoj od poluravni određenom osom simetrije date duži AB bliža je onom kraju iste duži koja pripada istoj poluravni kojoj pripada i tačka M. Dokazati.

562. Konstruisati trougao najmanjeg obima ako mu dva temena pripadaju kracima datog ugla, a treće teme se poklapa sa datom tačkom u oblasti datog ugla.

563. Konstruisati romb ako jedna dijagonala ima dužinu d i pripada datoj pravoj a, a krajevi druge dijagonale pripadaju datoj pravoj b i datoj kružnici K.

564. Konstruisati trougao ako je poznato: b, h_c i $a+c$.

565.* Na obali reke treba da se izgradi vodotoranj, odakle se vodovodom povezuju naselja A i B sa iste strane reke. Odrediti optimalno mesto vodotornja da dužina vodovoda bude minimalna.

566.* Dati su $\angle xOy$ i prava p. Konstruisati kvadrat čija dva suprotna temena pripadaju kracima datog ugla, a druga dva pripadaju datoj pravoj p.

567.* U dati trougao upisati trougao najmanjeg obima čije se jedno teme poklapa sa datom tačkom na jednoj stranici datog trougla.

568.* Konstruisati jednakokraki trougao datog obima i visine koja odgovara osnovici.

569.* Simetrične slike ortocentra trougla u odnosu na stranice trougla pripadaju opisanoj kružnici oko trougla. Dokazati.

570.* Konstruisati pravougaonik ako su dati jedna stranica i zbir dijagonale i druge stranice.

571.* Konstruisati pravougaonik ako su date stranice a i razlika dijagonale i druge stranice $d - b$.

5.4.2. CENTRALNA SIMETRIJA

Centralna simetrija. U odnosu na tačku S je preslikavanje koje proizvoljnu tačku M preslikava u tačku $M' = \sigma_s(M)$ takvu da je S središte duži MM'. Tačka S je centar simetrije.

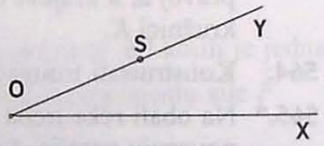
Simbolički: $\sigma_s(M) = M' \overset{def}{\Leftrightarrow} SM = SM'$.

572. Konstruisati simetričnu sliku datog četvorougla u odnosu na centar simetrije koji:
a) ne pripada četvorouglu;
b) pripada četvorouglu;
c) pripada jednoj stranici četvorougla;
d) poklapa se sa jednim temenom četvorougla.

573. Konstruisati simetričnu sliku polukruga u odnosu na centar simetrije koji:
a) ne pripada polukružnici;
b) poklapa se sa centrom polukruga;
c) poklapa se sa jednim krajem prečnika polukruga.

574. Dati $\angle xOy$ preslikati centralnom simetrijom u odnosu na tačku S (sl. 5).

575. Dve duži su centralno simetrične prema jednoj tački O ako i samo ako su paralelne i podudarne. Dokazati.



Sl. 5

576. Koliko centara simetrije ima figura sastavljena od:
a) dve prave koje se seku;
b) dve paralelne prave;
c) tri paralelne prave različito udaljene jedna od druge?

577. Svaka prava koja sadrži presek dijagonala paralelograma i seče jednu stranicu, seče i suprotnu stranicu. Njen odsečak je raspolovljen presečnom tačkom dijagonala. Dokazati.

578. Date su tačke A, prava a i kružnica $K(O, r)$. Konstruisati duž MN sa središtem u tački A i krajevima na pravoj a i kružnici K.

579. Poplava je uništila granice pravougaone parcele čija je jedna strana tri puta veća od druge. Na jednoj od dužih strana parcele nalazi se pumpa za vodu, a na suprotnoj jedno stablo. Takođe, na parceli se nalazi jedan električni stub podjednako udaljen od dužih stranica pravougaonika, a u odnosu na manje stranice dva puta je bliži jednoj od druge. Odrediti granice parcele.

580. U trouglu ABC tačke $A_1B_1C_1$ su središta stranica trougla, tačka T je težište trougla, a A_2, B_2, C_2 su središta odgovarajućih duži TA, TB, TC. Trouglovi $A_1B_1C_1$ i $A_2B_2C_2$ su simetrični u odnosu na tačku T. Dokazati.

581. Na suprotnim (naspramnim) stranicama AB i CD paralelograma $ABCD$ konstruisane su duži $AM = CN$. Prava MN sadrži presečnu tačku dijagonala. Dokazati.

582. Na produžecima stranica paralelograma $ABCD$ konstruisane su tačke A_1, B_1, C_1, D_1, tako da su tačke B, C, D, A središta odgovarajućih odsečaka AA_1, BB_1, CC_1, DD_1. Koristeći centralnu simetriju dokazati da je četvorougao $A_1B_1C_1D_1$ paralelogram.

583. Ako su tačke A i B, C i D dijametralno suprotne tačke dveju koncentričnih kružnica, tada su odsečci AC i BD jednaki i paralelni, ili pripadaju jednoj pravoj. Dokazati.

584. Dve spoljašnje kružnice jednakih poluprečnika sa jednom zajedničkom tačkom odsecaju na pravoj, koja sadrži zajedničku tačku, jednake tetive. Dokazati.

585.* Konstruisati trougao ako su date sve tri težične linije.

586. Konstruisati pravougaonik ako je dato jedno teme i dve tačke na suprotnim stranicama, koje su simetrične u odnosu na središte pravougaonika.

587. Dati su kružni odsečak i tačka M u njemu. Konstruisati duž, čiji jedan kraj pripada luku, drugi tetivi odsečka, a tačka M je središte duži.

588.* Dati su u ravni ΔABC i prave p i q ($p \perp q$). Neka su σ_p i σ_q dve osne simetrije datog trougla. Dokazati da je:
a) $\sigma_p(\Delta ABC) \circ \sigma_q(\Delta ABC) = \sigma_s(\Delta ABC)$, gde je σ_s centralna simetrija i $p \cap q = \{S\}$;
b) $p_{\alpha}(\Delta ABC) = \sigma_s(\Delta ABC)$, ($\alpha = 180°$).

589.* Ako su σ_p i σ_q dve osne simetrije neke ravni π takve da je $p \perp q$ i $p \cap q = \{S\}$, dokazati:
a) $\sigma_p \circ \sigma_q = \sigma_s$;
b) $\sigma_p \circ \sigma_q = \sigma_q \circ \sigma_p$.

590.* Dat je trougao ABC. Ako je $p_{\frac{a}{a}}(\alpha = 180°)$ rotacija oko temena A datog trougla, a σ_A centralna simetrija istog trougla, dokazati da je $\delta_A = p_{\frac{a}{a}}$.

5.5. Translacija

Translacija. Neka je M bilo koja tačka ravni, a $\vec{v}$ bilo koji vektor. Preslikavanje koje tačku M preslikava u M', tako da je $\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$ naziva se translacija (pomak). Simbolički: $\tau_{\vec{v}}(M) = M' \overset{def.}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{MM'} = \vec{v}$.

591. Dat je kvadrat $ABCD$. Odrediti njegove slike nastale translacijom tako da se:
a) teme A preslikava u teme C;
b) teme A preslikava u središte stranice BC;
c) teme B preslikava u presek dijagonala.

592. Dat je jednakostranični trougao ABC. Odrediti njegove slike nastale translacijom tako da se:
a) teme A preslikava u A' $(BA' = A'C)$;
b) središte stranice AB preslikava u središte stranice AC.

593. Data je kružnica $K(O, R)$ sa prečnikom AB. Odrediti translacije koje preslikavaju:
a) tačku O u tačku A;
b) tačku A u središte poluprečnika OB;
c) tačku B u datu tačku M kružnice.

594. Translacijom preslikati dati trougao ABC za vektor $\vec{v}$:
a) $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$;
b) $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$;
c) $\vec{v} = \overrightarrow{CA}$.

595. Dat je trougao ABC. Translacijom za vektor $\vec{u} = \overrightarrow{AA_1}$ (AA_1 težišna duž trougla) preslikati dati trougao u $\Delta A'B'C'$, zatim translacijom za vektor $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$ preslikati trougao $A'B'C'$ u $\Delta A''B''C''$. Odrediti translaciju za koju se ΔABC preslikava u $\Delta A''B''C''$.

596. Dati su trougao ABC i njegova slika $\Delta A'B'C'$, dobijena nekom translacijom. Duž čiji su krajevi centri opisane i upisane kružnice

ΔABC jednaka je i paralelna duži čiji su krajevi centri opisane i upisane kružnice $\Delta A'B'C'$. Dokazati.

597.* Konstruisati jednakostraničan trougao date stranice a čija dva temena pripadaju dvema datim paralelnim pravama, a treće teme trećoj pravoj koja seče date paralelne prave.

598.* Konstruisati jednakostraničan trougao date stranice a čija dva temena pripadaju dvema datim paralelnim pravama, a treće datoj kružnici.

599.* Date su prave l_1, l_2, l_3. Konstruisati duž date dužine, paralelnu sa l_1, čiji krajevi pripadaju pravama l_2 i l_3.

600.* Dati su $\angle xAy$ i vektor $\vec{v}$, koji pripada ravni ovog ugla. Odrediti tačke B i C tako da $B \in Ax$ i $C \in Ay$ i da je $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ ili $\overrightarrow{CB} = \vec{v}$.

601.* Preseći dati trougao ABC pravom, tako da vektor na ovoj pravoj, između dve stranice trougla, bude jednak datom vektoru v, koji pripada ravni ovog trougla.

602.* Date su dve kružnice K_1, K_2 i prava p. Konstruisati pravu n paralelnu sa pravom p, na kojoj kružnice K_1 i K_2 odsecaju jednake duži.

603.* Date su kružnice $K(O, r)$, $K_1(O_1, r)$ i duž AB. Konstruisati duž paralelnu i jednaku datoj duži, a da krajevi pripadaju datim kružnicama.

604.* Dati su vektor $\vec{v}$, prava p i kružnica $K(O, r)$. Konstruisati vektor jednak datom vektoru v, tako da mu jedan kraj pripada pravoj p, a drugi kružnici K.

605. Odsečak prave, koji sadrži središte jedne stranice trougla i paralelan je sa drugom stranicom trougla, jednak je polovini te stranice i polovi i treću stranicu trougla. Dokazati.

606. Konstruisati trapez datih osnovica a i b $(a > b)$ i dijagonala d i d_1.

607. Konstruisati četvorougao ako su date sve četiri stranice i duž koja je određena središtima dve suprotne stranice.

608. Konstruisati trougao ako su dati jedan ugao i visine koje polaze iz temena druga dva ugla.

609. Konstruisati trapez ako su dati:
a) osnovice i uglovi na većoj osnovici;
b) razlika osnovica, oba kraka i jedna dijagonala;
c) obe dijagonale, ugao između dijagonala i krak.

610. Dokazati da je:

a) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} = t_{\overrightarrow{AC}}$;

b) $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$;

c) $t_{\vec{u}} \circ t_{-\vec{u}} = t_{\vec{0}}$;

d) $t_{\overrightarrow{AB}} \circ t_{\overrightarrow{BC}} \circ t_{\overrightarrow{CA}} = t_{\overrightarrow{o}}$;

e) $t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}}$.

($t_{\vec{0}}$ identično preslikavanje).

5.6. Rotacija

Rotacija. Ako je M bilo koja tačka ravni, tačka O data tačka i $\vec{\alpha}$ orijentisani ugao iste ravni. Kažemo da je M' slika originala M dobivena rotacijom oko tačke O za dati ugao $\vec{\alpha}$, ako je $OM = OM'$ i $\angle MOM' = \vec{\alpha}$. Tačka O je centar rotacije, $\vec{\alpha}$ ugao rotacije. Simbolički:

$$\rho_{O,\vec{\alpha}}(M) = M' \overset{def}{\Leftrightarrow} OM = OM' \wedge \angle MOM' = \vec{\alpha}.$$

611. Dat je trougao ABC i ugao $\alpha = 120°$. Rotirati dati trougao za dati ugao:
a) ako se centar rotacije poklapa sa jednim temenom trougla;
b) ako centar rotacije pripada datoj tački O van trougla.

612. Rotirati oko date tačke za dati ugao:
a) jednakostranični trougao;
b) kvadrat;
c) kružnicu;
d) pravilan šestougao.

613. Izvršiti rotaciju datog trougla ABC oko tačke S za 60°.

614. Data su dva podudarna, orijentisana u istom smeru, trougla sa neparalelnim stranicama, koji pripadaju istoj ravni. Odrediti centar i ugao rotacije koja preslikava jedan trougao u drugi.

615. Dat je kvadrat $ABCD$. Neka je K središte stranice AB, L središte stranice BC. Odrediti centar rotacije i ugao rotacije koja preslikava:

a) duž AK u BL; b) vektor $\overrightarrow{AK}$ u $\overrightarrow{LC}$.

616. Trougao A_1, B_1, C_1 je slika ΔABC pri rotaciji za $A = 90°$ oko datog centra rotacije. Medijana A_1M_1 $\Delta A_1B_1C_1$ je normalna medijani AM ΔAMC. Dokazati.

617. Nad stranicama AB i AC ΔABC konstruisani su jednakostranični trouglovi ABE i ACF. Ako se tačke C i E ne nalaze sa iste strane stranice AB, a F i B se nalaze sa iste strane stranice AC, tada je $EF = BC$. Dokazati.

618. Konstruisati jednakokraki trougao sa vrhom u datoj tački A i datim uglom pri vrhu α, tako da mu temena osnove pripadaju datoj pravoj l i datoj kružnici $K(O, r)$.

619. U dati trougao upisati jednakokraki trougao ako su dati ugao pri vrhu i položaj tog vrha na jednoj stranici datog trougla.

620. Dati su ugao xOy i tačka A u oblasti ugla. Konstruisati jednakokraki trougao sa vrhom u A i uglom $\vec{\alpha} = 30°$, dok ostala dva temena B i C pripadaju kracima datog ugla.

621.* Konstruisati jednakostranični trougao čija temena pripadaju trima datim paralelnim pravama.

622.* Konstruisati jednakostraničan trougao, tako da mu temena pripadaju trima datim koncentričnim kružnicama.

623.* Date su tri paralelne prave. Konstruisati kvadrat, tako da mu temena pripadaju datim pravama.

624.* Date su tačka A i dve paralelne prave p i q. Konstruisati jednakostranišan trougao čije je jedno teme data tačka A, a ostala dva pripadaju datim paralelnim pravama.

625.* Konstruisati kružni luk ako je dato središte, odgovarajući centralni ugao, a da krajevi luka pripadaju dvema datim pravama.

626.* Konstruisati kvadrat sa jednim temenom u datoj tački A, a temena B i D pripadaju dvema datim paralelnim pravama.

627.* Konstruisati kvadrat sa jednim temenom u datoj tački A, a temena B i D pripadaju dvema datim koncentričnim kružnicama.

628.* U dati kvadrat upisati jednakostraničan trougao čije jedno teme pripada datoj tački na jednoj stranici kvadrata.

629.* Konstruisati jednakokraki trougao sa vrhom u datoj tački i uglom pri vrhu 52° 30′, tako da mu temena osnove pripadaju dvema datim kružnicama.

5.7. Neke važnije teoreme o trouglu, četvorouglu, mnogouglu i kružnici

1°. Ako su α,β,γ unutrašnji uglovi trougla, a $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ spoljašnji uglovi, tada je: $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360°$, $\beta=\alpha+\gamma$.

2°. Ma koja stranica trougla manja je od zbira druge dve, a veća od njihove razlike.

3°. Ako su $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ unutrašnji uglovi, a $\alpha_1,\beta_1,\gamma_1,\delta_1$ spoljašnji uglovi četvorougla, tada je $\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°$ i $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1=360°$.

4°. Broj dijagonala n – ugla je $D_n=\dfrac{n(n-3)}{2}$.

5°. Zbir unutrašnjih uglova n – ugla je $S_n=(n-2)\cdot 180°$.

6°. Unutrašnji ugao pravilnog n – ugla je $\alpha=\dfrac{(n-2)\cdot 180°}{n}$.

7°. Centarlni ugao pravilnog n – ugla je $\varepsilon=\dfrac{360°}{n}$.

8°. Spoljašnji ugao pravilnog n – ugla je $\beta=\dfrac{360°}{n}$.

630. Mogu li merni brojevi unutrašnjih uglova trougla da zadovoljavaju razmere: a) 1 : 2 : 3; b) 3 : 7 : 8; c) 1 : 1 : 2 ? Ako mogu, izračunati uglove.

631. U trouglu ABC $\angle A=25°$, $\angle B=68°$. Kroz njegova temena konstruisane su prave paralelne naspramnim stranama. Izračunati uglove trougla koji čine ove prave.

632. Odrediti oblik trougla (prema uglovima) ako je jedan unutrašnji ugao:
a) jednak zbiru druga dva;
b) veći od druga dva;
c) manji od druga dva.

633. Dva ugla trougla iznose 60° i 72°. Odrediti uglove koje obrazuju visine trougla koje polaze iz temena datih uglova.

634. Odrediti ugao pod kojim se seku simetrale spoljašnjih uglova na hipotenuzi pravouglog trougla.

635. Pod kojim se uglom seku simetrale oštrih uglova u pravouglom trouglu?

636. Dokazati da se simetrale uglova α i β trougla ABC seku pod uglom $\varphi=90°+\dfrac{\gamma}{2}$.

637. U trouglu ABC simetrala CD ugla γ seče stranicu AB pod uglom $\varphi=110°$. Izračunati uglove trougla ako se zna da je $CD=BC$.

638. U trouglu ABC simetrala CD ugla γ gradi sa stranicom AB ugao $\varphi=100°$. Izračunati unutrašnje uglove trougla ako je $BC=CD$.

639. Simetrala AE ugla α i visina CD grade ugao $\varphi=50°$. Izračunati unutrašnje uglove trougla ako je $AE=BE$.

640. Simetrale uglova β i γ trougla ABC grade ugao φ. Ako je $\alpha:\varphi=1:2$ $\beta:\gamma=1:4$. Izračunati unutrašnje uglove trougla.

641. U pravouglom trouglu ugao koji zahvataju hipotenuzina visina i hipotenuzina težišna duž je 28°. Odrediti ugao između hipotenuzine težišne duži i simetrale pravog ugla.

642. U jednakokrakom trouglu ABC ($AB=BC$), simetrala ugla BAC i visina AD koja odgovara kraku obrazuju ugao od 18°. Izračunati uglove trougla ABC.

643. U trouglu ABC ($BC>AC$) uglovi α i β razlikuju se za 30°. Ako je D tačka na stranici BC, takva da je $AC=CD$. Izračunati $\angle BAD$.

644. Izračunati unutrašnje uglove trougla, ako je poznato da jedan ugao iznosi $\dfrac{2}{3}$ drugog, odnosno $\dfrac{1}{4}$ trećeg ugla.

645. Na produžetku kraka AC jednakokrakog trougla ABC, iza tačke C data je tačka D, tako da je $CD=AC$. Dokazati da je trougao ABD pravougli.

646. U trouglu ABC unutrašnji ugao kod temena C je 40°. Simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla kod temena C u preseku sa pravom AB određuju jednakokraki trougao CDE. Izračunati uglove trougla ABC.

647. U pravouglom trouglu hipotenuzina visina deli hipotenuzu na dva odsečka čija je razlika jednaka dužini jedne katete. Izračunati uglove trougla.

648. Ako se simetrale dva unutrašnja ugla seku pod uglom od 135°, tada je trougao pravougli. Dokazati.

649. U trouglu ABC dati su uglovi $\alpha=44°$ i $\gamma=78°$. Na pravoj AB uočene su tačke D i E, tako da je $D-A-B-E$ i da je $DA=AC$ i $BE=BC$. Izračunati uglove $\angle ADC$ i $\angle BEC$.

650. Izračunati unutrašnje uglove jednakokrakog trougla ako:
a) Visina koja odgovara jednom kraku gradi sa drugim krakom ugao od 32°;
b) Visine koje odgovaraju kracima seku se pod uglom od 48°;

c) Visina koja odgovara kraku i visina koja odgovara osnovici seku se pod uglom od 127°;
d) Simetrala ugla na osnovici sa naspramnim krakom gradi ugao od 69°.

651. U jednakokrakom trouglu simetrala ugla na osnovici i visina konstruisana iz istog temena grade ugao od 15°. Izračunati unutrašnje uglove tog trougla.

652. U tupouglom trouglu ABC iz temena A tupog ugla konstruisana je do preseka sa BC duž AD, koja sa stranicom AB gradi ugao jednak uglu kod temena C. Zatim je konstruisana duž AE koja sa stranicom AC gradi ugao jednak uglu kod temena B. Dokazati da je trougao ADE jednakokraki.

653. Na stranici AB trougla ABC uočena je tačka D tako da je $BD = BC$. Ako je spoljašnji ugao kod temena B 140°, a unutrašnji kod temena A 35°, dokazati da je $AD = DC$.

654. U trouglu ABC spoljašnji ugao kod temena A je 134°, unutrašnji ugao kod temena B je 62°. Izračunati treći ugao trougla i ugao pod kojim sa seku simetrale uglova kod temena A i B.

655. Simetrala ugla α trougla ABC gradi sa simetralom γ_1 (spoljašnji ugao trougla) ugao jednak uglu $\frac{\beta}{2}$. Dokazati.

656.* Neka su u trouglu ABC uglovi β i γ oštri uglovi i neka je $\beta > \gamma$. Dokazati da je ugao između visine i simetrale ugla iz temena A jednak $\frac{\beta - \gamma}{2}$.

657. U trouglu ABC stranice AB i AC produžene su preko temena B i C i konstruisane su simetrale spoljašnjih uglova koje se seku u tački O. Dokazati da je $\angle BOC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

658.* Ako su a, b, c stranice trougla, a t_a težišna duž, dokazati da je $\frac{b+c-a}{2} < t_a < \frac{b+c}{2}$.

659.* U pravouglom trouglu težišna duž i visina konstruisane iz temena pravog ugla obrazuju ugao jednak razlici oštrih glova trougla. Dokazati.

660. U trouglu ABC simetrale uglova α i γ seku se u tački M. Izračunati ugao β ako se zna da je jednak polovini ugla AMC.

661. Ako je M središte stranice AC, N središte stranice BC trougla ABC, tada je $2MN = AB$ i $MN \parallel AB$. Dokazati.

662. Svaka stranica trougla manja je od polovine njegovog obima. Dokazati.

663. Zbir visina trougla manja je od njegovog obima. Dokazati.

664. Ako za stranice trougla važi $a < b < c$, dokazati:

a) $a < \frac{a+b+c}{3}$; b) $c > \frac{a+b+c}{3}$.

665. Zbir težišnih duži trougla veći je od poluobima trougla. Dokazati.

666. Zbir težišnih duži trougla veći je od $\frac{3}{4}$ njegovog obima. Dokazati.

667. Središta stranica romba su temena pravougaonika, a središta stranica pravougaonika su temena romba. Dokazati.

668. Središta stranica jednakokrakog trapeza su temena jednakostraničnog paralelograma. Ispitati: kada je ovaj paralelogram romb, a kada kvadrat.

669. Središta stranica četvorougla čije su dijagonale međusobno normalne su temena pravougaonika. Ispitati kada je ovaj pravougaonik kvadrat.

670. Ako je AA' težišna duž trougla ABC, tada su tačne implikacije:

a) $AA' = \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle A = 90°$;

b) $AA' > \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle A < 90°$;

c) $AA' < \frac{BC}{2} \Rightarrow \angle A > 90°$. Dokazati.

671. U trouglu ABC prava $p \parallel AB$ i sadrži presek S simetrala uglova α i β. Ako je $p \cap AC = \{M\}$, a $p \cap BC = \{N\}$, tada je $MN = AM + BN$. Dokazati.

672. Ako je tačka O ortocentar trougla ABC, dokazati da je $\angle AOB + \angle C = 180°$.

673. Središnja duž MN trapeza $ABCD$ paralelna je sa osnovicama i jednaka je njihovoj aritmetičkoj sredini. Dokazati.

674. Dokazati da je trapez sa jednakim dijagonalama jednakokrak.

675. Ako se jednake tetive AB i CD kružnice $k(O)$ seku u tački P i ako je $PA > PB$ i $PC > PD$, tada je $PA = PC$ i $PB = PD$. Dokazati.

676. Duži AM i AN su tangente duži kružnice $k(O)$ koje odgovaraju tački A. U tački P na manjem luku MN kružnice konstruisana je tangenta koja seče ove duži u tačkama B i C. Dokazati da je obim trougla ABC konstantan i jednak $2AM$.

677. Zbir unutrašnjih uglova bilo kog n–trougla jednak je $(n-2)\cdot 180°$. Dokazati.

678. Zbir spoljašnjih uglova bilo kog konveksnog n–trougla jednak je 360°. Dokazati.

679. Broj dijagonala bilo kog n–trougla jednak je $\frac{n(n-3)}{2}$. Dokazati.

680. Tri unutrašnja ugla četvorougla su 75°, 105° i 100°. Može li se oko ovog četvorougla opisati kružnica?

681. Na datoj kružnici tačke A, B, C dele kružnicu na tri dela. Izračunati unutrašnje uglove trougla ABC ako se delovi kružnice odnose kao $1:3:5$.

682. Date su kružnica $K(O)$ i prava α. Konstruisati tangente date kružnice koje su:

a) paralelne sa pravom a;

b) normalne na pravu a.

683. Konstruisati kružnicu koja sadrži datu tačku A i datu pravu b dodiruje u datoj tački B.

684. Ako su b i c katete, a hipotenuza pravouglog trougla i r poluprečnik upisane kružnice, tada je $2r = b + c - a$. Dokazati.

685. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dve prave koje se seku, i to jednu od njih u datoj tački.

686. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika, koja sadrži dve date tačke.

687.* Konstruisati trougao ako su dati dva ugla i poluprečnik opisane kružnice.

688.* Konstruisati trougao ako su dati visina i težišna duž, koje odgovaraju istoj stranici, i poluprečnik opisane kružnice.

689.* a) Konstruisati kružnicu datog poluprečnika R koja dodiruje datu pravu h i datu kružnicu $k(O, r)$.

b) Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu kružnicu $k(O, R)$ i datu pravu h u datoj tački M.

690. Konstruisati skup tačaka iz kojih se data duž AB vidi pod datim uglom α.

691. Na datoj pravoj p odrediti tačku iz koje se data duž AB vidi pod datim uglom:

a) 45°; b) 60°; c) 75°; d) α.

692. Konstruisati trougao ABC ako je dato:

a) a, t_a, α; b) b, h_b, β; c) c, t_c, γ.

693. Konstruisati proavougli trougao ako je data hipotenuza i njena visina.

694. Konstruisati jednakokraki trougao ako je data osnovica i ugao pri vrhu.

695. Konstruisati jednakokrako pravougli trougao ako je data njegova hipotenuza.

696.* Konstruisati pravougli trougao datog obima i visine koja odgovara hipotenuzi.

697. Konstruisati kružnicu koja dodiruje datu pravu p i datu kružnicu $K(O, R)$ u datoj tački M.

698. Konstruisati kružnicu koja dodiruje dve date kružnice $K(O, R)$ i $K_1(O_1, R_1)$, i to prvu u datoj tački M.

699. Konstruisati kružnicu datog poluprečnika r koja dodiruje dve date kružnice $K(O, R)$ i $K_1(O_1, R_1)$.

700. Konstruisati kružnicu koja sadrži datu tačku A i dodiruje dve date paralelne prave a i b.

701.* Konstruisati trougao ako su dati jedna stranica, ugao naspram nje i visina koja odgovara toj stranici.

702. Konstruisati pravougli trougao ako su dati:

a) hipotenuza i ortogonalna projekcija jedne katete na hipotenuzi;

b) ortogonalne projekcije kateta na hipotenuzi.

703. Stranice trougla ABC su: a, b i c, a s poluobim trougla. Dodirne tačke upisane kružnice dele stranice trougla na odsečke: $s-a, s-b$ i $s-c$. Dokazati.

704. Ako je krak jednakokrakog trapeza aritmetička sredina osnovica, u njemu se može upisati kružnica. Dokazati.

705. Težišna duž trougla manja je od njegovog poluobima. Dokazati.

706. Težišna duž trougla manja je od poluzbira stranica između kojih se nalazi.

707. Težišna duž pravouglog trougla koja odgovara hipotenuzi jednaka je polovini hipotenuze. Dokazati.

708. Visina koja odgovara kraku jednakokrakog trougla obrazuje sa osnovicom ugao jednak polovini ugla pri vrhu. Dokazati.

709. Prečnik AB i tetiva AC kružnice k obrazuju ugao od 30°. Tangenta konstruisana u tački C seče pravu AB u tački D. Dokazati da je trougao ACD jednakokraki.

710. Na datoj pravoj odrediti tačku iz koje se data duž vidi pod datim uglom.

711. U trouglu ABC odrediti tačku iz koje se sve tri stranice trougla vide pod istim uglom.

712. Izračunati periferijski ugao nad kružnim lukom jednak $\frac{1}{12}$ kružne linije.

713. Tačkama A i B kružna linija je podeljena na dva kružna luka koji stoje u razmeri 5 : 7. Izračunati periferijske uglove koji odgovaraju kružnim lucima.

714. Izračunati ugao između tangente i tetive ako tetiva deli kružnicu na dva luka u razmeri 3 : 7.

715. Dva podudarna kruga seku se pod uglom $\alpha = 60°$. Izračunati u stepenima manji kružni luk određen presečnim tačkama.

716. Iz jedne krajnje tačke prečnika kružnice k konstruisane su tangenta i sečica koje obrazuju ugao $\alpha = 20° 30'$. Izračunati u stepenima manji luk između tangente i sečice.

717. U tetivnom četvorouglu dva unutrašnja ugla na jednoj stranici iznose 152° i 134°. Odrediti druga dva ugla četvorougla.

718. Simetrale unutrašnjih uglova ma kog četvorougla uvek obrazuju tetivni četvorougao. Dokazati.

719. U tangentnom četvorouglu tri uzastopne stranice iznose 5 cm, 9 cm i 15 cm. Izračunati četvrtu stranicu četvorougla.

720. Kružnice k_1 i k_2 se dodiruju spolja u tački A. Ako je prava BC njihova zajednička spoljašnja tangenta, ugao BAC je prav. Dokazati.

721. Ako se u tetivnom mnogouglu sa parnim brojem stranica unutrašnji uglovi označe redom sa $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$, tada je $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_5 + \ldots = \alpha_2 + \alpha_4 + \alpha_6 + \ldots$ Dokazati.

722. Ako se u tangentnom mnogouglu sa parnim brojem stranica označe stranice redom sa $a_1, a_2, a_3, \ldots$, tada je $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = a_2 + a_4 + a_5 + \ldots$ Dokazati.

723. Ako je u jednakokrakom trouglu osnovica a jednaka visini koja odgovara osnovici, tada je $R = \frac{5}{8}a$, gde je R poluprečnik opisane kružnice trougla. Dokazati.

724.* U pravouglom trouglu simetrala pravog ugla istovremeno je i simetrala ugla koji obrazuju visina i težišna duž koje odgovaraju hipotenuzi. Dokazati.

725. Ako se iz svakog temena trougla i njegovog težišta konstruišu normalne duži na bilo koju pravu koja ne seče njegove stranice, onda je zbir normala iz temena tri puta veći od normalne duži iz težišta. Dokazati.

726. Za unutrašnje uglove četvorougla važi produžna proporcija $\alpha : 2 = \beta : 3 = \gamma : 4 = \delta : 7$. Izračunati uglove četvorougla.

727.* U trouglu ABC izabrana je tačka M. Dokazati da je $\angle AMB > \angle ACB$.

728.* Na stranici DC datog kvadrata $ABCD$ data je tačka M. Simetrala ugla BAM seče stranicu BC u tački N. Dokazati da je $AM = DM + BN$.

729.* Dat je pravougaonik $ABCD$ u kome je $AB > BC$. Tačka B_1 je simetrična tački B u odnosu na pravu AC, a E je presek pravih AB_1 i CD. Dokazati da su trouglovi ADE i CEB_1 podudarni.

730.* Ako su AM i BN visine trougla ABC, tada je četvorougao $ABMN$ tetivni. Dokazati.

731.* Neka su uglovi nalegli uz veću osnovicu jednakokrakog trapeza jednaki 60° i neka je manja osnovica jednaka kraku. Dokazati: da su dijagonale ovog trapeza normalne na kracima, da polove uglove uz veću osnovicu i da se seku pod uglom od 60°.

732. Neka su D, E i F dodirne tačke upisane kružnice u trouglu ABC. Dokazati da su uglovi trougla DEF, $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90° - \frac{\gamma}{2}$, gde su uglovi α, β i γ uglovi trougla ABC.

733. Simetrale uglova trougla ABC, seku opisanu kružnicu oko trougla u tačkama X, Y, Z. Uglovi trougla XYZ su: $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$, $90^o - \frac{\gamma}{2}$. Dokazati. (α, β, γ uglovi trougla ABC).

734. U trouglu ABC razlika dveju stranica jednaka je razlici odsečaka na koje je podeljena treća stranica dodirnom tačkom upisane kružnice. Dokazati.

735. Data je polukružnica prečnika AB. Na kružnom luku date su tačke D i E. Tetive AD i BE, kao i tetive AE i BD seku se u tačkama F i G (tačka F ne pripada polukrugu). Dokazati da je $FG \perp AB$.

736. Neka je $ABCD$ kvadrat upisan u krug, a P je ma koja tačka na luku AD. Ugao DPA je tri puta veći, od ma kog ugla dobijenog spajanjem tačke P sa dva uzastopna temena kvadrata. Dokazati.

737. Ako se u pravilnom petouglu dve nesusedne stranice produže do svog preseka, oba produžetka jednaka su dijagonali petougla. Dokazati.

738. Visina romba polovi njegovu stranicu. Izračunati ugao između visina romba koje sadrže teme tupog ugla.

739. Presečne tačke simetrala unutrašnjih uglova pravougaonika su temena kvadrata. Dokazati.

740. Dat je krug sa centrom O. Tangente konstruisane u krajnjim tačkama prečnika AB, seku proizvoljnu tangentu u tačkama C i D. Dokazati da je ugao COD prav.

741. Projekcije dijagonale paralelograma na ma kojoj pravoj jednaka je zbiru projekcije dve susedne stranice na istoj pravoj. Dokazati.

742. Ugao između simetrala dva uzastopna unutrašnja ugla četvorougla jednak je poluzbiru druga dva ugla tog četvorougla; a ugao između simetrala dva uzastopna spoljašnja ugla jednak je poluzbiru ta dva unutašnja ugla. Dokazati.

743. Oštar ugao između simetrala suprotnih unutrašnjih uglova četvorougla jednak je polurazlici druga dva ugla. Dokazati.

744. U trouglu ABC simetrale spoljašnjih uglova kod temena B i C seku se u tački O. Dokazati da je ugao $BOC = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

745. U trouglu ABC, razlika uglova γ i β iznosi 90°. Simetrala ugla α obrazuje sa stranicom BC ugao od 45°. Dokazati.

746. Visina koja odgovara kraku jednakokrakog trapeza jednaka je polovini veće osnovice trapeza. Izračunati uglove trapeza.

747. U pravouglom trouglu hipotenuza je dva puta veća od jedne katete. Izračunati oštre uglove trougla.

748. U trouglu ABC visine AF i CE seku se u tački O. Ako je $CO = AB$, izračunati ugao ACB.

749. U jednakokrakom trouglu simetrala ugla na osnovici seče krak pod uglom, jednakim uglu na osnovici. Izračunati unutrašnje uglove jednakokrakog trougla.

750. Simetrala tupog ugla paralelograma seče jednu njegovu stranicu pod uglom koji je jednak jednom od uglova paralelograma. Izračunati taj ugao.

751. Simetrala ugla koga čine dijagonala i stranica romba obrazuje sa drugom stranicom ugao od 66°. Izračunati uglove romba.

752.* Dat je provougli trougao ABC (ugao C prav). Neka su AD i BF simetrale uglova (tačka $D \in BC$, $F \in AC$). Tačke M i N su ortogonalne projekcije tačaka F i D na hipotenuzu. Izračunaj ugao MCN.

753. Dat je trougao ABC. Van trougla konstruisani su kvadrati $ABDE$ i $ACFG$. Ako je $CE \cap BG = \{H\}$, dokazati da je $CE = BG$ i $CE \perp BG$.

754. Izračunati unutrašnji ugao pravilnog mnogougla, ako je razlika broja dijagonala i stranica 25.

755. Koji pravilan mnogougao ima tri puta veći ugao od spoljašnjeg?

756. Izračunati zbir unutrašnjih uglova u vrhovima petokrake zvezde.

757. Spoljašnji ugao pravilnog mnogougla je devet puta manji od unutrašnjeg ugla. Izračunati broj dijagonala tog mnogougla.

758. Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 2, tada se centralni ugao smanji za 6°. Odrediti broj dijagonala mnogougla.

759. Koliko dijagonala ima pravilni mnogougao, čiji je zbir unutrašnjih uglova 1 260°?

760. Za koliko se poveća zbir unutrašnjih uglova mnogougla, ako se broj stranica poveća za 5?

761.* Ako se broj stranica mnogougla poveća za 11, onda se broj njegovih dijagonala poveća za 1991. Odrediti zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla.

762. Na hipotenuzi BC pravouglog trougla ABC date su tačke D i E, takve da je $BE = AB$ i $CD = AC$. Izračunati ugao DAE.

763.* Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za dva njegov se ugao poveća za 9°. Odrediti broj stranica mnogougla (Klasifikacioni ispit iz matematike za upis na tehničke i matematičke fakultete u Beogradu 1991.)

764.* Tetiva kruga je za 2 manja od prečnika, a odstojanje centra kruga od tetive za 2 manje od poluprečnika kruga. Izračunati dužinu tetive. (Prijemni ispit iz matematike za upis na Beogradski univerzitet juna, 1991.)

765.* Neka je u trouglu ABC, $AB = AC$ i ugao kod temena A veći od $30°$ i neka je D tačka na stranici BC takva da je $AE = AD$. Izračunati ugao EDC. (Prijemni ispit iz matematike za upis na Beogradski univerzitet, juna 1992.)

766. Dat je jednakostranični trougao ABC. Ako se sve tri stranice trougla produže za duži jednake stranici datog trougla tako da je $A - B - A_1$ i $A - C - B_1$ i $C - A - C_1$, tada je trougao $A_1 B_1 C_1$ jednakostranični. Dokazati.

767.* Oko trougla ABC opisana je kružnica k i u tački C konstruisana je tangenta t na nju. Ako prava p paralelna sa tangentom t seče stranicu AC u tački E, a stranicu BC u tački D, tada je četvorougao $ABDE$ tetivni. Dokazati.

768.* Oko trougla ABC opisana je kružnica k i u tački C konstuisana je tangenta t na nju. Ako kružnica k_1 kojoj je prečnik stranica AB trougla ABC, seče stranica AC i BC u tačkama M i N dokazati da je duž MN paralelna sa tangentom t.

769. Ugao između krakova trapeza je prav. Dokazati da je zbir kvadrata dijagonala jednak zbiru kvadrata osnovica.

770. U pravougaoniku $ABCD$ je $AB = 2BC$. Na stranici AB data je tačka P takva da je $\angle APD = \angle DPC$. Izračunati taj ugao.

771. U kvadratu $ABCD$ je M središte stranice CD, a N je središte stranice AD. Duž BM i CN seku se u tački E. Dokazati da je:
a) $BM \perp CN$; b) $AE = AB$.

772. Dat je paralelogram $ABCD$. Ako tačka $F \in AD$, $F - D - A$ i $DF = AD$. Tačka $E \in AB$, $A - B - E$ i $AB = BE$. Dokazati da je $F - C - E$.

773. Ako se iz ma koje tačke na simetrali datog ugla xAy konstruišu paralele sa kracima do preseka sa kracima dobiveni četvorougao je romb. Dokazati.

774. Podnožja normala konstruisanih iz tačke preseka dijagonala romba na njegove stranice jesu temena pravougaonika. Dokazati.

775. Simetrale unutrašnjih uglova pravougaonika obrazuju kvadrat. Dokazati.

776. Ako je manja osnovica trapeza jednaka zbiru krakova, simetrale unutrašnjih uglova na većoj osnovici seku se na manjoj osnovici. Dokazati.

777.* Ako je veća osnovica trapeza jednaka zbiru krakova, simetrale uglova na manjoj osnovici seku se na većoj osnovici. Dokazati.

778.* U svakom konveksnom četvorouglu zbir dijagonala je veći od zbira dveju naspramnih stranica. Dokazati.

779.* U konveksnom četvorouglu zbir dijagonala je veći od poluobima, a manji od obima toga četvorougla. Dokazati.

780. U konveksnom četvorouglu zbir dva spoljašnja ugla jednak je zbiru dva unutrašnja ugla koji im nisu susedni. Dokazati.

781. Dat je trougao ABC. Poluprečnik OA kruga opisanog oko trougla normalan je na pravu B_1C_1, gde su B_1 i C_1 podnožja visina konstruisanih iz temena B i C. Dokazati.

782. U jednakokrakom trouglu uglovi na osnovici su dva puta veći od ugla pri vrhu. Osnovica trougla je stranica pravilnog petougla upisanog u kružnici opisane oko trougla. Dokazati.

783.* U kružnici $k(O,R)$ upisani su kvadrat stranice a i jednakostraničan trougao stranice b. Dokazati da je $a^2 : b^2 = 2 : 3$.

784.* Ako se iz središta jedne katete pravouglog trougla konstruiše normala na hipotenuzu, tada je razlika kvadrata odsečaka hipotenuze jednak kvadratu druge katete. Dokazati.

785. Postoji li mnogougao koji ima: a) 1710 dijagonala; b) 1988 dijagonala. Koliko stranica imaju traženi mnogouglovi?

786.* Neka je D tačka u kojoj krug upisan u pravougli trougao ABC dodiruje hipotenuzu AB. Dokazati da tada važi jednakost $AC \cdot BC = 2AD \cdot BD$.

787. Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 5, onda se broj dijagonala poveća za 45. Odrediti broj stranica prvobitnog mnogougla.

788. Oko jednakostraničnog trougla ABC opisana je kružnica. Na luku BC data je proizvoljna tačka M. Tada je $BM + CM = AM$. Dokazati.

789. Ako se broj stranica konveksnog mnogougla poveća za 5, onda se broj dijagonala poveća za 1990. Koliko stranica ima mnogougao sa takvim osobinama?

790. Broj dijagonala konveksnog mnogougla je 8 puta veći od broja stranica. Odrediti zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla.

VI GLAVA

6. RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

6.1. Polinomi i operacije sa njima

Definicija 1. Neka su $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ dati realni brojevi. Preslikavanje P kojim se realan broj x preslikava u relan broj
(1) $a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_n$ naziva se realan polinom.

Definicija 2. Ako je $a_0 \neq 0$ broj n naziva se stepen polinoma P, što se zapisuje $n = \text{st}\, P$ i kaže se da je polinom P n-tog stepena po x.
Polinom (1) je sređen po opadajućim stepenima. Polinom može da bude sređen i po rastućim stepenima promenljive.

Bezuov stav. Ostatak r deljenja polinoma $P(x)$ sa $x - a$, gde je a konstanta, jednak je $P(a)$, tj. $r = P(a)$.
Ako je ostatak $r = P(a) = 0$, polinom $P(x)$ je deljiv sa $x - a$.
Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki.

791. Srediti polinom $2x + 3x^3 - 4x + 5x^2 + 2x^3 + 1 - x^2$ po rastućim stepenima.

792. Srediti polinome:
a) $5 + 2x - 3x^2 + 4x + 6x^2 - 2$;
b) $x^4 + 2x^3 - x + 4 + 2x^2 - 3x^3 - 3 - x^2$
po opadajućim stepenima.

793. Odrediti zbir polinoma $5 + 2x + x^3$ i $6 + 8x + 4x^2 + 8x^3$.

794. Pomnožiti polinome $x^2 + 2x - 7$ i $2x^2 - x + 3$.

795. Dati su polinomi $P(x) = x^3 + 2x^2 - 1$ i $Q(x) = x^2 + x + 1$.
Odrediti polinome:
a) $P(x) + Q(x)$; b) $P(x) - Q(x)$; c) $P(x) \cdot Q(x)$.

796. Dati su polinomi: $W(x) = -2x^2 + 3x - 1$; $P(x) = 4x^2 - 5x + 3$; $Q(x) = -3x^2 - 8x + 7$.
Odrediti polinome:
a) $W(x) - P(x) + Q(x)$; b) $W(x) + P(x) - Q(x)$;
c) $W(x) - P(x) - Q(x)$; d) $2W(x) - 3P(x) + Q(x)$;
e) $-3W(x) + 2P(x) - 5Q(x)$.

797. Dat je polinom $P(x) = (x+1)^3 - (x+2)(x^2 + 2x - 1)$. Srediti polinom $P(x)$ po opadajućim stepenima.

798. Odrediti realne parametre a, b, c, tako da su polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ identično jednaki:
a) $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$ i $Q(x) = (x-2)(ax^2 + bx + c)$;
b) $P(x) = 6x^3 - 23x^2 + 29x - 12$ i $Q(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$;
c) $P(x) = 12x^3 - 40x^2 + 27x - 5$ i $Q(x) = (3x-1)(ax^2 + bx + c)$;
d) $P(x) = x^3 - 2x^2 + 3$ i $Q(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$;
e) $P(x) = 2x^3 - x^2 + x + 4$ i $Q(x) = (x+2)(ax^2 + bx + c)$.

799. Odrediti količnik polinoma:
a) $(2x^2 + x - 3) : (2x + 3)$; b) $(3x^2 + x - 10) : (x + 2)$;
c) $(2x^3 + 5x^2 + 7x + 4) : (x + 1)$;
d) $(2x^3 + x^2 + x - 1) : (x^2 + x + 1)$.

800. Odrediti količnik polinoma:
a) $(a^2 - b^2) : (a + b)$; b) $(a^3 + b^3) : (a + b)$;
c) $(a^3 - b^3) : (a^2 + ab + b^2)$; d) $(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) : (x^2 - 2x + 1)$.

801. Dat je polinom $2ax^3 - 4x^2 + ax - 2a$, gde je a jedan parametar.
a) Odrediti parametar a tako da dati polinom bude deljiv sa $x - 2$;
b) Odrediti vrednost parametra a tako da ostatak deljenja datog polinoma sa $x - 2$ bude -8.

802. Za koje je vrednosti realnih parametara a, b, c polinom $F(x)$ deljiv binomima: $x - 1$, $x + 2$, $x - 3$;
a) $F(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$;
b) $F(x) = x^4 - x^3 + ax^2 + bx + c$?

Koristeći Bezuov stav ili na neki drugi način, odrediti ostatak deljenja polinoma (**803–806**):

803. $(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 4x + 1) : (x - 1)$.

804. $(3x^6 - 2x^5 + x^3 - 4x - 1) : (x + 2)$.

805. $(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1) : \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

806. $(2x^4 - 4x^3 - 6x^2 + 2x - 8) : (2x - 3)$.

Odrediti ostatak pri deljenju polinima $P(x)$ polinomom $f(x)$ (**807–811**):

807.* $P(x) = x^{200} - 3x^{199} - 1$, $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

808.* $P(x) = x^{2000} - 4x^{1998} + 2$, $f(x) = x^2 - 2x$.

809.* $P(x) = x^{2000} - 125x^{1997} + 5$, $f(x) = x^2 - 5x$.

810.* Polinom $P(x)$ pri delenju sa $x + 1$ daje ostatak 3, a pri delenju sa $x - 1$ ostatak 5. Odrediti ostatak pri delenju $P(x)$ sa $x^2 - 1$.

811.* Ako polinom $P(x)$ pri delenju sa $x - 1$ daje ostatak 6, a pri delenju sa $x + 2$ ostatak -3, odrediti ostatak pri delenju $P(x)$ sa $(x - 1)(x + 2)$.

812. Odrediti realan parametar m tako da polinom $p(x) = x^5 + mx^3 + 3x^2 - 2x + 8$, bude deljiv sa $x + 2$.

813. Odrediti realan parametar m tako da polinom $p(x) = 9(x - m)^2(5x - 16) - (x - 12)(7x - 19)^2$, bude deljiv sa $x - 3$.

814. Za koje je realne vrednosti parametra n polinom $p(x) = x^3 - 3nx^2 + 4(n^2 + 1)x - (n^3 + 5)$ deljiv sa $x - 1$?

815. Odrediti realne vrednosti parametara a i b da polinom $p(x) = ax^3 - bx^2 - 5x + 4$ pri deljenju sa $x + 1$ daje ostatak 6, a pri deljenju sa $x - 1$ daje ostatak 2.

816. Dat je polinom $p(x) = x^4 + x^3 + ax^2 + bx + c$. Odrediti realne brojeve a, b i c tako da pri deljenju datog polinoma sa: $x - 1$, $x - 2$, $x - 3$ ostaci deljenja budu redom 1, 2 i 3.

817.* Za koje je realne vrednosti parametra m polinom $p(x) = mx^3 + 11x^2 + 7x + m$ deljiv sa $2x + 3$?

Odrediti realne brojeve m i n tako da polinom $p(x)$ bude deljiv polinomom $f(x)$, zatim odrediti njihov količnik $Q(x)$ (**818–822**):

818. $p(x) = 6x^5 + mx^4 + 27x^3 + nx^2 - 5x + 6$, $f(x) = 3x^2 - 5x + 6$.

819. $p(x) = 2x^4 + 5x^3 - 17x^2 + mx + n$, $f(x) = 2x^2 - x - 6$.

820. $p(x) = x^4 - 3x^2 - 4$, $f(x) = x^2 + mx + n$.

821. $p(x) = x^3 + mx^2 + nx - 3$, $f(x) = x^2 - x + 1$.

822. $p(x) = x^4 + 2x^3 + 5x^2 - 4x + m$, $f(x) = x^2 - x + n$.

6.2. Rastavljanje polinoma na činioce

Za rastavljanje polinoma na činioce koriste se sledeći zakoni i formule:

1. Distributivni zakon – izdvajanje činioca ispred zagrade
   $ab \pm ac = a(b \pm c)$.
2. Grupisanje članova
   $ax + ay + bx + by = x(a + b) + y(a + b) = (a + b)(x + y)$.
3. Kvadrat zbira
   $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 = (a + b)(a + b)$.
4. Kvadrat razlike
   $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 = (a - b)(a - b)$.
5. Razlika kvadrata
   $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = (a + b)(a - b)$.
6. Razlika kubova
   $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.
7. Zbir kubova
   $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$.
8. Kub razlike
   $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = (a - b)^3 = (a - b)(a - b)(a - b)$.
9. Kub zbira
   $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3 = (a + b)(a + b)(a + b)$.

823. Dokazati identitete:

a) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$;
b) $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;
c) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;
d) $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;
e) $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
f) $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;
g) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

824. Koristeći formule $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ sleva nadesno, odrediti kvadrat izraza:

a) $2x + 3y$; b) $3xy - 4$; c) $a + b + c$;
d) $a - b - c$; e) $100 - 1$; f) $1\,000 + 1$;
g) $3x - \sqrt{3}$; h) $a\sqrt{2} + b\sqrt{3}$; i) $\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

825. Odrediti kub datih izraza:

a) $x+2$; b) $x-1$; c) $2x-3y$;

d) $ax+by$; e) x^2+3ay^2; f) $\frac{1}{2}-\frac{a}{3}$.

826. Dopuniti date polinome tako da postanu kvadrati binoma, zatim ih napisati kao kvadrate binoma:

a) $x^2+2x+\ldots$; b) $x^2-12x+\ldots$; c) $a^2-24a+\ldots$;

d) $x^2-4mx+\ldots$; e) $a^2+\frac{4}{5}a+\ldots$; f) $a^2+2\sqrt{5a}+\ldots$;

g) $1-4p+\ldots$; h) $a^2-ab+\ldots$; h) $25x^2+1+\ldots$;

j) $\frac{9}{16}x^2+4y^2+\ldots$; k) $x^4+y^6+\ldots$; l) $a^2+0{,}25-\ldots$;

Koristeći formulu $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$, rastaviti izraze (**827–831**):

827. a) x^2-1; b) y^2-25; c) $16-a^2$;

d) $1-m^2$; e) $9a^2-1$; f) $9x^2-(\sqrt{3})^2$;

g) $x^4y^2-0{,}01$; h) $0{,}25x^2y^2-0{,}0001$.

828. a) $\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{9}b^2$; b) $\frac{4}{25}x^2-\frac{9}{16}y^4$; c) $\frac{49}{81}m-36$;

d) $\frac{1}{16}-a^8$; e) $144a^2-25x^6$; f) $169x^2y^2-1$;

g) a^4-b^4; h) $a^{2m}-b^{2n}$.

829. a) $(a+b)^2-c^2$; b) $(x^2+y)^2-1$; c) $(x-2y)^2-9z^2$;

d) $(a-5b)^2-a^2b^2$; e) $0{,}49a^2-(x-y)^2$; f) $1-(2x-5y^2)^2$.

830. a) $(2a+b)^2-(x+3y)^2$; b) $4(a-b)^2-(2a+1)^2$;

c) $(x+3y)^2-9(x-y)^2$; d) $4(a+b)^2-(5-c)^2$.

831. a) $81a^4-16b^4$; b) $\frac{x^4y^4}{81}-625$; c) $(3x-1)^2-25$;

d) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{25}{4}$; e) $\left(2x-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{4}{25}$; f) $\left(x-\frac{4}{3}\right)^2-\frac{1}{9}$.

832. Koristeći formulu $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, rastaviti izraze:

a) x^3-1; b) x^3-27; c) $1-27a^3$;

d) $64a^3-b^6$; e) $343x^3-27y^3$; f) $1\,000a^3-0{,}001b^3$;

g) $125x^3-8$.

833. Koristeći formulu $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$, rastaviti izraze:

a) x^3+8; b) $a^3b^3+\frac{1}{64}$; c) $8a^3+b^3$;

d) $27+\frac{1}{8}y^3$; e) $1+0{,}001x^3$; f) $(x+1)^3+125$;

g) $(a+5)^3+343$.

834. Rastaviti na činioce polinome:

a) $4x^2+4x+1$; b) $0{,}01x^2+xy+25y^2$; c) $a^2+a+0{,}25$;

d) $-2yz+y^2+z^2$; e) $a^4-8a^2c+16c^2$; f) $\frac{9m^2}{16}+4+3m$.

835. Rastaviti na činioce polinome:

a) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$; b) $27x^3+27x^2y+9xy^2+y^3$;

c) $1+15m+75m^2+125m^3$; d) $8x^3-12x^2+6x-1$;

e) $\frac{1}{27}+\frac{1}{3}a^2+a^4+a^6$; f) $27m^3-108m^2n+144mn^2-64n^3$.

Koristeći distributivni zakon, rastaviti na činioce polinome (**836–838**):

836. a) a^2-ab; b) $12a^5+18a^3$; c) $mr-m^2r$;

d) $2a^{n+1}+6a^n$; e) $xa^{m+n}-xa^m$; f) $25a^{2n+3}-15a^{n+1}$.

837. a) $4ab+12ac-8ad$; b) $2(a+b)+x(a+b)$;

c) $9a^3b^2-6a^2b+12a^2b^3$; d) $a(x+1)-b(x+1)$.

838. a) $3(x+y)+ax+ay$; b) $m(x-y)+nx-ny$;

c) $ac+ad-pc-pd$; d) $a^2x+b^2y+a^2y+b^2x$;

e) $b(x-3)+c(x-3)+3-x$;

f) $p(x+y+1)-q(x+y+1)+r(x+y+1)$.

Kombinacijom metoda grupisanja i distributivnog zakona, rastaviti na činioce polinome (**839–840**):

839. a) $a^3+4a^2+4a+16$; b) $a^3-a^2b+2ab^2-2b^3$.

c) x^3-3x^2+3x-9; d) $4a^2+2ab+2ac+bc$.

840. a) $14ab+15ac-10a^2-21bc$;

b) $az^2+bz^2+az+bz+a+b$;

c) $8x^2y^3z^2-6xy^4+16x^4y^3z^2-12x^3y^4$;

d) $a^3+a^2b-a^2c-abc$;

e) $a^2x + a^2y - ax - ay + x + y$;
f) $ax^2 + bx^2 - bx - ax + cx^2 - cx$.

Rastaviti na činioce sledeće kvadratne trinome (**841–842**):

841. a) $x^2 - 10x + 9$; b) $m^2 + 6m - 7$; c) $2x^2 - 10x - 12$;
d) $x^2 + 7x + 10$; e) $a^2 + 5a + 6$; f) $x^2 - 11x + 24$.

842. a) $2x^2 - 5x - 3$; b) $2x^2 - 9x - 35$; c) $6a^2 + 11a + 4$;
d) $3y^2 + 20y + 12$; e) $a^2 + a - 2$; f) $6b^2 - 39b + 18$.

Kombinacijom raznih metoda rastaviti na faktore polinome (**843–853**):

843. a) $a^2 + 2ab + b^2 - c^2$; b) $x^2 - 2xy + y^2 - 9$;
c) $4 - p^2 + 2pq - q^2$; d) $16m^2 - 9x^2 + 12xy - 4y^2$;
e) $a^2b^2 + c^2 - 2abc - 25$; f) $x^2 - 1 - 2y - y^2$.

844. a) $a^2 - b^2 + a - b$; b) $x^2 - y^2 - x + y$;
c) $4a^2 - m^2 - 2a + m$; d) $a^3 + a^2 - 4a - 4$.

845. a) $2x - 2y - x^2 + 2xy - y^2$; b) $m^2 + 2mn + n^2 - x^2 + 2xy - y^2$;
c) $ax - bx - a^2 + 2ab - b^2$; d) $9 + 6a + a^2 - b^2 - 2bc - c^2$.

846. a) $7x^3 + 2x^2 - 63x - 18$; b) $x^3 - x^2 - x + 1$;
c) $x^3 - x^2y - xy^2 + y^3$; d) $x^2y^2 - x^2 - y^2 + 1$.

847. a) $b^3 + ab^2 - 4a - 4b$; b) $x^4 + 2x^3 - x - 2$;
c) $a^5 - a^3 + a^2 - 1$; d) $p^3x^2 - q^3x^2 - p^3 + q^3$.

848. a) $x^5 - x^3 + 27x^2 - 27$; b) $a^6 - 1$;
c) $x^3y^3 - x^3 - y^3 + 1$; d) $a^3b^2 - a^3 + 8b^2 - 8$.

849. a) $(x - y)(x^2 - z^2) - (x - z)(x^2 - y^2)$;
b) $b(b + 3)(b - 4) - (2b - 7)(b + 3) + b^2 - 9$;
c) $(x - 3)(x^2 - x + 1) + (x - 3)(2x - 1) - (x - 3)(x^2 + 4)$;
d) $(x + 1)(4x - 3) - (x + 1)(x^2 - 4) - (x + 1)(x^2 + 2x - 3)$.

850. a) $5x^{n+2} - 20x^n$; b) $a^n b^{3n} - 4a^n b^n$;
c) $12x^{3a+3} - 27x^{a+1}$; d) $4a^{3n} - 100a^n$.

851.* a) $x^4 + 4$; b) $x^4 + 4y^4$;
c) $a^4 + a^2b^2 + b^4$; d) $1 + x^2 + x^4$.

852.* a) $x^5 + x + 1$; b) $x^8 + x^4 + 1$.

853.* a) $x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y)$;
b) $(x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3$;
c) $(x^2 + 5x)(x^2 + 5x + 10) + 24$;
d) $(x^2 + 7x)(x^2 + 7x + 22) + 120$.

Koristeći Bezuov stav, rastaviti na činioce polinome (**854–860**):

854. $P(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 12$.

855. $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$.

856. $P(x) = x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48$.

857. $P(x) = x^4 - 13x^2 + 36$.

858. $P(x) = x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 15x^2 + 4x - 12$.

859. $P(x) = x^5 - x^4 - 13x^3 + 13x^2 + 36x - 36$.

860. $P(x) = x^5 + 3x^4 - 11x^3 - 27x^2 + 10x + 24$.

861. Dokazati Diofantove identitete:
a) $(ax + by)^2 + (ay - bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;
b) $(ax - by)^2 + (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$;
c) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2 + b^2)(x^2 - y^2)$.

862. Dokazati Lagranževe identitete:
a) $(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) - (ax + by)^2 = (bx - ay)^2$;
b) $(x^2 - y^2 + z^2)(a^2 + b^2 + c^2) - (ax + by + cz)^2 =$
$= (bx + ay)^2 + (cy - bz)^2 + (az - cx)^2$.

863. Dokazati identitet:
$(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$.

864. Dokazati da je polinom $P(x) = x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$ pozitivan za svako x.

865. Dokazati da je polinom $P(x) = n^6 - n^5 + n^4 + n^2 - n + 1$ pozitivan za sve realne vrednosti n.

866.* Dokazati identitete:
a) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
b) $(a - b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac + 2bc$;
c) $(a + b + c + d)^2 =$
$= 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd + a^2 + b^2 + c^2 + d^2$;
d) $(a^2 + b^2)(a^4 - a^2b^2 + b^4) - (a^3 - b^3)(a^3 + b^3) = 2b^6$;

e) $(x+y+z)^2+(x+y-z)^2+(y+z-x)^2+(z+x-y)^2 = 4(x^2+y^2+z^2)$.

867.* Ako je $a^2+b^2+c^2=u$ i $a+b+c=v$, tada je $a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=\frac{1}{2}(u+v^2)$. Dokazati.

868.* Ako je $a+b=u$ i $ab=v$, tada je $a^3+b^3=u(u^2-3v)$. Dokazati.

869.* Dokazati da je polinom $\frac{1}{4}+a^2+b^4-2\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b^2-ab^2\right)$, kvadrat trinoma.

Kombinacijom raznih metoda rastaviti na faktore sledeće polinome (**870–879**):

870. $x^{12}-x^8+x^4-1$.

871. $4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2$.

872. $(x+y+z+xyz)^2-(xy+yz+xz+1)^2$.

873. $(x^2-y^2)^2+2(x^2+y^2)+1$.

874. $a^6+a^5+a^4+2a^3+a^2+a+1$.

875. $x^4-7x^3y+5x^2y^2+31xy^3-30y^4$.

876.* $(x^2+4x+8)^2+3x(x^2+4x+8)+2x^2$.

877.* $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-12$.

878.* $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15$.

879.* $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1)-1$.

Dokazati da je dati polinom kvadrat drugog polinoma (**880–887**):

880. $36x^6+12x^3+1$.

881. $4(x+b)(x+b-a)+a^2$.

882.* $(x+1)^2(x^2+1)+x^2$.

883.* $9\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)-24\left(a+\frac{1}{a}\right)+34$.

884.* $a^2+(a+1)^2+(a^2+a)^2$.

885.* $x(x-1)(x+1)(x+2)+1$.

886.* $(x+a)(x+2a)(x+3a)(x+4a)+a^4$.

887.* $(a^3+1)^2-(a^2-1)^2(a^2+1)$.

6.3. Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima

Neka su: A,B,C,D,M polinomi različiti od nule.

1°. Količnik dva cela racionalna izraza (polinoma), pri čemu je delilac različit od nule, naziva se opšti algebarski razlomak, tj.

$$\frac{P}{Q},\quad (Q\neq 0).$$

2°. Vrednost razlomka se ne menja ako se brojilac i imenilac pomnože jednim istim algebarskim izrazom (brojem) različitim od nule, tj.

$$\frac{P}{Q}=\frac{PM}{QM},\quad (Q,M\neq 0).$$

3°. Vrednost opšteg razlomka se ne menja ako se brojilac i imenilac podele jednim istim polinomom (brojem) različitim od nule, tj.

$$\frac{P:M}{Q:M}=\frac{P}{Q},\quad (Q,M\neq 0).$$

4°. Zbir (rafzlika) opštih razlomaka jednakih imenilaca je identički jednak opštem razlomku istog imenioca, a brojilac je jednak zbiru (razlici) broioca, tj.

$$\frac{A}{C}\pm\frac{B}{C}=\frac{A\pm B}{C},\quad (C\neq 0).$$

5°. Proizvod dva opšta razlomka identički je jednak opštem razlomku čiji je brojilac jednak proizvodu broioca, a imenilac jednak je proizvodu imenioca, razlomaka koji se množe, tj.

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{AC}{BD},\quad (B,D\neq 0).$$

6°. Količnik dva opšta razlomka identički je jednak proizvodu razlomaka deljenika i recipročne vrednosti razlomka delioca, tj.

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C},\quad (B,C,D\neq 0).$$

Skratiti razlomke (**888–896**):

888. a) $\frac{4ab}{6a^2b}$; b) $\frac{9ab}{18ab}$; c) $\frac{7a^2b}{21ac}$; d) $9\frac{ab^3}{6b^2c}$.

889. a) $a\frac{(x+2)^2}{2a^2(x+2)}$; b) $\frac{x(a+b)}{2ax+2bx}$; c) $\frac{3a^2b^2(x+y)}{45a^2b^3(x^2+2xy+y^2)}$.

890. a) $\frac{1-a^2}{a-1}$; b) $\frac{x^2-8x+16}{xy-4y}$; c) $\frac{x^3-x}{x^3+2x^2+x}$;

d) $\frac{(a+b)^2-4}{2a+2b+4}$; e) $\frac{a^2-9}{ab+3b-a-3}$.

891. a) $\frac{5a^2+10ab+5b^2}{15a^2-15b^2}$; b) $\frac{x^2-1}{1+a^2x^2-x^2-a^2}$; c) $\frac{6a^2b-3a^3-3ab^2}{ab^3-a^3b}$;

d) $\frac{(a^2+b^2+c^2)^2-(a^2-b^2+c^2)^2}{4ab^2-4abc}$; e) $\frac{(ax+1)^2-(x+a)^2}{(1-x^2)(1-a^2)}$.

892. a) $\frac{a^{3n}-a^nb^{2n}}{a^{3n}-2a^{2n}b^n+a^nb^{2n}}$; b) $\frac{a^{2n}b^m-b^m}{a^{2n}b^m+2a^nb^m+b^m}$;

c) $\frac{a^{4n}c^m-b^{2n}c^m}{a^{2n}c^m-b^nc^m}$; d) $\frac{a^{n+3}+a^{n+2}}{a^{n+5}-a^{n+3}}$; e) $\frac{a^{2n+1}-a^{2n-1}}{a^{n-1}+a^n}$.

893.* a) $\frac{x^4+x^2+1}{x^4+3x^2+2x^3+2x+1}$; b) $\frac{a^4+3a^2b^2+b^4-2a^3b-2ab^3}{a^4+a^2b^2+b^4}$.

894.* a) $\frac{a^2+b^2-c^2+2ab}{a^2+c^2-b^2+2ac}$; b) $\frac{a^4+1-2a^2}{1-a-a^2+a^3}$;

c) $\frac{a^2+2ab+b^2-4}{a^2+4a-b^2+4}$; d) $\frac{a^2bc-b^3c+2b^2c^2-bc^3}{4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2}$.

895. a) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$; b) $\frac{y^2-3y-10}{y^2+y+2}$; c) $\frac{x^2-4ax+3a^2}{x^2-(a+b)x+ab}$.

896.* a) $\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}$; b) $\frac{a^2-4-|a-2|}{a^3+2a^2-5a-6}$;

c) $\frac{x^3-6x^2+11x-6}{(x^3-4x^2+3x)|x-2|}$; d) $\frac{x^2-1+|x+1|}{|x|(x-2)}$.

897.* Dokazati identitet

$$\frac{(a+1)^4+a+1}{a^4-(a^2+2a+2)^2}=-\frac{a+2}{4}.$$

Skratiti razlomke (**898–907**):

898. a) $\frac{(a^2+a+1)^2-(a-1)^2}{(a^2-a+1)^2-(a+1)^2}$; b) $\frac{x^4+xy(x^2+y^2)+y^4}{x^4+x^2y^2+y^4}$.

899. a) $\frac{x^3y^3-x^5y^3}{x^3y^3(1-xy)^2-x^3y^3(x-y)^2}$; b) $\frac{(mx+ny)^2-(nx+my)^2}{(ax+by)^2-(bx+ay)^2}$.

900. a) $\frac{a^3+b^3+ab^2-3a^2b}{a^2-2ab-b^2}$; b) $\frac{x^4-(a^2+b^2)x^2+a^2b^2}{x^2+(a+b)x+ab}$.

901. $\frac{a^2+b^2-c^2-d^2+2(ab-cd)}{a^2-b^2+c^2-d^2+2(ac-bd)}$.

902. $\frac{a^2+b^2+c^2-d^2+2(ab+bc+ac)}{a^2-b^2-c^2-d^2-2(bd+bc+cd)}$.

903. $\frac{x^3+ax^2+ax+a-1}{x^3+bx^2+bx+b-1}$.

904.* $\frac{a^3+b^3+a(b^2+c^2)+b(a^2+c^2)}{a^3-b^3+a(b^2+c^2)-b(a^2+c^2)}$.

905.* $\frac{a^3+b^3+a^2(b+c)+b^2(a+c)}{a^3-b^3+a^2(b+c)-b^2(a+c)}$.

906.* $\frac{(a+b)^3+(a+b)^2+(a+b)+1}{(a+b)^3-(a+b)^2+(a+b)-1}$.

907.* $\frac{(a+b+c)^4-5(a+b+c)^2+4}{(a+b+c)^2+3(a+b+c)+2}$.

908.* Odrediti realne brojeve l, m, n i p da se razlomak

$\frac{x^4+lx^3+mx^2+nx+p}{x^3+3x^2+x-5}$, posle skraćivanja svede na razlomak $\frac{x^2-4x+5}{x-1}$.

Skratititi razlomke (**909–912**):

909.* $A=\dfrac{x^3+(8x+15)|x-3|-27}{x^2-2x-3+7|x-3|}$.

910.* $A=\dfrac{x^3-6|x-5|-25x}{x^2-x-20+2|x-5|}$.

911.* $A=\dfrac{x^3-24|x-10|-100x}{x^2-9x-10-3|x-10|}$.

912.* $A=\dfrac{a^4-16}{a^4-4a^3+8a^2-16a+16}$.

Odrediti najmanji zajednički sadržalac polinoma (**913–918**):

913. a) a^2-2a i a^2+2a; b) x^2-2x+1 i $3x^2-3$;
c) $a^2+2ab+b^2$ i a^2-b^2; d) $2y^2-8$ i $3y^2+6y$.

914. a) $a^2-10a+25$, $3a+15$ i $2a$;
b) $3a-3$, a^2-1 i $a+3$;
c) $5a-5b$, a^2-b^2 i a^2b+ab^2;
d) $3a-15$, a^2-25 i $5-a$.

915. a) x^2+xy, $xy+y^2$ i $x^2+2xy+y^2$;
b) $2m^2-4mn+2n^2$, $6m^2-6n^2$ i $18m+18n$;
c) $25a^2-10a+1$, $50a^2+20a+2$ i $25a^2-1$;
d) a^5-81a, a^4+18a^2+81 i $45a-5a^3$.

916. a) $4-x^2$, $x-2$ i $2x^2-8x+8$;
b) a^3+8a^2+16a i $a^3+12a^2+48a+64$;
c) $2a^4-2$, a^3+a^2+a+1 i a^3-a^2+a-1.

917. a) $9a+15$, $36a^2-100$ i $-9a^2+30a-25$;
b) $2ay^2-2a$, y^3-2y^2+y i $5y^3+10y^2+5y$;
c) $4a^2+4ab+b^2$, $4a^2-b^2$ i $8a^3+b^3$.

918. a) $3x^3-12x^2+12x$, $5x^4+20x^3+20x^2$ i $3nx^2-12n$;
b) $4x^2+4xy+y^2$, $4x^2-y^2$ i $12x^3-12x^2y+3xy^2$;
c) $3x^3-12x^2+12x$, $ax^2+4ax+4a$ i $3bx^2-12b$.

Uprostiti racionalne izraze (**919–950**):

919. a) $\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x}-\dfrac{7}{x}$; b) $\dfrac{x+3}{4}-\dfrac{x-1}{4}$; c) $\dfrac{m+n}{3}+\dfrac{m-n}{3}$;
d) $\dfrac{2x+1}{4a}+\dfrac{3x+1}{4a}-\dfrac{x-2}{4a}$; e) $\dfrac{x-3}{x-5}-\dfrac{x+3}{x-5}$.

920. a) $\dfrac{4a+3b}{10}-\dfrac{2a-b}{15}$; b) $\dfrac{x-3y}{12}-\dfrac{2x-y}{8}$;
c) $\dfrac{1}{6a}+\dfrac{1}{4b^2}-\dfrac{a^2+b^2}{6ab^2}$; d) $\dfrac{2m-3p}{m^2p}-\dfrac{4m-5p}{mp^2}$.

921. a) $\dfrac{a}{ab-b^2}+\dfrac{b}{a^2-ab}-\dfrac{a+b}{ab}$; b) $\dfrac{a}{a^2-9b^2}-\dfrac{1}{a+3b}$;
c) $\dfrac{16x-x^2}{x^2-4}+\dfrac{3+2x}{2-x}-\dfrac{2-3x}{x+2}$; d) $\dfrac{1}{x^2-x}+\dfrac{2}{1-x^2}+\dfrac{1}{x^2+x}$.

922. a) $\dfrac{1}{6x+3}-\dfrac{9x+3}{8x^2-2}+\dfrac{2}{2x-1}$; b) $\dfrac{5x}{x^2-6x+9}-\dfrac{3x-1}{x^2-9}$;
c) $\dfrac{a^2-a-6}{a^2-4}-\dfrac{a-1}{2-a}-2$; d) $\dfrac{5}{2y^2+6y}-\dfrac{4-3y^2}{y^2-9}-3$.

923. a) $\dfrac{x^2+y^2}{xy}-\dfrac{x^2}{xy-y^2}+\dfrac{y^2}{x^2-xy}$; b) $\dfrac{a+1}{a+2}+\dfrac{6a}{a^2-4}-\dfrac{2a-1}{a-2}$;
c) $\dfrac{6x+5}{x+5}-\dfrac{3(2x-1)}{x-5}+\dfrac{50x}{x^2-25}$; d) $\dfrac{a+1}{a^2}-\dfrac{2}{a^2-a}+\dfrac{2}{a^3-a^2}$.

924. a) $\dfrac{a^2+ab+b^2}{a+b}+\dfrac{a^2-ab+b^2}{a-b}-\dfrac{2a^2b}{a^2-b^2}$;
b) $\dfrac{x^2y^2}{a^2b^2}+\dfrac{(x^2-b^2)(b^2-y^2)}{b^2(a^2-b^2)}+\dfrac{(a^2-x^2)(a^2-y^2)}{a^2(a^2-b^2)}$;
c) $\dfrac{a^2-bx}{a^2-ab+bx-ax}-\dfrac{3b-a}{2a-2b}+\dfrac{a+2x}{3a-3x}$.

925. a) $\dfrac{2x}{x-1}-\dfrac{3x^2+2x+1}{x^3-1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$;
b) $\dfrac{30x^2}{9x^3-x}+\dfrac{8}{6x-2}-\dfrac{15x+5}{9x^2+6x+1}$;
c) $\dfrac{1}{x^2+10x+25}+\dfrac{1}{x^2-10x+25}+\dfrac{2}{x^2-25}$;
d) $\dfrac{4a^2+9a+5}{a^3-1}-\dfrac{1-2a}{a^2+a+1}-\dfrac{6}{1-a}$.

926. a) $\frac{x}{x-1}-\frac{3x-1}{x-2}+\frac{2x+1}{x^2-3x+2}$;

b) $\frac{x-5}{x-3}+\frac{x+3}{x+5}+\frac{16}{x^2-2x-15}$;

c) $\frac{x-1}{x+1}-\frac{x-7}{x+7}+\frac{12}{x^2+8x+7}$.

927. a) $\frac{x}{2x-y}+\frac{2x^2+2xy}{2xy+3y^2}-\frac{4xy}{4x^2+4xy-3y^2}$;

b) $\frac{3-2x}{2-3x}-\frac{3+2x}{2+3x}+\frac{15x^2}{4-9x^2}$.

928. a) $1+3x+\frac{9x^2}{1+3x}-\frac{1}{1-3x}-\frac{6x}{9x^2-1}$;

b) $\frac{5x}{x+5x^2}-\frac{3-15x}{1-10x+25x^2}+\frac{10(5x^2+2x)}{1-25x^2}$.

929. a) $\frac{a^2+ax}{a^2x-x^3}-\frac{a-x}{ax+x^2}-\frac{2x}{a^2-x^2}+\frac{3}{a+x}$;

b) $\frac{5}{3x-3a}+\frac{a-3x}{x^2-a^2}+\frac{1}{2x+2a}+\frac{17x-25a}{6x^2-6a^2}$.

930. a) $\frac{1}{a-1}\cdot\frac{a^2-a}{a+1}$; b) $\frac{a^2-ab}{a^2+ab}\cdot\frac{a^2b+ab^2}{ab}$;

c) $\frac{3a^3}{x^2-1}\cdot\frac{x+1}{a}$; d) $\frac{3x-3y}{2x+2y}\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$.

931. a) $\frac{x^4-1}{a^3+a}\cdot\frac{a}{x^3+x^2+x+1}\cdot\frac{2a^2+2}{(x-1)^2}$;

b) $\frac{x^2+y^2-z^2+2xy}{b^2-a^2-c^2+2ac}\cdot\frac{a+b-c}{x+y-z}$;

c) $\frac{x^3+2x^2-x-2}{a+1}\cdot\frac{a^2+a}{x^3-2x^2-x+2}\cdot\frac{x-2}{x+2}$.

932. a) $\left(2+\frac{2n}{m-n}\right)\cdot\left(1-\frac{m-n}{m+n}\right)$; b) $\left(\frac{3-x}{x+2}-1\right)\cdot\left(\frac{x^2+1}{2x-1}-\frac{x}{2}\right)$;

c) $\left(\frac{x+z}{z}-\frac{x+y}{x}\right)\cdot\frac{z^2}{x^2-yz}$; d) $\left(1+\frac{a}{1-a}\right)\cdot\frac{1-a^2}{1+b}\cdot\frac{1-b^2}{a+a^2}$.

933. a) $\frac{7a}{6b^2}:\frac{21a^2}{8b}$; b) $\frac{4x^2y^2}{15b^3c}:\frac{8x^3y^3}{5c^2b^2}$; c) $\frac{x^2-25}{x^2-3x}:\frac{x^2+5x}{x^2-9}$;

d) $\frac{b^2-y^2}{3a^3-3y^3}:\frac{b-y}{a^2+ay+y^2}$; e) $\frac{a^2+b^2}{1+2m+m^2}:\frac{a^4-b^4}{1-2m^2+m^4}$.

934. a) $\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{n}\right):\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{n^2}\right)$; b) $\left(1-\frac{3x^2}{1-x^2}\right):\left(\frac{x}{x-1}+1\right)$;

c) $\left(\frac{2x+1}{2x-1}-\frac{2x-1}{2x+1}\right):\frac{4x}{6x+3}$; d) $\frac{ax+a}{x^2-x+1}:\left(\frac{1}{x+1}+\frac{3x}{x^3+1}\right)$;

e) $\left(\frac{x^2-x-3}{x-4}-x+2\right):\frac{25x^2-110x+121}{x^2-2x-8}$.

935. a) $\frac{y-\frac{a^2}{y}}{a-\frac{y^2}{a}}$; b) $\frac{1-\frac{2b}{a}+\frac{b^2}{a^2}}{a-b}$; c) $\frac{4-\frac{4+a^2}{a}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{a}}$;

936. a) $\frac{\frac{x^2}{5}-5a^2}{\frac{x}{5}-a}$; b) $\frac{\frac{a^2x}{b^2y}-\frac{y}{x}}{\frac{a}{y}+\frac{b}{x}}$; c) $\frac{3a-\frac{4x^2}{3a}}{1-\frac{4x^2}{9a^2}}$;

d) $\frac{1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}{\frac{(a+b)^2-c^2}{4a^2b^2}}$; e) $\frac{u^3-v^3}{u+2v+\frac{3v^2}{u-v}}$.

937. a) $\dfrac{\dfrac{2a+b}{2a-b}-\dfrac{2a-b}{2a+b}}{\dfrac{4a^2+b^2}{4a^2-b^2}-\dfrac{4a^2-b^2}{4a^2+b^2}}$; b) $\dfrac{\left(2x-\dfrac{a^2}{2x}\right)\left(4x^2-\dfrac{8x^3-2a^2x}{2x+a}\right)}{1-\dfrac{2x}{2x+a}}$;

c) $\dfrac{1+a+\dfrac{1}{1-a}}{1+\dfrac{1}{1-a^2}}$; d) $\dfrac{\dfrac{x}{1+\dfrac{1}{x}}+1-\dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-\dfrac{1}{x}}+\dfrac{1}{1-x}}$.

938. a) $\dfrac{\dfrac{a^3}{8b^3}-1}{\dfrac{a^2}{4b^2}+\dfrac{a}{2b}+1}$; b) $\dfrac{\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)\left(\dfrac{x-y}{x+y}-1\right)}{\left(\dfrac{x-y}{x+y}+1\right)\left(\dfrac{x}{y}-\dfrac{y}{x}\right)}$;

c) $\dfrac{x^3-y^3}{x+y-\dfrac{xy}{x+y}}-\dfrac{x^3+y^3}{x-y+\dfrac{xy}{x-y}}$; d) $\dfrac{\dfrac{(x+y)^3}{3xy}-x-y}{\dfrac{(x-y)^2}{xy}+1}$.

939.* $\dfrac{x+x^2+x^3+\ldots+x^n}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^3}+\ldots+\dfrac{1}{x^n}}$.

940. a) $\left(\dfrac{x}{y^2+xy}-\dfrac{2}{x+y}+\dfrac{y}{x^2+xy}\right):\left(\dfrac{x}{y}-2+\dfrac{y}{x}\right)$;

b) $\left(\dfrac{x^2-xy}{x^2y+y^3}-\dfrac{2x^2}{y^3-xy^2+x^2y-x^3}\right)\cdot\left(1-\dfrac{y-1}{x}-\dfrac{y}{x^2}\right)$;

c) $\left(\dfrac{a}{6-3a}+\dfrac{a}{a+2}+\dfrac{4a}{a^2-4}\right):\dfrac{a-4}{a-2}$;

d) $\left(\dfrac{x-y}{xy}\cdot\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right)\right):\left(\dfrac{x^2+y^2}{xy}\cdot\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}\right)\right)$.

941. a) $\dfrac{4a^2-1}{a^3-a^2-a+1}:\left(\dfrac{a}{a^2-2a+1}-\dfrac{1}{1-a}\cdot\dfrac{a}{a+1}-\dfrac{2}{a+1}\right)$;

b) $\left(2a+\dfrac{a^2+b^2}{b}\right):\left(a+\dfrac{b^2}{a+2b}\right)-\dfrac{a}{b}\left(b+1+\dfrac{2b}{a}\right)$;

c) $\dfrac{2}{3a+6}-\dfrac{a-2}{2a^2+4a}-\dfrac{2}{3a^2+12a+12}-\dfrac{4}{3a(a+2)^2}$.

942. a) $\left(x+\dfrac{6x-12}{2x-4}\right)\cdot\dfrac{1}{2x^2+6x-ax-3a}+\dfrac{2a}{a^2-4x^2}$;

b) $\dfrac{x}{ax-2a^2}-\dfrac{2}{x^2+x-2ax-2a}\cdot\left(1+\dfrac{3x+x^2}{x+3}\right)$.

943. a) $\left(\dfrac{x+y}{x-y}-\dfrac{x-y}{x+y}\right):\left(\dfrac{x-y}{x+y}+\dfrac{x+y}{x-y}\right)$;

b) $\left(\dfrac{3x}{x+y}+\dfrac{x}{x-y}-\dfrac{2xy}{x^2-y^2}\right):\dfrac{4xy}{x^2-y^2}$;

c) $\left(\dfrac{2x}{x^2+2xy}+\dfrac{4y}{x^2-4y^2}-\dfrac{y}{xy-2y^2}\right):\left(1-\dfrac{x^2-4y^2-2}{x^2-4y^2}\right)$.

944. a) $\left(\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b+c}\right):\left(\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b+c}\right)\right):\left(1+\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$;

b) $\left(\left(\dfrac{x^2}{y^3}+\dfrac{1}{x}\right):\left(\dfrac{x}{y^2}-\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{x}\right)\right):\dfrac{(x-y)^2+4xy}{1+\dfrac{y}{x}}$;

c) $\dfrac{a^2+a-2}{a^{n+1}-3a^n}\left(\dfrac{(a+2)^2-a^2}{4a^2-4}-\dfrac{3}{a^2-a}\right)$.

945. a) $\left(\frac{z-2}{6z+(z-2)^2}+\frac{(z+4)^2-12}{z^3-8}-\frac{1}{z-2}\right):\frac{z^3+2z^2+2z+4}{z^3-2z^2+2z-4}$;

b) $\left(\frac{3}{a-1}-\frac{3a^2+3a+3}{a^2-1}:\frac{a^4-a}{a^3+1}\right)\cdot\frac{a-a^2}{3}$;

c) $\left(1+\frac{8c^3}{m^3-8c^3}+\frac{m}{2c-m}\right)\left(\frac{m+2c}{2c}-\frac{m}{m+2c}\right)$.

946. a) $\left(1-\frac{3x+y}{x-y}\right)\left(1-\frac{2x+y}{x+2y}\right):\left(1+\frac{3y^2}{x^2-4y^2}\right)$;

b) $\left(\frac{2}{m^2-m}-\frac{2m}{1-m^2}\right)\cdot\frac{2m^2+2m}{m^3-1}+\frac{4}{m-1}$;

c) $\left(\frac{1}{a+1}-\frac{3}{a^3+1}+\frac{3}{a^2-a+1}\right)\left(a-\frac{2a-1}{a+1}\right)$.

947. a) $\left(\frac{9a^2+1}{1-6a+9a^2}-\frac{1}{27a^3-9a^2-3a+1}:\frac{1}{27a^3+1}\right)\cdot$
$\cdot(27a^3-18a^2+3a)$

b) $\left(\frac{2a^2+3a}{4a^2+12a+9}-\frac{3a+2}{2a+3}+\frac{4a-1}{2a+1}\right)\cdot\left(\frac{2a+3}{2a-3}\right)$;

c) $\frac{3(3-a)}{a^2-1}+\frac{4}{a+1}-\frac{6}{a^2+2a+1}-\frac{2(5-a)}{a^3+a^2-a-1}$;

d) $\left(\frac{1}{2+4m}-\frac{1-m}{8m^3+1}:\frac{1-2m}{4m^2-2m+1}\right)\cdot\frac{4m+2}{2m-1}-\frac{1}{1-4m+4m^2}$.

948. a) $\left(\left(\frac{3}{x-y}+\frac{3x}{x^3-y^3}\cdot\frac{x^2+xy+y^2}{x+y}\right):\frac{2x+y}{x^2+2xy+y^2}\right)\cdot\frac{3}{x+y}$;

b) $\frac{3x-6}{x+2}\left(\frac{3}{x-2}+\frac{3x}{x^3-8}\cdot\frac{x^2+2x+4}{x+2}\right):\frac{2x+2}{x^2+4x+4}$;

c) $\left(\frac{3x+6}{2x^3+2x^2+2x+2}+\frac{2x^2-x-10}{2x^3-2x^2+2x-2}\right):$
$:\left(\frac{5}{x^2+1}+\frac{3}{2x+2}-\frac{3}{2x-2}\right)$.

949.* a) $\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}$;

b) $\frac{1}{x(x+1)}+\frac{1}{(x+1)(x+2)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)}+$
$+\frac{1}{(x+3)(x+4)}+\frac{1}{(x+4)(x+5)}$;

c) $\frac{x^4-(x-1)^2}{(x^2+1)^2-x^2}+\frac{x^2-(x^2-1)^2}{x^2(x+1)^2-1}+\frac{x^2(x-1)^2-1}{x^4-(x+1)^2}$;

d) $\frac{9-x^2}{(2x+3)^2-x^2}-\frac{x^2-(2x-3)^2}{4x^2-(x+3)^2}+\frac{4x^2-(x-3)^2}{9(x^2-1)}$;

e) $\left(\frac{a^4-a^2+2a-1}{(a^2+1)^2-a^2}-\frac{(a^2-1)^2-a^2}{a^4+2a^3+a^2-1}\right):\frac{a^2-2a}{a^3-1}$.

950.* a) $\frac{|x^3-1|+|x+1|}{x^3+x}$; b) $\frac{1}{|x+2|}+|x-2|$;

c) $\frac{|x^2-1|+x^2}{2x^2-1}-\frac{|x-1|}{x-1}$; d) $\frac{|x|-1}{x^2-1}-\frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$;

e) $\left(\frac{x^2|x-1|}{x-1}-\frac{2x|x+1|}{x+1}+2x-4\right):|x-2|$.

951. Dokazati implikaciju

a) $(x\neq -y\wedge x\neq +1\wedge y\neq 1\wedge y\neq 0)\Rightarrow$

$$\frac{x^2-1}{y^2+xy}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{y}}-1\right)\cdot\frac{x-xy^3-y^4+y}{1-x^2}=\frac{y^2+y+1}{y};$$

b) $(a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge a\neq -b)\Rightarrow \dfrac{\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}+\dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}}-\dfrac{\dfrac{1}{b}-\dfrac{1}{a}}{\dfrac{1}{ab}}=2b;$

c) $(x\neq 0\wedge y\neq 0)\Rightarrow \left(\dfrac{(x+y)^3}{3xy}-x-y\right):\left(\dfrac{(x-y)^2}{xy}+1\right)=\dfrac{x+y}{3}.$

952.* a) $\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{1}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{1}{(c-a)(c-b)};$

b) $\dfrac{x^2}{x^2-xy-xz-yz}+\dfrac{y^2}{y^2-xy+xz-yz}+\dfrac{z^2}{(z-x)(z-y)};$

c) $\dfrac{a^2-bc}{(a+b)(a+c)}+\dfrac{b^2-ac}{(b+c)(a+b)}+\dfrac{c^2-ab}{(c+a)(c+b)}.$

953. Pokazati da vrednost izraza

$$\frac{4}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\dfrac{1}{b}}-\frac{4}{b(abc+a+c)}$$

ne zavisi od a, b, c.

954.* Pokazati da je vrednost izraza

$$\left(x^2+2x-\frac{11x-2}{3x+1}\right):\left(x+1-\frac{2x^2+x+2}{3x+1}\right),$$

ceo broj za svako $x\in Z$.

955.* Pokazati da je vrednost izraza

$$\left(6a^2+5a-1+\frac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\frac{3}{a+1}\right),$$

neparan broj za svako $a\in Z\setminus\{-1\}$.

956.* Pokazati da je vrednost izraza

$$\frac{\dfrac{1}{x^6}-64}{4+\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\frac{x^2}{4-\dfrac{4}{x}+\dfrac{1}{x^2}}-\frac{4x^2(2x+1)}{1-2x},$$

neparan broj za svako $x\in Z\setminus\{0\}$.

957. Pokazati da je izraz

$$\frac{\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}}{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}}:\frac{a^2b^2}{(a+b)^2-3ab}\cdot\frac{ab}{a^2-b^2},$$

pozitivan ako su a i b suprotnog znaka, a negativan ako su istog znaka i ako je $a\neq 0\wedge b\neq 0\wedge |a|\neq b$.

958.* Pokazati da vrednost izraza

$$\left(\frac{1}{t^2+3t+2}+\frac{2t}{t^2+4t+3}+\frac{1}{t^2+5t+6}\right)^2\cdot\frac{(t-3)^2+12t}{2}$$

ne zavisi od t ako je $t\neq -1\wedge t\neq -2\wedge t\neq -3$.

959.* Pokazati da vrednost izraza

$$\frac{1}{b(abc+a+c)}-\frac{1}{a+\dfrac{1}{b+\dfrac{1}{c}}}:\frac{1}{a+\dfrac{1}{b}},\ (a\neq 0,\ b\neq 0,\ c\neq 0)$$

ne zavisi od a, b i c.

960. Pokazati da je vrednost izraza

$$\left(2-k+4k^2+\frac{5k^2-6k+3}{k-1}\right):\left(2k+1+\frac{2k}{k-1}\right),$$

neparan broj za svako $k\neq 1\wedge k\in Z$.

961. Pokazati da izraz

$$\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{a-b}{a+b}\right)^2-\left(\frac{a+b}{a-b}-\frac{a-b}{a+b}\right)^2$$

ne zavisi od a i b, $|a|\neq b$.

962.* Pod kojim uslovima je tačna jednakost:

a) $\frac{1}{x(x-y)(x-z)}+\frac{1}{y(y-x)(y-z)}+\frac{1}{z(z-x)(z-y)}=\frac{1}{xyz}$;

b) $\frac{x^2}{(x-y)(x-z)}+\frac{y^2}{(y-z)(y-x)}+\frac{z^2}{(z-x)(z-y)}=1$;

c) $\frac{b-c}{(a-b)(a-c)}+\frac{c-a}{(b-c)(b-a)}+\frac{a-b}{(c-a)(c-b)}=$

$=\frac{2}{a-b}+\frac{2}{b-c}+\frac{2}{c-a}$;

d) $\frac{ab}{(c-a)(c-b)}+\frac{bc}{(a-b)(a-c)}+\frac{ac}{(b-c)(b-a)}-1=0$?

963. Dokazati identitete:

a) $\left(\frac{a}{c}-\frac{c-x}{a}+\frac{ax}{c^2-cx}\right):\left(\frac{a}{c-x}+\frac{c-x}{a}+2\right)=\frac{a-c+x}{a+c-x}$,

$a\neq 0, c\neq 0, x\neq c$;

b) $\left(2a+\frac{a^2+9b^2}{3b}\right):\left(a+\frac{9b^2}{a+6b}\right)-\frac{a}{3b}\left(1+3b+\frac{6b}{a}\right)=-a$,

$a\neq 0, b\neq 0, a\neq -6b$.

Uprostiti racionalne izraze (**964–981**):

964.* $\frac{(y+3)(x+y+3)}{x((y+3)^2-x^2)}-\frac{y-x+3}{x(x+y+3)}-\frac{2x}{(y+3)^2-x^2}+\frac{3}{x+y+3}$.

965. $\frac{5}{3(x-y-2)}+\frac{y-3x+2}{x^2-(y+2)^2}+\frac{1}{2(x+y+2)}+\frac{17x-25(y+2)}{6(x^2-(y+2)^2)}$.

966. $\frac{x^3-(a+b)^3}{x+a+b-\frac{x(a+b)}{x+a+b}}-\frac{x^3+(a+b)^3}{x-a-b+\frac{x(a+b)}{x-a-b}}$.

967. $\left(\frac{x+y+b}{x+y-b}+\frac{x+y-b}{x+y+b}\right)^2-\left(\frac{x+y+b}{x+y-b}-\frac{x+y-b}{x+y+b}\right)^2$.

968.* $\left(\frac{1}{x+y+1}-\frac{3}{(x+y)^3+1}+\frac{3}{(x+y)^2-x-y+1}\right)\cdot$

$\cdot\left(x+y-\frac{2(x+y)-1}{x+y+1}\right)$.

969. $\frac{x+y+1}{x+y+2}+\frac{6(x+y)}{(x+y)^2-4}-\frac{2(x+y)-1}{x+y-2}$.

970.* $\frac{(a+b)^2+(c+d)^2}{(a+b)(c+d)}-\frac{(a+b)^2}{(a+b)(c+d)-(c+d)^2}+$

$+\frac{(c+d)^2}{(a+b)^2-(a+b)(c+d)}$.

971. $\frac{a^2+a(c+d)+(c+d)^2}{a+c+d}+\frac{a^2-a(c+d)+(c+d)^2}{a-c-d}-$

$-\frac{2a^2(c+d)}{a^2-(c+d)^2}$.

972. $\frac{a^2-b(c+d)}{(a-b)(a-c-d)}-\frac{3b-a}{2(a-b)}+\frac{a+2(c+d)}{3(a-c-d)}$.

973.* $\frac{2(a+b)}{a+b-1}-\frac{3(a+b)^2+2(a+b)+1}{(a+b)^3-1}+\frac{a+b+1}{(a+b)^2+a+b+1}$.

974. $\frac{4(x+y)^2+9(x+y)+5}{(x+y)^3-1}-\frac{1-2(x+y)}{(x+y)^2+x+y+1}-\frac{6}{1-x-y}$.

975.* $\frac{(y+3)^2+x(y+3)}{x(y+3)^2-x^3}-\frac{y+3-x}{x(y+3)+x^2}-\frac{2x}{(y+3)^2-x^2}+$

$+\frac{3}{x+y+3}$.

976. $\frac{5}{3x-3(a+b)}+\frac{a+b-3x}{x^2-(a+b)^2}+\frac{1}{2(x+a+b)}+\frac{17x-25(a+b)}{6(x^2-(a+b)^2)}$.

977. $\left(\frac{3x}{x+a+b}+\frac{x}{x-a-b}-\frac{2x(a+b)}{x^2-(a+b)^2}\right):\frac{4x(a+b)}{x^2-(a+b)^2}$.

978.* $\left(\frac{3}{x+y-1}-\frac{3(x+y)+3(x+y)^2+3}{(x+y)^2-1}:\frac{(x+y)^4-x-y}{(x+y)^3+1}\right)\cdot$

$\cdot\frac{x+y-(x+y)^2}{3}$.

979. $\left(\frac{1}{a+b+1}-\frac{3}{(a+b)^3+1}+\frac{3}{(a+b)^2-a-b+1}\right)\cdot$

$\cdot\left(a+b-\frac{2(a+b)-1}{a+b+1}\right)$.

980. $\left(\frac{2}{(a+b)^2-a-b}-\frac{2(a+b)}{1-(a+b)^2}\right)\cdot\frac{2(a+b)^2+2(a+b)}{(a+b)^3-1}+$

$+\frac{4}{a+b-1}$.

981. $\frac{\frac{2ab}{a+b}-a}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a-2b}}+\frac{\frac{2ab}{a+b}-b}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b-2a}}$.

982.* Izračunati vrednost izraza

$\frac{(1+x)(1+y)(1+z)}{(1-x)(1-y)(1-z)}$, za $x=\frac{m-n}{m+n}$, $y=\frac{n-p}{n+p}$, $z=\frac{p-m}{p+m}$.

983. Dokazati identitet

$\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}:\frac{\frac{1}{b}-\frac{1}{a+c}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a+c}}=\frac{2c}{a-c-b}-1, (ab\neq 0, a\neq -b, b\neq -c,$

$|a+c|\neq b)$.

984.* Dokazati da je vrednost izraza

$\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)^2+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)^2+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$,

konstanta, za $abc\neq 0$.

985.* Dokazati implikacije:

a) $\left(x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\wedge y=\frac{(a+c-b)(a+b-c)}{(a+b+c)(b+c-a)}\wedge\right.$

$\left.\wedge(b\neq 0, c\neq 0, |b+c|\neq a)\right)\Rightarrow (x+1)(y+1)=2$;

b) $(x+y+z=0\wedge(x\neq y\neq z\wedge xyz\neq 0))\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2}=\frac{1}{3}$;

c) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0\wedge(abc\neq 0)\right)\Rightarrow\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=3$;

d) $(ac+bc=ab\wedge(a\neq 1\wedge b\neq 1\wedge c\neq 1))\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{1}{1-a}+\frac{1}{1-b}-\frac{1}{1-c}=\frac{1-2c}{(1-a)(1-b)(1-c)}$.

986.* Dokazati implikacije:

a) $(xy+x\neq -1\wedge yz+y\neq -1\wedge zx+z\neq -1\wedge xyz=1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{x}{xy+x+1}+\frac{y}{yz+y+1}+\frac{z}{zx+z+1}=1$;

b) $(xyz\neq 0\wedge xyz=1)\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+\left(y+\frac{1}{y}\right)^2+\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(z+\frac{1}{z}\right)=4$;

c) $(a+b+c=0\wedge(abc\neq 0\wedge a\neq b\wedge b\neq c\wedge c\neq a))\Rightarrow$

$\Rightarrow\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{a-b}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=9$.

987.* Dokazati da je za svako $n\in N$:

a) $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$;

b) $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$;

c) $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\ldots+\frac{1}{2n(2n+2)}=\frac{n}{2(2n+2)}$;

d) $\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\ldots+\frac{1}{n^2+3n+2}=\frac{n}{2n+4}$.

988.* Odredite sume:

a) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n\in N$;

b) $\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{3}{5^2\cdot 7^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $n\in N$.

Uprostiti racionalne izraze (**989–996**):

989. $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2}$.

990. $a^2b^2\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$.

991. $\dfrac{1-x^4}{1-x}+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)}{x-x^3}+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)}{x^3-x^6}+$
$+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)(x^3-x^4)}{x^6-x^{10}}$.

992.* $\dfrac{1}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{3}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{6}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

993.* $\dfrac{\frac{1}{a}(b-c)+\frac{1}{b}(c-a)+\frac{1}{c}(a-b)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$.

994.* $\dfrac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}}$.

995.* $\dfrac{3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}$.

996. $\dfrac{2\left(\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\right)+3}{\frac{1}{-a+b+c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}}$.

997. Izračunati vrednost izraza:

$A=2(x+y+z+xyz)+(1-x)(1-y)(1-z)+(1+x)(1+y)(1+z)$,
za $x=\frac{a-1}{a+1}$, $y=\frac{b-1}{b+1}$ i $z=\frac{c-1}{c+1}$.

998. Ako je $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$ i $z=\frac{c-a}{c+a}$, tada je $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$. Dokazati.

999. Izračunati vrednost izraza

$A=\dfrac{a-x}{b-x}+\dfrac{b-x}{a-x}-\dfrac{a^2+b^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, za $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

1000. Ako je $A(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $B(x)=\frac{1+x}{1-x}$, tada je $A(B(x))\cdot B(A(x))+1=0$. Dokazati.

Ako je $a+b+c=0$, dokazati da je (**1001–1004**):

1001.* $a^3+b^3+c^3=3abc$.

1002.* $\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+2\right)=3$.

1003.* $\dfrac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\dfrac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\dfrac{3}{4}$.

1004.* $\dfrac{a^2(a^2-2bc)}{a^4-(b-c)^4}+\dfrac{b^2(b^2-2ac)}{b^4-(a-c)^4}+\dfrac{c^2(c^2-2ab)}{c^4-(a-b)^4}=\dfrac{3}{8}$.

1005.* Odrediti realan parametar m tako da razlomak $\dfrac{(x+y+mz)^2+(x+my+z)^2+(mx+y+z)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2}$, ima konstantnu vrednost, za sve vrednosti x, y i z.

988.* Odredite sume:

a) $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$, $n\in N$;

b) $\frac{1}{1^2\cdot 2^2}+\frac{2}{3^2\cdot 5^2}+\frac{3}{5^2\cdot 7^2}+\ldots+\frac{n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$, $n\in N$.

Uprostiti racionalne izraze (**989–996**):

989. $\dfrac{\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2}{(a+b)^2-(a-b)^2}\cdot\dfrac{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}{\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2-\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2}$.

990. $a^2b^2\left(\dfrac{1}{(a+b)^2}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{2}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\right)$.

991. $\dfrac{1-x^4}{1-x}+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)}{x-x^3}+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)}{x^3-x^6}+$
$+\dfrac{(1-x^4)(x-x^4)(x^2-x^4)(x^3-x^4)}{x^6-x^{10}}$.

992.* $\dfrac{1}{(a+b)^3}\left(\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{b^3}\right)+\dfrac{3}{(a+b)^4}\left(\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}\right)+\dfrac{6}{(a+b)^5}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)$.

993.* $\dfrac{\frac{1}{a}(b-c)+\frac{1}{b}(c-a)+\frac{1}{c}(a-b)}{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)+\frac{1}{b}\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{a^2}\right)+\frac{1}{c}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)}$.

994.* $\dfrac{\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}}$.

995.* $\dfrac{3+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}}{\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}}$.

996. $\dfrac{2\left(\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{a-b+c}+\frac{c}{a+b-c}\right)+3}{\frac{1}{-a+b+c}+\frac{1}{a-b+c}+\frac{1}{a+b-c}}$.

997. Izračunati vrednost izraza:

$A=2(x+y+z+xyz)+(1-x)(1-y)(1-z)+(1+x)(1+y)(1+z)$,
za $x=\frac{a-1}{a+1}$, $y=\frac{b-1}{b+1}$ i $z=\frac{c-1}{c+1}$.

998. Ako je $x=\frac{a-b}{a+b}$, $y=\frac{b-c}{b+c}$ i $z=\frac{c-a}{c+a}$, tada je $(1+x)(1+y)(1+z)=(1-x)(1-y)(1-z)$. Dokazati.

999. Izračunati vrednost izraza

$A=\dfrac{a-x}{b-x}+\dfrac{b-x}{a-x}-\dfrac{a^2+b^2}{x^2-(a+b)x+ab}$, za $x=\dfrac{ab}{a+b}$.

1000. Ako je $A(x)=\frac{1-x}{1+x}$, $B(x)=\frac{1+x}{1-x}$, tada je $A(B(x))\cdot B(A(x))+1=0$. Dokazati.

Ako je $a+b+c=0$, dokazati da je (**1001–1004**):

1001.* $a^3+b^3+c^3=3abc$.

1002.* $\left(\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}\right)\left(\dfrac{b+c}{a}+\dfrac{c+a}{b}+\dfrac{a+b}{c}+2\right)=3$.

1003.* $\dfrac{a^2}{a^2-(b-c)^2}+\dfrac{b^2}{b^2-(a-c)^2}+\dfrac{c^2}{c^2-(a-b)^2}=\dfrac{3}{4}$.

1004.* $\dfrac{a^2(a^2-2bc)}{a^4-(b-c)^4}+\dfrac{b^2(b^2-2ac)}{b^4-(a-c)^4}+\dfrac{c^2(c^2-2ab)}{c^4-(a-b)^4}=\dfrac{3}{8}$.

1005.* Odrediti realan parametar m tako da razlomak $\dfrac{(x+y+mz)^2+(x+my+z)^2+(mx+y+z)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2}$, ima konstantnu vrednost, za sve vrednosti x, y i z.

1006.* Odrediti realan broj m tako da razlomak

$$\frac{x^3 - mx^2 - 3(3-m)x - 1}{(m-8)x^3 + 3(10-m)x^2 - 18x + 8 - m}$$ ima konstantnu vrednost za svako x.

Ako je $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$, dokazati da je (**1007–1008**):

1007.* $\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = -3.$

1008.* $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} = -\frac{a^3+b^3+c^3}{abc}.$

1009.* Ako je $\frac{m}{x} = \frac{n}{y} = \frac{p}{z}$ i $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, tada je

$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{p^2}{c^2} = \frac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}$. Dokazati.

VII GLAVA

7. HOMOTETIJA I SLIČNOST

7.1. Proporcionalnost veličina. Talesova teorema

Talesova teorema. Neka su a i b dve prave koje se seku u tački S, p prava koja ih seče redom u tačkama A i B, q prava koja ih seče u tačkama A' i B'. Tada je:

$$p \parallel q \Leftrightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'},$$

gde je k koeficijent proporcionalnosti.

1010. Datu duž AB podeliti na tri dela proporcionalna dužima čije su dužine m, n i p.

1011. Konstruisati tačke koje dele datu duž AB u datom odnosu $m:n$, gde su m i n date duži.

1012. Na polupravoj Ax data je tačka B. Konstruisati na ovoj polupravoj tačku C, tako da je $\frac{AB}{AC} = \frac{5}{8}$.

1013. Datu duž AB podeliti na 5 jednakih delova.

1014. Ako su date duži čije su dužine a i b, konstruisati duž čija je dužina:

a) $a \cdot b$; b) $\frac{a}{b}$; c) $\frac{a-b}{a+b}$; d) $\frac{a^2-b^2}{a}$.

1015. Ako su date duži čija je dužina a, b i c, konstruisati duž čija je dužina:

a) $\frac{a \cdot b}{c}$; b) $\frac{a+b}{c}$; c) $\frac{a+b}{a-c}$.

1016. Tačka C deli duž AB u odnosu $AC : CB = 2:3$. Dužina duži AC je 4,8 cm. Odrediti dužinu duži AB i CB.

1017. Data je duž $AB = 12$ cm. Odrediti spoljašnju tačku $C(A-B-C)$, tako da je $AC:BC = 5:2$.

1018. Tačka C deli duž AB u odnosu $AC:BC = 3:2$. Odrediti odnose $AC:AB$ i $AB:CB$.

1019. Kraci ugla MON presečeni su paralelnim pravama AA_1 i BB_1 (A i B su tačke na jednom kraku A_1 i B_1 na drugom). Izračunati dužinu duži OA ako su $OB + OA = 14$ m i $OB_1 : OA_1 = 4:3$.

1020. Neka je T težište trougla ABC. Konstruisane su prave koje sadrže tačku T i paralelne su sa AB i AC, i koje seku stranicu BC u tačkama D i E. a) Odrediti odnose $BD:BC$ i $EC:BC$; b) Dokazati da su duži BD, DE i EC jednake.

1021. Na jednom kraku ugla MON, počevši od temena, konstruišu se duži OA, AB i BC, koje stoje u odnosu $1:2:3$. Na drugom kraku konstruisana je duž $OA_1 = 5\,\text{cm}$. Važi i $BB_1 \parallel AA_1$ i $CC_1 \parallel AA_1$. Odrediti dužinu odsečaka A_1B_1 i B_1C_1.

1022. Dat je trougao ABC. Na pravoj BC dat je raspored tačaka $D - B - C - E$ tako da je $BD = BC = CE$. Neka je $DF \parallel B$ i $EF \parallel C$, a presek pravih FA i BC je tačka M. Dokazati da je: a) $MB:BD = MC:CE$; b) jednakost $MB = MC$; c) tačka A težište trougla DEF.

1023. Simetrala unutrašnjeg ugla trougla ABC deli stranicu naspram temena iz kojeg polazi na dva odsečka koji su proporcionalni sa ostalim dvema stranicama trougla. Dokazati.

1024. Simetrala spoljašnjeg ugla trougla ABC deli stranicu naspram temena iz kojeg polazi na dva odsečka, koji su proporcionalni sa ostalim dvema stranicama. Dokazati.

1025. U trouglu ABC konstruisana je simetrala ugla A. Stranica $AB = 8\,\text{cm}$, $AC = 14\,\text{cm}$, a odsečak BD je za 3 cm manji od odsečka DC (B–D–C). Izračunati stranicu BC.

1026. U jednakokrakom trouglu krak je dodirnom tačkom upisane kružnice podeljen u razmeri $7:5$ (računajući od vrha). Odrediti odnos kraka i osnovice.

1027. Stranice trougla ABC su a, b, c. Neka je BD simetrala ugla B, O presek simetrala uglova B i C. Odrediti odnos $OD:OB$.

7.2. Homotetija

Ako je O data tačka a k dati realan broj različit od nule. Preslikavanje u oznaci h_0 figure F na figuru F' pri kojem svakoj tački M figure F pridružuje tačku M' figure F' tako da je

$$\overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM},$$

naziva se homotetija. Tačka O je centar homotetije, k je koeficijent homotetije. Simbolički:

$$h_0(F) = F' \overset{def.}{\Leftrightarrow} \overrightarrow{OM'} = k\,\overrightarrow{OM}.$$

1028. Konstruisati homotetičnu sliku za datu pravu (ugao, trougao, kružnica) ako je data tačka O centar homotetije i ako je:

a) $k = \frac{1}{2}$; b) $k = -\frac{1}{2}$; c) $k = 2$; d) $k = -2$.

1029. Konstruisati homotetičnu sliku datog četvorougla $ABCD$ ako je:

a) A centar homotetije i $k = \frac{3}{2}$;

b) S centar homotetije i $k = -1$, gde je S središte jedne stranice četvorougla.

1030. Primenom homotetije, datu duž AB podeliti na:
a) tri odsečka, koji su proporcionalni datim odsečcima m, n, p;
b) pet jednakih delova.

1031. U dati oštrougli ΔABC upisati jednakostraničan trougao MNP.

1032. Konstruisati kružnicu koja dodiruje krake datog ugla xSy i sadrži datu tačku A.

1033. Homologne simetrale uglova dva homotetična trougla paralelne su. Dokazati.

1034. Date su dve kružnice $K(O)$ i $K_1(O_1)$, tako da je $K \cap K_1 = \{M\}$ i dve prave p, q, tako da je $p \cap q = \{M\}$. Ako je $K \cap p\{A, M\}$, $K_1 \wedge p = \{M, B\}$, $K \wedge q = \{C, M\}$ i $K_1 \cap q = \{M, D\}$, tada je $AC \parallel BD$. Dokazati.

1035. Date su dve kružnice. U jednu je upisan četvorougao, a u drugu treba upisati četvorougao sličan prvom.

1036. U dati trougao upisati trougao čije su stranice paralelne trima datim neparalelnim pravama.

1037.* Konstruisati trapez, ako se duža osnovica, jedan krak i visina odnose kao $m:n:p$ i ako su dati oštar ugao između duže osnovice i drugog kraka, kao i dijagonala koja sadrži teme datog ugla.

1038.* Konstruisati jednakokraki trapez date visine ako se krak, razlika osnovica i dijagonala odnose kao $m:n:p$.

1039. Konstruisati paralelogram ako su dati odnos dijagonala, ugao između dijagonala i visina koja odgovara jednoj stranici.

1040. U dati trougao upisati paralelogram ako su dati odnos njegovih stranica, oštar ugao jednak uglu trougla i jedna stranica koja pripada bilo kojoj stranici trougla.

1041. U dati kružni odsečak upisati pravougaonik ako je odnos dijagonale i jedne stranice $m:n$, a duža strana pripada tetivi kružnog odsečka.

1042. U dati konveksni kružni isečak upisati:
a) kružnicu;
b) pravougaonik čije stranice stoje u odnosu $m:n$;
c) kvadrat.

1043.* Date su tačke A i B i prava p kojoj ne pripadaju date tačke. Konstruisati kružnicu koja sadrži date tačke i dodiruje datu pravu.

1044.* Data je tačka A i prave p i l. Konstruisati kružnicu koja sadrži tačku A i dodiruje pravu p, a centar joj pripada pravoj l.

7.3. Sličnost trouglova

Stavovi o sličnosti trouglova. Uočimo trouglove ΔABC i $\Delta A'B'C'$.

1°. Ako je na primer $\angle A = \angle A' \wedge \angle B = \angle B'$ tada je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

2°. Ako je na primer $\angle A = \angle A' \wedge \frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'B'}$ tada je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

3°. Ako je na primer $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$ tada je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

4°. Ako je na primer $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \wedge \angle A = \angle A'$, a uglovi C i C' su ili oba oštra ili oba tupa, tada je $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

1045. Tačka D pripada stranici AB trougla ABC, duž DK paralelna je stranici AC, tačka $K \in BC$. Odrediti dužinu duži BK ako je $AD:DB = 5:6$ i $BC = 22$.

1046. Ako su dva trougla slična, onda su njihove medijane proporcionalne odgovarajućim stranicama. Dokazati.

1047. Visine u jednom trouglu su obrnuto proporcionalne odgovarajućim stranicama. Dokazati.

1048. Proizvod bilo koje dve stranice trougla jednak je proizvodu visine koja odgovara trećoj stranici i prečnika opisane kružnice oko trougla. Dokazati.

1049. Odsečak koji spaja podnožja bilo koje dve visine datog trougla odseca od njega trougao sličan datom trouglu. Dokazati.

1050. Data su dva trougla ΔABC i $\Delta A'B'C'$. Ako su odgovarajuće visine h i h', stranice a i a', obimi S i S', površine P i P', dokazati implikacije:

a) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{h}{h'} = \frac{a}{a'}$;

b) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{S}{S'} = \frac{a}{a'}$;

c) $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C' \Rightarrow \frac{P}{P'} = \frac{a^2}{a'^2}$.

1051. Dat je trougao ABC stranica $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm i $CA = 16$ cm. Duž MN paralelna je stranici AB, gde $M \in BC$, $N \in AC$. Odrediti duž MN ako je $CM = 3$ cm.

1052. Odgovarajuće stranice dva slična trougla su 15 cm i 6 cm, visina koja odgovara većoj stranici je 8 cm. Izračunati visinu koja odgovara manjoj stranici.

1053. Stranica trougla $AB = 8$ cm, a visina koja joj odgovara iznosi 6 cm; na kom rastojanju od temena C treba konstruisati pravu paralelnu sa AB tako da je njen odsečak između dveju stranica trougla jednak 4 cm?

1054. Dat je jednakokraki trougao osnovice 3 dm i kraka 6 dm. Odsečak prave, paralelne osnovici između krakova, jednak je odsečku kraka koji je bliži osnovici. Odrediti odsečak prave između krakova.

1055. U trouglu ABC su stranice $AB = 15$ cm i $AC = 10$ cm. Konstruisana je simetrala AD ugla A, $D \in BC$. Duž $DE \parallel AB$, $E \in AC$. Odrediti duži AE, EC i DE.

1056. Stranice trougla su 26 cm, 38 cm i 46 cm, a najmanja stranica njemu sličnog trougla iznosi 13 cm. Odrediti ostale stranice drugog trougla.

1057. Stranice trougla su 27,21 i 18. Odrediti stranice njemu sličnog trougla ako je koeficijent sličnosti 5 : 3 i konstruisati ovaj trougao.

1058. Stranice trougla odnose se kao 3 : 6 : 5, a najveća stranica sličnog trougla iznosi 3,6 dm. Odrediti obim drugog trougla.

1059. U trouglovima ABC i PQR $\angle A = \angle Q$, $\angle C = \angle P$, $AB = 16$ cm, $AC = 20$ cm, $QR = 12$ cm i PQ je veća od BC za 13 cm. Odrediti ostale stranice oba trougla.

1060. Dva trougla su slična. Zbir dve odgovarajuće visine je 121 cm, a koeficijent sličnosti iznosi 1,75. Odrediti visine.

1061. U trouglu ABC dato je AC=30 cm, BC=26 cm i visina CH=24cm. Odrediti poluprečnik opisane kružnice.

1062. U kružnici poluprečnika 32,5 cm upisan je trougao ABC strane $AC = 60$ cm i $BC = 52$ cm. Odrediti visinu CH trougla.

1063.* Visina CD jednakokrakog trougla ABC sa vrhom C seče opisanu kružnicu u tački E. Dokazati sličnost trouglova DBC i BCE i tačnost jednakosti $BC^2 = CD \cdot CE$.

1064. Krak jednakokrakog trougla je 12 cm, a visina koja odgovara osnovici je 8 cm. Odrediti poluprečnik opisane kružnice.

1065.* Tačkom K na prečniku AB kružnice konstruisana je prava l, normalna na ovaj prečnik. Proizvoljna tačka M kružnice spojena je sa tačkama A i B. Prave MA i MB seku pravu l u odgovarajućim tačkama C i D,

a) Dokazati jednakost $KC \cdot KD = AK \cdot KB$;

b) Tačka E simetrična je tački B u odnosu na K. Dokazati da je $\Delta KAC \sim \Delta KDE$.

1066.* U ΔABC za uglove α, β i stranice a, b i c važi implikacija $\beta = 2\alpha \Leftrightarrow b^2 = a(a + c)$. Dokazati.

1067. Stranice paralelograma su a i b, a veća visina jednaka je manjoj stranici. Odrediti drugu visinu.

1068. Stranice paralelograma su 16 cm i 12 cm, a zbir njegovih visina je 24,5 cm. Izračunati visine.

1069. Visine paralelograma su 4 cm i 6 cm, a obim 30 cm. Izračunati stranice paralelograma.

1070. Prava p sadrži jedno teme romba i na produžecima drugih dveju stranica odseca odsečke. Dokazati da je stranica romba geometrijska sredina ovih odsečaka.

1071.* U trapezu $ABCD$ $\angle BCA = \angle CDA$; dokazati da je dijagonala AC geometrijska sredina osnovica trapeza.

1072. Dijagonale trapeza presečnom tačkom podeljene su u odnosu $m : n$, a srednja linija trapeza je s. Izračunati osnovice trapeza.

1073. Osnovice trapeza su a i b, a visina h. Odrediti rastojanje presečne tačke dijagonala do veće osnovice.

1074. Osnovice trapeza su a i b, a krak c. Izračunati pomoću njih dužinu x, za koju treba produžiti krak c do preseka sa drugim krakom.

1075. Na geografskoj karti rastojanja između tri mesta su 6 cm, 5 cm, i 4,5 cm. Najveće od ovih rastojanja u prirodi iznosi 15 km. Odrediti najmanje rastojanje u prirodi i razmeru karte.

1076. Utvrditi kada su slična:
a) dva kvadrata;
b) dva romba;
c) dva pravougaonika;
d) dva paralelograma;
e) dva trapeza.

1077. Stranice petougla su: 3,5 cm; 1,4 cm; 2,8 cm; 2,1 cm i 4,2 cm. Najmanja stranica njemu sličnog petougla je 1,2 cm; izračunati ostale stranice ovog petougla.

1078. Najveća stranica petougla iznosi 14 cm, a obim 46 cm. Izračunati obim njemu sličnog petougla, ako je njegova najveća stranica 21 cm.

1079. Dve odgovarajuće stranice sličnih mnogouglova iznose 35 cm i 14 cm, a razlika njihovih obima je 60 cm. Izračunati njihove obime.

1080. U jednakokrakom trouglu osnovice 12 cm i kraka 18 cm upisana je kružnica i konstruisana je tangenta paralelna osnovici. Izračunati dužinu odsečka tangente između krakova trougla.

1081. Stranice trougla odnose se kao 2 : 3 : 4, a obim njemu sličnog trougla iznosi 83,7 cm. Izračunati stranice drugog trougla.

1082. Stranice četvorougla odnose se kao 20 : 15 : 9 : 8, a zbir dve manje stranice njemu sličnog četvorougla je 25,5 cm. Odrediti stranice drugog četvorougla.

1083. Konstruisati ΔABC ako je dato: $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ i visina $CC_1 = h_c$.

1084. Konstruisati jednakostraničan trougao date visine h.

1085. Konstruisati trougao sličan datom ako mu je data težišna duž.

1086. Konstruisati trougao sličan datom ali dva puta većih stranica.

1087.* Konstruisati trougao ako su data dva ugla i težišna duž koja odgovara stranici na kojoj su nalegli dati uglovi.

1088.* Konstruisati trougao ako su dati jedna stranica, jedan ugao na njoj i razmera dve druge stranice.

1089.* Poluprečnici dveju kružnica su R i r, a njihovo centralno rastojanje d ($d > R + r$). Izračunati rastojanje presečne tačke zajedničkih unutrašnjih tangenata od središta datih kružnica.

1090.* Primenom sličnosti trouglova dokazati da težište deli svaku težišnu duž u odnosu 2 : 1.

1091.* Dokazati da je konstantan proizvod odsečaka koje ortocentar trougla gradi na istoj visini.

1092.* Neka je E središte stranice AB kvadrata $ABCD$. Odrediti u kojoj razmeri duž DE deli dijagonalu AC.

1093.* Na osnovici AB jednakokrakog trougla ABC data je tačka M, tako da je $AM = k$. Odrediti rastojanje tačke M od krakova ΔABC u funkciji a, b, k, gde je $AB = a$ i $AC = BC = b$.

1094. U jednakokrakog trougla čija je osnovica a i krak b, ugao na osnovici 72°. Dokazati da je $b = \sqrt{a(a+b)}$.

1095. Data je kružnica k i tačka M van nje. Iz tačke M konstruisana je tangenta t i sečica s, tako da je $s \cap k = \{A, B\}$ a $t \cap k = \{T\}$. Ako je $MA = 4$ cm i $MB = 9$ cm, izračunati MT.

1096. U jednakokrakom trouglu centar upisane kružnice deli visinu koja odgovara osnovici u razmeri 12:5, krak je 60 cm. Izračunati osnovicu.

1097. Dat je jednakokraki trougao ABC sa vrhom B, osnovice b i krakom a. Ako su AN i CM simetrale uglova A i C, odrediti duž MN.

1098. U trouglu ABC prava CD je simetrala ugla C, tačka E pripada stranici BC, $B - E - C$, $DE \parallel AC$, $B - D - A$. Ako je $BC = a$, $AC = b$, izračunati DE.

1099. Tačka $F \in AD$ stranici paralelograma $ABCD$, $A - D - F$. BF seče dijagonalu AC u E i stranicu DC u G. Ako je $EF = 32$ cm, i $GF = 24$ cm, izračunati BE.

7.4. Primena sličnosti kod pravouglog trougla

Ako je trougao ABC pravougli $\angle C = 90°$, a i b katete, c hipotenuza, h hipotenuzina visina CC', p i q dužine odsečaka BC' i AC' na hipotenuzi, tada važi: $a^2 = pc$, $b^2 = cq$, $h^2 = pq$, $a^2 + b^2 = c^2$.

1100. Ako je ΔABC pravougli trougao sa pravim uglom C, a, b, c redom dužine stranica BC, CA, AB, h dužina visine CC', p i q i dužine odsečaka BC' i AC' na hipotenuzi, tada važi:
(1) $\Delta ACC' \sim \Delta ABC$, $\Delta CBC' \sim \Delta ABC$ i $\Delta ACC' \sim \Delta BCC'$
(2) $a^2 = pc$, $b^2 = cq$, $h^2 = pq$. Dokazati.

1101. Za svaki pravougli trougao važi $a^2 + b^2 = c^2$, gde su a i b dužine kateta, c dužina hipotenuze. Dokazati.

1102. Ako su a i b dužine kateta, h dužina visine, koja odgovara hipotenuzi, tada je $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Dokazati.

1103. Kružnice (O, R) i (O_1, r) su spoljašnje sa zajedničkom tačkom T. Konstruisana je spoljašnja zajednička tangenta AB. Dokazati:
1° da je dužina t tangente AB geometrijska sredina prečnika kružnice;
2° da se duž AB vidi iz tačke T pod pravim uglom;
3° da je OO_1 tangenta kružnice prečnika AB.

1104. U pravouglom trouglu katete su a i b, njihove projekcije na hipotenuzi c su p i q hipotenuzina visina h. Odrediti ostala četiri elementa ako su data dva:
a) $b = 156$ cm, $q = 144$ cm;
b) $p = 225$ cm, $q = 64$ cm;
c) $a = 136$ cm, $h = 120$ cm;
d) $a = 130$ cm, $b = 312$ cm;
e) $p = 16$ cm, $q = 9$ cm.

1105. Katete pravouglog trougla su 12 cm i 35 cm. Odrediti medijanu koja odgovara hipotenuzi.

1106. Dat je jednakokraki trougao osnovice 36 dm i kraka 30 dm. Odrediti visinu koja odgovara osnovici.

1107. U jednakokrakom trouglu visina deli krak na odsečke dužine 7 cm i 2 cm, računajući od vrha. Odrediti osnovicu trougla.

1108. Obim romba iznosi 100 mm, jedna dijagonala 30 mm. Izračunati drugu dijagonalu romba.

1109. Osnovice jednakokrakog trapeza su 21 cm i 11 cm, a visina je 12 cm. Odrediti krak.

1110. Dve kružnice, poluprečnika 15 cm i 20 cm, seku se. Izračunati njihovu centralnu razdaljinu ako je dužina njihove zajedničke tetive 24 cm.

1111. Prečnik kružnice upisane u jednakokrakom trapezu je geometrijska sredina osnovica trapeza. Dokazati.

1112. U jednakokrakom trapezu osnovica 16 cm i 9 cm upisana je kružnica. Izračunati poluprečnik kružnice.

1113. U svakom pravouglom trouglu zbir kateta jednak je zbiru hipotenuze i prečnika upisane kružnice. Dokazati.

1114. Srednja linija jednakokrakog trapeza iznosi 4 dm, a visina 3 dm. Izračunati dijagonalu trapeza.

1115. U pravouglom trapezu razlika kvadrata dijagonala jednaka je razlici kvadrata osnovica. Dokazati.

1116. Konstruisati geometrijsku sredinu za dve date duži a i b.

1117. Date su dve duži čije su dužine a i b. Konstruisati duž dužine:

a) $x=\sqrt{a^2+b^2}$;

b) $y=\sqrt{a^2-b^2}$.

1118. Konstruisati odsečak dužine x ako je $x=a\sqrt{k}$, gde je a dužina date duži, a k pozitivan broj.

1119.* Konstruisati odsečak x ako je $x=\sqrt{ab+\frac{cd}{e}}$, gde su a, b, c, d i e date duži.

1120. Konstruisati duž čije su dužine redom $\sqrt{7}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{17}$ u odnosu na datu jediničnu duž.

1121. Konstruisati duž čije su dužine redom:

a) $x=\sqrt{4a^2+b^2}$;

b) $x=\sqrt{9a^2-4b^2}$;

c) $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$;

d) $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$;

e) $x^2=a^2+ab$;

f) $x^2=b^2-ab$;

gde su a i $b\,(a<b)$ dužine datih duži.

1122. Konstruisati kvadrat jednak:

a) zbiru dva data kvadrata;

b) razlici dva data kvadrata.

1123.* Konstruisati kvadrat jednak:

a) zbiru dva data pravougaonika;

b) razlici dva data pravougaonika.

1124.* Odrediti stranicu pravilnog:

a) osmougla i

b) dvanaestougla u funkciji poluprečnika R opisane kružnice.

1125.* Konstruisati kvadrat jednak razlici dva data jednakostranična trougla.

1126.* Konstruisati kvadrat jednak zbiru dva data romba.

1127. Ako su stranice trougla ABC : $a=2pq$, $b=p^2-q^2$, $c=p^2+q^2$, gde su p i $q\,(p>q)$ ma koji celi brojevi, tada je trougao ABC pravougli. Dokazati. (Takvi trouglovi se nazivaju Pitagorini.)

1128.* Ako su a i b katete, a c hipotenuza pravouglog trougla, tada je $t_a^2+t_b^2=5t_c^2$, gde su t_a, t_b i t_c težišne duži trougla. Dokazati.

1129. Ako su a i b osnovice, c i d kraci, a d_1 i d_2 dijagonale trapeza, tada je $d_1^2+d_2^2=c^2+d^2+2ab$. Dokazati.

1130.* Primenom Pitagorine teoreme i sličnosti trouglova dokazati da je površina trougla P:

a) $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, b) $P=\frac{abc}{4R}$, c) $P=s\cdot r$,

gde su a, b i c stranice, s poluobim, i P površina trougla, a R i r poluprečnici opisane i upisane kružnice trougla.

1131. Ako su a, b i c stranice trougla ABC i ugao $A<90°$, tada je $a^2=b^2+c^2-2cb_1$ (Karnoov obrazac),
gde je b_1 ortogonalna projekcija stranice AC na stranicu AB. Dokazati.

1132.* Ako su a, b i c stranice trougla ABC i ugao $A>90°$, onda je $a^2=b^2+c^2+2cb_1$, gde je b_1 ortogonalna projekcija stranice AC na AB. Dokazati.

1133. Sečice AB i CD kružnice $k(O,R)$ seku se u tački P. Tačke A, B, C i D pripadaju kružnici k. Proizvod odsečaka PA i PB, odnosno PC i PD, konstantan je. Dokazati.

1134. Ako se tetive AB i CD kružnice $k(O,R)$ seku u tački P, tada je $PA\cdot PB=PC\cdot PD$. Dokazati.

1135. Ako se tetive AB i CD kružnice $k(O,R)$ seku u tački P, tada je $PA\cdot PB=PC\cdot PD$. Dokazati.

1136. Sečica AB kružnice $k(O,R)$ i tangenta t konstruisana u tački M kružnice k seku se u tački P. Dokazati da je $PM^2=PA\cdot PB$.

1137.* Datu duž $AB=a$ tačkom M podeliti po zlatnom preseku (sectio aurea).

Primedba. – Ako je neka duž podeljena na dva nejednaka dela tako da je veći deo geometrijska sredina cele duži i manjeg dela, kaže se da je ta duž podeljena po zlatnom preseku.

1138. Iz spoljašnje tačke P kružnice $k(O,R)$ konstruisane su tangentna duž x i sečica s, koja sa kružnicom k obrazuje odsečke koji stoje u razmeri $m:n$. Ako je dužina tetive na sečici a, odrediti tangentnu duž x.

1139. Iz spoljašnje tačke P kružnice $k(O, R)$ konstruisana je sečica s čija je spoljašnja dužina a. Tangentna duž konstruisana iz iste tačke je dužine $2a$. Izračunati dužinu tetive x koja pripada sečici s.

1140. Stranice trougla ABC su: $BC = 15\,\text{cm}$, $AC = 13\,\text{cm}$ i $AB = 4\,\text{cm}$. Odrediti oblik trougla i izračunati visinu koja odgovara stranici AB.

1141.* Dve dijagonale pravilnog petougla seku se u tački M. Dokazati da su obe dijagonale tačkom M podeljene po zlatnom preseku.

1142.* Dat je pravougaonik $ABCD$, gde je $AB = 2AD$. Iz temena A konstruisana je normala na dijagonalu BD, koja seče stranicu CD u tački E. Tada je duž $DE = \frac{1}{4}DC$. Dokazati.

1143.* Dat je paralelogram $ABCD$. Prava p sadrži teme C i seče dijagonalu BD u tački F, a stranicu AD u tački E, tako da je $BF = 4DE$. Dokazati da je $AE = 3DE$.

1144. Date su dve kružnice $k(O, r)$ i $k_1(O_1, r_1)$, koje se seku u tačkama A i B. Tangentne duži konstruisane iz ma koje tačke P prave AB na kružnice k i k_1 jednake su. Dokazati.

1145. Ako je u jednakokrakom trouglu osnovica jednaka visini koja joj odgovara, tj. $a = h_a = 8\,\text{cm}$. Izračunati poluprečnik opisane kružnice.

1146. U trougao date stranice 30 cm i odgovarajuće visine 10 cm, upisan je jednakokrako pravougli trougao, tako da je hipotenuza paralelna datoj stranici, a teme pravog ugla pripada datoj stranici. Izračunati hipotenuzu.

1147.* Dat je pravougaonik $ABCD$. Iz jednog temena konstruisana je normala na jednu dijagonalu, koja deli prav ugao u razmeri 3 : 1. Izračunati ugao između ove normale i druge dijagonale.

1148. U jednakokraki trougao osnovice 18 cm i kraka 27 cm upisana je kružnica. Izračunati rastojanje dodirnih tačaka na kracima.

1149. U kružnicu poluprečnika r upisan je jednakokraki trougao, kod koga je zbir osnovice i visine jednak prečniku kružnice. Izračunati visinu.

1150. U trougao osnovice 12 cm i odgovarajuće visine 9 cm upisan je polukrug. Prečnik polukruga paralelan je datoj stranici, krajnje tačke prečnika pripadaju drugim dvema stranicama trougla. Polukrug dodiruje datu stranicu. Odrediti poluprečnik polukruga.

1151. Poluprečnik kružnog isečka je r, a njegova najveća tetiva a. Izračunati poluprečnik kružnice upisane u kružni isečak.

1152. Iz ma koje tačke van kružnice konstruisane su tangenta i sečica na kružnicu, tako da međusobno obrazuju prav ugao. Tangentna duž je 12 dm, a tetiva je 10 dm. Izračunati poluprečnik kružnice.

1153. Poluprečnik kružnice je 8 dm, tetiva AB je 12 dm. U tački A konstruisana je tangenta iz tačke B tetiva BC paralelna sa tangentom. Odrediti rastojanje tangente i tetive BC.

1154.* Tetive AB i AC kruga k su jednake, a tetiva AD seče BC u tački E. Ako je $AC = 12$ i $AE = 8$, izračunati AD. (Prijemni ispit iz matematike za upis na Beogradski univerzitet, juna 1992).

1155.* Ako je u trouglu ABC ugao kod temena A dvaput veći od ugla kod temena B, a stranica $AC = 2$, $AB = 3$, izračunati stranicu BC. (Prijemni ispit iz matematike za upis na Beogradski univerzitet, septembra 1991. god.).

1156.* U kružnom isečku poluprečnika R, upisana je kružnica poluprečnika r. Tetiva isečka je $2a$. Dokazati da je $\frac{1}{r} = \frac{1}{R} + \frac{1}{a}$.

1157. U trouglu osnovice a i visine h upisan je pravougaonik obima $2s$, čija dva temena pripadaju osnovici trougla, a druga dva stranicama trougla. Izračunati stranice pravougaonika u funkciji od a, h i s.

1158. U trouglu stranica $a = 13\,\text{cm}$, $b = 15\,\text{cm}$ i $c = 14\,\text{cm}$ upisan je kvadrat, tako da mu dva temena pripadaju osnovici c a preostala dva stranicama a i b. Izračunati stranicu kvadrata.

1159. U trouglu stranica $a = 30\,\text{cm}$, $b = 26\,\text{cm}$ i $c = 28\,\text{cm}$ upisan je pravougaonik obima 50 cm, tako da mu dva temena pripadaju osnovici c, a druga dva stranicama a i b. Izračunati stranice pravougaonika.

VIII GLAVA

8. TRIGONOMETRIJA PRAVOUGLOG TROUGLA

8.1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla. Osnovne trigonometrijske identičnosti. Rešavanje pravouglog trougla

Ako je trougao ABC pravougli $\angle C = 90°$, $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, a i b katete c hipotenuza, tada važe sledeće definicije:

$1°.\ \sin\alpha = \frac{a}{c}$, $2°.\ \cos\alpha = \frac{b}{c}$, $3°.\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$, $4°.\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$,

$5°.\ \sec\alpha = \frac{c}{b}$, $6°.\ \operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$.

Osnovne trigonometrijske identičnosti:

$1°.\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, $4°.\ \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha = 1$,

$2°.\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $5°.\ \sin\alpha = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$,

$3°.\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $6°.\ \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$.

1160. Date su katete pravouglog trougla: $a = 8$ cm i $b = 6$ cm. Odrediti vrednosti svih trigonometrijskih funkcija uglova α i β.

1161. Date su stranice $a = 4$ cm i $b = 3$ cm pravougaonika $ABCD$. Odrediti odgovarajuće vrednosti svih trigonometrijskih funkcija ugla koji dijagonala obrazuje:
a) sa većom stranicom;
b) sa manjom stranicom pravougaonika.

1162. Izračunati vrednosti trigonometrijskih funkcija nagibnog ugla dijagonale kocke prema osnovi.

1163. Dati su hipotenuza $c = 24$ cm pravouglog trougla i $\sin\alpha = 0{,}8$. Izračunati katete.

1164. Tangens jednog od oštrih uglova pravouglog trougla iznosi 0,75, a manja kateta je 18 cm. Odrediti drugu katetu i hipotenuzu.

1165. Proveriti tačnost jednakosti:
a) $\sin 54° = \cos 36°$;
b) $\cos 75°\,30' = \sin 14°\,30'$;
c) $\cos(30° - \alpha) = \sin(60° + \alpha)$, $0° < \alpha < 30°$.

1166. Izračunati vrednost izraza:
a) $(\sin 60° + \sin 30°)(\sin 60° - \sin 30°)$;
b) $4\sin 30° + 2\cos 30° - 3\ \operatorname{tg} 30°$;
c) $2\sin 60° + 4\cos 60° - \operatorname{tg} 60°$.

1167. Ako je $\alpha = 30°$, dokazati da je:
$$\frac{4 - \sin\alpha}{1 - \sin\alpha} - \frac{25}{4\cos^2\alpha} + \frac{2}{1 + \sin\alpha} = 0.$$

1168. Ako je $\alpha = 30°$, izračunati vrednost izraza:
a) $\cos 2\alpha + \sin\alpha$; b) $\sin 2\alpha - \cos\alpha$;
c) $\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg}\alpha$; d) $\operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$.

1169. Dokazati implikaciju:
$$\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \frac{\sin\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha + \sin\beta} = \operatorname{tg}\alpha.$$

1170. Ako je $\frac{9\sin\alpha - 3\cos\alpha}{2\sin\alpha + \cos\alpha} = 2$, odrediti $\operatorname{tg}\alpha$ i ugao α $(0° < \alpha < 90°)$.

Odrediti vrednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je (**1171–1172**):

1171. a) $\sin\alpha = 0{,}6$; b) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^2 - 4}{4a}$.

1172. a) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}225$; b) $\cos\alpha = \frac{6a}{a^2 + 9}$; c) $\sin\alpha = \frac{a^2 - 9}{a^2 + 9}$.

1173. Odrediti vrednost izraza: $\frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{5\cos\alpha - 3\sin\alpha}$
ako je $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ i $0° < \alpha < 90°$.

Dokazati sledeće jednakosti (**1174–1180**):

1174. $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.

1175. $\sin^2 x = \cos^2 x - \cos^4 x + \sin^4 x$.

1176. $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha \cdot \sin^2\alpha$.

1177. $\operatorname{cotg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \cos^2\alpha \operatorname{cotg}^2\alpha$.

1178. $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

1179. $\left(1+\operatorname{tg}x+\dfrac{1}{\cos x}\right)\left(1+\operatorname{tg}x-\dfrac{1}{\cos x}\right)=2\operatorname{tg}x$.

1180. $\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+2)(2\operatorname{tg}\alpha+1)-5\sin\alpha\cos\alpha=2$.

1181. Kakav je trougao za čije oštre uglove važi jednakost $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$?

1182. Dokazati jednakost
$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}(90°-x)=1$, $0°<x<90°$.

1183. Dokazati da je:
a) $\cos^2 18°+\cos^2 36°+\cos^2 54°+\cos^2 72°=2$;
b) $\operatorname{tg}1°\cdot\operatorname{tg}2°\cdot\operatorname{tg}3°\ldots\operatorname{tg}89°=1$.

1184. Ako je $x=\dfrac{a}{\cos\alpha}+b\operatorname{tg}\alpha$ i $y=a\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{b}{\cos\alpha}$, dokazati da je:
$x^2-y^2=a^2-b^2$.

1185. Ako je $x=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\beta}$, $y=\cos\alpha\operatorname{tg}\beta$, $z=\sin\alpha$, izračunati vrednost izraza $A=x^2-y^2+z^2$.

1186. Odrediti $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ ako je:
a) $2\sin\alpha+3\cos\alpha=3$; b) $3\sin\alpha+4\cos\alpha=5$;
c) $\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}$.

1187. Dato je $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha=m$. Izračunati zbir $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{cotg}^2\alpha$.

1188. Ako je $\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{1}{2}$, izračunati $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$.

1189. Odrediti osnovne elemente pravouglog trougla ako su dati hipotenuza $c=50$ cm i ugao $\alpha=28°\,24'$.

1190. Izračunati ostale osnovne elemente pravouglog trougla ako su poznate katete: $a=304$ cm i $b=297$ cm.

Odrediti ostale osnovne elemente pravouglog trougla ako je dato (**1191 – 1195**):

1191. a) Hipotenuza $c=\sqrt{5}$ cm i ugao $\alpha=48°$;
b) kateta $a=30$ cm i ugao $\alpha=42°\,6'$.

1192. a) Hipotenuza $c=65$ cm i kateta $a=16$ cm;
b) kateta $a=70$ cm i $b=24$ cm.

1193. a) Kateta $a=28{,}15$ cm i ugao $\beta=58$;
b) kateta $b=18$ m i ugao $\beta=36°\,36'$.

1194. a) Kateta $a=261$ cm i hipotenuza $c=461$ cm;
b) kateta $a=\sqrt{17}$ cm i $b=2\sqrt{2}$ cm.

1195. a) Kateta $a=\sqrt{3}$ cm i ugao $\beta=35°\,20'$;
b) hipotenuza $c=26$ cm i ugao $\beta=49°\,49'$.

1196. U jednakokrakom trouglu dati su krak $b=53{,}3$ cm i ugao na osnovici $a=54°\,42'$. Odrediti ugao pri vrhu i osnovicu.

1197. U jednakokrakom trouglu dati su osnovica $a=30$ cm i krak $b=113$ cm. Odrediti uglove.

1198. U jednakokrakom trouglu dati su ugao pri vrhu $\gamma=46°\,48'$ i krak $b=20$ cm. Odrediti osnovicu i ugao na osnovici.

1199. U pravilnom devetouglu poluprečnik upisanog kruga je $r=8$ cm. Izračunati stranicu devetougla i poluprečnik opisanog kruga.

1200. U pravilnom desetouglu stranice $a=6{,}341$ cm odrediti poluprečnik opisanog i upisanog kruga.

1201. Stranica romba je $a=12$ cm i oštar ugao $\alpha=52°$. Odrediti dijagonale romba.

1202. Drvo baca senku dugu 5,5 cm, a Sunčevi zraci padaju pod uglom od 48°. Odrediti visinu drveta.

1203. Iz dveju tačaka A i B pravog puta $AB=400$ m tačka C van tog puta vidi se pod uglovima $\angle CAB=60°$ i $\angle CBA=45°$. Izračunati rastojanje tačke C od puta AB.

1204. Dva puta ukrštaju se pod uglom od 75°. Jedno mesto udaljeno je od jednog puta 6 km, a od raskršća puteva 12 km. Koliko je to mesto udaljeno od drugog puta?

1205. Dve sile $P=4372$ N i $Q=5642$ N su uzajamno normalne. Izračunati ugao koji zaklapa sila P sa rezultantom sila P i Q, kao i veličinu rezultante.

1206. Sa svetionika visine 120 m iznad mora vidi se brod pod depresionim uglom od 15° 30′. Koliko je brod udaljen od svetionika?

Odrediti uslove pod kojima važe jednakosti i dokazati ih (**1207–1213**):

1207. $\dfrac{1+\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}+\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha-2\cos\alpha-1}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{tg^2\alpha-1}$

1208. $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{(\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}-\dfrac{1+2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha(\mathrm{tg}^2\alpha-1)}=\dfrac{2}{\mathrm{tg}\alpha+1}$.

1209. $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha+1}{\mathrm{tg}^2\alpha-1}$.

1210. $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+\cos^2\alpha\cos^2\beta=(\sin\alpha\sin\beta+1)^2$.

1211. $(\cos\alpha+\cos\beta)^2+\sin^2\alpha\sin\beta^2=(\cos\alpha\cos\beta+1)^2$.

1212.* $\dfrac{3}{1-\sin^6\alpha-\cos^6\alpha}=(\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\ \alpha)^2$.

1213.* $\left(\mathrm{tg}^3\alpha+\dfrac{1-\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{ctg}\alpha}\right):\left(\dfrac{1-\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}+\mathrm{ctg}^3\alpha\right)=\mathrm{tg}^4\alpha$.

IX GLAVA

9. LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

9.1. Linearna jednačina sa jednom nepoznatom

1°. Jednačina

(1) $ax=b$

je opšti oblik linearne jednačine sa jednom nepoznatom, gde je x nepoznata.

2°. Broj r je rešenje jednačine (1) ako je $ar=b$.

3°. Ako je $a\neq 0$ jednačina (1) ima jedinstveno rešenje $x=\dfrac{b}{a}$. Zaista $a\dfrac{b}{a}=b$.

4°. Ako je $a=0$ i $b\neq 0$, jednačina (1) je **nemoguća** i nema rešenja.

5°. Ako je $a=0$ i $b=0$, jednačina (1) je **neodređena** i ima beskonačno mnogo rešenja.

6°. Jednačine $P(x)=0$ i $Q(x)=0$ su ekvivalentne ako je tačna formula

$$P(x)=0\Leftrightarrow Q(x)=0.$$

1214. Dokazati da su ekvivalentne jednačine $23-9x-11=24-15x$ i $4x^2-(3-2x)(2+x)=(2x+1)(3x-2)$.

1215. Da li su ekvivalentne jednačine:
$62-2(2(2(2x+1)+1)+1)=0$ i
$15-2(3x-4(x-5(2x+5)+3)-2)=3(4x-9)$?

1216. Dokazati da su ekvivalentne jednačine:
$4x+19-6x=12+5x$ i $1-5(4(3(2x-1)-2)-3)+4=0$.

1217. Pokazati da je nemoguća jednačina

$$1-\frac{x-4}{2}=\frac{3-x}{2}.$$

1218. Dokazati da je jednačina

$\dfrac{1+3x}{3}-\dfrac{6x+5}{15}=\dfrac{3x}{5}$, neodređena.

1219. Da li su ekvivalentne jednačine
$x+2=2x-3$ i $(x-5)(x+2)=(x-5)(2x-1)$?

1220. Zašto jednačina

$$x+8=4x-3\left(x-2\frac{2}{3}\right)$$

ima beskonačno mnogo rešenja?

1221. Rešiti po x jednačine:

a) $5(x-1)-4(x-3)=-20$;

b) $10x-2(25-3x)-3=8(2x-6)-5$;

c) $3x+5(x+2)(x-2)=5(x-1)(x+1)+6$.

1222. Rešiti po y jednačine:

a) $1{,}3(y-0{,}7)-0{,}12(y+10)=5y-9{,}75$;

b) $5(y+2)(2y+3)-2(y-1)(5y-4)=75$;

c) $(6y-3)(2y+1)-5(2y+1)^2+(3y-1)^2=(y-1)^2$.

1223. Rešiti po x jednačine:

a) $1-4x(x+3)(2x+9)+(2x+5)^3=0$;

b) $(2x+3)^2-(1+2x)(2x-1)=x^2-(x-1)^2$;

c) $(5x-1)^2-5(2x+4)(2x-4)=1+5(x-1)^2$.

1224. $4x(5x-1)-(x-4)(5x-2)-(3x-11)(5x+38)=0$.

1225. $(x-1)(x-2)+(x-2)(x-3)-2(x+1)(x-8)=0$.

1226. $(x+8)^2+(x+3)^2=(x+12)^2+(x-5)^2$.

1227. $(13x+3)^2-(5x+10)^2=(12x-3)^2$.

1228. $5x(3x+10)-(8x+3)^2=(3+7x)(3-7x)$.

1229. $(2x+5)^3-4x(x+3)(2x+9)+1=0$.

1230. $(x-0{,}1)^2-3x(x-2{,}11)=7{,}033-(2x+6{,}8)(x-0{,}8)$.

1231. Rešiti jednačine:

a) $\frac{x+2}{5}-3=\frac{x-1}{2}-x$; b) $2+\frac{y+17}{5}-\frac{3y-7}{4}=0$;

c) $\frac{2-3u}{8}+u-\frac{4u+3}{4}=-2\frac{1}{2}$; d) $\frac{9z+7}{4}-\left(1-\frac{2-z}{9}\right)=7z$.

Rešiti jednačine (1232–1234):

1232. a) $\frac{3(x+1)}{2}-\frac{2(x-3)}{5}+2x-1=\frac{31x}{10}+4$;

b) $y-\left(\frac{3y+1}{5}-\frac{2y-7}{2}\right)=5-\frac{y+6}{2}$;

c) $\frac{5t+1}{6}-\left(\frac{1+9t}{8}-\frac{3t-1}{5}\right)=\frac{t-1}{3}$;

d) $\frac{3}{5}(z+1)-\frac{3}{4}(z-11)=\frac{2}{11}(2z-5)$.

1233. a) $\frac{1+\frac{x}{4}}{2}+\frac{\frac{7x}{2}+1}{6}-\frac{1+5x}{24}-\frac{\frac{7}{2}+6x}{12}=\frac{1}{3}$;

b) $-\frac{1}{2}x+\frac{2x-\frac{10-7x}{3}}{2}+\frac{x-\frac{1+x}{3}}{3}=1$;

c) $\frac{1-\frac{6-x}{3}}{2}+x-\frac{\frac{x}{2}-\frac{3+x}{4}}{2}=3$.

1234. a) $\frac{1{,}3-3x}{2}-\frac{1{,}8-8x}{1{,}2}=\frac{0{,}4-5x}{0{,}3}$;

b) $1{,}2y-\frac{0{,}18y-0{,}05}{0{,}5}=0{,}4y+8{,}9$;

c) $\frac{0{,}02-2z}{0{,}02}-7\frac{1}{2}=\frac{2(2-3z)}{0{,}01}-2{,}5$.

1235. Ispitati konjunkcije:

a) $x+3\neq 0\wedge x^2-9=0$; b) $x^2-x+1\neq 0\wedge x^3+1=0$;

c) $5x-6\neq 0\wedge 25x^2-36=0$.

1236. Koristeći ekvivalenciju $\frac{A}{B}=0\Leftrightarrow A=0\wedge B\neq 0$, rešiti jednačine:

a) $\frac{x-3}{x+1}=0$; b) $\frac{x+1}{x^2+1}=0$; c) $\frac{x(x-2)}{x^2-4}=0$;

d) $\frac{2x+1}{x-1}=1$; e) $\frac{6x-1}{2+x}=3$.

1237. Rešiti po x jednačine:

a) $\frac{x-3}{x+3}+\frac{3x-1}{3x+1}=2$; b) $\frac{2x-9}{2x-5}+\frac{3x}{3x-2}=2$;

c) $\frac{9x+1}{4x-3}-3=\frac{1-x}{20x-15}+\frac{2x+5}{4x-3}$;

d) $\frac{29}{24}-\frac{4}{x-8}=\frac{3}{2x-16}-\frac{2}{3x-24}$.

1238. Rešiti po y jednačine:

a) $\frac{3y-1}{y-4}-\frac{6y+5}{3y+9}+\frac{9}{5y+15}-\frac{11}{45}$;

b) $\frac{4y-1}{y-4}-\frac{5y}{3y-12}-\frac{6y-4}{5y-20}=1+\frac{y+1}{2y-8}$;

c) $\frac{y+1}{2y-1}-\frac{11y+5}{12(2y-1)}=\frac{y-3}{4-8y}+\frac{1}{6}$.

1239. Rešiti po z jednačine:

a) $\frac{1}{8z-16}+\frac{5-z}{8z-4z^2}=\frac{7}{8z}-\frac{z-1}{2z(z-2)}$;

b) $\frac{z-1}{2z^2-18}-\frac{4z+1}{4z^2-36}+\frac{2}{z+3}+\frac{3}{2z-6}$;

c) $\frac{6z+5}{4z+3}-\frac{7-3z}{3-4z}=\frac{12z^2+30z-21}{16z^2-9}$.

1240. $\frac{1}{4x-6}+\frac{1}{8x+12}-\frac{3(2x+1)}{4x^2-9}=0$.

1241. $\frac{10x-18}{12x^2-27}-\frac{1}{2x+3}+\frac{4}{18x-27}-\frac{5}{9(2x-3)}=0$.

1242. $\frac{1}{18x^2-30x}-\frac{1}{12x^2-20x}+\frac{3(x+1)}{18x^2-50}-\frac{1}{6x}=0$.

1243. $\frac{2x-1}{x-3}-\frac{x^2-3x-4}{x^2+x-12}-\frac{x+16}{x+4}=0$.

1244. $\frac{2}{y^2-4}-\frac{1}{y^2-4y+4}-\frac{1}{y^2+5y+6}=0$.

1245. $\frac{6}{y-6}-\frac{2(y+14)}{y^2-4y-12}=\frac{4y+11}{y^2+3y+2}$.

1246. $\frac{5t+4}{t+4}-\frac{9-3t-2t^2}{16-t^2}+\frac{13-3t}{t-4}=0$.

1247. Pokazati da jednačine:

a) $\frac{x+1}{8-x^3}-\frac{1}{2x^2-x^3}+\frac{2}{x^4+2x^3+4x^2}+\frac{1}{x^2}=0$;

b) $\frac{x}{x-2}-\frac{2x-3}{x+2}=\frac{x^2}{4-x^2}$;

nemaju rešenje.

1248. Rešiti po x jednačine:

a) $\frac{1+3x}{3x-1}+\frac{1-3x}{1+3x}=\frac{12}{1-9x^2}$; b) $\frac{2}{6x+1}-\frac{3}{1-6x}=\frac{8+9x}{36x^2-1}$;

c) $\frac{3}{4x^2+20x+25}+\frac{4}{4x^2+4x+1}=\frac{7}{(2x+5)(2x+1)}$;

d) $\frac{1}{9-12x+4x^2}-\frac{3}{9-4x^2}=\frac{4}{9+12x+4x^2}$.

1249.* Rešiti po y jednačine:

a) $\frac{3}{4y-12}-\frac{0{,}75y-2}{y^2-6y+9}=\frac{y+2}{y^3-9y^2+27y-27}$;

b) $\frac{4y}{1-6y+12y^2-8y^3}=\frac{1}{2(1-4y^2)}-\frac{3}{2-8y+8y^2}$;

c) $\frac{1}{15y-10}-\frac{5-y}{27y^3-54y^2+36y-8}=\frac{1{,}2y-1}{18y^2-24y+8}$.

1250. Rešiti po x jednačine (**1250–1259**):

a) $|x|+2(x-3)=6$; b) $|x-2|=4$;

c) $|3x-2|+x=2$; d) $2|x+1|+x-3=0$;

e) $|x|+|x-1|=1$; f) $|x+2|+|x-3|=5$;

g) $|x-1|+|x-2|+|x-3|=18$;

h) $|x-2|+|x-1|=|x+2|$; k) $2+|x-6|=|x-4|$;

l) $|x-2|+|x-3|+2|x-4|=9$;

m) $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=x+2$.

1251. a) $|x-2|+|x+5|=7$; b) $|x+4|-|x-7|=11$;
c) $|x-1|-|x+5|=6$; d) $|x+4|-|x-4|=8$;
e) $||x+2|-5|=8$; f) $||x-6|-8|=10$.

1252. $x+4\sqrt{2}=3x\sqrt{2}-4$.

1253. $2x(\sqrt{5}-1)=3-x\sqrt{5}$.

1254. $(2x-3)^2-(x\sqrt{2})^2=2(x-\sqrt{2})(x-1)$.

1255. $(2x\sqrt{5}-1)^2-(4x-\sqrt{5})^2=(2x-3\sqrt{5})^2$.

1256. $\dfrac{x+2}{\sqrt{2}-1}=\dfrac{x+\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$.

1257. $\dfrac{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\dfrac{2x\sqrt{2}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

1258. $\dfrac{2\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x}=\dfrac{1-\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-\sqrt{3}}$.

1259. $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{5}}}=\dfrac{\sqrt{10}-1}{x}$.

1260. Rešiti po y jednačine:

a) $\dfrac{3-\frac{1}{y}}{3+\frac{1}{y}}-\dfrac{1}{y}=\dfrac{y-\frac{1}{3}}{y+\frac{1}{3}}-\dfrac{1}{3}$; b) $\dfrac{3}{2}-\dfrac{\frac{3}{4}y+\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+y}=\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}+y}$;

c) $\dfrac{\frac{y+1}{y-1}-1}{\frac{y+1}{y-1}-\frac{y-1}{y+1}}=\dfrac{7}{2}$; d) $\dfrac{\frac{y+1}{y-1}-\frac{y-1}{y+1}}{1+\frac{y+1}{y-1}}=\dfrac{1}{2}$.

1261. Rešiti po x jednačine (**1261**–**1267**):

a) $1-\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-x}}=2$; b) $\dfrac{1}{1-\frac{1}{1-\frac{1}{x}}}=3$.

1262. $\dfrac{\frac{\frac{5}{6}x+1}{\frac{7}{11}+x-5}}{\frac{11}{8}+x-2}=x-21$.

1263. $\dfrac{1}{2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{3}{x+1}}}}=\dfrac{16}{37}$.

1264. $\dfrac{1}{\frac{5}{7(x-3)}-\frac{2}{5(x-3)}}=\dfrac{49}{\frac{1}{x-5}+\frac{5}{\frac{1}{2}(x-5)}}$.

1265. $\dfrac{1\frac{1}{2}x+9}{5}-\dfrac{2\frac{1}{3}x-11}{15}=\dfrac{1\frac{3}{4}x+3}{9}+\dfrac{4-\frac{7}{6}x}{6}+5$.

1266. $\dfrac{\frac{\frac{x-3}{4}+x+2}{5}+5}{3}=x-12$.

1267. $\dfrac{\frac{\frac{\frac{4}{5}x-12}{4}+x-1}{5}+x-3}{7}=\dfrac{\frac{\frac{\frac{4}{5}x+5}{7}+x-3}{4}+x-16}{3}$.

1268. Rešiti po x jednačine:

a) $\dfrac{2x}{3}-\dfrac{2x-4}{3}+\dfrac{\frac{3x-5}{4}-\frac{5x-3}{6}}{\frac{4x-3}{9}-\frac{2x-5}{4}}=\dfrac{2x-3}{3}$;

1269. Rešiti po x jednačine (m je realan parametar):

a) $m(mx+1)=2(2x-1)$; b) $m^3x-m^2-4=4m(x-1)$;

c) $m^2x+4=m(x+4)$; d) $10+3(x-2)=mx+3$.

1270. Rešiti po x jednačine (a je realan parametar):

a) $1-3a+5x=ax-2a+4x$; b) $(x+a)^2=x(x+a)+4a^2$;

c) $a\left(x-\frac{1}{a^2}\right)+a^2\left(x-\frac{1}{a}\right)=2$.

1271. Rešiti po y jednačine (a, b, c realni parametri) (**1271–1279**):

a) $(3y-2c)^2-(y-2c)(2y+c)=7y^2-12c^2$;

b) $(2y+a)^2=4(y+1)(y-1)+4(y+1{,}25a^2)$;

c) $y(y-b)-c^2=(y-b)(y+b)-cy$;

d) $a(b-y)+by+ab=a^2+b^2$.

1272. $(a^2+2b^2)(x-a)=(2a^2+b^2)(x+b)$.

1273. $y(a-y)+(b-y)^2=a^2+3b^2$.

1274. $(x-a)^2-(x-b)^2+3(a-b)^2=0$.

1275. $4(x-a-1)^2+5(x-3a-2)^2=(3x+1)^2$.

1276. $((a^2-1)x-1)^2+(2ax-1)^2=((a^2+1)x+1)^2$.

1277. $3ax-(2x-3a)^2=(2x+a)(5a-2x)$.

1278. $4a^2-(3x-2a)^2=(5a-x)(5x+3a)-(2x+3a)^2$.

1279. $(2x-3b)^3=(x+6b)(x-9b)(8x-12b)-(3b)^3$.

Rešiti po x jednačine (a, b, c, m su realni parametri) (**1280–1291**).

1280. a) $\frac{3}{x-m}-\frac{2}{x+m}=\frac{3x-7m}{x^2-m^2}$;

b) $\frac{(a+b)x}{a-b}-\frac{(a-b)(a-x)}{a+b}=\frac{(2x+a)(a-b)}{a+b}$;

c) $\frac{b-x}{a+x}+\frac{c-x}{a-x}=\frac{a(c-2x)}{a^2-b^2}$; d) $\frac{a-x}{b-a}-\frac{a+x}{a+b}=\frac{2ax}{a^2-b^2}$.

1281. a) $\frac{2a+x}{a+2}+\frac{x-2a}{a-2}=\frac{ax-2}{a^2-4}$;

b) $\frac{3n+x}{n+3}+\frac{x-3n}{n-3}=\frac{nx-3}{n^2-9}$;

c) $\frac{3x-2}{a^2-2a}+\frac{x-1}{a-2}+\frac{2}{a}=0$;

d) $\frac{2a-x}{1-2a}-\frac{2a+x}{2a+1}-\frac{2ax}{4a^2-1}=0$.

1282. $\frac{a+b}{a-b}x-4ab=\frac{a-b}{a+b}x$.

1283. $\frac{a+b}{a-b}x=\frac{b-a}{a+b}x+\frac{a^2+b^2}{2}$.

1284. $\frac{1}{(a^2+a)x}-\frac{1}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}=\frac{1}{ax}$.

1285. $\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{x}{a^2+a}-\frac{1}{a+1}=\frac{x}{a^2+2a+1}$.

1286. $\frac{a}{x}=\frac{a-b}{x+2a-4b}+\frac{b}{x-2a+4b}$.

1287. $\frac{2}{3a+2x}-\frac{3a-4x}{9a^2-4x^2}-\frac{3a}{9a^2-12ax+4x^2}=0$.

1288. $\frac{2}{y+4}+\frac{2a-y}{y^2-16}-\frac{2a+y}{y^2-8y+16}=0$.

1289. $\frac{a+2b}{z+a}-\frac{2az+5bz+b^2}{2z^2-2a^2}+\frac{bz+b^2}{2z^2-4az+2a^2}=0$.

1290. $\frac{a-4x}{a^2-5a+6}-\frac{a-4x}{a^2-a-6}=\frac{4}{a^2-4}$.

1291.* a) $\frac{1}{ax-a^2}+\frac{1}{ax-ab}+\frac{1}{bx-ab}+\frac{1}{bx-b^2}=0$;

b) $\frac{a+1}{a(x+3)}-\frac{3ax-5}{a(x^2+2x-3)}=\frac{4}{x-1}$;

c) $\frac{2m-5}{(m-1)(x+2)}-\frac{3}{x+1}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2}$;

d) $\frac{x-1}{a-3}-\frac{ax}{a^2+3a+9}=\frac{21x-a^2}{a^3-27}$.

1292. Rešiti po v jednačinu (M, n, w realni brojevi):

$M=\frac{n(v+w)}{v-w}$.

1293. Rešiti po t jednačinu (R, r, p realni brojevi):

$\frac{tr+p}{tr-p}=\frac{R}{r}$.

1294. Rešiti po s jednačinu (P, r realni brojevi):
$P = r\pi(r+s)$.

1295. Rešiti po r jednačinu (v, h realni brojevi):
$3v = h^2(3r-h)$.

1296. Pokazati da je rešenje jednačine (po x):
$$\frac{(m-1)(2x+m)}{m+1} = \frac{(x-m)(m-1)}{m+1} + \frac{x(m+1)}{m-1},$$
pozitivno (m dati realan broj za koji važi $m \neq 0$ i $|m| \neq 1$).

1297. Pokazati da je rešenje jednačine (po x):
$$\frac{ax+b}{x^2-ax} + \frac{ax-b}{x^2+ax} = \frac{2ax+4}{x^2-a^2},$$
pozitivno ako su dati realni brojevi a istog znaka i ako je $x \neq 0$ i $|x| \neq a$.

1298. Data je jednačina $\frac{n^2-x^2}{nx} + \frac{x-2}{x} = \frac{3}{2} - \frac{x-1}{n}$ $(n \in Z \setminus \{0\})$.
Pokazati da je rešenje date jednačine paran broj.

1299. Ako je $n \in Z \setminus \{0,-1\}$, onda je rešenje jednačine:
$\frac{x-1}{n^2+n} + \frac{2x+n^2}{n+1} = \frac{(n+2)^2}{n+1}$ neparan broj. Dokazati.

1300. Pokazati da rešenje jednačine
$$\frac{x+b^2}{a^2-x} - \frac{b^2-x}{x+a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^4-x^2}$$
ne zavisi od datih realnih brojeva a i b, $(a \neq b \neq 0,\ x \neq \pm a^2)$.

1301. Pokazati da rešenje jednačine
$$\frac{3m}{9m^2-12mx+4x^2} - \frac{4x-3m}{9m^2-4x^2} = \frac{2}{2x+3m}$$
ne zavisi od realnog parametra m ako je $m \neq 0$ i $|x| \neq \frac{3}{2}m$.

1302. Pokazati da rešenje jednačine (a, b, c, realni parametri)
$$\frac{bx-c}{bc} - \frac{bx-a}{ab} = 1$$
ne zavisi od parametra b.

1303.* Data je jednačina $\frac{2x}{a^3-8} - \frac{a}{a^2+2a+4} = \frac{x-1}{a-2}$, gde je a dati realan broj.
a) Rešiti datu jednačinu po x.
b) Za koje je vrednosti broja a rešenje date jednačine pozitivan broj?
c) Koliko treba da bude a da bi rešenje jednačine bilo $x = 0$?

1304. Rešiti jednačine po x (m, n, p realni parametri):
a) $\dfrac{x+\frac{x}{m}}{\frac{m}{2}+1} - \dfrac{\frac{m+1}{2}}{\frac{m}{2}+1} = \dfrac{x}{m}$; b) $\dfrac{\frac{1}{x}}{\frac{p}{x}-1} - \dfrac{\frac{m}{n}}{p-x} - \dfrac{\frac{m}{np}}{\frac{x^2}{p^2}-1} = 0.$

Rešiti jednačine po x (a, b, c i m realni parametri), (**1305–1313**):

1305.* $\frac{x-ab}{a+b} + \frac{x-ac}{a+c} + \frac{x-bc}{b+c} = a+b+c.$

1306.* $\frac{x-a}{bc} + \frac{x-b}{ac} + \frac{x-c}{ab} = 2\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$

1307.* $\frac{a+b-x}{c} + \frac{a+c-x}{b} + \frac{b+c-x}{a} + \frac{4x}{a+b+c} = 1.$

1308.* $\frac{x+b}{a+b} + \frac{x-b}{a-b} = \frac{b+x}{(a+b)^2} - \frac{x-b}{a^2-b^2} + \frac{2x}{a}.$

1309.* $\frac{x+a+2}{x-a-2} - \frac{a-x+2}{x+a+2} = \frac{2(x^2-2x+2)+2a(a-x+5)}{x^2-a^2-4a-4}.$

1310.* $\frac{1}{(x-a-b)(x+a+b)} + \frac{1}{x^2+a^2+b^2-2ax-2bx+2ab} = \frac{2}{(x+a+b)^2}.$

1311.* $\frac{x+a+b}{x-a-b} - \frac{x-a-b}{x+a+b} = \frac{2(x^2-ax-bx+ab)+3(a^2+b^2)}{x^2-a^2-2ab-b^2}.$

1312.* $\frac{2mx(m+1)+3x}{m^3-27} - \frac{x}{m-3} + \frac{x+1}{m^2+3m+9} = 0.$

1313.* $\frac{m(x^2+8)+6}{8-x^3} + \frac{m}{x-2} = \frac{m+2}{x^2+2x+4}.$

Rešiti jednačine po x (**1314–1317**):

1314. $\dfrac{3-x}{8-x}+\dfrac{8-x}{6-x}+\dfrac{2-x}{4-x}=\dfrac{10-x}{8-x}-\dfrac{x+2}{6-x}+\dfrac{5-x}{4-x}$.

1315. $\dfrac{3x-3}{2x^2-2}-\dfrac{2x+2}{3x^2+6x+3}=\dfrac{5(x-1)}{12x^2-24x+12}$.

1316. $\dfrac{x+1}{x-1}+\dfrac{x+2}{x-2}+\dfrac{x+3}{x-3}=\dfrac{3(x^3-2x^2+6)}{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1317. $\dfrac{3+2x}{1+2x}-\dfrac{5+2x}{7+2x}=1-\dfrac{2(2x^2-1)}{7+16x+4x^2}$.

Rešiti jednačine po x (a, b, c, m *i* n *su realni brojevi*) (**1318–1341**):

1318. $\dfrac{3}{x-a-b}-\dfrac{2}{x+a+b}=\dfrac{3x-7(a+b)}{x^2-(a+b)^2}$.

1319. $\dfrac{a-x}{m+n-a}-\dfrac{a+x}{a+m+n}=\dfrac{2ax}{a^2-(m+n)^2}$.

1320. $\dfrac{2(b+c)+x}{b+c+2}+\dfrac{x-2(b+c)}{b+c-2}=\dfrac{(b+c)x-2}{(b+c)^2-4}$.

1321. $\dfrac{3(a+b)+x}{a+b+3}+\dfrac{x-3(a+b)}{a+b-3}=\dfrac{(a+b)x-3}{(a+b)^2-9}$.

1322. $\dfrac{3x-2}{(b+c)(b+c-2)}+\dfrac{x-1}{b+c-2}+\dfrac{2}{b+c}=0$.

1323.* $\dfrac{2(m+n)-x}{1-2(m+n)}-\dfrac{2(m+n)+x}{2(m+n)+1}-\dfrac{2(m+n)x}{4(m+n)^2-1}=0$.

1324. $\dfrac{1}{a(x-a)}+\dfrac{1}{a(x-b-c)}+\dfrac{1}{(b+c)(x-a)}+\dfrac{1}{(b+c)(x-b-c)}=0$.

1325.* $\dfrac{x-1}{m+n-3}-\dfrac{(m+n)x}{(m+n)^2+3(m+n)+9}=\dfrac{21x-(m+n)^2}{(m+n)^3-27}$.

1326. $\dfrac{(a+b-1)(2x+a+b)}{a+b+1}=\dfrac{(x-a-b)(a+b-1)}{a+b+1}+\dfrac{x(a+b+1)}{a+b-1}$.

1327.* $\dfrac{(m+n)x+b}{(m+n)^2-(m+n)x}+\dfrac{(m+n)x-b}{(m+n)^2+(m+n)x}=\dfrac{2(m+n)x+4}{(m+n)^2-x^2}$.

1328. $\dfrac{x+b^2}{(m+n)^2-x}-\dfrac{b^2-x}{x+(m+n)^2}=\dfrac{(m+n)^2+b^2}{(m+n)^4-x^2}$.

1329.* $\dfrac{3(a+b)}{9(a+b)^2-12(a+b)x+4x^2}-\dfrac{4x-(a+b)}{9(a+b)^2-4x^2}=\dfrac{2}{2x+3a+3b}$.

1330. $\dfrac{x}{2(m+n)-5}+\dfrac{(m+n)x}{2(m+n)+5}=\dfrac{2(m+n)^2+3(m+n)+5x}{4(m+n)^2-25}$.

1331.* $\dfrac{(m+n)x}{3(m+n)-2}+\dfrac{x}{3(m+n)+2}=\dfrac{x(5m+5n+1)+m+n-1}{9(m+n)^2-4}$.

1332.* $\dfrac{2(a+b)(a+b+1)x+3x}{(a+b)^3-27}-\dfrac{x}{a+b-3}+\dfrac{x+1}{(a+b)^2+3(a+b)+9}=0$.

1333.* $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=\dfrac{3x}{a+b+c}$.

1334. $\dfrac{b-c}{x-a}-\dfrac{a-d}{x-b}+\dfrac{a-d}{x-c}-\dfrac{b-c}{x-d}=0$.

1335. $\dfrac{m-\dfrac{1}{x}}{m+\dfrac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\dfrac{1}{m}}{x+\dfrac{1}{m}}-\dfrac{1}{m}$.

1336. $\dfrac{a+\dfrac{x}{a-b}}{a-\dfrac{x}{a+b}}=\dfrac{a+b}{a-b}$.

1337. $\dfrac{1}{\dfrac{a+b}{ax}-\dfrac{a-b}{ab}}=\dfrac{a}{2}$.

1338. $\dfrac{a}{x-\dfrac{bx+a^2}{a+b}}+\dfrac{a+b}{a-\dfrac{a^2+b^2}{a-b}}=\dfrac{2a-b}{x-a}$.

1339. $\dfrac{a}{\dfrac{1}{x}-a}+\dfrac{b}{\dfrac{1}{x}-b}+2=0$.

1340. $\dfrac{3\frac{1}{2}x+4}{10}+\dfrac{2x+\frac{2}{5}}{3}=\dfrac{2\frac{1}{5}x+1}{10}-\dfrac{6\frac{1}{2}x-3\frac{1}{2}}{12}+\dfrac{\frac{3}{5}x+1}{120}.$

1341.* $\left(\dfrac{a+1}{ax+1}+\dfrac{x+1}{x+\frac{1}{a}}-1\right):\left(\dfrac{a+1}{x+\frac{1}{a}}-\dfrac{a(x+1)}{ax+1}+1\right)=\dfrac{x}{2}.$

Rešiti jednačine po x (a, b, c realni parametri), (1342–1349):

1342.* $\dfrac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a-x}-\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{a+x}\right)\left(\frac{1}{a-x}+\frac{1}{x}\right)}:\dfrac{2x-a}{x-a}=1.$

1343.* $\dfrac{a-\frac{1}{x}}{a+\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-\frac{1}{a}}{x+\frac{1}{a}}-\dfrac{1}{a}.$

1344.* $\dfrac{x-a}{b+c}+\dfrac{x-b}{c+a}+\dfrac{x-c}{a+b}=3.$

1345.* $\dfrac{x}{a+1}+\dfrac{x}{a^2-1}-\dfrac{x}{a^3-a^2+a-1}=\dfrac{1}{a^3+a^2+a+1}.$

1346.* $a-\dfrac{2}{a}\left(\dfrac{a+b}{x}-\dfrac{a-b}{b}\right)+(2-a)\left(1+\dfrac{a+b}{ax}-\dfrac{a-b}{ab}\right)=0.$

1347.* $(a+b)\left(a+\dfrac{x}{a-b}\right)-(a-b)\left(a-\dfrac{x}{a+b}\right)=2ax\left(\dfrac{1}{a-b}+\dfrac{1}{a+b}\right).$

1348.* $\dfrac{2\left(\frac{a}{x-2a}+\frac{b}{x-2b}+\frac{c}{x-2c}\right)+3}{\frac{1}{x-2a}+\frac{1}{x-2b}+\frac{1}{x-2c}}=a+b+c.$

1349.* $x\left(\dfrac{1}{(a-x)^2}-\dfrac{1}{(b-x)^2}\right)=2\left(\dfrac{1}{b-x}-\dfrac{1}{a+x}\right).$

1350.* Rešiti jednačinu $f(f(x))=1$, ako je $f(x)=\dfrac{a+bx}{b+ax}$.

Rešiti jednačine po x (a, b, c realni brojevi), (1351–1353):

1351. $\dfrac{a}{c}-\dfrac{ax}{cx-1}=\dfrac{c}{a}-\dfrac{cx}{ax-1}.$

1352.* $\dfrac{a+x}{a^2+ax+x^2}+\dfrac{a-x}{a^2-ax+x^2}=\dfrac{3a}{x(a^4+a^2x^2+x^4)}.$

1353.* $\dfrac{x-a}{x-a-1}-\dfrac{x-a-1}{x-a-2}=\dfrac{x-b}{x-b-1}-\dfrac{x-b-1}{x-b-2}.$

9.2. Primena linearnih jednačina sa jednom nepoznatom na rešavanje raznih problema

1354. Zbir dva broja je 45, a njihov količnik jednak je 7 : 8. Odrediti ove brojeve.

1355. Zbir dva broja je 47. Ako veći podelimo manjim, dobija se količnik 2, a ostatak je 5. Koji su to brojevi?

1356. Imenilac jednog razlomka je za 2 veći od brojioca. Ako se oduzme od brojioca i imenioca razlomka 1, dobije se $\frac{1}{2}$. Odrediti razlomak.

1357. Brojilac jednog razlomka je $\frac{2}{3}$ imenioca. Ako brojiocu dodamo 5, a imeniocu 15, razlomak postaje $\frac{1}{3}$. Odrediti razlomak.

1358. Razlika dva broja je 13,86. Ako većem broju premestimo decimalni zarez za jedno mesto ulevo, dobije se manji broj. Odrediti brojeve.

1359. Cifra jedinica jednog dvocifrenog broja je za 3 veća od cifre desetica. Ako podelimo taj broj zbirom cifara, dobija se količnik 3, a ostatak je 4. Odrediti taj broj.

1360. Cifra jedinica jednog dvocifrenog broja je 2. Ako kvadrat toga broja umanjimo za proizvod njegova susedna dva broja dobija se 1. Koji je taj broj?

1361. Zbir cifara jednog dvocifrenog broja je 8. Ako ciframa razmenimo mesta, pa prvi broj podelimo drugim, dobije se količnik 2, a ostatak je 10. Koji je to broj?

1362. Otac ima 45 godina, a sin 22. Kroz koliko će godina otac biti dva puta stariji od sina?

1363. Kćerka je za 18 godina mlađa od majke, a pre 5 godina bila je od majke 4 puta mlađa. Koliko je godina majci, a koliko kćerci?

1364. Odrediti takav ceo pozitivan broj da razlika proizvoda dva sledeća broja i prethodna dva bude 600.

1365. Rastojanje izmedju dva mesta A i B voz je prešao tako da je: polovinu puta prešao brzinom 80 km/č, trećinu puta srednjom brzinom 60 km/č, a ostatak, tj. šestinu puta srednjom brzinom 40 km/č. Odrediti rastojanje između mesta A i B ako se zna da je voz proveo 23 časa na putu.

1366. Autobus je prešao rastojanje između mesta A i B brzinom 90 km/č, a od B do A brzinom 60 km/č. Odrediti srednju brzinu autobusa na celom putu u odlasku i povratku.

1367. Druga kosmička* brzina veća je od prve za 3,3 km u sekundi, a treća je veća od druge za 5,2 km u sekundi. Proizvod prve i treće kosmičke brzine brojno je veći od kvadrata druge brzine za 4,12. Odrediti sve tri kosmičke brzine.

1368. Dva planinara, od kojih jedan prelazi 5 km/č a drugi 6 km/č, krenu istovremeno jedan drugome u susret iz dva mesta udaljena 55 km. Posle koliko časova će se sresti?

1369. Iz jednog mesta polazi u 6 časova kamion brzinom 60 km/č, a 2,5 časa kasnije iz istog mesta i istim pravcem polazi automobil brzinom 80 km/č. Kada i gde će automobil stići kamion?

1370. Dva tela kreću se po kružnici, čiji je obim 728 m, jednovremeno iz iste tačke u suprotnom pravcu. Jedno prelazi u svakoj sekundi 30 m, drugo 22 m. Posle koliko će se sekundi ona sresti?

1371. Dva kombajna mogu da požnju izvesnu površinu polja zasejanu pšenicom za 3 časa i 15 minuta. Jedan od njih bi požnjeo istu površinu za 7 časova. Koliko bi vremena bilo potrebno drugom kombajnu za taj posao?

1372. Bazen se puni kroz dve slavine za 3 časa. Samo jedna slavina napunila bi ga za 4 časa i 20 minuta. Za koje bi vreme napunila bazen druga slavina?

* Postoje tri kosmičke brzine. Telo koje dobije prvu kosmičku brzinu postaje satelit Zemlje; telo koje dobije drugu kosmičku brzinu postaje satelit Sunca; telo koje dobije treću kosmičku brzinu oslobađa se Sunčeve teže i ulazi u zvezdani prostor.

1373. Jedan bazen može se kroz jednu slavinu napuniti za 1 čas i 20 minuta, a kroz drugu slavinu isprazniti za 2 časa i 10 minuta. Za koje vreme bi se napunio bazen kad bi obe slavine bile otvorene?

1374. 14 560 dinara podeliti na 3 lica, tako da svako sledeće lice dobije 20% više od prethodnog. Kolike delove dobija svako lice?

1375. Za odličan plasman na takmičenju nagrađena su četiri učenika nagradom od 36 000 dinara. Koliko dobije svaki učenik ako se nagrada deli u razmeri 1,5 : 2 : 2,5 : 3?

1376. Ako se strana jednog kvadrata poveća za 2 cm, površina se poveća za 16 cm^2. Odrediti stranicu kvadrata.

1377. Površina jednog pravougaonika je za 125 cm^2 veća od površine kvadrata nad manjom stranicom. Odrediti stranice pravougaonika ako se razlikuju za 5 cm.

9.3. Linearna funkcija i njen grafik

Definicija 1. Funkcija $x \to f(x) = kx + n, (k, n \in R)$ naziva se linearna funkcija.

Definicija 2. Realan broj α je nula funkcije ako je $f(\alpha) = 0$.

Ako je $f(x) = 0$, tada je $kx + n = 0$, pa je $x = \frac{n}{k} = \alpha$. Dakle nula linearne funkcije je $-\frac{n}{k}$, tj. $f\left(-\frac{n}{k}\right) = k\left(-\frac{n}{k}\right) + n = 0$, tačka $A\left(-\frac{n}{k}, 0\right)$ je tačka preseka grafika linearne funkcije i ose Ox.

Ako je $x + 0$, $y = n$, tačka $B(0, n)$ je presek grafika linearne funkcije i ose Oy. Dakle n je odsečak na osi Oy. Za $n = 0$ grafik linearne funkcije sadrži koordinatni početak.

1378. Dati su skup $A = \{x \mid x < 6 \wedge x \in N\}$ i zakon preslikavanja f formulom $y = 2x - 1$, $x \in A$. Odrediti antidomen funkcije, zatim prikazati f kao skup uređenih parova.

1379. Neka je f preslikavanje skupa $R \to R$ određeno formulom $f(x) = 3x - 2$. Izračunati: $f(-2)$; $f(-1)$; $f(0)$; $f(f(0))$; $f(3 - f(0))$; $f(f(x))$; $f(f(-x))$.

1380. Neka je f realna linearna funkcija određena formulom $f(x) = ax + b$ (a, b realni brojevi). Pokazati da je $f(b) = f(f(0))$.

1381. Ako je $f(x)=3-x$, pokazati da je $f(f(x))=x$.

1382. Konstruisati u istom koordinatnom sistemu i pokazati šta imaju zajedničko, a u čemu se razlikuju grafici sledećih funkcija

a) $y=\frac{1}{2}x$; $y=\frac{1}{2}x+2$; $y=\frac{1}{2}x+4$; $y=\frac{1}{2}x-4$; $y=\frac{1}{2}x-1$; $y=\frac{1}{2x}-2$.

b) $y=\frac{1}{2}x+3$; $y=-\frac{1}{2}x+3$; $y=x+3$; $y=-x+3$; $y=2x+3$; $y=-2x+3$.

1383. Proučiti promene i grafički prikazati sledeće linearne funkcije:

a) $y=\frac{1}{2}x-1$; b) $y=-2x+6$; c) $y=\frac{1}{2}x-2$;

d) $y=-x+3$; e) $y=\frac{1}{2}x+3$; f) $y=-2x+4$.

1384.* Ispitati promene i konstruisati grafik sledećih funkcija:

a) $y=|x|-1$; b) $y=|x-1|$; c) $y=2-|x|$;

d) $y=|2-x|$; e) $y=x-|x|$; f) $y=\frac{x}{|x|}$.

1385.* Ispitati promene funkcije:

$$y=x+\frac{|x|}{x}$$

i konstruisati njen grafik.

1386. Dat je skup funkcija $y=(4m-6)x-(3m-2)$, (m realan broj).
a) Odrediti m tako da funkcija ima nulu $x=2$.
b) Za nađenu vrednost m ispitati promene i konstruisati grafik funkcije.

1387. Dat je skup funkcija $y=(k-2)x-(k-1)$, gde je k realan parametar. Odrediti parametar k tako da njen grafik bude paralelan sa grafikom funkcije $y=2x-6$. Za dobijenu vrednost k ispitati funkciju i konstruisati njen grafik.

1388. U skupu funkcija $y=(a-4)x-(3a-10)$ (a realan parametar) odrediti parametar a tako da tačka M (1, 2) pripada grafiku funkcije. Za nađenu vrednost parametra a ispitati funkciju i skicirati njen grafik.

1389. Date su familije funkcija $y=(2m-5)x+7$ i $y=(10-m)x-3$. Za koje su vrednosti parametra m grafici ovih funkcija paralelni?

1390. U skupu funkcija $y=(m-2)x-3(m-3)$, gde je m realan parametar, odrediti m tako da je $x=5$, $y=7$.

1391. U skupu funkcija $f(x)=(a-2)x-2a+3$ odrediti parametar a tako da grafik funkcije odseca na y – osi odsečak dužine 5.

1392.* Ispitati promene i skicirati grafik funkcije:

a) $y=x-2+\frac{x(x^2-1)}{|x^2-1|}$; b) $y=x-|x|+\frac{x-1}{|x-1|}$;

c) $y=\frac{|x+1|-|x-1|}{2}$; d) $y=\begin{cases} x-1 & -\infty<x<-2 \\ -2x+5 & 3\le x<+\infty \end{cases}$

e) $y=|x|+|x-2|$; f) $|y|=x+|x-3|$.

1393. Dato je preslikavanje $f: x\to|x|-2x$, skupa:
$A=\{x \mid x\in R\wedge -2\le x\le 4\}$ na skup B.
a) Predstaviti ovo preslikavanje u pravouglom koordinatnom sistemu.
b) Odrediti skup B.

1394. Dato je preslikavanje $f: x\to|x|-4$, skupa
$A=\{x \mid x\in R\wedge -4\le x\le 4\}$ na skup B.
a) Predstaviti to preslikavanje u pravouglom koordinatnom sistemu;
b) Odrediti skup B.

1395.* Data je realna funkcija $f(x)=ax+b$.
Dokazati da je $f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)=0$.

1396. Odrediti realnu funkciju f koja zadovoljava funkcionalnu jednačinu:
a) $f(x-2)=x+3$; b) $f(x+1)=3x-4$; c) $f(2x)=x+1$:
Zatim konstruisati grafik dobijene funkcije?

1397. Date su linearne realne funkcije formulama:

a) $f(x)=\frac{1}{2}x-1$; b) $f(x)=x+3$; c) $f(x)=2x-4$;

d) $f(x)=-x+2$; e) $f(x)=\frac{1}{3}x+1$; f) $f(x)=5-x$.

Odrediti inverzne funkcije f^{-1} datim funkcijama i konstruisati grafike funkcija f i f^{-1}.

Ispitati promene i konstruisati grafik funkcije (1398–1404):

1398. $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-10x+25}$.

1399.* $y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}$.

1400.* $y=|x+2|-|2x-4|$.

1401.* $y=|2x-4|-|x-1|+2x-4$.

1402.* $y=|x+2|-|2x-4|-2x+3$.

1403.* $f(x)=|x-1|-2|x-4|-2x-6$.

1404.* $f(x)=2x-5-|x-1|+2|x-3|$.

1405. Data je funkcija formulom $5x-3y-4p+3=0$. Odrediti realan broj p tako da njen grafik: a) sadrži koordinatni početak; b) da otseca na y-osi odsečak 5.

1406. Data je linearna funkcija formulom $(2p+1)x+(3p-5)y+4p=0$, p realan parametar. Odrediti realan parametar p tako da je grafik date funkcije: a) prava paralelna sa x-osom; b) prava paralelna sa y-osom.

1407. Data je linearna funkcija formulom $(3m-2n+5)x-(m-n)y+2m-5n+1=0$, $(m,n\in R)$. Odrediti realne brojeve m i n tako da se grafik date funkcije poklapa sa simetralom: a) I kvadranta; b) II kvadranta.

1408. Data je funkcija formulom $Ax+By+6=0$, $(A,B\in R)$. Odrediti realne brojeve A i B tako da njen grafik sadrži tačku $M(1,2)$ i da je paralelan sa grafikom prave $y=x+5$.

1409. Dat je pramen pravih $2x+y+4+k(x-3y-10)=0$. Odrediti centar pramena.

1410. U pramenu pravih $2x+y+4+k(x-2y-3)=0$, odrediti onu pravu pramena čiji je grafik paralelan sa grafikom prave $y=x+7$.

1411. U skupu funkcija $y=(m-2)|x|-3(m-3)$, gde je m realan broj. Odrediti realan broj m tako da tačka $P(5,7)$ pripada grafiku date funkcije. Za tako dobijeno m ispitati promene i konstruisati grafik.

1412. U skupu funkcija $y=(m-4)|x|-(3m-10)$, m realan broj. Odrediti parametar m tako da je $x=1$, $y=2$. Za nađenu vrednost parametra m ispitati funkciju i konstruisati njen grafik.

9.4. Sistem linearnih jednačina

Definicija 1. Konjunkcija jednačina $a_1x+b_1y=c_1 \wedge a_2x+b_2y=c_2$ po nepoznatim x i y, gde su a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 zadati realni brojevi, pri čemu je bar jedan od brojeva a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 različit od nule, naziva se sistem od dve jednačine sa dve nepoznate.

Definicija 2. Uređen par realnih brojeva (α,β) naziva se rešenje sistema ako je $a_1\alpha+b_1\beta=c_1 \wedge a_2\alpha+b_2\beta=c_2$.

Rešenje sistema $a_1x+b_1y=c_1 \wedge a_2x+b_2y=c_2$ izraženo preko determinanata glasi:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \Delta\neq 0,\ \text{gde je}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\overset{def.}{=}a_1b_2-a_2b_1,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix}\overset{def}{=}b_2c_1-b_1c_2,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}\overset{def.}{=}a_1c_2-a_2c_1.$$

1°. Ako je $\Delta\neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje $\left(\frac{\Delta_x}{\Delta},\frac{\Delta_y}{\Delta}\right)$.

2°. Ako je $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$, sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja.

3°. Ako je $\Delta=0$, $\Delta_x\neq 0$, $\Delta_y\neq 0$, sistem je nemoguć i nema rešenja.

1413. Da li je uređeni par $(-2, 3)$ rešenje datog sistema po x, y: $2x+3y=5 \wedge 3x+y=-3$?

1414. Da li je uređena trojka $(4, 3, 2)$ rešenje datog sistema po x, y, z: $x+y+z=9 \wedge x+2y+3z=16 \wedge x+3y+4z=21$?

1415. Gausovom metodom rešiti sledeće sisteme po x, y:

a) $2x+3y=7 \wedge 3x-6y=7$; b) $5z+2y=29 \wedge 3y-x=1$;

c) $3x+5y=1 \wedge 3x-2y=8$; d) $3x+2y=26 \wedge 6x-3y=3$.

1416. Metodom zamene rešiti sledeće sisteme po x, y:

a) $2x+y=-1 \wedge 4x+3y=1$; b) $x-2y=7 \wedge 2x-y=8$;

c) $5x+y=-1 \wedge 10x+2y=-2$; d) $x+2y=5 \wedge 3x+6y=15$.

1417. Grafički rešiti sledeće sisteme po x, y:

a) $x+y=5 \wedge x-y=1$; b) $x+y=3 \wedge x-y=1$;

c) $x+2y=8 \wedge y=\frac{3}{2}x$; d) $x+y=1 \wedge x-y=5$.

Rešiti sisteme po x, y (**1418–1426**):

1418. a) $3(x-1)+5(y-1)=-4 \wedge 5(x+3)-3(y+1)=64$;

b) $4(x+2)-7(x-y)=7 \wedge 7(x+y)+10(x-2)=79$;

c) $(x-1)(y+2)-(x-2)(y+5)=0 \wedge$
$\wedge (x+4)(y-3)-(x+7)(y-4)=0$;

d) $(x+3)(x-1)=4y+x^2+5 \wedge (x-3)(3x+2)=3x^2-14y+15$.

1419. $3x+4(x-3)=3(3y-3)-37 \wedge 3y+2(x-4)=5(y+2)-28.$

1420. $(x+2)^2-(x-3)(x+3)-3(y+5)=0 \wedge$
$\wedge(2y-3)^2-y(4y-3)+4\left(3x-3\frac{3}{4}\right)=0.$

1421. $2(x+1)(5y-6)=(5x+7)(2y-3) \wedge (x+8)(y+1)=$
$=(y+3)(x+5).$

1422. $(x+11):(x+6)=(y+12):(y+7) \wedge (y+1):(x-1)=y:x.$

1423. $(3x+2y+11):(2x+y-1)=2 \wedge$
$\wedge(5x-3y+4):(6x+3y+3)=3:4.$

1424. $(2x-3):(y+3):(x-y+2)=5:6:3.$

1425. $(5x+3):(5-2y):(3x-y+4)=1:3:2.$

1426. $(3x-1):(4y-3):(6x-2y-1)=2:5:4.$

1427. Rešiti date sisteme po x, y:

a) $\frac{y+2}{6}-\frac{y-4}{2}=\frac{x}{3} \wedge (y-1)-2x=-3;$

b) $\frac{5x-1}{6}+\frac{3y-1}{10}=3 \wedge \frac{11-x}{6}+\frac{11+y}{4}=3;$

c) $\frac{x+1}{3}+\frac{y-1}{4}=4 \wedge \frac{x-2}{3}-\frac{y+3}{3}=-2;$

d) $\frac{3-4x}{6}+\frac{7-5y}{2}=5x-18 \wedge \frac{x+7}{5}-\frac{2x-3y}{4}=3y-4.$

Rešiti sisteme po x, y (**1428–1437**):

1428. a) $\frac{4+3x}{4}+\frac{y-9x}{12}=\frac{y+2x}{3}-\frac{3x-1}{6} \wedge \frac{2y+1}{15}-\frac{5-4x}{20}=$
$=\frac{y+2x}{12};$

b) $\frac{8x-5y+1}{12}-\frac{4x-7y+5}{6}=\frac{6y-5x-4}{9} \wedge$
$\wedge \frac{3x-y}{2}-\frac{8x+y+1}{3}=\frac{2x-y+1}{6}.$

1429. $y-x-\frac{5x-4}{2}=3-\frac{11y+17}{4} \wedge x+\frac{9y+11}{4}-\frac{3y+4}{7}=6.$

1430. $\frac{5x-3y}{3}-\frac{2y-3x}{5}=x+1 \wedge \frac{2x-3y}{3}-\frac{3y-4x}{2}=y+1.$

1431. $\frac{x-1}{4}-\frac{1+y}{2}=\frac{1}{6}-\frac{x+2y}{6} \wedge \frac{x-2}{3}+\frac{x}{15}=\frac{y+4}{5}-\frac{4x-y}{15}.$

1432. $\frac{x+2y}{4}-\frac{x-2y}{2}=1-\left(x-\frac{7-2y}{3}\right) \wedge 3x-2y=8.$

1433. $\frac{7+x}{5}-\frac{2x-y}{4}-3y=-5 \wedge \frac{5y-7}{2}+\frac{4x-3}{6}-18=-5x.$

1434. $\frac{11}{20}y-0{,}8\left(\frac{1}{4}x+2{,}5\right)=2\frac{1}{2} \wedge \frac{6x-0{,}3y}{2}-1\frac{1}{2}=2(1+x).$

1435. $0{,}5x-\frac{y-4}{5}=0{,}3x-\frac{y-4}{2} \wedge 0{,}5y-\frac{x-4}{6}=\frac{7y}{12}-\frac{x-3}{3}.$

1436. $\frac{2(x-y)}{3}+1{,}6=\frac{8x}{15}-\frac{3y-10}{5} \wedge \frac{3x+4}{4}+\frac{y}{8}=\frac{5x}{6}-\frac{y-17}{12}.$

1437. $(2+x)\left(\frac{5}{2}y-1\right)=5+\frac{5}{2}xy-2(1+x) \wedge (x-1)^2+(2y+1)^2=$
$=(x+2y)^2-2(1+2y)(x-1).$

1438. Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sledeće sisteme po x, y:

a) $\frac{14}{x}+\frac{24}{y}=10 \wedge \frac{7}{x}-\frac{18}{y}=-5;$

b) $\frac{5}{3x}+\frac{2}{5y}=7 \wedge \frac{7}{6x}-\frac{1}{10y}=3;$

c) $\frac{5}{x+2y}+\frac{4}{2x+y}=2 \wedge \frac{4}{x+2y}+\frac{5}{2x+y}=\frac{41}{20};$

d) $\frac{4}{x+y-1}+\frac{1}{x-y+1}=1 \wedge \frac{18}{x+y-1}-\frac{2{,}5}{x-y+1}=1.$

Rešiti date sisteme po x, y (**1439–1458**):

1439. $\frac{3}{4x}+\frac{1}{2y}=0{,}7 \wedge \frac{9}{4x}-\frac{3}{2y}=0{,}9.$

1440. $\frac{2}{5x}+\frac{5}{3y}=7 \wedge \frac{1}{10x}-\frac{7}{6y}=-3.$

1441. $\frac{7}{x-2}+\frac{5}{y-3}=8{,}5 \wedge \frac{4}{x-2}-\frac{1}{y-3}=1.$

1442. $\frac{4}{x-y}+\frac{6}{x+y}=1{,}6 \wedge \frac{8}{x-y}-\frac{9}{x+y}=1{,}1.$

1443. $\dfrac{7}{2x-3y}+\dfrac{9}{3x-2y}=8 \wedge \dfrac{3}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=-\dfrac{5}{3}$.

1444. $\dfrac{6}{x+y-1}-\dfrac{3}{x-y+1}=1 \wedge \dfrac{9}{x+y-1}+\dfrac{6}{x-y+1}=5$.

1445. $\dfrac{3}{x+2y-2}+\dfrac{2}{2x-y-3}=7 \wedge \dfrac{6}{x+2y-2}-\dfrac{2,5}{2x-y-3}=1$.

1446. $\dfrac{5}{3x-2y-2}+5x-4y+1=11 \wedge \dfrac{5}{3x-2y-2}+3(5x-4y+1)=31$.

1447. $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{b^2}{y}=a+b \wedge \dfrac{a^2}{x}-\dfrac{b^2}{y}=a-b$.

1448. $\dfrac{a}{x+y}+\dfrac{b}{x-y}=1 \wedge \dfrac{a^2}{x+y}-\dfrac{b^2}{x-y}=\dfrac{a-b}{2}$.

1449. $\dfrac{1}{x+\dfrac{10}{4x-5y}}=\dfrac{1}{x+\dfrac{8}{6x-11y}} \wedge \dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2x}+\dfrac{1}{5y}+\dfrac{1}{xy}$.

1450. $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x-y}-3}=-\dfrac{3}{8} \wedge \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x+y}}=\dfrac{7}{8}$.

1451. $\dfrac{3}{4x+3y}+\dfrac{2}{4x-3y}=\dfrac{37}{55} \wedge \dfrac{5}{4x+3y}-\dfrac{1}{4x-3y}=\dfrac{14}{55}$.

1452. $\dfrac{6}{2x+y-1}-\dfrac{2}{2x-y+3}=\dfrac{5}{2} \wedge \dfrac{4}{2x+y-1}-\dfrac{4}{y-2x-3}=3$.

1453. $\dfrac{y+1}{x-y}+\dfrac{x+2}{x+y}=\dfrac{x^2+y^2+10}{x^2-y^2} \wedge 2x+5y=1$.

1454. $\dfrac{5}{x^2+5xy}+\dfrac{7}{xy+5y^2}-\dfrac{2}{xy}=\dfrac{10}{x^2y+5xy^2} \wedge \dfrac{2x-y-10}{2}=$
$=\dfrac{3x+y-15}{3}$.

1455. $\dfrac{z-2}{x+2z}-\dfrac{x-3}{x-2z}=\dfrac{x^2+xz+2z^2-1}{4z^2-x^2} \wedge 3x-11z=85$.

1456. $\dfrac{x-2}{x+2}+\dfrac{y+4}{x-2}=\dfrac{x(1-x-y)}{4-x^2} \wedge \dfrac{3-x+y}{6}=\dfrac{y-x}{5}$.

1457. $\dfrac{2}{5x-y-3}=\dfrac{x-y+60}{25x^2-9-6y-y^2} \wedge 2x+y=13$.

1458. $\dfrac{x+y}{xy-x-y+1}=\dfrac{2x+y+5}{x^2+xy-x-y}-\dfrac{x+7}{x+y-xy-y^2} \wedge$
$\wedge \dfrac{2x-18y+23}{9x^2-16+6xy+y^2}=\dfrac{3}{2x+y+4}$.

Rešiti date sisteme po x, y (**1459–1466**):

1459.* $|x+1|+|y-1|=5 \wedge |x+1|=4y-4$.

1460.* $|x-1|+|y-5|=1 \wedge y=5+|x-1|$.

1461.* $3|x|+5y+9=0 \wedge 2x-|y|=7$.

1462.* $|x+y|=1 \wedge |x|+|y|=1$.

1463.* $2x-3|y|=1 \wedge |x|+2y=4$.

1464.* $|2x+3y|=5 \wedge |2x-3y|=1$.

1465.* $|x-2|+y+3=7 \wedge x-2-|y+3|=-1$.

1466.* $|2x-1|-y=2 \wedge x-|4-y|=-1$.

1467. Rešiti date sisteme po x, y:

a) $x=2 \wedge y=3 \wedge x+y=5$;

b) $x-y=3 \wedge x+y=5 \wedge 2x+3y=11$;

c) $2x+y=0 \wedge x+y=-1 \wedge 3x-2y=7$;

d) $x+y=-1 \wedge 2x+y=0 \wedge x+2y=-4$.

1468. Primenom Gausovog algoritma rešiti sledeće sisteme linearnih jednačina po x, y, z:

a) $x+2y-5z=6 \wedge -2x+y+2z=5 \wedge -3x+3y-4z=8$;

b) $x+2y+3z=1 \wedge 2x+4y-6z=-2 \wedge -x+2y+6z=4$;

c) $x+2y+3z=32 \wedge 2x+y+3z=31 \wedge 3x+2y+z=28$;

d) $x+y+z=9 \wedge x+2y+3z=16 \wedge x+3y+4z=21$;

e) $5x+2y-2z=3 \wedge 3x-4y+5z=10 \wedge 7x-3y+6z=19$;

f) $3x-5y+2z=-5 \wedge 6x+2y-3z=23 \wedge 4x-3y-z=8$;

g) $-x-2y+14z=8 \wedge 2x-5y+7z=9 \wedge 4x-2y-3z=24$.

Rešiti date sisteme po x, y, z (**1469–1498**).

1469. a) $x+y=16 \wedge x+z=22 \wedge y+z=28$;

b) $3x+5y=17 \wedge 2x+3z=5 \wedge 5y-3z=8$;

c) $x+y+z=2 \wedge x-y=3 \wedge x+z=4$;

d) $3x+2y+z=3 \wedge 2y-z=2 \wedge 3z-2y=-4$.

1470. $4x-2y-3z=17 \wedge x+2y-7z=18 \wedge 2x-5y+8z=-13$.

1471. $5x+y-4z=-45 \wedge 2x-3y+z=-27 \wedge 3x+2y+3z=22$.

1472. $2x+3y-z=11 \wedge 4x-y+5z=15 \wedge x-2y+3z=2$.

1473. $x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}z=14 \wedge \frac{1}{4}x+y+\frac{1}{4}z=8 \wedge \frac{1}{5}x+\frac{1}{5}y+z=8$.

1474. $\frac{x}{4}+\frac{y}{6}+\frac{z}{2}=25 \wedge \frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=23 \wedge \frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{2}=28$.

1475. $0,2x+0,1y+0,3z=7 \wedge 0,4x+0,5y+0,6z=23 \wedge$
$\wedge 0,5x-0,7y+0,9z=-8$.

1476. $1\frac{1}{2}x-2\frac{1}{2}y+2z=-2\frac{1}{2} \wedge 3\frac{1}{2}x+y-\frac{1}{2}z=9\frac{1}{2} \wedge$
$\wedge 2x+1\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}z=8$.

1477. $\frac{y+z}{5}-\frac{6z+x}{2}=2 \wedge \frac{y-2x}{3}+\frac{6z+5x}{4}=0 \wedge$
$\wedge \frac{y+6}{7}-\frac{x-2}{21}=\frac{2-z}{3}$.

1478. $\frac{z+4}{4}-\frac{y+9z+2}{20}=\frac{x-4}{5} \wedge \frac{3y-3x}{7}-\frac{2x-z}{2}=y+2 \wedge$
$\wedge \frac{5y-z}{2}-\frac{2z-2x}{3}=5$.

1479. $\frac{18x+2y-5z+15}{6}-\frac{8x-y+4z}{13}=0 \wedge$
$\wedge \frac{4x+2}{3}-\frac{9x-2y+z-1}{9}=\frac{y+2x}{4} \wedge$
$\wedge \frac{4x-5y+2}{2}-\frac{5x-2y-3z+1}{13}=\frac{z-2x-5y}{7}$.

1480. $\frac{4x+3y+z}{10}-\frac{2y+2z-x+1}{15}=\frac{x-z-5}{5}+5 \wedge$
$\wedge \frac{9x+5y-2z}{12}-\frac{2x+y-3z}{4}=\frac{7y+z+3}{11}+\frac{1}{6} \wedge$
$\wedge \frac{5y+3z}{4}+2z-\frac{2z+3y-z}{12}=\frac{3x+2y+z}{6}+y-1$.

1481. $(x+y+2):(x-z+3):(2x+y+z-9):(z-y+5)=5:4:3:2$.

1482. $(2x+y+z):(3x+z-1):(5y+z+1):(2x+y-8)=4:5:3:4$.

1483. $(x+2y+3z):(4x-2y+z-3):(x+2y-4z):(x-y+3)=$
$=4:3:2:1$.

1484. $(110x+4y-z):(20y-60x-z):(10x-20y+2z+20):$
$:(z-4y-40)=5:4:3:2$.

1485. $\frac{5x-y-z}{3}=\frac{11x-3y-2z}{4}=\frac{2x-7y+5z}{6}=\frac{x+y+4}{12}$.

1486. $\frac{x+2y+3z}{7}=\frac{y+2z+3x}{2}=\frac{2x+3y+z}{3}=\frac{y-x+3}{5}$.

1487. $\frac{x+3y-4z}{2}=\frac{x-y+23}{5}=\frac{x+2y+3z}{4}=\frac{4x-2y+z-3}{3}$.

1488. $\frac{x}{6}=\frac{y}{3}=\frac{z}{18} \wedge 3x+5y+z=34$.

1489. $(x+2y):(3y+4z):(5x+6z)=7:8:9 \wedge x+y-z=126$.

1490. $(2x+y):(3x+z):(y+z)=1:3:4 \wedge 21x+31y+43z=160$.

1491. $(x-2y):(2x-3z):(2y+3z)=1:3:5 \wedge 20x+31y+6z=97$.

1492. $\frac{x-y}{3}=\frac{5x-z}{2}=\frac{4y-z}{12} \wedge 7x+6y-3z+144=0$.

1493. $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{p} \wedge Ax+By+Cz+D=0$.

1494. $(3x+1):(5y-2)=1:3 \wedge (5y-2):(z+1)=3:1 \wedge$
$\wedge 0,5y+\frac{1}{3}z-0,5x=7,5$.

1495. $(2x+7)(11-y)=(2y+5)(10-x) \wedge (2y-5)(7+z)=$
$=(2z+6)(y-1) \wedge (2z-10)(x+1)=(2x-3)(z-1)$.

1496. $4(5x-4)(y-1)=(4x-3)(5y-8) \wedge 4(3x-2)(z-2)=$
$=(4x-3)(3z-1) \wedge 2(3y-10)(z-4)=(2y-7)(3z-9)$.

1497. a) $\frac{y+z}{5}-\frac{6z+x}{2}=2 \wedge \frac{y-2x}{3}+\frac{6z+5x}{4}=0 \wedge$
$\wedge \frac{y+6}{7}-\frac{x-2}{21}=\frac{2-z}{3}$;

b) $\frac{z+4}{4}-\frac{y+9z+2}{20}=\frac{x-4}{5} \wedge$
$\wedge \frac{3y-3x}{7}-\frac{2x-z}{2}=y+2 \wedge \frac{5y-z}{2}-\frac{2z-2x}{3}=5$;

c) $\frac{3+x}{2}+\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{6}\wedge\frac{1-x}{3}+\frac{y-1}{5}=\frac{21-z}{15}\wedge$
$\wedge x+y+z=3;$

d) $\frac{x+y+z}{3}=\frac{x+y-z}{3}+4\wedge\frac{2x+3y-3}{10}=\frac{z}{3}\wedge$
$\wedge\frac{x-2}{2}+\frac{y-2}{3}=z-4.$

1498. a) $x-\frac{3y-2z}{2}=3\wedge y-\frac{2z-x}{3}=3\wedge z-\frac{2x+y}{4}=3;$

b) $x+\frac{y-2z}{2}=5\wedge y+\frac{x-2z}{3}=5\wedge z+\frac{6x-7y}{2}=5;$

c) $\frac{2x+y}{z+1}=1\wedge\frac{y+2z}{2x+2}=2\wedge\frac{2z-x}{3-y}=5;$

d) $\frac{x+y}{z+2}=1\wedge\frac{x+z}{y+6}=1\wedge\frac{y+z}{x+4}=1;$

e) $\frac{x+y+z}{14-x-y}=1\wedge\frac{x+y+z}{x+z-1,5}=2\wedge\frac{x+y+z}{x-y+z}=3;$

f) $\frac{4x-3y+2z}{3,5x+y-3}=1\wedge\frac{5(2z-3x)}{3x-2y+2,5z}=1\wedge\frac{8y-3x}{4y+z+2}=1.$

1499. Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sledeće sisteme po x, y, z:

a) $\frac{6}{x}+\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=4\wedge\frac{3}{x}+\frac{8}{y}+\frac{5}{z}=4\wedge\frac{9}{x}+\frac{12}{y}-\frac{10}{z}=4;$

b) $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{4}{z}=\frac{1}{12}\ \frac{3}{x}-\frac{4}{y}+\frac{5}{z}=\frac{19}{24}\wedge\frac{4}{x}-\frac{5}{y}-\frac{6}{z}=-\frac{1}{2};$

c) $\frac{1}{x+2y}+\frac{4}{y+z}=\frac{11}{10}\wedge\frac{5}{x+2y}-\frac{6}{x-z}=-\frac{3}{2}\wedge$
$\wedge\frac{8}{y+z}-\frac{3}{x-z}=1;$

d) $\frac{7}{x+y}+\frac{6}{x+z}=2\wedge\frac{21}{x+y}-\frac{5}{y+z}=2\wedge\frac{15}{y+z}-\frac{6}{x+z}=2.$

Rešiti sledeće sisteme (**1500–1506**):

1500. $(3y-5)(3z-2)=(2y-5)(z-2)\wedge(3x-4)(2-z)=$
$=(3x-8)(z+1)\wedge(x-3)(y+6)=(2x-9)(2-5y).$

1501. $(6x-1)(y-2)=(2x-1)(3y-4)\wedge(2z-9)(5x+4)=$
$=(2z-1)(5x-4)\wedge(3x+2)(4z-7)=(6y-5)(2z-5).$

1502. $\frac{7}{2x+3y}+\frac{5}{3y+4z}=1\wedge\frac{5}{3y+4z}+\frac{8}{3x+4z}=1\wedge$
$\wedge\frac{40}{3x+4z}-\frac{21}{2x+3y}=1.$

1503. $4xy+2xz-2yz=-3xyz\wedge 3xy-xz+yz=-xyz\wedge$
$\wedge xy+xz+yz=xyz.$

1504. $3xy-4xz-3yz=\frac{1}{2}xyz\wedge 4xy+3xz+4yz=xyz\wedge$
$\wedge 2xy-xz-2yz=2xyz.$

1505. $\frac{y+z-x}{7}=\frac{z+x-y}{11}=\frac{x+y-z}{5}=\frac{xyz}{3}.$

1506. $\frac{2}{x+y+z}+\frac{6}{2x-y}+\frac{1}{y-32}=\frac{5}{6}\wedge\frac{6}{x+y+z}+\frac{4}{2x-y}+$
$+\frac{1}{y-32}=1\wedge\frac{15}{x+y+z}-\frac{2}{2x-y}-\frac{3}{y-32}=7.$

1507. Rešiti date sisteme po x, y, z, t:

a) $x+y=20\wedge x=2z\wedge z+t=12\wedge 2y-3t=0;$

b) $x-y-z-t=-2\wedge x-y+z-t=0\wedge$
$\wedge 2x+y-2z-t=0\wedge x+y-z-t=0;$

c) $x+y+z+t=1\wedge 2x-y+3z+5t=4\wedge$
$\wedge -x+2y-z+t=-6\wedge x+y-z-t=-1;$

d) $x+2y+3z+4t=30\wedge 2x-3y+5z-2t=3\wedge$
$\wedge 3x+4y-2z-t=1\wedge 4x-y+6z-3t=8.$

1508. Izračunati determinante drugog reda:

a) $\begin{vmatrix}1&2\\2&5\end{vmatrix}$; b) $\begin{vmatrix}1&3\\1&7\end{vmatrix}$; c) $\begin{vmatrix}5&7\\6&8\end{vmatrix}$; d) $\begin{vmatrix}3&6\\4&8\end{vmatrix}$; e) $\begin{vmatrix}a&b\\b&a\end{vmatrix}$;

f) $\begin{vmatrix}a-b&1\\1&a+b\end{vmatrix}$; g) $\begin{vmatrix}a-b&-2\\ab&a-b\end{vmatrix}$; h) $\begin{vmatrix}x&y^2\\y&x^2\end{vmatrix}$.

1509. Koristeći determinante drugog reda, rešiti sistem jednačina po x, y:

a) $2x-y=4\wedge x+y=5;$

b) $x-2y=3\wedge 3x+2y=13;$

c) $3x+y=5 \wedge 2x-y=5$;

d) $x+y=4 \wedge x-y=2$.

Rešiti date sisteme po x, y (a, b, c, m, n, ... realni parametri) (**1510–1534**)

1510. a) $mx+y=1 \wedge 2x+y=2$;

b) $ax+2y=1 \wedge 8x+ay=2$;

c) $2ax-3by=12ab \wedge ax+by=ab$;

d) $ax-9y=14a \wedge 2ax+3y=7a$.

1511. a) $mx+ny=m^2+n^2 \wedge mx-ny=m^2-n^2$;

b) $mx-2y=3 \wedge 3x+my=4$;

c) $mx+(m-3)y=2m+3 \wedge 2mx-3(m-3)y=1-m$;

d) $a^2x-y=a-b \wedge b^3x+ay=b^2$;

e) $(a-1)x+(a+1)y=20 \wedge 4x+5y=a+1$;

f) $(a+2)x+(a-2)y=16 \wedge 2x+4y=a-2$.

1512. a) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \wedge \frac{x}{3a}+\frac{y}{6b}=\frac{2}{3}$;

b) $\frac{x-a}{b}+\frac{y-b}{a}=1 \wedge \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$;

c) $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a-b} \wedge \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{1}{a+b}$;

d) $\frac{x}{a-3b}-\frac{y}{a+3b}=\frac{12ab}{a^2-9b^2} \wedge \frac{x}{a-3b}+\frac{y}{a+3b}=\frac{2a^2+18b^2}{a^2-9b^2}$.

1513. $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2} \wedge \frac{x}{a-c}+\frac{y}{a+c}=\frac{2ac}{a^2-b^2}$.

1514. $\frac{x}{a-2b}-\frac{y}{a+2b}=\frac{6ac}{a^2-4b^2} \wedge \frac{y}{a-3c}-\frac{x}{a+3c}=\frac{4ab}{a^2-9c^2}$.

1515. $\frac{(a+c)x}{ac}+\frac{y}{b}=1 \wedge \frac{x}{b}+\frac{(c+a)y}{ac}=1$.

1516. $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=\frac{a+b}{a^2-b^2} \wedge \frac{x}{a+b}-\frac{y}{a-b}=\frac{a-b}{a^2-b^2}$.

1517. $\frac{x}{b}+\frac{y}{a}=\frac{a^4}{b} \wedge \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{b^4}{a}$.

1518. $\frac{ax}{b}+y=\frac{b^3}{a} \wedge \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=a$.

1519. $a^2x+ay=a+b \wedge (a+b)x+y=\frac{a+2b}{a}$.

1520. $ax+by=a^2+b^2 \wedge a^2x+b^2y=a^3-ab(a-b)+b^3$.

1521. $x-(a+b)y=\frac{b^2-a^2}{b} \wedge (b-a)x+aby=b^2$.

1522. $ax-(a-b)y=b^2 \wedge (a+b)x-by=a^2-b^2$.

1523. $a(x+y)-b(x-y)=\frac{a^2+b^2}{a+b} \wedge (a+b)(1-x)-b(1-y)=\frac{b^2}{a+b}$.

1524. $\frac{x-a+2b}{b}+\frac{y}{c}=\frac{b}{c} \wedge \frac{x}{ab}+\frac{y}{bc}=\frac{x+y}{ac}$.

1525. $ax+\frac{1}{a}y=a^2 \wedge \frac{1}{a}x+ay=a^3$.

1526. $\frac{2x-b}{a}-\frac{2y-a}{b}=2 \wedge \frac{2x-a}{b^2}+\frac{2y+b}{a^2}=\frac{a+b}{ab}$.

1527. $\frac{y}{a-b}-\frac{3x}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{a+b} \wedge \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=\frac{a^3+ab^2}{ab+b^2}$.

1528. $\frac{x+y+2}{x-y-2}=\frac{a^2-a+1}{a-1} \wedge \frac{x+y-2}{x-y+2}=\frac{a^3-1}{a^2+1}$.

1529. $\frac{x}{a-b}+\frac{y}{a+b}=\frac{2ab}{a^2-b^2} \wedge \frac{x}{a-c}+\frac{y}{a+c}=\frac{2ac}{a^2-c^2}$.

1530. $\frac{x-c}{a+b}+\frac{y+b}{a+c}=2 \wedge \frac{x-a}{b+c}+\frac{y-c}{a-b}=2$.

1531. $\frac{x+y}{x-y}=\frac{a}{b-c} \wedge \frac{x+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c}$.

1532. $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1-\frac{x}{c} \wedge \frac{y}{a}+\frac{x}{b}=1-\frac{y}{c}$.

1533. Dat je sistem $(k+3)x+(k-2)y=2k+1 \wedge (k+8)x+(k-5)y=2k+3$. Odrediti realan broj k tako da sistem bude neodređen, zatim odredi x tako da bude $y>0$.

1534.* a) $\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2 \wedge \frac{x}{a-b}-\frac{y}{a+b}=\frac{4ab}{a^2-b^2}$;

b) $\frac{x+y}{a}+\frac{x-y}{b}=2 \wedge \frac{x+y}{b}-\frac{x-y}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$;

c) $\frac{2a}{b}x-\frac{3b}{a}y+1=\frac{2a}{b}+\frac{3b}{a}\wedge\frac{a}{b}x-\frac{b}{a}y=\frac{a^2+b^2}{ab}$;

d) $\frac{x}{a-b}-\frac{y}{a+b}=2ab\wedge\frac{x}{a^2+ab+b^2}+\frac{y}{a^2-ab+b^2}=2a.$

1535.* Dat je linearni sistem po x, y (m, n realni parametri):

$\frac{x}{m+n}+\frac{y}{m-n}=2m\wedge\frac{x-y}{mn}=4.$

Pokazati da je rešenje sistema pozitivno ako je $mn\neq 0\wedge m\neq\pm n$.

1536.* Dat je linearni sistem po x, y (a i b realni parametri):

$\frac{x+y}{a^2+b^2}=\frac{x-y}{2ab}\wedge\frac{x}{a+b}+\frac{y}{a-b}=2a.$

Pokazati da je rešenje sistema pozitivno za svako $ab\neq 0\wedge a\neq\pm b$.

1537.* Pokazati da su rešenja sistema po x, y (n realan parametar):

$\frac{x}{1-2n}-\frac{y}{1+2n}=\frac{8n}{1-4n^2}\wedge\frac{x}{1-2n}+\frac{y}{2n+1}=\frac{2+8n^2}{1-4n^2}$

neparni brojevi za svako $n\in Z$.

1538.* Uvođenjem novih nepoznatih rešiti sisteme po x, y (a, b, n realni parametri):

a) $\frac{2n}{x+ny}-\frac{1}{x-ny}=1\wedge\frac{10n}{x+ny}+\frac{3}{x-ny}=1;$

b) $\frac{b}{x-a^2}-\frac{a}{y+b^2}=\frac{a-b}{ab}\wedge\frac{b^2}{x-a^2}+\frac{a^2}{y+b^2}=2.$

1539. Dat je sistem po x, y (a, b realni parametri):
$(a-1)x+by=1\wedge ax+2by=b.$
Odrediti parametre a i b tako da je sistem neodređen.

1540. Dat je sistem po x, y (a realan parametar):
$x+(a-1)y=1\wedge(a-1)x-3(a-1)y=2a+1.$
Za koje vrednosti parametra a sistem je nemoguć?

1541. Dat je sistem po x, y (a parametar):
$ax+y=a-1\wedge 6x+(a-1)y=4.$
Odrediti realan parametar a tako da je:
a) sistem neodređen;
b) sistem nemoguć.

1542. Dat je sistem po x, y (m, parametar):
$2x+(m-1)y=3\wedge(m+1)x+4y=-3.$
Odrediti parametar m tako da je:
a) sistem neodređen;
b) sistem nemoguć.

1543.* Dat je sistem po x, y (k realan parametar):
$(k+2)x+(k-7)y=7\wedge 4x-5y=8+k.$
Odrediti parametar k tako da sistem ima jedinstveno rešenje.

1544.* U sistemu jednačina po x, y:
$(p-q)x+(3p-5)y=2pq\wedge(p+q)x+(q-7)y=6pq.$
(p, q realni parametri) odrediti parametre p i q tako da sistem ima beskonačno mnogo rešenja.

1545.* Rešiti date sisteme (a, b, c, d, m, ... su realni parametri) (**1545–1549**):

a) $mx+y+z=1\wedge x+my+z=m\wedge x+y+mz=m^2;$

b) $(b+c)(y+z)-ax+(c-b)=0$
$\wedge(c+a)(z+x)-by+(a-c)=0$
$\wedge(a+b)(x+y)-cz+(b-a)=0,(a+b+c\neq 0);$

c) $x+ay+a^2z+a^3=0\wedge x+by+b^2z+b^3=0\wedge$
$\wedge x+cy+c^2z+c^3=0.$

1546. $(c+a)y+(a+b)z=(b+c)x+2a^3\wedge$
$\wedge(a+b)z+(b+c)x=(c+a)y+2b^3\wedge$
$\wedge(b+c)x+(c+a)y=(a+b)z+2c^3.$

1547. $ay+bx=c\wedge cx+az=b\wedge bz+cy=a.$

1548. $x+y+z=1\wedge ax+by+cz=d\wedge a^2x+b^2y+c^2z=d^2.$

1549. $y+z+u=a+6\wedge z+u+x=a+4\wedge u+x+y=$
$=a+2\wedge x+y+z=a.$

9.5. Primena sistema linearnih jednačina na rešavanje raznih problema

Opšti oblik linearne nejednačine sa jednom nepoznatom se može javiti u jednom od oblika:
(1) $ax>b$, (2) $ax\geq b$, (3) $ax<b$, (4) $ax\leq b$.
gde su a, b realni brojevi x nepoznata.

Za rešavanje nejednačine (1) važi sledeće:

1°. Za $a > 0$ ima za rešenje svaki realan broj $x > \frac{b}{a}$;

2°. Za $a < 0$ ima za rešenje svaki realan broj $x < \frac{b}{a}$;

3°. Za $a = 0$, $b < 0$, rešenja su svi realni brojevi;

4°. Za $a = 0$, $b > 0$, nema rešenja.

1550. Dva broja imaju osobinu da je zbir četvorostrukog prvog broja i za 4 uvećanog drugog broja jednak 50, a razlika trostrukog prvog broja i polovine drugog broja jednaka je 22. Odrediti ove brojeve.

1551. Ako se dva broja uvećaju za 3, dobijeni zbirovi se odnose kao 1 : 2, a ako se drugi broj podeli prvim, dobija se količnik 2, a ostatak je 3. Odrediti ove brojeve.

1552. Razlika, zbir i proizvod dva broja odnose se kao 1 : 3 : 6. Odrediti ove brojeve.

1553. Ako se zbir brojioca i imenioca jednog razlomka podeli razlikom imenioca i brojioca, dobija se 6, a ako se od brojioca i imenioca razlomka oduzme 3, dobija se $\frac{1}{2}$. Odrediti razlomak.

1554. Ako se uveća brojilac jednog razlomka za 1 a imenilac za 3, dobija se razlomak $\frac{2}{3}$, a ako se oduzme 5 od imenioca i brojioca razlomka, dobije se $\frac{1}{2}$. Odrediti razlomak.

1555. Odrediti sve parove celih brojeva (x, y) čiji je zbir jednak proizvodu.

1556. Jedan splav sastavljen od dva metala ima težinu a kg. Posle potapanja u vodu splav je lakši za b kg. Odrediti po koliko kilograma od svakog metala sadrži splav ako se zna da prvi metal gubi u vodi p% od svoje težine a drugi metal q%.

1557. Svaki prost neparan broj može se predstaviti samo na jedan način – kao razlika kvadrata dva prirodna broja. Dokazati.

1558. Na koliko se načina broj 105 može predstaviti u obliku razlike kvadrata dva cela broja? Napisati sve te oblike.

1559. Dva radnika mogu da završe neki posao za 8 časova. Desilo se da je prvi radio 6 časova, a drugi 9 časova i da su završili $\frac{51}{56}$ deo posla. Za koliko časova može svaki odvojeno da završi taj posao?

1560. Dva radnika treba da završe jedan posao. Ako rade zajedno, završiće taj posao za 12 dana. Ako radi prvo jedan radnik 9 dana, pa zatim drugi 6 dana, završiće samo $\frac{2}{3}$ posla. Za koliko će dana završiti taj posao svaki od njih kada sam radi?

1561. Ako se podeli jedan dvocifren broj zbirom svojih cifara, dobije se količnik 5, a ostatak je 1. Ako se tom broju doda 9, dobija se broj napisan istim ciframa obrnutim redom. Odrediti taj broj.

1562. Cifra desetica jednog dvocifrenog broja je za 5 veća od cifre jedinica. Ako promene mesta njegove cifre i dobijeni broj se podeli datim, dobije se količnik 2, a ostatak je 7. Odrediti prvi broj.

1563. Zbir cifara jednog dvocifrenog broja je s. Ako cifre razmene mesta, dobiveni broj je za m veći od prvog. Koji je taj broj?

1564. Pre četiri godine otac je bio 7 puta stariji od sina, a posle 4 godine biće 3 puta stariji od sina. Koliko godina ima sada otac, a koliko sin?

1565. Zbir godina majke i kćerke je 46. Posle 10 godina majka će biti 2 puta starija od kćerke. Koliko godina sada ima majka a koliko kćerka?

1566. Dva traktora različite snage mogu da pooru jednu parcelu za a dana. Za jedan dan jedan traktor poore p% od površine koju poore drugi. Za koliko dana može svaki traktor sam da poore celu parcelu.

1567. Dva automobila kreću istovremeno iz dva različita mesta A i B čije je rastojanje d km. Ako se kreću jedan drugom u susret, sreću se posle a časova, a ako se kreću u istom pravcu, stignu se posle b časova. Koliko kilometara prelazi svaki od automobila?

1568. Obim jednakokrakog trougla je p cm, a osnovica mu je veća od kraka za r cm. Izračunati stranice trougla. Da li zadatak uvek ima rešenje?

1569. Zbir tri broja je 80. Ako se podeli prvi broj drugim, dobija se količnik 3, a ostatak je 3, a ako se podeli treći prvim, dobije se isti količnik, a ostatak je isti. Odrediti brojeve.

1570. Zbir cifara trocifrenog broja je 16. Ako izmene mesta cifra desetica i jedinica, dobija se broj za 72 manji od drugog, a ako se podeli dati broj sa cifrom desetica, dobija se količnik 76, a ostatak je 7. Odrediti trocifren broj sa ovim osobinama.

1571. Odrediti tri broja ako su dati zbirovi za svaka dva od njih.

1572. Tri radnika obavljaju neki posao. Prvi i drugi radnik završili bi taj posao za m dana; drugi i treći za n dana; a treći i prvi za p dana. Za koliko bi dana svaki od njih sam završio taj posao?

9.6. Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i njihovo rešavanje

Rešiti date nejednačine po x (**1573–1575**):

1573. a) $5(4-3x)<2\left(2x-\frac{1}{2}\right)$;

b) $3(x-2)+9x<2(x+3)+8$;

c) $2x(2x-5)-(2x+1)^2<-1$;

d) $9(4x+1)^2-4(6x-2)(6x+2)<43$.

1574. a) $\frac{3x-1}{5}-\frac{x+1}{2}<1-\frac{x}{7}$; b) $\frac{5x-1}{4}-\frac{3x-13}{10}<\frac{5x+1}{3}$;

c) $5-\frac{x-1}{4}\geq 2+\frac{5(x+1)}{8}$; d) $\frac{2x-21}{4}-\frac{3x-14}{9}\geq\frac{5}{72}-\frac{7+51x}{18}$.

1575. a) $|x-3|\leq 1$; b) $|2x+3|<5$; c) $|3-2x|>5$;

d) $|5x+3\geq 8$; e) $|x+1|\geq 2|x+2|$.

1576. Odrediti najmanji ceo broj koji zadovoljava nejednačinu:

$$20\frac{4}{15}\,x-25\frac{7}{18}>42\frac{11}{18}+3\frac{4}{15}\,x.$$

1577. Odrediti najveći ceo broj koji zadovoljava nejednačinu:

$$\frac{3x-1}{12}+\frac{x+9}{11}<\frac{2x+4}{11}-\frac{9x+1}{12}.$$

1578. Rešiti date nejednačine po x (m je realan parametar):

a) $mx>3$;

b) $m(x-1)<x+2$;

c) $2x-m>mx-3$;

d) $m(mx-5)<4x-10$;

e) $x-m>(2-x)(m-1)$.

1579. Rešiti date konjunkcije (sisteme):

a) $2x+3>x+1\wedge x+3>2x-6$;

b) $0{,}4+\frac{7}{3}<\frac{2}{3}\,x-1{,}2\wedge 5x+17>9x-63$;

c) $(x-1)^2+(x-2)^2\geq 2(x-3)^2-1\wedge\frac{x-1}{3}+\frac{1-2x}{3}\geq$

$\geq\frac{x-3}{6}-\frac{1}{2}$;

d) $2(2x+1)>3-\frac{1+x}{5}\wedge\frac{x-3}{9}>1+\frac{2x-7}{2}$;

e) $\frac{x+1}{5}-\frac{x+2}{4}<\frac{x-3}{3}+\frac{x-4}{2}\wedge\frac{x-2}{3}>1+\frac{x-5}{15}$.

Rešiti nejednačine po x (**1580–1581**):

1580. a) $(x-1)(x-4)>0$; b) $(x+3)(x-5)\leq 0$;

c) $\frac{x-2}{5-x}>0$; d) $\frac{x+3}{x-4}\leq 0$.

1581. a) $\frac{x-1}{x-2}<\frac{3}{2}$; b) $\frac{5-2x}{5+x}<\frac{1}{2}$;

c) $\frac{6-x}{3-x}<-2$; d) $\frac{2x-3}{4-x}>3$.

1582. Odrediti skup celih brojeva (x, m, $y\in Z$) za koji su pozitivni izrazi:

a) $\frac{5-x}{x}$; b) $\frac{5-2m}{4+7m}$; c) $\frac{9-2y}{4y-1}$.

1583. Odrediti skup celih brojeva (x, m, $y\in Z$) za koji su negativni sledeći izrazi:

a) $\frac{5x-4}{5x-7}$; b) $(8m-1)(11-2m)$; c) $(3y+7)(4y-15)$.

1584. Rešiti nejednačine po x:

a) $\frac{x-1}{x^2+3}<0$; b) $\frac{(2x+1)^2}{x-5}>0$; c) $\frac{(x-1)^2}{x+2}\geq 0$;

d) $\frac{|x-1|}{x}<0$; e) $\frac{|x-1|}{x}<1$; f) $\frac{x}{x+2}<2$.

1585.* Rešiti dvojne nejednačine po n:

a) $-3<\frac{n-1}{n+1}<5$; b) $1<\frac{3n+10}{n+7}<2$.

1586.* U funkciji $y=(2k+4)x+k-3$ odrediti parametar k tako da njen grafik seče y-osu ispod koordinatnog početka i da pri tome bude rastuća.

1587.* Data je funkcija:

$1^\circ\ y=\frac{3-2k}{k+5}x+\frac{2k+1}{3-k}$; $2^\circ\ y=\frac{5-k}{k+1}x+\frac{2k+2}{3-n}$.

a) Odrediti parametar k tako da njen grafik seče y-osu iznad koordinatnog početka i da pri tome bude rastuća.

b) Odrediti parametar k da funkcija bude rastuća.

c) Odrediti parametar k tako da funkcija bude opadajuća.

1588. Za koje vrednosti parametra m jednačina:

$m(x-3)+2x=0$

ima rešenje po x manje od 2.

1589. U jednačini:

$2(a-3x)+x=4a-10(x-a)+36$

odrediti parametar a tako da rešenje jednačine po x bude negativno.

1590. Odrediti sve realne vrednosti parametra m za koje jednačina:

$m(x-3)+3=m^2x$

ima rešenje po x veće od 2.

1591. U jednačini $\frac{a-2x}{a}-\frac{2-ax}{2}=a-2$, (a realan broj) odrediti realan broj a tako da rešenje po x bude veće od –2.

1592. U jednačini $\frac{a+x}{x}+\frac{a}{x}=\frac{a}{x-1}+\frac{x}{x-1}$ (a realan broj), odrediti realan broj a tako da rešenje jednačine po x bude veće od 6.

1593. Za koje vrednosti realnog broja n jednačina

$\frac{x}{x-2n}+\frac{2x-n}{x^2-2nx}=1$, ima rešenje manje od 1?

1594. Data je jednačina po x (b realan broj),

$\frac{9b^2-8}{2x+4}+\frac{4-3b^2}{2-x}=\frac{4b+3b^2x}{x^2-4}$.

Rešiti jednačinu po x, a zatim odrediti realan broj b tako da je $x<1$.

1595. Za koje vrednosti parametra m sistem jednačina po x, y:

$mx+y=m\wedge x-y=2$

ima negativno rešenje ($x<0\wedge y<0$)?

1596. Odrediti realan parametar a tako da rešenje sistema

$az-4y=a+1\wedge 2x+2ay=-1$

po x, y zadovoljava konjunkciju $x>0\wedge y<0$.

1597.* U sistemu jednačina:

$(m+1)x-my=4\wedge 3x-5y=m$

odrediti realan parametar m tako da rešenje po x, y zadovoljava relaciju:

$x-y<2$.

1598. Dat je sistem:

$nx-y=5\wedge 2x+3ny=7$.

Odrediti realan parametar n tako da rešenje po x, y zadovoljava konjunkciju $x>0\wedge y<0$.

1599. Za koje realne vrednosti parametra m rešenje sistema jednačina po x, y:

$mx-2y=3\wedge 3x+my=4$

zadovoljava konjunkciju $x>0\wedge y<0$?

1600.* Odrediti parametar m tako da sistem:

$mx+(m-2)y=2\wedge 2x+3y=-3$

ima rešenja po x, y koja zadovoljavaju konjunkciju $y>1\wedge x>y$.

1601. Dat je sistem:

$(a+3)x-2(a+3)y=12-3a\wedge(n+3)x+(a+3)y=-1-a$.

Odrediti sve cele vrednosti parametra a za koje je rešenje sistema po x, y negativno.

1602. Dat je sistem jednačina po x, y:

$3(m-3)x-(m-3)y=19-4m\wedge(m-3)x-2(m-3)y=3-3m$,

gde je m realan parametar. Odrediti sve cele vrednosti parametra m za koje je tačna konjunkcija.

1603. Dokazati ekvivalenciju $|x|\le a\wedge a>0\Leftrightarrow -a\le x\le a$.

1604.* Primenom ekvivalencije iz prethodnog zadatka rešiti nejednačine:

a) $\left|\frac{3x}{2x+3}\right|<2$; b) $\left|\frac{2x+3}{2x-3}\right|<1$;

c) $\left|\frac{x-2}{x+2}\right|\le 1$; d) $\left|\frac{2x+2}{x-2}\right|\le 4$.

1605.* Rešiti nejednačine:

a) $\frac{(x+1)|x-2|}{x^2+2}<-1$; b) $\frac{(x+2)|x-3|}{x^2+6}>-1$.

Rešiti nejednačine (**1606–1619**):

1606.* $\frac{x}{x+3}-\frac{x-3}{x}>\frac{9-x}{x^2+3x}$.

1607.* $\frac{2-x}{x+1}+\frac{x+2}{x-1}<\frac{7x-x^3}{x^2-1}$.

1608.* $\frac{3}{x}+\frac{x}{3}>\frac{3(x+3)^2-x(9+2x^2)}{3x^2+9x}$.

1609.* $\frac{4}{4x^2-9}+\frac{x}{2x-3}<\frac{1}{2x^2+3x}$.

1610.* $\frac{4x}{9x^2-4}+\frac{x}{3x+2}+\frac{1}{3x^2-2x}<0$.

1611.* $\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}<\frac{x^2-2}{x^2+x}$.

1612.* a) $\frac{2}{2y-1}>\frac{3}{3y-4}$; b) $\frac{9}{12m-1}<\frac{3}{4m+3}$; c) $\frac{t-1}{4t+5}<\frac{t-3}{4t-3}$.

1613.* a) $\frac{x^2+10x+25}{3x^2+1}\geq 0$; b) $\frac{x^2+5x}{x-2}>0$.

1614.* a) $\frac{a^2-9}{a^2+3a}>0$; b) $\frac{3a^3-a^2-3a+1}{1-3a}>0$.

1615. $2|x+2|+|x-3|\geq 5$.

1616. $3|x+3|-|2x-3|\leq 8-3x$.

1617. $|x|-2|x-6|<2x+6$.

1618. a) $|5-x|+|2x+4|>2x+10$; b) $\left|\frac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$.

1619. a) $|x+4|-|x-7|\leq 11$; b) $|x-1|-|x+5|>6$;

c) $|x+4|-|x-4|\geq 8$; d) $|x-2|+|x-7|<9$;

e) $\frac{x^2-5x+4}{|x-1|(3-x)}\geq 0$; f) $\frac{2}{|x|-1}+\frac{3}{|x|+2}\geq 0$;

g) $\frac{2}{|x-3|-1}+\frac{3}{|x-3|+2}\leq 0$; h) $\frac{4}{|x-1|+1}-\frac{5}{|x-1|-2}\geq 0$.

1620. Dokazati implikacije:

a) $(a<b)\Rightarrow\left(a<\frac{a+b}{2}<b\right)$;

b) $(a<b<c)\Rightarrow\left(a<\frac{a+b+c}{3}<c\right)$;

c) $(b>a>0\wedge c>0)\Rightarrow\left(\frac{a}{b}>\frac{a+c}{b+c}\right)$;

d) $\left(a>0\wedge b>0\wedge\frac{a}{b}\leq\frac{c}{d}\right)\Rightarrow\left(\frac{a}{b}\leq\frac{a+c}{b+d}\leq\frac{c}{d}\right)$;

e) $(a>0\wedge b>0\wedge c>0)\Rightarrow a^2+b^2+c^2\geq ab+ac+bc$.

1621. Dokazati da za aritmetičku sredinu A, geometrijsku G i harmonijsku H važi nejednakost $H\leq G\leq A$.

1622. Ako su a i b pozitivni brojevi, dokazati nejednakost:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

1623.* Ako je $a+b+c=l$, $a>0$, $b>0$ i $c>0$, tada je: $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$. Dokazati.

1624.* Ako je $a+b+c=6$ $(a,b,c\in R)$, tada je: $a^2+b^2+c^2\geq 12$. Dokazati.

1625.* Ako su a, b i c merni brojevi stranica trougla, tada je $abc\geq(a+b-c)(b+c-a)(a+c-b)$. Dokazati.

9.7. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate. Rešavanje problema linearnog programiranja

1626. U Oxy – ravni šrafirati oblasti u kojima važe sledeće nejednakosti:

a) $x>-3$; b) $y\wedge 2$; c) $x-y+3\geq 0$; d) $2z+y-4<0$.

1627. U Oxy – ravni šrafirati oblasti u kojima važe konjunkcije:

a) $x-y+1<0\wedge x+2y+3\geq 0$;

b) $x\leq -3\wedge 2x-y+4\geq 0\wedge 3x-3y+5<0$;

c) $x+y>1\wedge x-2y<0\wedge x-y<1$;

d) $|x|\leq 4\wedge|y|\leq 2$;

e) $2x-y<1\wedge x+2y>1\wedge 2x-2y\leq 1\wedge 2x+2y\geq 3$.

1628. Maksimizirati funkciju $L = x + y$, uz ograničenja:
$x - y \le 3 \wedge x \le 4 \wedge x + 2y \ge 10 \wedge x - y \ge -2 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$.

1629. Minimizirati funkciju $L = 2x - y$, uz ograničenja:
$x - y \le 1 \wedge 2x + y \le 11 \wedge y - 2x \le 3 \wedge y \le 5 \wedge x + y \ge 1 \wedge$
$\wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$.

1630. Naći najmanje i najveće vrednosti funkcija $L_1 = x + y$ i
$L_2 = -2x - y$ u oblasti:
$3x + 2y > 6 \wedge x - 2y \le 2 \wedge -3x + 2y \le 6 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$.

1631. Grafičkom metodom naći optimalno rešenje sledećih zadataka linearnog programiranja:

a) $x + 4y \le 24 \wedge 3x + y \le 21 \wedge x + y \le 9 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$,
$L = 2x + 5y \to \max$;

b) $-x + 3y \le 9 \wedge 2x + 3y \le 18 \wedge 2x - y \le 10 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$,
$L = 4x + 2y \to \max$;

c) $2x + y \ge 20 \wedge 2x + 3y \ge 30 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$,
$L = 3x + 2y \to \min$;

d) $15x + 4y \ge 60 \wedge 20x + 3y \le 60 \wedge y \le 7 \wedge x \ge 0 \wedge y \ge 0$,
$L = 3x + y \to \max$;

e) $5x + 2y \le 100 \wedge 6x + y \ge 30 \wedge x + 2y \ge 20 \wedge x \ge 0 \wedge 6 \le y \le 30$,
$L_1 = 2x + y \to \max$ i $L_2 = x = 2y \to \min$.

X GLAVA

10. RAZNI ZADACI*

1632. Rešiti po x jednačinu $2x + |x - 1| = 5$.

1633. Dat je sistem jednačina po x, y (a realan parametar):
$3x + y = 13 \wedge x - y = 7 \vee (a - 2)x - 5y = 10$.
Odrediti parametar a tako da sistem ima rešenja.

1634. Odrediti uglove onog pravouglog trougla za koji važi formula $(a + b)^2 = 8P$, gde su a i b katete, a P površina trougla.

1635. Rastaviti na činioce:
$(a + b + c)(ab + bc + ac) - abc$.

1636. U dati jednakostranični trougao ABC upisati trougao KLM čije su stranice normalne na stranice datog trougla, tako da $K \in AB$, $L \in BC$, $M \in CA$.

1637. Dokazati da je broj $a^5 - a$ deljiv sa 30 za svako celo a.

1638. Dati su pravougaonik $KLMN$, tačka P u pravougaoniku i tačka Q van pravougaonika, tako da su trouglovi LMP i MNQ jednakostranični. Dokazati da je duž PQ jednaka dijagonali datog pravougaonika.

1639. Ako je $|x| \ne 1$, $y \ne 0$, $y \ne -x$, važi identitet:

$$\frac{x^2 - 1}{y^2 + xy} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{1}{y}} - 1 \right) \cdot \frac{1 - xy^3 - y^4 + y}{1 - x^2} = \frac{y^2 + y + 1}{y}.$$

Dokazati.

1640. Ako je $f(x) + 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$ $(x \ne 0)$, izračunati $f(2)$.

1641. U pravouglom trouglu ABC $(\angle C = 90°)$ CD je visina iz temena C. Ako je N središte duži CD i M središte duži BD, dokazati da je $AN \perp MC$.

1642. Ako M tačka u trouglu ABC, dokazati da je
$AM + MB < AC + CB$.

* Ovi zadaci služe za ponavljanje, utvrđivanje, produbljivanje i sistematizaciju celokupnog nastavnog gradiva. Uglavnom su korišćeni na raznim opštinskim i međuopštinskim takmičenjima iz matematike.

1643. Dokazati implikaciju:
$(y-x)^2+(z-x)^2+(z-y)^2-(y+z-2x)^2-(z+x-2y)^2-$
$-(x+y-2z)^2=0 \Rightarrow x=y=z.$

1644. Dokazati da je:

$$\left(\frac{b^{-1}+a^{-1}}{ab^{-1}+ba^{-1}}\right)^{-1}+\left(a^{-1}+\frac{b^{-1}}{2}\right)^{-1}-\frac{b^{-1}-a^{-1}}{a^{-1}b^{-1}}=2b,$$

$(a=0, b\neq 0).$

1645. Ako je $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$ i $\frac{ay-bx}{c}=\frac{cx-az}{b}=\frac{bz-cy}{a}$, onda je $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=\frac{z}{c}$. Dokazati.

1646. Neka su M i N središta stranica BC i CD paralelograma $ABCD$. Prave AM i AN seku dijagonalu BD u tačkama K i L. Dokazati da je $DL=LK=KB$.

1647. Koliko ima celih brojeva izmedju 100 i 10 000 kod kojih su tačno tri cifre jednake?

1648. Rešiti jednačinu po x, $x+|x|=\frac{x}{|x|}$.

1649. Pokazati da vrednost izraza:

$$A=\frac{x}{a}+\frac{x}{b-a}-\frac{a}{a+b}$$

ne zavisi od a i b za $x=\frac{a^2(b-a)}{b(b+a)}$, $ab\neq 0$ i $|a|\neq b$.

1650. Ako je: (1) $a+b=x+y$
(2) $a^2+b^2=x^2+y^2$
dokazati da je $a^3+b^3=x^3+y^3$.

1651. Dokazati da je izraz:

$$A=\frac{1}{a-b}+\frac{1}{a+b}+\frac{a+b}{a^2+ab+b^2}+\frac{a-b}{a^2-ab+b^2}\quad (a\neq b)$$

jednak nuli jedino za $a=0$.

1652.* Dat je trougao ABC sa uglovima $\angle CAB=60°$, $\angle ACB=90°$ i tačka M na stranici BC. Ako je $CM=p$ i $MN=q$, izračunati veličinu $x=AM$ u funkciji veličina p i q.

1653.* Ako se stranica AB paralelograma $ABCD$ produži preko temena B za duž $BE=AB$, a stranica AD preko temena D za $DF=AD$, tada tačke E, C i F pripadaju istoj pravoj. Dokazati.

1654.* U trouglu ABC konstruisane su simetrala spoljašnjeg ugla u temenu A koja seče naspramnu stranicu u tački D i visina AE. Ako je $AD=2AE$, dokazati da je tada $\angle B-\angle C=60°$.

1655. Ako se dvocifren broj podeli cifrom jedinica, dobije se kao količnik cifara jedinica, a ostatak cifara desetica. Odrediti taj broj (obrazložiti rešenje).

1656.* Date su prava i dve taške van prave, obe sa iste strane prave. Konstruisati trougao tako da mu jedna stranica pripada datoj pravoj, a da su date tačke podnožja visina koje odgovaraju dvema stranicama trougla.

1657. Dokazati ekvivalenciju:

$$\left(\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}\right)\Leftrightarrow (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)=(ap+bq+cr)^2.$$

1658. Dat je pravougli trougao $ABC(\angle ACB=90°)$. Nad njegovim katetama konstruisani su kvadrati $ADKC$ i $CBHE$. Dokazati da je zbir rastojanja tačaka D i H od prave AB jednak dužini hipotenuze AB.

1659. Konstruisati grafik funkcije:

$$y=\sqrt{x^2-2x+1}-\sqrt{x^2+6x+9}.$$

1660.* Razlika četvrtih stepena dva broja od kojih prvi pri deljenju sa 5 daje ostatak 1, a drugi pri deljenju sa 5 daje ostatak 2, deljiva je sa 5. Dokazati.

1661. Neka su a, b, c, d, x celi brojevi. Ako se razlomak $\frac{ax+b}{cx+d}$ može skratiti sa k, onda je $ad-bc$ deljivo sa k, pri čemu je k ceo broj. Dokazati.

1662. Rešiti jednačinu po x (a dati realan broj):

$$\frac{x}{2a-5}+\frac{ax}{2a+5}=\frac{2a^2+3a+5x}{4a^2-25},$$

a zatim odrediti realan broj a tako da je $x<-1$.

1663. Rešiti jednačinu po x (a dati realan broj):

$$\frac{4a^2}{3x+4}+\frac{3a+3}{x^2-1}=\frac{2a^2}{3x^2-3}+\frac{3}{x-1},$$

a zatim odrediti realan broj a tako da je $x>2$.

1664. Rešiti linearni sistem po x, y (a dati realni broj):
$(a-2)x+(a+1)y=20 \wedge 4x+5y=a+1$,
a zatim odrediti realan broj a tako da je tačna konjunkcija $x\geq 0 \wedge y\leq 0$ u skupu celih brojeva.

1665. Rešiti sistem po x, y (a dati realan broj):
$(a+2)x+(a-2)y=16 \wedge 2x+4y=a-2$,
a zatim odrediti realan broj a tako da je tačna relacija $y=3x$.

1666. Data je linearna jednačina po x (a dati realan broj):

a) $\dfrac{9a^2-8}{2x+4}-\dfrac{4-3a^2}{x-2}=\dfrac{a(4+3ax)}{x^2-4}$;

b) $\dfrac{ax}{3a-2}+\dfrac{x}{3a+2}=\dfrac{x(5a+1)+(a-1)}{9a^2-4}$.

Rešiti jednačinu, a zatim odrediti realan broj a tako da je $x<1$.

1667. Prava MN je zajednička spoljašnja tangenta kružnica K_1 i K_2, koje se seku u tačkama A i B (M i N su dodirne tačke). Izračunati zbir $\angle MAN+\angle MBN$.

1668. U nekom razredu na kraju školske godine niko nije dobio ocenu odličan iz matematike. Svaki šesti učenik bio je vrlo dobar, svaki treći dovoljan, a svaki deveti nedovoljan. Broj učenika je između 20 i 40. Koliko je učenika dobilo ocenu 3 i koliko je bilo učenika u razredu?

1669.* Ako je $a+b+c=0$ i $a^2+b^2+c^2=1$, izračunati $a^4+b^4+c^4$.

1670.* Konstruisati grafik funkcije $|y|=x+|x-3|$.

1671.* Dokazati da je n^3+11n ($n\in N$) deljivo sa 6.

1672.* Odrediti sve cele brojeve za koje je $\dfrac{a^3+1}{a-1}$ takođe ceo broj.

1673. Ako su x, y, i z takvi brojevi da je $x+y+z=0$, dokazati da je zbir kubova ova tri broja deljiv sa 3.

1674.* Odrediti $f(x)$ i $g(x)$ ako je:

$$f\left(\frac{x}{x-1}\right)+g(2x+1)=2x \wedge f\left(\frac{x}{x-1}\right)-g(2x+1)=x,\ (x\neq 1).$$

1675.* Odrediti sva celobrojna rešenja jednačine $x^2+xy+y^2=1$.

1676. U jednakokrakom trouglu ABC, gde su osnovica $AB=18$ cm a kraci $BC=AC=15$ cm, upisan je pravougaonik čije su stranice x i $3x$, tako da mu dva temena pripadaju osnovici AB, a druga dva kracima. Izračunati stranice pravougaonika.

1677. U jednakokrakom trouglu ABC, gde je osnovica $AB=30$ cm, a kraci $AC=BC=25$ cm upisan je kvadrat stranice x, tako da mu dva temena pripadaju osnovici a druga dva kracima AC i BC. Izračunati stranicu x kvadrata.

1678. Romb je upisan u jednakokraki trougao ABC, tako da mu je jedno teme A, a dve stranice pripadaju pravama AB i AC. Ako je $AC=6$ cm, $BC=8$ cm, izračunati stranicu romba.

1679. Deltoid se sastoji iz dva jednakokraka trougla čija zajednička osnovica iznosi 40 cm, a kraci po 25 cm i 52 cm. Izračunati dijagonale deltoida.

1680. Osnovica trougla je $c=56$ cm, odgovarajuća visina $h_c=15$ cm i težišna linija $t_c=17$ cm. Izračunati stranice a i b trougla.

1681.* Ako se polinom y^2+my+2 podeli sa $y-1$, količnik je $f(y)$, a ostatak R. Ako se isti polinom podeli sa $y+1$, količnik je $g(y)$ a ostatak r. Odrediti realan broj m tako da je $R=r$.

1682.* Polinom $P(x)=x^4+2x^3+ax^2+2x+b$ je kvadrat drugog polinoma, gde su a i b realni brojevi. Odrediti drugi polinom i realne brojeve a i b.

U jednačinama odrediti realne brojeve A, B, C i D tako da oni važe za svako x (**1683–1687**):

1683. $\dfrac{x+3}{(x+1)(x^2+1)}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2+1}$.

1684. $\dfrac{2x^2}{x^4-1}=\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{x+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+1}$.

1685. $\dfrac{x+2}{x^3-2x^2}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x^2}+\dfrac{C}{x-2}$.

1686. $\dfrac{6}{x^4+x^3-x-1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$.

1687. $\dfrac{x^3+1}{x(x-1)^3}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}+\dfrac{D}{(x-1)^3}$.

1688.* Rešiti jednačinu po x (m realan broj):

$$\frac{m(x^2+8)+6}{8-x^3}+\frac{m}{x-2}=\frac{m+2}{x^2+2x+4},$$

a zatim odrediti realan broj m tako da je $|x|<4$.

1689.* Rešiti jednačinu po x (m dati realan broj):

$$\frac{2mx(m+1)+3x}{m^3-27}-\frac{x}{m-3}+\frac{x+1}{m^2+3m+9}=0,$$

a zatim odrediti realan broj m tako daje $|x|<2$.

1690.* Rešiti jednačinu po x (a realan broj);

$$\frac{x+a+2}{x-a-2}-\frac{a-x+2}{x+a+2}=\frac{2(x^2-2x+2)+2a(a-x+5)}{x^2-a^2-4a-4},$$

a zatim odrediti realan broj a tako da je $|x|<1$.

1691.* Rešiti jednačinu po x (a dati realan broj):

$$\frac{a+1}{ax+3a}-\frac{3ax-5}{ax^2+2ax-3a}=\frac{4}{x-1},$$

a zatim odrediti realan broj a tako da je $|x|<2$.

1692.* Rešiti jednačinu po x (m dati realan broj):

$$\frac{2m-5}{(m-1)(x+2)}-\frac{3}{x+1}=\frac{3x+4}{x^2+3x+2},$$

a zatim odrediti realan broj m tako da je $|x|<1$.

1693.* Prava a seče pravu b, a prava c je paralelna sa b. Sve tri prave su komplanarne. Odrediti broj tačaka koje su jednako udaljene od sve tri prave.

1694.* Dokazati identičnost:

$$\frac{a^2b^2}{(a-c)(b-c)}+\frac{b^2c^2}{(b-a)(c-a)}+\frac{c^2a^2}{(c-b)(a-b)}=ab+ac+bc.$$

1695. Ako unutrašnji uglovi četvorougla čine razmeru:
a) 3 : 4 : 5 : 6;
b) 5 : 7 : 11 : 13,
onda je četvorougao tetivni. Dokazati.

1696.* Dati su polinomi $P(x)=x^2-3x+2$, $Q(x)=x^2+3x+2$. Odrediti polinom $P(Q(x))$, zatim dokazati da je deljiv sa x^2+3x+1.

1697.* Dat je polinom $P(x)=x^4+mx^3+nx^2+px+8$. Odrediti realne brojeve m, n i p tako da ovaj polinom bude deljiv sa $(x-1)(x^2+6x+8)$.

1698.* U polinomu $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$, odrediti realne brojeve a, b i c da bude deljiv sa $(x-1)^3$.

1699.* U polinomu $x^5+mx^4+2x^3+nx^2-3x+p$, odrediti realne brojeve m, n i p da bude deljiv sa x^3+1.

1700. Ako je $P(x)=2x+3$, $Q(x)=4x+9$, tada je $P(Q(x))=Q(P(x))$. Dokazati.

1701. Data je funkcija $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$. Izračunati $f(f(x))$.

1702. Dat je pravougaonik $ABCD$, zatim je konstruisana prava $AMNF$, koja seče dijagonalu BD u M, stranice BC i DC u N i P.
a) Dokazati da je duž AM geometrijska sredina za duži MP i MN;
b) Dokazati da je proizvod $DP\cdot BN$ stalna veličina i ne zavisi od izbora sečice.

1703.* Dat je trougao ABC u kome je visina CH jednaka stranici AB.
a) U dati trougao ABC upisati pravougaonik tako da mu jedna stranica pripada stranici AB trougla i da se stranice pravougaonika odnose kao $m:n$, gde su m i n date duži.
b) Dokazati da je obim svih tako nastalih (upisanih) pravougaonika konstantan i jednak $2AB$.

1704.* U istom koordinatnom sistemu konstruisati grafik funkcije

$$y=\frac{3}{5}x-3 \text{ i } y=x-|x|.$$

a) Osenčiti oblast ravni xOy kojoj pripadaju sva rešenja sistema

$$y\geq\frac{3}{5}x-3\wedge y<x-|x|.$$

b) Da li tačke $A(5,0)$, $B\left(-1,-\frac{18}{5}\right)$ i C $(10,3)$ pripadaju grafiku funkcije $y=\frac{3}{5}x-3$.

1705.* Ako je $a^4+b^4+c^4+d^4=4abcd$, tada je $a=b=c=d$. Dokazati.

1706.* Koji uslov zadovoljavaju realni brojevi a, b, c i d da bi izraz $a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$ imao najmanju vrednost?

1707.* Konstruisati kružnicu koja sadrži tačke M i N a tangentna duž konstruisana iz date tačke P ima dužinu a.

1708. Odrediti sve cele brojeve x i y za koje je $xy+x-3y=10$.

1709. Turista je prešao 105 km. Da je dnevno prelazio po 6 km manje, na putu bi proveo dva dana više. Koliko kilometara dnevno je prelazio turista.

1710. Vozeći ravnomerno 15 minuta biciklista je prešao polovinu puta AB. Drugu polovinu je vozio 6 km/h manje od prvobitne brzine. Tako je ceo put od A do B prešao za 33 minuta. Odrediti brzinu kretanja bicikliste i dužinu puta AB.

1711. Ako je $x^2+\frac{1}{x^2}=7$, izračunati $x+\frac{1}{x}$.

1712. Dat je razlomak čiji je imenilac za 1998 veći od njegovog brojioca. Ako se datom razlomku doda $\frac{1}{5}$, dobija se razlomak koji je za tri puta veći od prvog razlomka. Odrediti imenilac i brojilac datog razlomka.

1713. Odrediti razlomak koji je jednak razlomku $\frac{40}{71}$ i kod koga je zbir brojioca i imenioca jednak 111.

1714.* Ako je x realan broj i ako je $x+\frac{1}{x}=3$, odrediti:

a) $x^3+\frac{1}{x^3}$, b) $x^4+\frac{1}{x^4}$.

1715.* Rešiti jednačinu $\sqrt{x^2+2x+1}+\sqrt{1-2x+x^2}=2000$.

1716.* Ako je $n\in N$, tada je $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}$ jednako 0 ili takođe pripada skupu N. Dokazati.

1717. Zbir cifara dvocifrenog broja je 11, a ako cifre zamene mesta novi broj je za 5 veći od trostrukog traženog broja. Odrediti taj broj.

1718.* Cifra desetica trocifrenog broja, čiji je zbir cifara 15, jednaka je 5. Zamenom mesta cifara stotica i jedinica dobijeni broj je za 39 veći od dvostrukog prvog broja. Odrediti taj broj.

1719.* Odrediti skup tačaka (x,y) u Dekartovoj ravni koji zadovoljavaju relaciju $x+|x|=y+|y|$.

1720. Težišne duži koje odgovaraju katetama a i b, pravouglog trougla su t_a i t_b. Dokazati da važi $\frac{t_a+t_b}{a^2+b^2}=\frac{5}{4}$.

1721. Rešiti sistem nejednačina $y<x+1\wedge x+2y\le 2\wedge y\ge -2$.

Okružno takmičenje 1994/95.

Prvi razred

1722. Dokazati da broj koji se u dekadnom zapisu piše korišćenjem jedino cifara 2 i 6, nije razlika kvadrata dva cela broja.

1723. Dat je beskonačan skup S parova prirodnih brojeva. Dokazati da u tom skupu postoje parovi (a,b) i (x,y) takvi da je $a\le x$ i $b\le y$.

1724. Kako treba izabrati predznake + ili – ispred brojeva pa da vrednost izraza $\pm 1\pm 2\pm\ldots\pm 1995$ bude što bliža nuli?

1725. Ako svaka dijagonala četvorougla $ABCD$ polovi njegovu površinu, dokazati da je $ABCD$ paralelogram.

1726. Nad stranicama trougla ABC na spoljnu stranu konstruisani su jednakostranični trouglovi ADB, BEC i CFA. Dokazati da su duži AE, BF i CD podudarne i da se seku u jednoj tački.

Republičko takmičenje Novi Sad – 16. mart 1996.

Prvi razred

1727. Za vrhove dva stuba visine 11 i 15 metara, koji su na rastojanju od 9 m, zakačen je kanap dužine 15 m. Na kanap je okačen težak teg i pušten da klizi, sve dok se teg ne nađe u najnižoj tački. Na kojoj visini će se nalaziti tada teg?

1728. Ako su a, b, c, i d pozitivni realni brojevi takvi da je $\frac{5a+b}{5c+d}=\frac{6a+b}{6c+d}$ i $\frac{7a+b}{7c+d}=8$, onda, izračunati $\frac{9a+b}{9c+d}$.

1729. Neka je n prirodan broj i d delitelj $2n^2$. Da li n^2-d može biti potpun kvadrat?

1730. Ali-Baba se nalazi u pećini u kojoj ima zlata i dijamanata. Kilogram zlata košta 20 dinara, a kilogram dijamanata košta 60 dinara. Na raspolaganju mu se nalazi jedan kovčeg. Pun kovčeg zlata teži 200 kg, a pun kovčeg dijamanata teži 40 kg. Težina praznog kovčega je zanemarljiva. Ali-Baba može da ponese 100 kg. Koliko zlata i koliko dijamanata treba da ponese Ali-Baba da bi najviše profitirao?

Okružno takmičenje iz matematike 21.2.98.

Prvi razred

1731. Koliko tročlanih podskupova $\{a,b,c\}$ ima skup $A=\{19,20,\ldots,98\}$, takvih da je $a+b+c$ deljivo sa 3 ?

1732. Neka su a i b realni brojevi za koje važi
$a^3 - 3ab^2 = 8$, $b^3 - 3a^2b = \sqrt{61}$.

Naći $a^2 + b^2$.

1733. Dokazati da je tačka S centar upisanog kruga trougla ABC ako i samo ako je $a\overrightarrow{AS} + b\overrightarrow{BS} + c\overrightarrow{CS} = \vec{0}$, gde su a, b i c dužine odgovarajućih stranica.

1734. Naći sve složene brojeve $n \in N$ koji ne dele proizvod svih prirodnih brojeva manjih od n.

1735. Neka je dat ΔABC sa uglovima $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$, i tačke D i E na stranicama AB i BC redom, tako da je $\angle DCA = \angle EAC = 30°$. Odrediti $\angle CDE$.

Republičko takmičenje Kragujevac – 14. mart 1998.

Prvi razred

1736. a) Rastaviti na činioce izraz: $x^4 + x^2y^2 + y^4$.

b) Ispitati da li je broj $9^{1998} + 3^{1998} + 1$ prost.

1737. Neka su a, b, c dati različiti brojevi iz $R \setminus \{0\}$, i neka je dat izraz

$$V(x,y) = \frac{1}{(a-x)^2(a-y)^2}((a-b)^2(c-x)(c-y) -$$

$$-(c-a)^2(b-x)(b-y)),$$

gde $x, y \neq a$. Dokazati da postoje izrazi $f(x)$ i $g(y)$ (tj. takvi da f ne sadrži y, a g ne sadrži x), tako da se izraz $V(x,y)$ može, za svako $x, y \in R$, $x \neq y$, $x, y \neq a$, prikazati u obliku

$$V(x,y) = \frac{1}{x-y}(f(x) - g(y)).$$

1738. Dat je izraz $*1*3*3^2*3^3*\cdots*3^{1997}*3^{1998}$. Arkadije i Branislav naizmenično zamenjuju po jednu zvezdicu sa + ili sa −. Branislav nastoji da broj koji se dobije, posle zamene i poslednje zvezdice, bude deljiv sa 7. Može li Arkadije da ga spreči u tome ako on prvi igra?

1739. Dat je trouga ABC. Odrediti sve tačke M u njegovoj ravni, tako da trouglovi ABM, BCM i CAM imaju jednake površine.

1740. Dokazati da osmougao kome su svi unutrašnji uglovi jednaki i kome su dužine svih stranica racionalni brojevi ima centar simetrije.

Okružno takmičenje iz matematike 20.2.1999.

Prvi razred – A kategorija

1741. Dat je konveksan petougao $A_1A_2A_3A_4A_5$. Neka su B_1, B_2, B_3, B_4 središta stranica A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5 redom. Označimo sa M i N središta duži B_2B_4 i B_1B_3. Odredite odnos dužina duži MN i A_1A_5.

1742. Dat je polinom
$P(x) = x^{3000} - 2000x^{1999} + 2000x^{1998} - \cdots + 2000x^3 - 2000x + 2000$.
Izračunati $P(1999)$.

1743. Koliko ima parova (x, y) racionalnih brojeva, tako da je
$2x^2 + 5y^2 = 1$?

1744. Dat je skup A. Među njegovim podskupovima definišemo relaciju $\sim$: $X, Y \subset A$, $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$. Ispitati da li je $\sim$ refleksivna, simetrična, asimetrična ili tranzitivna.

1745. Neka je M unutrašnja tačka paralelograma $ABCD$. Dokazati da je $MA + MB + MC + MD$ manje od obima paralelograma.

Okružno takmičenje iz matematike 20.2.1999.

Prvi razred – B kategorija

1746. Ako je n prorodan broj veći od dva, dokazati da je broj

$$\frac{n^{12} - 128n^6 + 4096}{(n^3 - 4n^2 + 8n - 8)^2}$$

potpun kvadrat prirodnog broja.

1747. Dat je polinom
$P(x) = x^{3000} - 2000x^{1999} + 2000x^{1998} - \cdots + 2000x^3 - 2000x + 2000$.
Izračunati $P(1999)$.

1748. Neka su tačke K i L redom središta stranica CD, i AD kvadrata $ABCD$, a S presečna tačka duži BK i CL.
a) Dokazati da je četvorougao $ABSL$ tetivni.
b) Dokazati da je trougao ASB jednokraki.

1749. Dat je skup A. Među njegovim podskupovima definešimo relaciju $\sim$: $X, Y \subset A$, $X \sim Y \Leftrightarrow X \cap Y \neq \emptyset$. Ispitati da li je $\sim$ refleksivna, simetrična, asimetrična ili tranzitivna.

1750. Naći sve proste brojeve p takve da su i brojevi $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ prosti.

REŠENJA

I GLAVA

1. LOGIKA I SKUPOVI

1.1. Osnovne logičke operacije

1. Sve navedene rečenice su iskazi.
2. a) $=, \leq, \geq$; b) $<$; c) $>$.
3. $p(1) = 1^2 - 6 \cdot 1 + 8 = 3 > 0$; netačan;
   $p(2) = 2^2 - 6 \cdot 2 + 8 = 0$; tačan itd.
4. Kako je $x = \dfrac{10-y}{2} \wedge x > 0 \wedge 10 - y > 0 \Rightarrow y < 10$; pošto je $y \in N$ i $y < 10 \Rightarrow y = 1, 2, 3, \ldots, 9$ a $x \in N$ i $x = \dfrac{10-y}{2}$, onda je $y = 2, 4, 6$ i 8, a $x = 4, 3, 2$ i 1. Traženi parovi su: (4,2); (3,4); (3,4); (2,6) i (1,8).
5. a) $\bot$; b) $\top$; c) $\top$, $\top$, $\top$.
6. a) $\top$; b) $\top$; c) $\bot$.
7. a) Broj 3 je jedino rešenje;
   b) Svi celi brojevi x delioci broja 6. To su: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.
   c) To su brojevi: 1, 2, 3, 4, 5, 6;
   d) Jedinstveno rešenje $x = 4$;
   e) Data formula ima više rešenja. Sva rešenja date formule je skup $A \cup B$, gde je skup $A = \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, a skup $B = \{6, 7, 8, \ldots\}$.
8. a) $x = 1, 2, 3$; b) $x = -3 \vee x = 3$; c) $x = 1, 2, 3$; d) $x = 6, 7$.
9.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau(x>7 \vee x<4)$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\tau(x<9 \wedge x<5)$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\tau(3x<7)$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\tau(x^2 = x \cdot x)$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

10. $p = \top$, $q = \top$, $r = \bot$, $s = \bot$.
    a) $\top$; b) $\top$; c) $\bot$; d) $\top$.
11. a) $\bot$; b) $\top$.
12. a) $\top$; b) $\top$. $p = \top$, $q = \top$.
13. $p = \top$, $q = \bot$, $r = \top$; a) $\top$; b) $\bot$; c) $\top$.
14. $p = \top$, $q = \bot$, $r = \top$, $s = \bot$, $t = \bot$
    a) $\top$; b) $\top$; c) $\top$; d) $\top$.
15. $a = \top$; $b = \bot$; $c = \top$; $d = \bot$.
    a) $\bot$; b) $\bot$; c) $\top$.
16. Prvi način: Sastaviti istinitosne tablice za formulu A, pa na osnovu toga izvesti zaključak. Kako su kolona L leva strana i kolona D desna strana u ekvivalenciji, formula A je tautologija. Drugi način: Ako pretpostavimo da formula A nije tautologija, onda postoje neke istinitosne vrednosti slova p, q, z za koje je $A = \bot$. Tada bi postojale samo ove mogućnosti:

p	q	z	$p \vee q$	$p \wedge z$	$q \wedge z$	L	D	A
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

a) $(p \vee q) \wedge z = \top$ i $(p \wedge q) \vee (q \wedge z) = \bot$;
b) $(p \vee q) \wedge z = \bot$ i $(p \wedge z) \vee (q \wedge z) = \top$.
Razmotrimo oba slučaja.
a) $(p \vee q) \wedge z = \top$ ako je $p \vee q = \top$ i $z = \top$, tada imamo tri mogućnosti:
1. $p = \top$, $q = \top$ i $z = \top$;
2. $p = \bot$, $q = \top$ i $z = \top$;
3. $p = \top$, $q = \bot$ i $z = \top$.
U sva tri slučaja je $(p \wedge z) \vee (q \wedge z) = \top$, što znači da je pretpostavka pod a) nemoguća.
Analizirajući slučaj b) $(p \vee q) \wedge z = \bot$ ako je $p \vee q = \bot$ i $z = \top$, imamo tri mogućnosti:
1. $p \vee q = \bot$ i $z = \top$,
2. $p \vee q = \top$ i $z = \bot$,

3. $p \vee q = \bot$ i $z = \bot$,
a tada je uvek $(p \wedge z) \vee (p \wedge z) = \bot$, pa je pretpostavka b) nemoguća. Odakle zaključujemo da formula A ne može imati nikad istinitosnu vrednost $\bot$. Dakle, formula A je tautologija.

17. Prvi način: Pomoću tablice istinitosti za formulu A.

a	b	$a \Rightarrow b$	$\neg b$	$\neg(a \Rightarrow b)$	$a \wedge \neg b$	A
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Drugi način: Ako pretpostavimo da formula A nije tautologija, onda postoje dve mogućnosti:
a) $\neg(a \Rightarrow b) = \top$ i $a \wedge \neg b = \bot$;
b) $\neg(a \Rightarrow b) = \bot$ i $a \wedge \neg b = \top$.
Analizirajmo slučaj a). Da bi bilo $\neg(a \Rightarrow b) = \top$ treba da je $a = \top$, $b = \bot$, onda je $a \wedge \neg b = \top$. Dakle, pretpostavka pod a) je netačna. Analizirajmo slučaj b). Da bi važilo $\neg(a \Rightarrow b) = \bot$ treba da je: $a = \top$, $b = \top$; $a = \bot$, $b = \bot$ i $a = \bot$, $b = \top$. U sva tri slučaja nije $a \wedge \neg b = \top$, dakle, pretpostavka pod b) je netačna. Znači formula A je tautologija.

18. a) Iskazi p i q su dve osnovne promenljive veličine od kojih treba

a)

p	q	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

b)

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$

sastaviti sve moguće kombinacije od $\top$ i $\bot$. Tablice istinitosti za iskaze $p, q, p \vee q$ i $(p \vee q) \vee q$ date su u tabeli a), i to za svaki iskaz u odgovarajućoj koloni istim redom.

b) Tablica istinitosti za iskaz $(p \vee q) \vee r$ je nešto složenija, pa je broj mogućnosti 8, jer se javljaju tri osnovne promenljive, te se u tablici istinitosti javlja 8 vrsta. Tablica istinitosti datog iskaza je tabela b).

19. Analogno prethodnom zadatku sastaviti tablicu istinitosti za svaki iskaz.

20. Tablica istinitosti za formulu pod a) data je tabelom.

p	q	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$

Dakle, ova formula je tautologija.

21. Analogno prethodnom zadatku sastaviti tablice istinitosti itd.

1.2. Osnovne skupovne operacije

22. $x = 0,1,2,3$.

23. card $S = 4$.

24. $Q \cap R$ $\{A, B, H, O, P, C, E, T, K, M\}$.

25. a) $A = \{3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{0,1,2,\ldots,8\}$;
b) $A \cap B = \{3,4,5,6,7,8\}$, $B \setminus A = \{0,1,2\}$.

26. $A \cap B = N$, tj. skup prirodnih brojeva.

27. a) Sva tvrđenja su netačna.

28. a) $\{3,6,12\}$; b) A; c) $\{1,2,4,8,16,32\}$; d) $\varnothing$; e) A.

29. a) $P = \{7\}$; b) skup P je prazan za svako $m \neq 2$.

30. $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$, $d = 4$.

31. $A = \{0,4,6,8,9\}$,
$B = \{0,2,4\}$, $A \cup B = \{0,2,4,6,8,9\}$, $A \cap B = \{0,6,8\}$,
$A \setminus B = \{6,8,9\}$, $B \setminus A = \{2\}$,
$P(A \setminus B) = \{\varnothing, \{6\}, \{8\}, \{9\}, \{6,8\}, \{6,9\}, \{8,9\}, \{6,8,9\}\}$.

32. $A = \{0,6,12\}$, $B = \{0,2,6,8\}$ itd.

33. $P = \{a, c, f, g, h\}$; $Q = \{b, c, d, e, f, h\}$.

34. $A = \{2,3,4,5,6,7,8\}$, $B = \{1,3,6,8\}$.

35. Prva i peta su tačne, ostale su netačne.

36. Bez uputstva.

37. $A \setminus B = \{2,4,6,7,9\}$.

38. $A = \{1,3,4,5,6\}$, $B = \{6\}$, $C = \{2,4\}$.

39. 1° a) $A \cup B = \{a,b,c,e,f,h,i\}$;
b) $A \cap B = \{a,c,f\}$;
c) $B \cup C = \{a,b,c,d,e,f,h,i\}$;
d) $B \cap C = \{b\}$;
e) $A \cup C = \{a,b,c,d,e,f,h\}$;
f) $A \cap C = \{e,h\}$;
g) $A \cup (B \cup C) = \{a,b,c,d,e,f,h,i\}$;
h) $A \cap (B \cap C) = \{a,b,c,e,f,h\}$;
i) $A \cup (B \cap C) = \emptyset$.

2° a) $\overline{A} = \{b,d,g,i\}$;
b) $\overline{B} = \{d,e,g,h\}$;
c) $\overline{C} = \{a,c,f,g,i\}$;
d) $C_S(A \cup B) = \{d,g\}$;
e) $C_S(A \cup C) = \{g,h\}$;
f) $C_S(B \cup C) = \{g\}$;
g) $C_S(A \cap B) = \{b,d,e,g,h,i\}$;
h) $C_S(A \cap C) = \{a,b,c,d,f,g,i\}$;
i) $C_S(A \cup (B \cup C)) = \{g\}$;
j) $C_S(A \cap (B \cap C)) = S$;
k) $C_S(A \cup (B \cap C)) = \{d,g,i\}$;

3° Kako je $A \cap B \cap C = \emptyset$; $A \cap B \cap \overline{C} = \emptyset$; $A \cap \overline{B} \cap C = \{a,c,f\}$; $A \cap \overline{B} \cap \overline{C} = \emptyset$, tvrđenje je tačno.

40. Ovde treba dokazati da za uniju i presek dva skupa važe de Morganovi zakoni. Dokaz možemo izvesti na više načina: grafički, računski i pomoću tablice istinitosti.

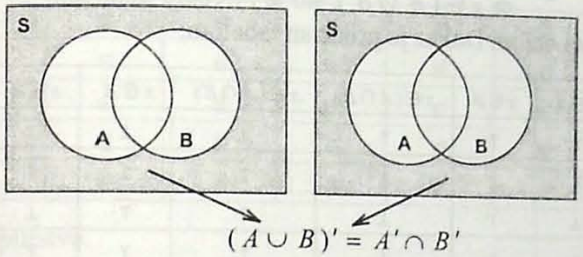
Dokaz obrasca (1):

Prvi način: Koristeći Ojler-Venove dijagrame (sl. 6) dokaz se lako izvodi.

Drugi način: Koristeći simbole matematičke logike, definiciju, unije, preseka i jednakost skupova, imamo lanac ekvivalencija:

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in S \wedge x \notin (A \cup B)$$
$$\Leftrightarrow x \in S \wedge \neg(x \in A \cup B)$$
$$\Leftrightarrow x \in S \wedge \neg(x \in A \cup x \in B)$$

$$\Leftrightarrow x \in S \wedge (x \notin A \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow (x \in S \wedge x \notin A) \wedge (x \in S \wedge x \notin B)$$
$$\Leftrightarrow x \in A' \wedge x \in B'$$
$$\Leftrightarrow x \in (A' \cap B').$$ Kraj dokaza.



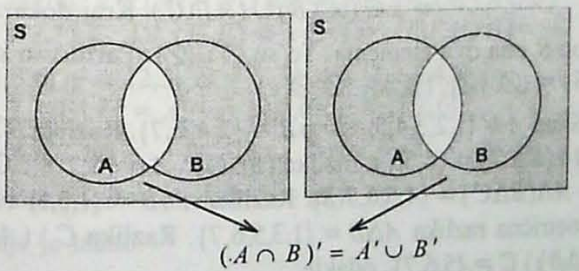
Sl. 6

Treći način: Pomoću tablice istinitosti:

$x \in A$	$x \in B$	$x \in (A \cup B)$	$x \in (A \cup B)'$	$x \in A'$	$x \in B'$	$x \in A' \cap B'$
T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	T	⊥	⊥	T	⊥
⊥	T	T	⊥	T	⊥	⊥
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T

Dokaz obrasca (2):

Prvi način: grafički prikaz rešenja koristeći Ojler-Venove dijagrame (sl. 7).



Sl. 7

Drugi način: Koristeći simbole matematičke logike i definicije, unije, preseka i jednakosti skupova imamo:

$$x \in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \in S \wedge x \notin (A \cap B)$$
$$\Leftrightarrow x \in S \wedge \neg(x \in A \cap B)$$

$\Leftrightarrow x\in S\wedge\neg(x\in A\wedge x\in B)$
$\Leftrightarrow x\in S\wedge(x\notin A\vee x\notin B)$
$\Leftrightarrow (x\in S\wedge x\notin A)\vee(x\in S\wedge x\notin B)$
$\Leftrightarrow x\in A'\vee x\in B'$
$\Leftrightarrow x\in(A'\cup B')$, što je i trebalo dokazati.

Treći način: Dokaz je prikazan tabelom:

$x\in A$	$x\in B$	$x\in(A\cap B)$	$x\in(A\cap B)'$	$x\in A'$	$x\in B'$	$x\in(A'\cup B')$
T	T	T	⊥	⊥	⊥	⊥
T	⊥	⊥	T	⊥	T	T
⊥	T	⊥	T	T	⊥	T
⊥	⊥	⊥	T	T	T	T

Iz tabele se vidi da je kolona $x\in(A\cap B)'$ ima istu istinitosnu vrednost, kao i kolona $x\in(A'\cup B')$, što je i trebalo dokazati.

41. $A=\{1,2,2,4,6,12\}$; $B=\{1,2,3,6,9,18\}$; $C=\{1,2,3,6,10,15,30\}$.

42. Razlika $B\setminus C=\{6\}$, $A\setminus(B\setminus C)=\{1,2,3\}$. Kako je $A\setminus B=\{1,2\}$ i $A\cap C=\{1,3\}$, to izlazi da je $(A\setminus B)\cup(A\cap C)=\{1,2\}\cup\{1,3\}=\{1,2,3\}$. Data skupovna jednakost je tačna.

43. Polazimo od ekvivalencije, odakle sledi lanac ekvivalencija:
$x\in(A\setminus(B\setminus C))\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin(B\setminus C))$
$\Leftrightarrow(x\in A\wedge\neg(x\in B\wedge x\notin C))$
$\Leftrightarrow(x\in A\wedge(x\notin B\vee x\in C))$
$\Leftrightarrow(x\in A\wedge x\notin B)\vee(x\in A\wedge x\in C)$
$\Leftrightarrow(x\in A\setminus B)\cup(x\in A\cap C)$
$\Leftrightarrow x\in(A\setminus B)\cup(A\cap C)$. Kraj dokaza.

44. Skup S ima dva elementa. To su $\varnothing$ i $\{\varnothing\}$. Partitivan skup je $P(S)=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing\{\varnothing\}\}\}$.

45. a) Skup $A=\{1,2,3,4,5\}$, skup $B=\{2,4,6,7\}$. Razlika $B\setminus C=\{2,6,7\}$, a $A\setminus(B\Delta C)=\{4,5\}$, a razlika $(B\Delta C)\setminus A=\{6,7,8\}$. Odatle sledi
(1) $A\Delta(B\Delta C)=\{4,5,6,7,8\}$. Razlika $A\setminus B=\{1,3,5\}$ i $B\setminus A=\{6,7\}$. Simetrična razlika $A\Delta B=\{1,3,5,6,7\}$. Razlika $C\setminus(A\Delta B)=\{4,8\}$ i $(A\Delta B)\setminus C=\{5,6,7\}$, odakle
(2) $(A\Delta C)\Delta C=\{4,5,6,7,8\}$.
Iz (1) i (2) sledi da je data jednakost tačna.
b) Dokaz je prikazan sledećom tabelom pripadanja. Iz kolone L (leva strana) i kolone D (desna strana) sledi da je tvrđenje tačno.

A	B	C	$B\Delta C$	L	$A\Delta B$	D
∈	∈	∈	∉	∈	∉	∈
∈	∈	∉	∈	∉	∉	∉
∈	∉	∈	∈	∉	∈	∉
∈	∉	∉	∉	∈	∈	∈
∉	∈	∈	∉	∉	∈	∉
∉	∈	∉	∈	∈	∈	∉
∉	∉	∈	∈	∈	∉	∈
∉	∉	∉	∉	∉	∉	∉

46. Bez uputstva.

47. 770 učenika.

48. $M=\{5,7,9,15\}$.

49. Bez uputstva.

50. a) $L=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{b,d,f,g,m,n\}\cup\{a,c,d,f,r,s\}=\{a,b,c,d,e\}\setminus\{a,b,c,d,f,g,m,n,r,s\}=\{e\}$.
$D=(\{a,b,c,d,e\}\setminus\{b,d,f,g,m,n\})\cap(\{a,b,c,d\}\setminus\{a,c,d,f,r,s\})=\{a,c,e\}\cap\{b,e\}=\{e\}$.
Kako je leva strana L jednaka desnoj D, tvrđenje je tačno.

51. Dokaz se izvodi po definiciji, tj.
$(x\in A\cup(A\cap B))\Leftrightarrow(x\in A\vee x\in A\cap B)$
$\Leftrightarrow x\in A\vee(x\in A\wedge x\in B)\Leftrightarrow x\in A\Rightarrow A\cup(A\cap B)=A$.
Drugi zakon: $x\in(A\cap(A\cup B))\Leftrightarrow x\in A\wedge x\in(A\cup B)$
$\Leftrightarrow x\in A\wedge(x\in A\vee x\in B)\Leftrightarrow x\in A\Rightarrow A\cap(A\cup B)=A$.

52. $\overline{A}=\{1,3,6\},\overline{B}=\{2,3\},\overline{D}=\{1,3\},x=\{1,2,3,4,5\}$ ili $x=\{1,2,3,4,4,6\}=A$, $y=\{2,3,6\}$, $z=\{1,2,6\}$.

53. $A=\{-5,3,7,13\}$.

54. $A=\{b,c,e,f\},B=\{b,d,e\},C=\{a,b,f\}$.

55. Tvrđenje je tačno.

56. $A=\{1,2,3,4,6,12\},B=\{1,2,4,5,10,20\},C=\{1,2,4,8,16,32\}$.
a) $A\setminus(B\cup C)=\{3,6,12\}$; d) $(B\setminus C)\cap A=\varnothing$.

57. $T=\{(b,a);(a,c);(b,c);(b,d);(e,c)\}$.

58. Nije, jer $(\gamma,c)\notin A\times B$ već $(\gamma,c)\in B\times A$; $(\beta,b)\notin A\times B$ već $(\beta,b)\in B\times A$.

59. a) $A\times B=$
$\{(a,\alpha);(a,\beta);(a,\gamma);(b,\alpha);(b,\beta);(b,\gamma);(c,\alpha);(c,\beta);(c,\gamma)\}$;
b) $(A\times B)\times C=$
$\{((a,\alpha),1);((a,\alpha),2);((b,\alpha),1);((b,\alpha),2);((c,\alpha),1);((c,\alpha),2);$
$((a,\beta),1);((a,\beta),2);((b,\beta),1);((b,\beta),2);((c,\beta),1);((c,\beta),2);$
$((a,\gamma),1);((a,\gamma),2);((b,\gamma),1);((b,\gamma),2);((c,\gamma),1);((c,\gamma),2)\}$.

60. a) Imamo $2^4=16$ podskupova, tj. dva trivijalna $\emptyset$ i B, 4 jednočlana, 6 dvočlanih, 4 tročlana, i to su svi članovi skupa $P(B)$;
b) $P(A)$ ima takođe $2^4=16$ podskupva;
c) $P(A)\cap P(B)=\{\emptyset,\{c\},\{d\},\{f\},\{c,d\},\{c,f\},\{d,f\},\{c,d,f\}\}$;
d) $P((C_s A)\cap(C_s B))=\{\emptyset,\{b\}\}$.

61. $X_1=\{2,3\}$ ili $X_2=\{2,3,4\}$ ili $X_3=\{2,3,5\}$ ili $X_4=\{2,3,4,5\}$.
$Y=\{2,3,5\}$; $X_1\setminus Y=\emptyset$, $X_2\setminus Y=\{4\}$; $X_3\setminus Y=\emptyset$; $X_4\setminus Y=\{4\}$.

62. $X_1=\{4,5\}$, $X_2=\{4,5,6\}$, $X_3=\{4,5,7\}$, $X_4=\{4,5,6,7\}$.

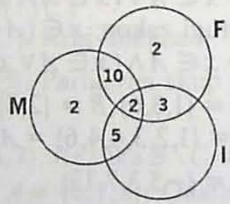
63. a) $A=\{1,2,3,4,5\}$, $B=\{1,2,3,4,6\}$.
b) $A=\{2,3,4,5\}$, $B=\{1,3,4,5\}$.

64. a) $P\Delta Q=\{4,5,7\}$; b) $Q\Delta P=P\Delta Q=\{4,5,7\}$;
c) $(P\Delta Q)\Delta Q=P$; d) $\{1,2,3\}$.

65. $A'=\{a,c,f\}=B$, $B'=\{b,d,e,g\}=A$.

66. $P'=\{x|x\in N\setminus P\}=\{x|x=2k-1,k\in N\}$.
$X_1=\{4,5,7\}$, $X_2=\{4,5,6,7\}$,
$X_3=\{3,4,5,6,7\}$ itd.
$Y_1=\{2,3,6\}$, $Y_2=\{2,3,4,6\}$,
$Y_3=\{2,3,5,6\}$ itd.

68. Skup $A=\{2,3,7,13\}$,
a $B=\{2,3,5,11\}$, sve tri
relacije su tačne.



Sl 8

69. a) 4; b) 18; c) 5 (sl. 8).

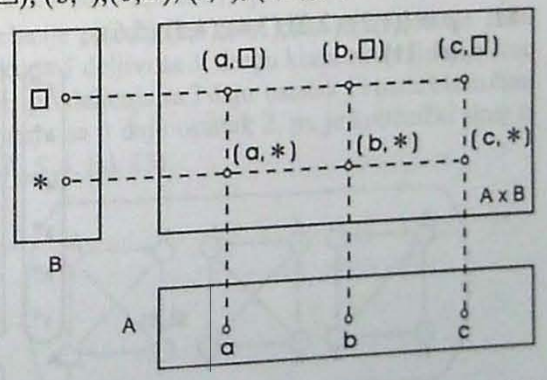
70. Pri dokazivanju skupovnih jednakosti koristi se definicija jednakosti dva skupa, tj. $A=B\overset{def}{\Leftrightarrow}A\subseteq B\wedge B\subseteq A$ (dva skupa su jednaka ako, i samo ako, svaki član jednog skupa je član i drugog skupa i obratno).
Dokaz skupovne jednakosti pod f). Data jednakost je:
$(\forall x)(x\in C\setminus(A\cap B)\Leftrightarrow x\in(C\setminus A)\cup(C\setminus B)$.
(Koristiti definiciju unije, preseka i razlike skupova.)

$(\forall x)(x\in C\wedge x\notin(A\cap B)\Leftrightarrow x\in(C\setminus A)\vee x\in(C\setminus B)$.
(Ponovo se koriste definicije unije, preseka i razlike skupova.)
$(\forall x)(x\in C\wedge\neg(x\in A\wedge X\in B\Leftrightarrow(x\in C\wedge x\notin A)\vee(x\in C\wedge x\notin B)$
$(\forall x)(x\in C\wedge(x\notin A\vee x\notin B)\Leftrightarrow(x\in C\wedge x\notin A)\vee(x\in C\wedge x\notin B)$
(F) $(\forall x)c\wedge(\neg a\vee\neg b)\Leftrightarrow(c\wedge\neg a)\vee(c\wedge\neg b)$.
Formule $x\in A, x\in B, x\in C$ označene su redom sa a,b,c. Kako je formula (F) tautologija, što se lako proverava, ovim je dokazana skupovna jednakost pof f). Slično se dokazuju i ostale.
Dokaz skupovne jednakosti pod h):
$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$, ako i samo ako
$(\forall x)(x\in A\times(B\cap C)\Leftrightarrow x\in(A\times B)\cap(A\times C))$. Ovde smo koristili jednakost skupova. U sledećem koraku ćemo koristiti definiciju Dekartovog proizvoda. Činjenica da neki element x pripada Dekartovom proizvodu nekih skupova znači da je x uređen par, recimo $x=(y,z)$ tj. Da prva koordinata y pripada prvom skupu, a druga z drugom skupu. Dakle, jednakost koju dokazujemo tačna je ako važe ekvivalencije:
$(\forall y)(\forall z)(y\in A\wedge z\in B\cap C)\Leftrightarrow(y,z)\in A\times B\wedge(y,z)\in A\times C$.
(Korišćena definicija Dekartovog proizvoda i preseka.)
$(\forall y)(\forall z)(y\in A\wedge(z\in B\wedge z\in C))$
$\Leftrightarrow(y\in A\wedge z\in B)\wedge(y\in A\wedge z\in C)$.
(Korišćene definicije preseka i Dekartovog proizvoda.)
Ako sa p označimo $y\in A$, sa q $z\in C$ i sa r $z\in C$, za dokaz date skupovne jednakosti treba dokazati da je iskazna formula
$p\wedge(q\wedge r)\Leftrightarrow(p\wedge q)\wedge(p\wedge r)$ tautologija. Što se lako dokazuje pomoću tablice.

71. Na kursu ima 38 slušalaca; dva jezika uči 15 slušalaca.

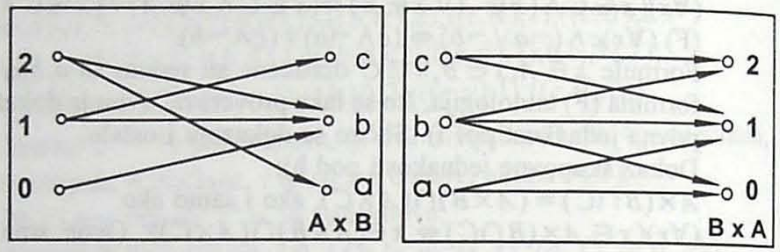
72. $S=\{3,5,6,11\}$, $x=5$.

73. $A\times B=\{(a,*);(a,\square);(b,*);(b,\square);(c,*);(c,\square)\}$; (sl. 9).



Sl. 9

74. $A\times B=\{(O,a);(O,b);(O,c);(1,a);(1,b);(1,c);(2,a);(2,b);(2,c)\}$.
$B\times A=\{(a,0);(a,1);(a,2);(b,0);(b,1);(b,2);(c,0);(c,1);(c,2)\}$.
Njihovi grafovi dati su na slici 10.



Sl. 10

75. $A^2=A\times A=\{(a,a);(a,b);(a,c);(b,a);(b,b);(b,c);(c,a);(c,b);(c,c)\}$.

76. a) (1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(3,4);(2,5); (3,4);(3,5);(4,5).
b) (1,2,3);(1,2,4);(1,2,5);(1,3,4);(1,3,5);(1,4,5);
(2,3,4);(2,3,5);(2,4,5);(3,4,5).

77. $A=\{a,b,c\};B=\{1,2,3\}$.

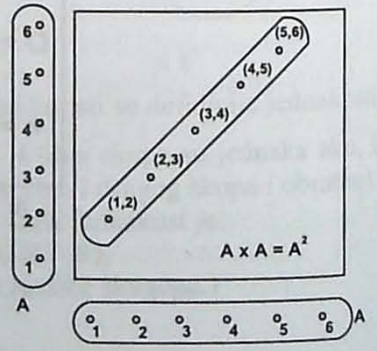
78. a) $(A\times A)\cap(B\times B)=\{(b,b);(b,c);(c,c);(c,b)\}$.
b) $(A\times A)\cap(A\times B)=\{(a,b);(a,c);(b,b);(b,c);(c,b);(c,c)\}$.

79. $A=\{1,4,7,10\},B=\{0,10\},C=\{10,12\}$, $A\cup(B\cap C)=A$,
$B\setminus(A\cap C)=\{10\}$,
$P(C\setminus(A\cup B))=\{\emptyset,12\}$,
$B\times A=\{(0,1);(0,4);(0,7);(0,10);(10,1);(10,4);(10,7);(10,10)\}$.

80. $A=\{0,6,12\},B=\{0,6,12\},C=\{6,8,10,12\}$.

1.3. Relacije i funkcije

81. $\rho=\{(1,2);(2,3);(3,4);(4,5);(5,6)\}$;
(sl. 11).



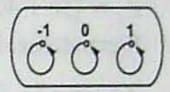
Sl. 11

82. $\rho=\{(1,1);(2,2);(3,3);(4,4);(1,2);(1,3);(1,4);(2,4);(3,4)\}$.

83. $\rho=\{(0,10);(1,9);(2,9);(3,7);(4,6);(5,5);(6,4);(7,3);(8,2);(9,1);(10,10)\}$.

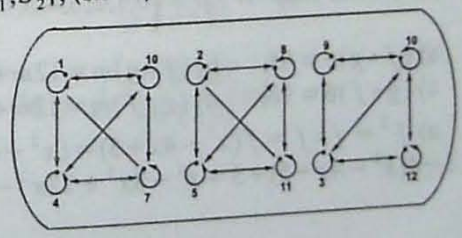
84. a) $\rho=\{(-2,-1);(-2,0);(-2,1);(-2,1);(-2,2);(-2,3);(-1,0);$
$,...,(2,3;)\}$;
c) $\rho=\{(-2,-2);(-1,-1);(0,0);(1,1);(2,2);(-1,1);(-1,1);(-2,2;)\}$;
refleksivna i simetrična.
d) $\rho=\{(-1,3);(0,2);(1,1);(2,0);(3,-1)\}$ simetrična.

85. Relacija $\rho=\{(-1,-1);(0,0);(1,1)\}$
$\forall x\in A$ je $(x,x)\in\rho(-1,-1)\in\rho,(0,0)\in\rho,(1,1)\in\rho$, pa je refleksivna (sl.12). Na grafu svaki element skupa A ima petlju, te nam ta petlja pokazuje da je ρ refleksivna.



Sl. 12

86. 1° Relacija ρ je refleksivna, jer je $\forall x\in S:3|(x-x)\Rightarrow 3|0$ (nula je deljiva sa svakim brojem, pa i sa 3).
2°Relacija ρ je simetrična ako je $3|(x-y)\Rightarrow x-y=3k$, onda je $y-x=-(x-y)=-3k=3(-k)$, tj. $3|y-x$, pa je $3|x-y\Rightarrow 3|y-x$ i $x,y\in S$.
3° Relacija je tranzitivna ako je:
$3|(x-y)\wedge 3|(y-z)\Rightarrow x-y=3k\wedge y-z=3m$, onda je $x-z=x-y+y-z=3k+3m=3(k+m)=3n$, tj. $3|(x-z)$, pa je $3|(x-y)\wedge 3|(y-z)\Rightarrow 3|(x-z)$; $x,y,z\in S$, znači ρ je relacija ekvivalencije.
Relacija ρ je razbila (rastavila) skup S na tri podskupa:
$S_0=\{3,6,9,12\}=\{x|x=3k,k\in S\}$,
$S_1=\{1,4,7,10\}=\{x|x=3k+1,k\in S\}$,
$S_2=\{2,5,8,11\}=\{x|x=3k+2,k\in S\}$, tj.
skup S je pomoću relacije ρ rastavljen na tri klase ekvivalencije. Prvu klasu čine brojevi skupa S deljivi sa 3; drugu klasu ekvivalencije čine članovi skupa S, koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 1 i treću klasu čine brojevi koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 2, pa je količnički skup u oznaci $S/\rho=\{S_0,S_1,S_2\}$, (sl. 13).



Sl. 13

87. Analogno prethodnom primeru pokazuje se da je ρ relacija ekvivalencije. Klase ekvivalencije su:
$Z_0 = \{0,\pm3,\pm6,...\} = \{3k | k \in Z\}$;
$Z_1 = \{...,-5,-2,1,4,7,...\} = \{3k+1 | k \in Z\}$ i
$Z_2 = \{-4,-1,2,5,8,...\} = \{3k+2 | k \in Z\}$, pa je količnički skup:
$Z/\rho = \{Z_0, Z_1, Z_2\}$.

88. Dokaz da je data relacija klasa ekvivalencije izvodi se kao u prethodnom zadatku. Klase ekvivalencije su:
$Z_0 = \{5k | k \in Z\} = 0$; $Z_1 = \{5k+1 | k \in Z\} = 1$;
$Z_2 = \{5k+2 | k \in Z\} = 2$; $Z_3 = \{5k+3 | k \in Z\} = 3$ i
$Z_4 = \{5k+4 | k \in Z\} = 4$.
Prema tome, količnički skup je
$Z/\rho = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4\} = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}$.

89. Klase ekvivalencije su: $Z_0 = \{4\}$; $Z_1 = \{1,5,9\}$; $Z_2 = \{2\}$; i $Z_3 = \{3,7,11\}$; a količnički skup je
$Z/\rho = \{Z_0, Z_1, Z_2, Z_3\} = \{\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4}\}$.

90. Svaki se prirodan broj može napisati u obliku $n = 7q+r$, gde je $r = 0,1,2,3,4,5,6$. Ta relacija je refleksivna, simetrična i tranzitivna. Klase ekvivalencije imaju za predstavnike r. Imamo 7 klasa ekvivalencije: $\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6}$:
$\dot{0} = \{0,7,14,...\} = \{n = 7q+0\}$,
$\dot{1} = \{1,18,15,...\} = \{n = 7q+1\}$,
$\dot{2} = \{2,9,16,...\} = \{n = 7q+2\}$,
.....
$\dot{6} = \{6,13,29,...\} = \{n = 7q+6\}$.
Količnički skup $N/\rho = \{\dot{0},\dot{1},\dot{2},\dot{3},\dot{4},\dot{5},\dot{6}\}$.

91. a) $(f \circ g)6 = 95$; b) $(f \circ g)m = 12m+23$;
c) $(g \circ f)6 = 98$; d) $(g \circ f)m = 12m+6$.

92. a) $f^2 = f \circ f = f(x^2-4x+5) = (x^2-4x+5)^2 - 4(x^2-4x+5)+5 = x^4-8x^3+22x^2-24x+10$;

b) $g^2 = 9x-16$; c) $f \circ g = 4x^2-20x+26$;
d) $g \circ f = 3x^2-12x+11$.

93. Poznato je da proizvod funkcija nije komutativan, ali za ove dve važi, tj. $(f \circ g)x = 32x^6-48x^4+18x^2-1$;
$(g \circ f)x = 32x^6-48x^4+18x^2-1$. Dakle, važi $f \circ g = g \circ f$.

94. Ta relacija je antirefleksivna, jer ni jedan čovek ne pozdravlja samog sebe. Ta relacija nije ni simetrična, jer ako x pozdravi prvi y, y ne pozdravi prvi x. Relacija je antisimetrična. Ako x mora da pozdravi prvi y, y mora prvi da pozdravi z, to x mora prvi da pozdravi z. Relacija ρ je tranzitivna.

95. **Primedba 1**. Preslikavanje je 1–1 (jedan–jedan) ukoliko različitim likovima x_1, x_2 uvek odgovaraju različite slike $f(x_1), f(x_2)$, tj. za sve x_1, x_2 iz domena važi implikacija
(1) $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
Često se za dokaz koristi kontrapozicija implikacije (1), tj.
(2) $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
Za dato preslikavanje, ako se pimeni (2) imamo:
$3x_1-2 = 3x_2-2 \Leftrightarrow 3x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Dakle, preslikavanje je 1–1.

Primedba 2. Preslikavanje je ako svaki realan broj a je slika bar jednog realnog broja x, tj. $\forall a \in R, (\exists x \in R), f(x) = a$. Jednačina $f(x) = a$ u datom slučaju je $3x-2 = a \Leftrightarrow x = \frac{a+2}{3}$, zaista za $a \in R$ postoji $x \in R$ da je $a = f(x)$.
Provera: $f(x) = f\left(\frac{a+2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{a+2}{3} - 2 = a$.

99. $f^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ a & b & c & d & e \end{pmatrix}$.

100. a) $f^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; b) $f^3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ itd.

101. a) $f \circ g = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; b) $g \circ f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ itd.

102. a) $f^{-1}(x)=\frac{x+5}{3}, g^{-1}(x)=\frac{x+3}{5}$;

b) $f\circ g=f(g(x))=f(5x-3)=3(5x-3)-5=15x-14$,
$g\circ f=(g(f(x))=g(3x-5)=15x-28$;

c) $f^{-1}\circ g^{-1}=\frac{x+28}{15}, f^{-1}\circ g=\frac{5x+2}{3}$.

103. a) $f(x)=5x-8$; b) $f(x)=\frac{3x+11}{2}$; c) $f(x)=8-x$;

d) $f(x)=2x+1$.

104. a) $f(x)=3x-1$, $g(x)=\frac{13-3x}{2}$; b) $f^{-1}\circ g=\frac{5-x}{2}$.

105. Ako se uvede smena $\frac{1}{x}=t$ data jednačina

(1) $f(x)+2f\left(\frac{1}{x}\right)=x$, svodi se na oblik $f\left(\frac{1}{t}\right)+2f(t)=\frac{1}{t}$ ili

(2) $f\left(\frac{1}{x}\right)+2f(x)=\frac{1}{x}$.

Iz (1) i (2) dobija se $f(x)=\frac{2-x^2}{3x}(x\neq 0)$.

b) $f(x)=\frac{1}{1-x}(x\neq 0;1)$; c) $f(x)=\frac{4x-2}{x-1}(x\neq\frac{1}{2};1)$.

106. a) $f(x)=\frac{x+2}{6x+4}$; b) $f(x)=\frac{11x-6}{9x-10}$; c) $f(x)=\frac{2-7x}{13x-5}$;

d)$f(x)=\frac{3-x}{3x-1}$.

107. a) $f(x)=\frac{1}{6}(x^2-1)$, $g(x)=-\frac{1}{3}(2x^2+3x+1)$;

b) $f(x)=\frac{x^2-4x+1}{1-x}$, $g(x)=\frac{x^2-3x+1}{x-1}$, $(x\neq 1)$;

c) $f(x)=-2$, $g(x)=\frac{2x}{x-1}$, $(x\neq 1;2)$.

108. $f(x)=\frac{1}{x}$, $g(x)=1$, $f\circ g=g\circ f=1$.

1.3. Elementi kombinatorike

109. 1234 2134 3124 4123
1243 2142 3142 4132
1324 2314 3214 4213
1342 2341 3241 4231
1423 2413 3412 4312
1432 2431 3421 4321.

110. 64357 64537 64735
64375 64573 64753.

111. $P(5)=5!=120$.

112. a) $7!=5040$; b) $5!=120$; c) $4!=24$.

113. a) $5!=120$; b) $5!\cdot 4!=2880$.

114. Ima 15 brojeva, i to su:1054, 1450, 4051, 4150, 2053, 2350, 3052, 3250, 1152, 1351, 3151, 2251, 2152, 1252, 5050.

115. Među 567 brojeva ima 9 jednocifrenih, 90 dvocifrenih i 468 trocifrenih. Dakle, $9\cdot 1+90\cdot 2+468\cdot 3=1593$ cifre.

116. Najviše trouglova ima ako su svake tri tačke sa raznih pravih nekolinearne. Tada trouglove dobijamo međusobnim povezivanjem. Takvih trouglova ima $5\cdot 5\cdot 5=125$, ili tako što za osnovicu uzimamo duž na jednoj od pravih, takvih trouglova ima $10\cdot 10=100$ sa osnovicom na jednoj pravoj – ukupno $3\cdot 100=300$. Prema tome, najveći mogući broj trouglova je $125+300=425$ trouglova.

117. Ima ukupno 10 pravih: $AE, AF, BE, BF, CE, CF, DE, DF$ i prave a i b.

118. Ako je bilo n gostiju, tada je broj rukovanja $\frac{n(n+1)}{2}=136\Leftrightarrow$ $n(n+1)=16\cdot 17\Leftrightarrow n=16\vee n+1=17\Leftrightarrow n=16$, bilo je 16 gostiju, Milan 17-ti.

119. Odaberimo bilo koju pravu kvadratne mreže. Kako je na njoj 7 tačaka, to je ukupan broj duži $(7\cdot 6):2=21$. Kako takvih pravih ima $14-7$ horizontalnih i 7 vertikalnih, ukupan broj duži je $21\cdot 14+294$. Od uočenih duži 6 ima 1 cm, 5 duži 2 cm, 4 duži ima 3 cm, 3 duži 4 cm, 2 duži 5 cm i samo 1 duž 6 cm. Ukupan broj kvadrata je: $6\cdot 6+5\cdot 5+4\cdot 4+3\cdot 3+2\cdot 2+1\cdot 1=91$ kvadrat.

120. Potrebno je najviše 3 tega, i to od 1,3 i 9 kg, jer je $1=1$; $2=3-1$; $3=3$; $4=3+1$; $5=9-3-1$; $6=9-3$; $7=9+1-3$; $8=9-1$; $9=9$; $10=9+1$; $11=9+3-1$; $12=9+3$ i $13=9+3+1$.

121. Ako prave klase p presečemo pravama klase q imamo $\frac{10\cdot 9}{2}+45$ duži od kojih je svaka osnovica jednog paralelograma. Na svakoj pravoj klase p imamo $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ duži od kojih se svaka može kombinovati sa svakom duži iz prethodne klase. Ukupan broj paralelograma je $15\cdot 45=675$.

122. a) Stolice „biraju" đake na $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2\,520$ načina;
b) Đaci „biraju" stolice na $9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=181\,440$ načina.

123. Ako bi 0 mogla biti na početku, tada se broj parnih cifara može poređati na 4! načina, pri čemu svakom od tih rasporeda odgovara 3! rasporeda parnih cifara, tj. bilo bi $4!\cdot 3!+144$ rasporeda. Kako 0 ne može biti na početku, treba oduzeti $2!\cdot 3!=12$ rasporeda, pa je traženi broj $144-12=132$ rasporeda.

124. a) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 6=1080$; b) $5\cdot 5\cdot 4\cdot 3=300$; c) $5\cdot 6\cdot 6\cdot 2=360$.

125. a) $6\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 7=14\,406$; b) $6\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=2\,160$;
c) $6\cdot 7\cdot 7\cdot 7\cdot 5=10\,290$.

126. a) 10 belih + 30 plavih + 3 crvene = 43 kuglice;
b) 30 plavih + 20 crvenih + 1 bela = 51 kuglica;
c) 2 bele + 2 crvene + 2 plave + 1 = 7 kuglica.

127. $\binom{40}{5}\cdot\binom{3}{1}=1\,974\,024$ načina.

128. $V_4^6-V_3^5=300$ različitih brojeva.

129. $n=11, k=7$.

130. $\binom{18}{2}-\binom{5}{2}-\left(\binom{6}{2}-1\right)-\left(\binom{4}{2}-1\right)=124$.

131. Od 10 crvenih tačaka može se konstruisati $\frac{10\cdot 9}{2}=45$ duži sa crvenim krajevima. Svaka od tih duži može se kombinovati sa 8 plavih tačaka tako da dobijamo $45\cdot 8=360$ trouglova. Slično imamo $\frac{8\cdot 7}{2}=28$ plavih duži i $28\cdot 10=280$ trouglova sa dva plava i jednim crvenim temenom. Ukupan broj traženih trouglova je $360+280=640$.

132. Knjige iz matematike međusobno se raspoređuju na $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=120$ načina, iz fizike $4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=24$ načina i iz hemije $3\cdot 2\cdot 1=6$ načina. Kako sa oblastima ima 6 mogućih rasporeda
$MFH, MHF, FMH, FHM, HFM, HNF$
to je ukupan broj $6\cdot 120\cdot 24\cdot 6=103\,680$ rasporeda.

133. Na osnovu pretpostavke imamo $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=2\frac{n(n-1)}{2}\Leftrightarrow n=8$. Dakle, 28 pravih, 56 ravni.

134. a) 380; b) 10 302; c) n; d) $(n-2)(n-1)$.

135. a) $n!<1000\Rightarrow n\le 6$; b) $n!>500\Rightarrow n>6$; c) $n\ge 5$.

136. a) $P(6)-P(5)=6!-5!=600$;
b) $5!+5!+5!-4!-4!=312$.

137. $V_2^4=4\cdot 3=12$, 12 21 31 41
13 23 32 42
14 24 34 43.

138. $V_1^5+V_2^5+V_3^5+V_4^5+V_5^5=325$.

139. $2\cdot V_3^7=2\cdot 7\cdot 6\cdot 5=420$.

140. 3 024.

141. $V_2^{35}=35\cdot 34=1\,190$.

142. Elementi skupa M su: 2,3,5,7,11, broj traženih brojeva je 20.

143. a) Data jednačina ekvivalentna je jednačini $n(n-1)=5\cdot 4$. Kako su n i $n-1$ uzastopni prirodni brojevi, ona je tačna za $n=5$ i $n-1=4$, tj. jednačina ima jedinstveno rešenje u skupu prirodnih brojeva $n=5$.
b) Data jednačina ekvivalentna je jednačini $n(n-1)(n-2)=6\cdot 5\cdot 4$, kako su $n, n-1$ i $n-2$ tri uzastopna prirodna broja to je $n=6$, $n-1=5$ i $n-2=4\Rightarrow n=6$;
c) $n=5$; d) $n=5$.

144. Traženi brojevi su četvorocifreni B_4, petocifreni B_5, šestocifreni $B_4=V_4^6-V_3^6=300, B_5^6=V_5^6-V_4^6=600$.
Broj svih traženih prirodnih brojeva je $300+600+600=1500$. (Oduzeti su brojevi koji počinju 0).

145. $C_3^6=\binom{6}{3}=\frac{6\cdot 5\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}=20, \binom{6}{4}=15$.

146. $C_3^6=20$.

147. $C_4^{17}=2380$.

148. $C_2^{20}=190$.

149. Jednačina $\frac{n(n-1)}{2}=45$ ekvivalentna je jednačini $n(n-1)=10\cdot 9$; njeno jedinstveno rešenje je $n=10$.

150. 64 podskupova.

151. $C_3^{12}=220$.

152. a) $C_2^5 - 5 = 5$; b) $C_2^{12} - 12 = 54$; c) $C_2^{20} - 20 = 170$;
d) $C_2^n - n = \frac{n(n-1)}{2} - n = \frac{n(n-3)}{2}$.

154. $C_3^{12} - 6 \cdot 3 = 202$ ravni.

155. $\binom{16}{1}\binom{20}{3} + \binom{16}{2}\binom{20}{2} + \binom{16}{3}\binom{20}{1} + \binom{16}{4} = 54\,060$.

156. Postoje samo sledeće mogućnosti da se broj 5 napiše kao zbir 5 prirodnih brojeva: 5=5+0+0+0+0, 5=4+1+0+0+0, 5=3+2+0+0+0, 5=3+1+1+0+0, 5=2+2+1+0+0, 5=2+1+1+1+0 i 5=1+1+1+1+1. U svakom od ovih slučajeva izračunavamo broj svih mogućih rasporeda (radi se o permutacijama sa ponavljanjem) i od njega oduzimamo broj onih rasporeda koji počinju nulom:

$$\frac{5!}{4!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{2!\cdot 2!} + \frac{5!}{2!\cdot 2!} + \frac{5!}{3!} + \frac{5!}{5!} -$$
$$-\left(\frac{4!}{3!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{3!}\right) = 70.$$ Dakle, 70 brojeva.

157. Traženi brojevi mogu biti jednocifreni B_1, dvocifreni B_2, trocifreni B_3, četvorocifreni B_4 i petocifreni B_5, a ovi rasporedi od datih brojeva su varijacije sa ponavljanjem, pa je:
$B_1 = \overline{V}_1^6 - 1 = 5$,
$B_2 = \overline{V}_2^6 - \overline{V}_1^6 = 6^2 - 6^1 = 30$,
$B_3 = \overline{V}_3^6 - \overline{V}_2^6 = 6^3 - 6^2 = 180$,
$B_4 = \overline{V}_4^6 - \overline{V}_3^6 = 6^4 - 6^3 = 1080$,
$B_5 = \overline{V}_5^6 - \overline{V}_4^6 = 6^5 - 6^4 = 6480$.
Ukupno prirodnih brojeva je: 5+30+180+1 080+6 480=7 775 (gde su oduzeti brojevi koji počinju sa nulom).

158. a) 6!−5!=600; b) 5!+5!+5!−4!−4!−4!=288.

159. a) Data jednačina ekvivalentna je jednačini $n(n-1) = 15 \cdot 14$, odakle sledi da je $n = 15$ ili $n - 1 = 14$, pa je $n = 15$;
b) $n = 31$; c) $n = 23$.

160. a) $n < 9$; b) $n > 9$; c) $k < 10$.

161. $k = 6, n = 15$.

162. $V_{12}^3 = 3^{12} = 531\,441$; b) $3^7 = 2\,187$; c) $3^5 \cdot 2^7 = 31\,104$.

163. a) 210; b) 7!=5 040.

164. a) Svi petocifreni brojevi koji se mogu formirati od elemenata skupa S mogu se graditi kao permutacije bez ponavljanja od sledećih podskupova skupa S. $S_1 = \{1,2,3,4,5\}$; $S_2 = \{0,2,3,4,5\}$; $S_3 = \{0,1,3,4,5\}$; $S_4 = \{0,1,2,4,5\}$; $S_5 = \{0,1,2,3,5\}$ i $S_6 = \{0,1,2,3,4\}$.
Kako brojevi deljivi sa 6 moraju biti parni i deljivi sa 3, a brojevi deljivi sa 3 moraju imati takve cifre da je njihov zbir takođe deljiv sa 3, zaključujemo da jedino skupovi S_1 i S_4 sadrže takve cifre. Od svih permutacija koje se mogu formirati od elemenata skupa S_1 dolaze u obzir samo one koje se završavaju brojem 2 ili brojem 4 i njih ima 4!+4!=48.
Analogno, permutacije elemenata skupa S_4 dolaze u obzir samo kad završavaju brojevima 0,2 i 4, ali permutacije koje počinju nulom a završavaju se sa 2 i 4 nisu petocifreni brojevi, pa ih treba oduzeti. Broj permutacija koje završavaju sa 2 i 4 je 2(4!−3!) =36. Ukupan broj petocifrenih brojeva deljivih sa 6 je
4!+4!+4!+2(4!−3!)=108.
b) 4!+4!+4!−3!=66.

165. Na osnovu pretpostavke sledi da je
$\frac{n(n-3)}{2} + n = 153 \Leftrightarrow n(n-1) = 18 \cdot 17 \Leftrightarrow n = 18$, tj. mnogougao je osamnaestougao.
Broj različitih trouglova koji su određeni temenima osamnaestougla je $C_3^{18} = \binom{18}{3} = 816$ trouglova.

166. Ako je α_n unutrašnji a β_n spoljašnji ugao pravilnog mnogougla, na osnovu pretpostavke je
$\frac{1}{5}\alpha_n = \beta_n \Leftrightarrow \frac{(n-2)\cdot 180^\circ}{5n} = \frac{360^\circ}{n} \Leftrightarrow n - 2 = 10 \Leftrightarrow n = 12$.
Mnogougao je dvanaestougao. Broj različitih pravih je
$C_2^{12} = \binom{12}{2} = 66$ pravih.

167. To su četvorocifreni brojevi koji počinju sa 3,4,5 i 6, a to su varijacije treće klase od n elemenata, tj.
$4 \cdot V_3^n = 1344 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 366 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 8 \cdot 7 \cdot 6 \Leftrightarrow n = 8$. Skup A ima devet cifara, $A = \{0,1,2,\ldots,8\}$.

168. $C_3^n = 455 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 2730 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 15 \cdot 14 \cdot 13 \Leftrightarrow n = 15 \vee n - 1 = 14 \vee n - 2 = 13 \Leftrightarrow n = 15$. *Card* $S = 15$.

169. $C_3^n = 364 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 2184 \Leftrightarrow n(n-1)(n-2) = 14 \cdot 13 \cdot 12 \Leftrightarrow n = 14 \vee n - 1 = 13 \vee n - 2 = 12 \Leftrightarrow n = 14$. *Card* $S = 14$.

II GLAVA

2. UVOD U GEOMETRIJU. VEKTORI

2.1. Tačka, prava, ravan, odnosi pripadanja i rasporeda

170. a) Broj različitih pravih određenih datim tačkama je:

$C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$, i to su: $\{A,B\} \subset a_1$, $\{A,C\} \subset a_2$, $\{A,D\} \subset a_3$, $\{B,C\} \subset a_4$, $\{B,D\} \subset a_5$, $\{C,D\} \subset a_6$.

174. Broj ravni određenih sa 5 nekomplanarnih tačaka je

$C_3^5 = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3} = 10$. Odrediti sve ravni analogno zadatku 151.

175. Određeno je 6 ravni, i to: $\{a,b\} \subset \alpha_1$, $\{A,B,C\} \subset \alpha_2$, $\{a,C\} \subset \alpha_3$, $\{b,C\} \subset \alpha_4$, $\{e,A\} \in \alpha_5$, $\{c,B\} \in \alpha_6$.

176. Određeno je 5 ravni, i to: $\{a,C\} \subset \pi_1$, $\{A,B,C\} \subset \pi_1$, $\{a,b\} \subset \pi_3$, $\{b,C\} \subset \pi_4$, $\{c,B\} \subset \pi_5$.

177. $c \subset \alpha$.

178. a) 15 duži; b) 20 trouglova.

179. 6 ravni.

180. 3 ravni.

181. četiri.

182. $C_3^n = \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$.

183. Iz uslova $\frac{n(n-1)}{2} = 36$ je $n(n-1) = 72$, odnosno $n(n-1) = 9\cdot 8$, odakle izlazi da je $n = 9$ (tačaka).

2.2. Paralelnost

184. Prava a sa svakom od tačaka B_1, B_2, B_3, B_4, C određuju po jednu ravan i prava b sa svakom od tačaka A_1, A_2, A_3, C određuju po jednu ravan, tj. 9 ravni. Zatim, trojke tačaka (C, A_1, B_1); (C, A_1, B_2) itd. određuju još 12 ravni, dakle određeno je ukupno 21 ravan.

185. 15 ravni.

186. 18 ravni.

187. Neka su tačke A,B,C,D,E. Ako su četiri tačke na istoj pravoj kojoj ne pripada peta, tada ima $1+4=5$ pravih. Ako su dve trojke tačaka kolinearne, recimo A,B,C i A,D,E, tada ima $2+2\cdot 2=6$. Ako postoji samo jedna trojka kolinearnih tačaka, tada ima $1+1+3\cdot 2=8$ pravih. Ako nema trojki kolinearnih tačaka, tada ima $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ pravih.

188. Svaka duž prave a sa jednom duži prave b određuju jedan četvorougao. Na pravoj a sa datim tačkama A,B,C,D moguće je uočiti 6 duži, na pravoj b sa tačkama E,F,G moguće je uočiti 3 duži. Dakle, ima ukupno $6\cdot 3 = 18$ četvorouglova.

191. Osam.

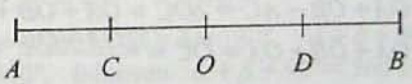
198. Njihov broj određen je obrascem $C_2^4 = \binom{4}{2} = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 6$. Ako su date prave a,b,c,d, njima je određeno 6 ravni, i to: $\{a,b\} \subset \pi_1$, $\{a,c\} \subset \pi_2$, $\{a,d\} \subset \pi_3$, $\{b,c\} \subset \pi_4$, $\{b,d\} \subset \pi_5$, $\{c,d\} \subset \pi_6$.

199. Dve.

201. Dve tačke.

2.3. Duž, ugao i trougao

202. 1° Po pretpostavci je
$AO = OB \wedge CO = OD \Rightarrow AO - CO = OB - OD \Rightarrow AC = BD$ (sl.14).



Sl. 14

2° Po pretpostavci je
$AO = OB \wedge OD = OC \Rightarrow AO + OD = OB + OC \Rightarrow AD = CB$.

203. 7 cm i 2 cm.

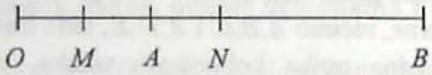
204. $OM = \frac{a+b}{2}$.

205. 1° Neka je tačka $O - A - B$ (sl. 15), tada je

$MN = ON - OM = \frac{1}{2}OB - \frac{1}{2}OA = \frac{1}{2}(OB - OA) = 2$ cm.

2° Neka je $A-O-B$, onda je:

$MN = MO + ON = \frac{1}{2}OA + \frac{1}{2}OB = \frac{1}{2}(OA + OB) = 5$ cm.



Sl. 15

206. $AB : CD = 3:4 \Leftrightarrow AB = \frac{3}{4}CD$, odakle zaključujemo da treba duž CD podeliti na 4 jednaka dela, od kojih tri poslednja odgovaraju duži AB.

207. a) Iz $(AM = MB \wedge O \in AB)$

$\Rightarrow (OM = OA + AM \wedge OM = OB - MB)$

$\Rightarrow 2OM = OA + OB + AM - MB \Rightarrow OM = \frac{1}{2}(OA + OB)$.

b) Iz $(AM = MB \wedge O \in AB)$

$\Rightarrow (OM = MA - OA \wedge OM = OB - MB)$

$\Rightarrow 2OM = OB - OA \Rightarrow OM = \frac{1}{2}|OB - OA|$, jer je uvek $OM > 0$, a $OB - OA > 0$ ili $OB - OA < 0$ u zavisnosti od izbora tačke O.

208. Pošto je $(O - A - C - B) \wedge (CB = 2AC) \Rightarrow$

$(OC = OA + AC \wedge OC = OB - CB \wedge CB = 2AC) \Rightarrow$

$(2OC = OA + OB + AC - CB \wedge CB = 2AC) \Rightarrow$

$2OC = OA + OB - AC \Rightarrow 3OC = OA + OB + OC - AC \Rightarrow$

$3OC = OA + OB + OA \Rightarrow OC = \frac{2OA + OB}{3}$.

209. Pošto je $(O - A - B) \wedge MA = 0{,}75MB \wedge M \in AB \Rightarrow$

$(OM = OA + MA \wedge OM = OB - MB \wedge MA = 0{,}75MB) \Rightarrow$

$2OM = OA + OB + \frac{3}{4}MB - MB \Rightarrow 8OM = 4OA + 4B - MB \Rightarrow$

$8OM = 4OB + 3OB + OB - MB \Rightarrow$

$8OM = 4OB + 3OB + OM + MB - MB \Rightarrow$

$7OM = 4OB + 3OB \Rightarrow OM = \frac{4OB + 3OB}{7}$.

210. Kako je $(O - A - C - B) \wedge AC : m = CB : n) \Rightarrow$

$(OC = OA + AC \wedge OC = OB - CB \wedge AC = \frac{mCB}{n} \Rightarrow$

$nOC + mOC = nOA + nAC + mOB - mCB \wedge AC = \frac{mCB}{n} \Rightarrow$

$OC(m+n) = nOA + nAC + mOB - nAC \Rightarrow OC = \frac{nOA + mOB}{m+n}$,

time je dokaz završen.

211. Kako je $AS = SB = 18$ cm, konjunkcija $AM + MB = 36 \wedge AM : MB = 13 \Leftrightarrow AM = 9 \wedge MB = 27$ cm, onda je $\rho(S, M) = 9$ cm.

212. 30°.

213. 135° i 45°.

214. 110° i 70°.

215. 105° i 75°.

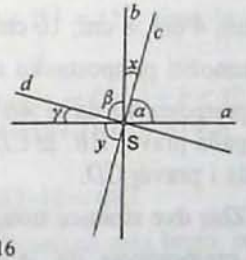
216. 45° i 135°.

217. $\frac{7}{8}\hat{d}$ i $\frac{1}{8}\hat{d}$.

220. 80°, 100°.

221. $\alpha = 72°$.

222. Kako je ugao y unakrsan sa uglom α (slika 16), to su uglovi x i y komplementni, tj. $x = 40°$ a $y = 50°$. Prema tome, $\alpha = \beta = 50°$; $\gamma = 40°$.



Sl. 16

223. Kako je $\alpha + \varphi = 180°$, $\beta + \delta = 180°$, $\varphi + \delta = 90°$, to je $\alpha + \beta + \varphi + \delta = 360°$, odnosno $\alpha + \beta + 90° = 360°$, odakle je $\alpha + \beta = 270°$

224. $\alpha = 157°30'$.

225. $\angle DMB = 99°$.

226. a) 20°; b) 20°.

227. $\angle nOs = 126°$.

228. 36°; 36° i 144°; 144°.

229. $\alpha = \gamma = 75°$, $\beta = \delta = 105°$.

230. $\alpha = 108°$, $\beta = 72°$, $\gamma = 18°$.

231. a) 3 cm; b) 7,5 cm.

232. Neka je O sedište duži AB i M ma koja tačka na produžetku duži, tada je: $MA = MO + OA$, $MB = MO - BO$. Njihov zbir je:
$MA + MB = 2MO \Leftrightarrow MO = \frac{MA + MB}{2}$.

233. a) $\angle pOq + \angle qOr = 180° \Leftrightarrow \frac{1}{2}\angle pOq + \frac{1}{2}\angle qOr = 90°$
$\Leftrightarrow \angle pOx + \angle yOr = 90°$;
b) $\angle rOy = 72°\,30'$.

234. Neka je CO simetrala ugla ACB i CM proizvoljna poluprava konstruisana u oblasti ugla, tada je: $\angle MCA = \angle ACO + \angle OCM$, $\angle MCB = \angle BCO - \angle OCM$, a njihova razlika
$\angle MCA - \angle MCB = 2\angle MCO \Leftrightarrow \angle MCO = \frac{1}{2}(\angle MCA - \angle MCB)$.

235. Suplementan $\beta = 84°$, komplementaran $\gamma = 6°$.

237. $\delta + \varepsilon = 270°$.

239. 120°.

242. 2 cm, 4 cm, 8 cm, 16 cm.

243. Pomnožiti pretpostavku s AC itd.

244. Iz pretpostavke da je $AB = b$, $AP = m$ i $BP = m - b$ sledi da tačka P pripada pravoj AB. Iz $CD = a$, i $DP = n$ i $CP = a + n$ sledi da P pripada i pravoj CD.

245. a) Zbir dve stranice trougla veći je od treće stranice itd.

246. Iz pretpostavke da je $DA = 2AC$ sledi da je $AC = 3$, kako je $AC + AD = CD = 9$. Tačka A,C i D pripadaju istoj pravoj, takođe iz $AC + BC = 7$ sledi da je $CB = 4$, što znači da A,C i B pripadaju istoj pravoj itd.

248. 84° ili 52° ili 128° ili 96°.

249. 105° ili 15° ili 35° ili 55°.

III GLAVA

3. REALNI BROJEVI

3.1. Pregled brojeva. Polje realnih brojeva

250. Brojilac razlomka postupno se transformiše na sledeći način:
$n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$.
Pošto je n prirodan broj, to su i $n-1, n$ i $n+1$ tri sukcesivna prirodna broja. Proizvod tri uzastopna prirodna broja uvek je deljiv sa 6, pa je $\frac{(n-1)n(n+1)}{6}$ uvek prirodan broj.

254. Označimo sa $2n+1$ ma koji neparan broj. Onda je:
$(2n+1)^2 - 1 = 4n^2 + 4n = 4n(n-1)$.
Pošto je n prirodan broj, to su n i $n+1$ dva sukcesivna prirodna broja, a njihov proizvod je uvek paran broj, tj. $n(n+1) = 2k$, $k \in N$, pa je proizvod $4n(n+1) = 4 \cdot 2k = 8k$ deljiv sa 8 za $(\forall k \in N)$.

255. Kako je $1\,331 = 1\,000 + 300 + 30 + 1 =$
$10^3 + 3 \cdot 10^2 \cdot 1 + 3 \cdot 10 \cdot 1^2 + 1^3 = (10+1)^3 = 11^3$, time je dokaz završen.

256. Neka je dat dvocifren broj $10a + b$, gde je $0 < a + b < 10$. Proizvod $(10a+b) \cdot 11 = (10a+b)(10+1) = 100a + 10(a+b) + b$, time je dokaz završen.
Primer: $24 \cdot 11 = 264$; $34 \cdot 11 = 374$; $62 \cdot 11 = 682$.

257. Neka su brojevi n, $n+1$, $n+2$ tri sukcesivna cela broja, onda je njihova suma $n + (n+1) + (n+2) = 3n + 3 = 3(n+1)$, tj. deljiva sa tri.

258. Neka su $2n$ i $2n+2$ dva sukcesivna parna broja, njihov proizvod je $2n(2n+2) = 4n(n+1) = 2k$, pa je $4n(n+1) = 8k$ deljiv sa 8 za $(\forall n \in N)$.

259. Neka su sukcesivni neparni brojevi $2n-1$ i $2n+1$, onda je $(2n+1)^2 - (2n-1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 - 4n^2 + 4n - 1 = 8n$, tj. deljivo sa 8 za $(\forall n \in N)$.

260. Ako bilo koji neparan broj označimo sa k, dobija se
$k = 2n+1 \Leftrightarrow k^2 = (2n+1) = 4(n(n+1)) + 1$. Kako je:
$n(n+1) = 2p$, tada je $k^2 = 8p + 1$ $(p = 0,1,2,3,\ldots)$, odnosno
$k^2 = 1,9,25,49,\ldots$

261. Da bi se kvadrat celog broja a završavao sa 5, mora biti oblika $a=10n+5(n\in N)\Leftrightarrow a^2=(10n+5)^2a^2=100n^2+100n+25\Leftrightarrow a^2=100(n^2+n)+25$, tj. broj a^2 završava se sa 25.

262. Ako je $A\in Z$, i ako je on deljiv sa 8 ili 9, onda je:
$\frac{A}{8}=m\in Z\wedge\frac{A}{9}=n\in Z\Rightarrow\frac{A}{8}-\frac{A}{9}=m-n\Rightarrow$
$A=72(m-n)=72k$, gde je $m-n=k\in Z$.
Pošto je $\frac{A}{72}=k\in Z$, tj. ako je A deljiv sa 8 i 9, onda je deljiv i sa 72.
Obrnuto, ako je:
$\frac{A}{72}=r\Rightarrow\frac{A}{9}=8r=r_1\in Z$ ili $\frac{A}{72}=p\Rightarrow\frac{A}{8}=9p=r_2\in Z$, čime je dokaz završen.

263. Dati izraz može se transformisati u identičan izraz:
$n(n^2+5)^2=n(n^2-1)+6=n((n-1)(n+1)+6))=$
$n(n-1)(n+1)+6n$.
Ovaj izraz je zaista deljiv sa 6, jer proizvod $(n-1)n(n+1)$ od tri sukcesivna cela broja je deljiv sa 6, a $6n$ je očigledno deljivo sa 6.

264. Trocifren broj je oblika $100x+10y+z, x,y,z\in N$. Kako je po pretpostavci $y=x+z$, tada je:
$100x+10y+z=100x+10(x+z)+z=110x+11z=11(10x+z)$.
Dobijeni broj je očigledno deljiv sa 11.

265. Dati izraz se postupno transformiše na sledeći način:
$n^3+11n=n(n^2-1+12)=n((n-1)(n+1)+12)=$
$n(n-1)(n+1)+12n$, odnosno sledi tvrđenje.

266. Dati razlomak može se postupno transformisati na sledeći način:
$\frac{21n+4}{14n+3}=\frac{14n+3}{14n+3}+\frac{7n+1}{14n+1}=1+\frac{7n+1}{14n+3}=1+\frac{1}{\frac{14n+3}{7n+1}}=$
$=1+\frac{1}{2+\frac{1}{7n+1}}$. Razlomak $\frac{1}{7n+1}$ je redukovan, razlomak $\frac{1}{2+\frac{1}{7n+1}}$ je takođe redukovan, pa je i dati razlomak redukovan.

267. Za $n=0$ dati razlomak postaje $\frac{3}{7}$, tj. redukovan je. Ako je razlomak $\frac{2n+3}{5n+7}$ redukovan, tada je redukovan i razlomak $\frac{5n+7}{2n+3}=2+\frac{n+1}{2n+3}$.
Ako je razlomak $\frac{n+1}{2n+3}$ redukovan, tada je redukovan i razlomak $\frac{2n+3}{n+1}=2+\frac{1}{n+1}$, čime je dokaz završen.

268. Treba prvo dokazati teoremu: ako je a^2 deljivo sa 3, onda je a deljivo sa 3. Uočimo da se svaki ceo broj a može napisati u jednom od ovih oblika:
$$a=\begin{cases}3n\\3n+1\\3n+2\end{cases}\Rightarrow a^2=\begin{cases}9n^2\\9n^2+6n+1\\9n^2+12n+4\end{cases},(n\text{ ceo broj}).$$
Pošto je, prema pretpostavci, a^2 deljivo sa 3, a^2 mora biti jednako $9n^2$, odakle sledi da je $a=3n$, odnosno a je deljivo sa 3. Dokaz da je $\sqrt{3}$ iracionalan broj izvešćemo metodom svođenja na protivurečnost.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da je $\sqrt{3}$ količnik neka dva cela broja p i q : $\sqrt{3}=\frac{p}{q}$, gde su p i q uzajamno prosti brojevi, tj. da je 1 njihov najveći zajednički faktor, jer u protivnom mogli bismo razlomak $\frac{p}{q}$ prethodno skratiti i preći na takav slučaj. Tako, polazimo od pretpostavke:
$(*)\sqrt{3}=\frac{p}{q};\ p,q\in Z, p,q$ su uzajamno prosti. Na osnovu $(*)$ dobijamo $p=q\sqrt{3}\Rightarrow p^2=3q^2$. U tom slučaju p^2 je deljivo sa 3, pa je i p deljivo sa 3 (prethodna teorema). Dakle, imamo $p=3r, r\in Z$. Tada je $9r^2=3q^2\Rightarrow q^2=3r^2$, odakle sledi da je q deljivo sa 3, te je i p deljivo sa 3 (prethodna teorema). Prema tome, p i q imaju zajednički faktor 3, odnosno nisu uzajamno prosti. Došli smo do protivurečnosti. To je kraj dokaza da je $\sqrt{3}\notin Q$.

269. Neka je $\sqrt{3}-\sqrt{2}=r$ (r racionalan broj), odakle sledi:
$\sqrt{3}=\sqrt{2}+r\Rightarrow 3=(\sqrt{2}+r)^2\Leftrightarrow 3=2+\sqrt{2}r+r^2\Rightarrow\sqrt{2}=\frac{1-r^2}{2r}$.
Leva strana jednačine $\sqrt{2}\in I$, desna strana $\frac{r^2-1}{2r}\in Q$, tj. iracionalan broj jednak je racionalnom, što je nemoguće.

270. Kako je $x \in H$ i $y \in H$, onda je $x = p_1 + q_1\sqrt{2}$ i $y = p_2 + q_2\sqrt{2}$, zbir $x + y = (p_1 + p_2) + (q_1 + q_2)\sqrt{2} = p' + q'\sqrt{2} \in H$. Analogno se pokazuje da $x - y \in H$ i $x \cdot y \in H$.

272. **Primedba 1.** Broj $f(n)$ je deljiv sa 2, ako i samo ako je deljiv u svakom od slučajeva $n = 2k$ i $n = 2k + 1$.

Primedba 2. Broj $f(n)$ je deljiv sa 3 ako i samo ako je deljiv u svakom od slučajeva $n = 3k, n = 3k + 1$ i $n = 3k + 2$.

Potrebno je dokazati da je dati izraz deljiv sa činiocima broja 6, tj. 2 i 3. Za dokaz da je dati broj deljiv sa 2 primenimo primedbu 1.

Za $n = 2k$, imamo $\dfrac{2k(4k+7)(14k+1)}{2} = k(4k+7)(14k+1) \in N$,

za $n = 2k + 1$ dobija se

$\dfrac{(2k+1)(4k+9)(14k+8)}{2} = (2k+1)(4k+9)(7k+4) \in N$.

Za dokaz da je deljiv sa 3 koristimo primedbu 2.

Za $n = 3k$, $\dfrac{3k(6k+7)(21k+1)}{3} = k(6k+7)(21k+1) \in N$;

za $n = 3k + 1$,

$\dfrac{(3k+1)(6k+9)(21k+8)}{3} = (3k+1)(2k+3)(21k+8) \in N$,

za $n = 3k + 2$,

$\dfrac{(3k+2)(6k+11)(21k+15)}{3} = (3k+2)(6k+11)(7k+5) \in N$,

čime je dokaz završen.

273. **Primedba 3.** Broj $f(n)$ je deljiv sa 5, ako i samo ako je deljiv u svakom od slučajeva: $n = 5k$, $n = 5k + 1$, $n = 5k + 2$, $n = 5k + 3$, $n = 5k + 4$, $(n \in N)$.

Primedba 4. Broj $f(n)$ je deljiv sa 7, ako i samo ako je deljiv u svakom od slučajeva: $n = 7k$, $n = 7k + 1$, $n = 7k + 2$, $n = 7k + 3$, $n = 7k + 4$, $n = 7k + 5$, $n = 7k + 6$, $(n \in N)$.

a) Dati izraz se transformiše u oblik:
$n^3 - n - 18n = n(n-1)(n+1) - 18n$ itd.

b) Dati izraz se transformiše na sledeći način:
$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$, i iskoristi se primedba 3.

c) Pošto se dati izraz svede na oblik $n^7 - n = n(n^6 - 1) =$
$n(n^3 - 1)(n^3 + 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1)$, pa se iskoristi primedba 4.

274. Kako je

$n^5 - n = n(n^4 - 1) = n(n-1)(n+1)(n^2 - 4 + 5) =$
$= n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2) + 5n(n-1)(n+1)$.

Prvi sabirak je deljiv sa 10, jer se među njegovim činiocima nalaze 2 i 5, drugi sabirak je očigledno deljiv sa 10, čime je dokaz završen.

275. Proizvod $n(n+1)(n+2)(n+3)$ je deljiv sa 8, jer je proizvod svaka dva parna broja, tj:
$n(n+1) = 2k$, $(n+1)(n+2) = 2l$, $(n+2)(n+3) = 2m$, $k, l, m \in N$.
Proizvod svaka tri uzastopna parna broja je deljiv sa 3, samim tim dati proizvod je deljiv sa $3 \cdot 8 = 24$.

276. Činioci datog izraza su 5 uzastopnih celih brojeva, tj.
$A = (n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Ovaj proizvod je deljiv sa 3,5 i 8, pa je deljiv i sa njihovim proizvodom 120.

277. Za $n = 2k$,
$B = 8k(k^2 + 5) = 8k(k^2 - 1 + 6) = 8k((k-1)(k+1) + 6) =$
$8k(k-1)(k+1) + 48k$.
Kako je proizvod $k(k-1)(k+1)$ deljiv sa 6, (tri uzastopna cela broja) prvi sabirak je deljiv sa 48, a drugi je očigledno deljiv sa 48.

278. Ako je $n = 3k, A = 9k^2 + 1$, prvi sabirak je deljiv sa 3, drugi nije. Za $n = 3k + 1, A = 9k^2 + 6k + 2$, A nije deljivo sa 3, ostatak je 2. Za $n = 3k + 2, A = 9k^2 + 12k + 5$ i u ovom slučaju A nije deljivo sa 3.

279. Neka su traženi brojevi x, y, u i v $(1 \le x < y < u < v)$. Na osnovu pretpostavke imamo jednačinu $x + y + u + v = xv + yu$
$(x-1)(v-1) + (y-1)(u-1) = 2$. Kako su x, y, u i v prirodni brojevi imamo tri mogućnosti:
1° Ako je $(x-1)(v-1) = 0 \wedge (y-1)(u-1) = 2$, odakle proizlazi da je $x = 1, y = 2, u = 3, v$ proizvoljno;
2° Ako je $(x-1)(v-1) = 1 \wedge (y-1)(u-1) = 1$, dobija se $x = y = u = v = 2$, ovo rešenje, međutim, ne zadovoljava;
3° Ako je $(x-1)(v-1) = 2 \wedge (y-1)(u-1) = 0$ ne dolazi u obzir.

280. Dokaz sledi iz jednakosti $n^2 + 8n + 15 = (n+4)^2 - 1$.

281. Za dokaz iskoristiti jednakost $n(n^2-1)(n^2-5n+26) =$
$= (n-3)(n-2)(n-1)n(n+1) + 20n(n-1)(n+1)$.

282. Ako su x, y, z $(x, y, z < 7)$ cifre tog broja, tada je $7^2x + 7y + z = 9^2z + 9y + x \Leftrightarrow y = 8(3x - 5z)$.
Dakle, y je deljivo sa 8, kako je $y < 7$, mora biti $y = 0$, pa je $3x = 5z$. Odatle, na osnovu $x < 7$, $z < 7$, dobija se $x = 5$, $z = 3$. Traženi broj je $5 \cdot 7^2 + 0 \cdot 7 + 3 + 248$.

283. Ako je $a = (10a + b)(10c + d)$, a $b = (10b + a)(10d + c)$, uoči razliku $A - B$ itd.

285. a) Primeni identitet $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;
b) Slično kao pod a);
c) $9999 = 100^2 - 1 = (100 + 1)(100 - 1)$ itd.;
d) $67^2 - 1 = (67^4 + 1)(67^2 + 1)(67 + 1)(67 - 1)$ itd.

287. Dati broj se može napisati u obliku:
$4^{n+1}(8 + 2) + 5^{n+1}(25 + 5)$ itd.

291. a) $\overline{AB} = 16, C = 2, \overline{CDB} = 256$;
b) $\overline{AK} = 25, \overline{MAK} = 625$;
c) $\overline{AB} = 39, C = 2, \overline{DECD} = 1521$;
d) $A = 7, B = 4, \overline{CBDE} = 2401$.

292. Samo za $n = 6$. (uputstvo: $\frac{n^3 - 1}{5} = \frac{(n-1)(n^2 + n + 1)}{5}, n - 1 = 5$ itd.)

293. a) 2; b)3.

294. Kako su p, $p + 1$, $p + 2$ tri cela sukcesivna broja, to je jedan od njih deljiv sa 3. Zato mora da je $p = 3$, jer su tada brojevi p, $p + 2$, $p + 4$ prosti. Ako je $p + 1$ deljiv sa 3 $(p > 3)$ tada je $p + 4 = (p + 1) + 3$, nije prost broj.

295. Prirodan broj veći od 3 može imati jedan od oblika: $6k$, $6k + 1$, $6k + 2$, $6k + 3$, $6k + 4$ i $6k + 5$. Kako su brojevi $6k$, $6k + 2$, $6k + 3$ i $6k + 4$ složeni, onda su brojevi oblika $6k + 1$ i $6k + 5$ prosti.

296. Na osnovu prethodnog zadatka imamo:
$(6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 12k(3k + 1) + 1 = 12n + 1$, gde je $k(3k + 1) = n$ ceo broj. Takođe je
$(6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 12(3k^2 + 5k + 2) + 1 = 12m + 1$, gde je $m = 3k^2 + 5k + 2$ ceo broj.

297. Kako je $k \in N$, može biti neparan ili paran. Ako uzmemo da je neparan, tj. $k = 2n + 1$, tada je $3k + 1 = 3(2n + 1) + 1 = 6n + 4$ složen broj, zato k mora biti paran broj, pa će biti za $k = 2n$, $3k + 1 = 6n + 1$, a to je prost broj. Na pr.
$31 = 3 \cdot 10 + 1 = 6 \cdot 5 + 1$.

298. Prost broj može biti: 1° 3; 2° $3k + 1$; 3° $3k + 2$. Pretpostavku zadatka zadovoljava prvi slučaj $p = 3$, tj. $p + 10 = 13$, $p + 20 = 23$. U drugom slučaju, $p + 20 = 3k + 21$ je složen, a u trećem slučaju $p + 10 = 3k + 12$ je takođe složen.

299. Ako su p i $8p^2 + 1$ prosti, tada je $p = 3$, jer za $p = 3k + 2$ i $p = 3k + 1$, broj $8p^2 + 1$ je složen. Za $p = 3$,
$8p^2 + 2p + 1 = 8 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 = 79$ je takođe prost broj.

300. Za $p = 3$, $8p^2 + 1 = 73$ je prost broj. Treba dokazati ako je $p \neq 3$, da je $8p^2 + 1$ složen broj. Neka p nije deljivo sa 3, tj. $p = 3k \pm 1$. Tada $8p^2 + 1 = 8(3k \pm 1)^2 + 1 = 3(24k^2 \pm 16k + 3)$, dakle, ako je $p = 3k \pm 1$, tada je $8p^2 + 1$ složen broj. Broj $8p^2 + 1$ je prost samo za $p = 3$.

301. Neka je prirodan broj d najveći zajednički delitelj datih brojeva. Tada je $21n + 4 = dk$, $14n + 3 = dm$, gde su k i m prirodni brojevi. Množenjem prve jednačine sa 2, a druge sa 3, dobija se $42n + 8 = 2dk$ i $42n + 9 = 3dm$.
Razlika ovih jednačina je $(3m - 2k)d = 1$. Odavde sledi da je $d = 1$. Dakle dati brojevi za ma koji prirodan broj n imaju najveći zajednički delitelj $d = 1$, što znači da su oni uzajamno prosti.

302. Neka je $x^2 - y^2 = p$, gde su x i y prirodni brojevi, tada je $(x + y)(x - y) = p \cdot 1$, odatle je $x + y = p \wedge x - y = 1$. Rešenje ovog sistema je $x = \frac{p+1}{2}$, $y = \frac{p-1}{2}$. Dakle, ma koji prost broj može se predstaviti kao razlika kvadrata dva cela broja $\frac{p+1}{2}$ i $\frac{p-1}{2}$.

303. Kako je $n^4 - n^2 = n^2(n - 1)(n + 1)$, dalje se dokaz svodi na zadatak 189.

304. Neka su uzastopni celi brojevi $n - 1, n, n + 1$ tada je $(n - 1)^3 + n^3 + (n + 1)^3 = 3n(n^2 + 2)$. Uoči mogućnosti $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$ itd.

305. Postavljene uslove zadovoljava broj $A = 2n(2n+1)(2n+2) = 4n(n+1)(2n+1)$. Vidi uputstvo zadatka 272.

306. Broj A se svodi na oblik $A = (n-1)(n+1)(n+3)$. Za $n = 2k+1$, $A = 8k(k+1)(k+2)$, $k, k+1, k+2$ su tri uzastopna cela broja itd.

307. Dati izraz se svodi na oblik $A = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$, za $n = 2k$;

a) $A = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, ($k$ ceo broj). Vidi uputstvo zadatka 189.

b) 11 111.

308. a) $8^{8^8} = 8^{2k} = (8^k)^2$; b) $9^{9^9} = 9^{2k+1} = (3^{2k+1})^2$, ($9^9$ neparno);
c) $5^{6^7} = 5^{2k} = (5^k)^2$; d) $7^{6^5} = 7^{2k} = (7^k)^2$.

309. Neka su uzastopni brojevi $n, n+1, n+2$ i $n+3$, tada je $n(n+1)(n+2)(n+3)+1 = (n^2+3n)(n^2+3n+2)+1 =$
$= (n^2+3n)^2 + 2(n^2+3n)+1 = ((n^2+3n)+1)^2 = k^2$, k je ceo broj.

310. Dati izraz se može rastaviti na ove činioce
$5^n + 5^{n+1} + 5^{n+2} = 5^n(1+5+25) = 31\cdot 5^n$. Kako su činioci datog izraza 5 i 31, oni su uzajamno prosti, to je dati izraz deljiv sa njihovim proizvodom $5\cdot 31 = 155$.

311. Za $n = 3k$, $n(n^2+2) = 3k(9k^2+2)$, deljivo sa 3.
Za $n = 3k+1$, $n(n^2+2) = (3k+1)(9k^2+6k+3) =$
$= 3(3k+1)(3k^2+2k+1)$ deljivo sa 3.
Za $n = 3k+2$, $n(n^2+2) = (3k+2)(9k^2+12k+6) =$
$= 3(3k+2)(3k^2+4k+2)$ je deljivo sa 3. Kraj dokaza.

312. Na osnovu pretpostavke je $(m+n)+(m-n)+mn+\dfrac{m}{n} = 245 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2m+mn+\dfrac{m}{n} = 245 \Leftrightarrow \dfrac{m}{n}(n+1)^2 = 245$.
Kako je $\dfrac{m}{n} = k$, to je $k(n+1)^2 = 5\cdot 7^2$. Odatle je $k = 5$, $n+1 = 7$ ili $n = 6$, a $mn = nk = 5\cdot 6^2 = 30$. Dakle, $m = 30$, $n = 6$.

313. $8^n + 8^{n+1} + 8^{n+2} = 8^{n-1}(8+8^2+8^3) = 584\cdot 8^{n-1}$.

314. Kako je $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, a trocifren broj

$100x+10x+x = 111x$, imamo
$\dfrac{n(n+1)}{2} = 111x \Leftrightarrow n(n+1) = 2\cdot 3\cdot 37x \Leftrightarrow 36\cdot 37$ ili $37\cdot 38$.
Kako 38 nije deljivo sa 3, kao jedina mogućnost ostaje $x = 6$, $n = 36, 666$.

315. Kako je $n^3 + 1988n = n^3 - n + 1989n = n(n-1)(n+1) + 1989n$, prvi sabirak je deljiv sa 3, jer je proizvod tri uzastopna cela broja, a drugi je očigledno deljiv sa 3.

316. Ako je $a+b+c = 0$, onda je $a+b = -c$ i $a+c = -b$, pa je $a(a+b)(a+c) = a(-b)(-c) = abc = 1999$.

317. Pošto je $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} = 2^n(1+2+4) = 2^n\cdot 7 = 14\cdot 2^{n-1}$, pa je tvrđenje tačno.

318. Kako je $n^3 - 1990n = n^3 - n - 1989n = n(n-1)(n+1) - 3\cdot 663n$. Proizvod tri uzastopna cela broja deljiv je sa 6. Pošto je n paran broj i $3\cdot 663n$ je deljivo sa 6. Kraj dokaza.

319. Ako se odgovarajuće razlike kvadrata rastave na činioce dati izraz postaje 1 999+1 998+1 997+...+3+2+1=1 999 000.

320. Pošto je
$(2n-3)(2n-1)(2n+1)(2n+3)+16 = (4n^2-1)(4n^2-9)+16 =$
$= 16n^4 - 40n^2 + 25 = (4n^2-5)^2$. Kraj dokaza.

321. a) Neka je $x = 0{,}777\ldots$ racionalan broj, ako prethodnu jednačinu pomnožimo sa 10 dobija se $10x = 7 + 0{,}777\ldots = 7 + x$, odatle
$9x = 7 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{9}$, je racionalan broj;

b) Neka je $x = 0{,}171717\ldots$ racionalan broj. Ako pomnožimo ovu jednačinu sa 100 dobija se
$100x = 17{,}171717\ldots \Leftrightarrow 100x = 17 + x \Leftrightarrow 99x = 17 \Leftrightarrow x = \dfrac{17}{99}$;

c) $\dfrac{234}{999} = \dfrac{9}{37}$; d) $\dfrac{227}{99}$.

322. Neka je $\sqrt{2} + \sqrt{17} = r$ (r racionalan broj). Odatle sledi
$\sqrt{17} = r - \sqrt{2} \Leftrightarrow 17 = r^2 - 2r\sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 2r\sqrt{2} =$
$r^2 - 15 \Leftrightarrow \sqrt{2} = \dfrac{r^2-15}{2r}$. Kako je leva strana ove jednačine iracionalan broj, a desna racionalan, pretpostavka $\sqrt{2} + \sqrt{17} = r$ je netačna. Dakle, $\sqrt{2} + \sqrt{17}$, je iracionalan broj.

323. Neka je $x+\sqrt{n}=r$ (r racionalan broj), tada je $\sqrt{n}=r-n$, što je nemoguće, jer je na levoj strani jednakosti iracionalan, a na desnoj racionalan broj.

324. Iz pretpostavke dobija se da je $a+b=2\sqrt{2ab}$ i $a-b=2\sqrt{ab}$. Količnik poslednje dve jednačine $\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sqrt{2ab}}{2\sqrt{ab}}=\sqrt{2}\in I$.

325. a) Za $a\geq 0, \frac{a+|a|}{2}=\frac{a+a}{2}=\frac{2a}{2}=a$; za $a<0$, $\frac{a+|a|}{2}=\frac{a-a}{2}=0$.

326. Za $x\geq 0, \frac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\frac{2x+x}{3}+x+x=\frac{3x}{3}+2x=3x$,

za $x<0, \frac{2x+|x|}{3}+x+|x|=\frac{2x-x}{3}+x-x=\frac{x}{3}$.

330. Za $x\geq 5, \left(\frac{x-5+|x-5|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-5-|x-5|}{2}\right)^2=$

$=\left(\frac{x-5+x-5}{2}\right)^2+\left(\frac{x-5-x+5}{2}\right)^2=\left(\frac{2x-10}{2}\right)^2+0^2=(x-5)^2$.

Za $x<5$,

$\left(\frac{x-5+|x-5|}{2}\right)^2+\left(\frac{x-5-|x-5|}{2}\right)^2=\left(\frac{x-5-x+5}{2}\right)^2+$

$+\left(\frac{x-5+x-5}{2}\right)^2=0^2+\left(\frac{2x-10}{2}\right)^2=(x-5)^2$.

331. a) $x=4$; b) $x=-2 \vee x=8$.

332. a) $x=-6$; b) $x=-2$.

333. a) $x=-\frac{2}{3}\vee x=6$; b) $x=0$.

334. a) $x=-2\vee x=2$; b) $x>1$.

335. a) $x\in[-2,2]$; b) $x\in\{-\infty,-3]\cup[3,\infty)$.

336. a) $x\in[-3,7]$; b) $x\in(1,2)$.

337. a) $-14<x<2$; b) $x\in(-\infty,-6]\cup[3,\infty)$.

338. a) $x\in(-\infty,-\frac{17}{3})\cup(-1,\infty)$; b) $\frac{13}{2}\leq x\leq\frac{17}{2}$.

3.2. Približne vrednosti. Apsolutna i relativna greška. Granica greške. Značajne cifre i zaokrugljivanje brojeva

341. a) Apsolutna greška $\alpha=|x-a|=0,4$, a relativna greška $\delta=\frac{a}{x}=\frac{0,4}{5}=0,08$;

b) $\alpha=0,004, \delta=0,00156$; c) $\alpha=0,001; \delta=0,001135$.

342. a) $55,98\text{ m}<x<56,02\text{ m}$; b) $74,997\text{ kg}<x<57,003\text{ kg}$;

c) $24,994<x<25,006$; d) $7,084\text{ km}<x<8,016\text{ km}$.

343. Kako je $a+\Delta a=32,588$ kg, $a-\Delta a=32,582$ kg, oduzimanjem se dobija $\Delta a=0,003$ kg.

344. Iz formule $x\approx a+\Delta a$ sledi $a=40$ m, $\Delta a=0,03$ m, pa je relativna greška $\delta_a=\frac{\Delta a}{|a|}=\frac{0,03}{40}=0,00075$, a procentualna greška

$\delta_p=100\cdot\delta_a\%=0,075\%$.

b) 0,0125%; c) 0,024%; d) 2%.

345. 123 km (±250 m).

346. a) 0,7; b) 0,67; c) 0,667; d) 0,6667.

347. a) $\frac{0,002}{2,5}=0,0016$; b) 0,0125; c) 0,008.

348. $\Delta a=|a|\delta_a=8,64\cdot 0,005=0,0432$.

349. a) Neka je $a=9,6$ približna vrednost broja x. Granica greške aproksimacije ove približne vrednosti iznosi $\alpha=0,05$, pa je $\Delta a\approx 9,6\pm 0,05$. Granica relativne greške ove približne vrednosti je:

$\delta_a=\frac{\Delta a}{a}=\frac{0,05}{9,6}=0,00520833$, pa je $\delta_a\%<0,53$.

b) $\delta_a\%<0,79$; c) $\delta_a\%<0,04$; d) $\delta_a\%<0,79$.

350. Primenom obrasca $\Delta a=|a|\cdot\delta_a$ dobija se :

a) $\delta_a=\frac{\Delta a}{|a|}=\frac{0,1}{5,63}<0,018$; b) $\Delta a=0,257$; c) $a=1560$.

351. Tačne su prve dve cifre, jer je $\Delta a = 0{,}024$. Tvrđenje sledi iz obrasca $a(\pm\Delta a)$.

352. Četiri.

353. $\delta_a = 0{,}005\ldots$, $\delta_b = 0{,}007$. Tačnije je prvo merenje.

354. $\delta_{Q_1} = 0{,}005\ldots$, $\delta_{Q_2} = 0{,}007$. Drugo merenje je tačnije 5 puta.

355. $a-b \approx 3{,}12$, $\Delta(a-b) = 0{,}001$, $\delta_{a-b} = 0{,}2\%$.

356. 1,5; 0,3%.

357. $x \approx 0{,}84 \pm 0{,}01$, $\delta_x = 0{,}011$; $\Delta x = 0{,}00926$.

358. a) 50,900; 196 400; 75 000; b) 65 400, 8 546 500, 1 487 800; c) 5,44, 83,61, 0,90; d) 12,361; 6,001; 0,541.

359. 84,254, 870; 2 056.

360. 49 m.

361. 0,33; 0,333; 0,3333.

362. a) 3,29; b) 7,833.

IV GLAVA

4. PROPORCIONALNOST VELIČINA

4.1. Razmera i proporcija

363. a) $x = 2$; b) $x = 12$; c) $x = 5$; d) $x = \dfrac{a(p-q)}{p+q}$.

364. $x = 6$.

365. $x = 4$, $y = 10$.

366. Date proporcije ekvivalentne su proporcijama:
(1) $a:2 = b:3$
(2) $b:6 = c:7$.
Proporcija (1) ekvivalentna je proporciji (3) $a:4 = b:6$. Proporcije (2) i (3) mogu se napisati kao produžena proporcija
$a:4 = b:6 = c:7$, odakle sledi:
$a:b:c = 4:6:7$.

367. a) $x:y:z = 16:10:3$; b) $x:y:z = 9:12:10$.

369. a) Prvo dokažimo implikaciju:
(1) $a:b = c:d \Rightarrow (a+b):b = (c+d):d$.
Dokaz se izvodi lancem ekvivalencija:

$$a:b = c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1 \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d},$$

odakle je $(a+b):b = (c+d):d$.
Implikacija $(a+b):b = (c+d):d \Rightarrow a:b = c:d$
(2) se takođe dokazuje lancem ekvivalencija:
$(a+b):b = (c+d):d \Leftrightarrow (a+b)d = b(c+d) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ad + bd = bc + bd \Leftrightarrow ad = bc \Leftrightarrow a:b = c:d$.
Iz tačnosti implikacija (1) i (2) sledi tačnost implikacije a).

370. Dokaz ćemo izvesti nizom ekvivalencija:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{4a}{b} = \frac{4c}{d} \Rightarrow \frac{4a}{b} - 3 = \frac{4c}{d} - 3 \Rightarrow \frac{4a-3b}{b} = \frac{4c-3d}{d} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1)\ \frac{4a-3b}{4c-3d} = \frac{b}{d}.$$

Znači imamo takođe niz ekvivalencija:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Leftrightarrow\frac{5a}{b}=\frac{5c}{d}\Leftrightarrow\frac{5a}{b}+2=\frac{5c}{d}+2\Leftrightarrow\frac{5a+2b}{b}=\frac{5c+2d}{d}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2)\quad \frac{5a+2b}{5c+2d}=\frac{b}{d}.$$

Iz (1) i (2) je $\frac{4a-3b}{5a+2b}=\frac{4c-3d}{5c+2d}$.

371. a) 4; b) 4.

373. Dokaz implikacije $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$ se izvodi na sledeći način.

Iz $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=k$ sledi da je $a=kb$ i $c=kd$, odakle je:

$$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{k^2b^2+b^2}{k^2bd+bd}=\frac{b^2(k^2+1)}{bd(k^2+1)}=\frac{b}{d};\ \text{znači}$$

$$\frac{ac+bd}{c^2+d^2}=\frac{k^2bd+bd}{k^2d^2+d^2}=\frac{bd(k^2+1)}{d^2(k^2+1)}=\frac{b}{d}.$$

Dakle: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}$.

Dokažimo i implikaciju $\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\Rightarrow\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$.

Uočimo niz ekvivalencija:

$$\frac{a^2+b^2}{ac+bd}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}\Leftrightarrow(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac+bd)^2\Leftrightarrow$$

$$a^2d^2+b^2c^2+2abcd\Leftrightarrow(ad-bc)^2=0\Leftrightarrow ad=bc\Leftrightarrow\frac{a}{b}=\frac{c}{d}.$$

374. Tačna je.

375. Tvrđenja su tačna.

4.2. Primena proporcija

376. Od $\uparrow$ 66 kg prediva dobija se $\downarrow$ 165 tkanine, a od
$\uparrow$ 112 kg prediva dobija se $\downarrow$ x m tkanine.

Pošto su veličine u kg i x m direktno proporcionalne (što je označeno strelicama) veličine, onda je:

$x:165=112:66$,
odakle se dobija $x=280$ m.

377. Zupčanik ima $\uparrow$ 54 zupca i pravi $\downarrow$ 84 obrtaja, a zupčanik
$\uparrow$ x zubaca i pravi $\downarrow$ 126 obrtaja.

Kako su brojevi zubaca obrnuto proporcionalni broju obrtaja, što je označeno strlicama, to je:

$x:54=84:126$,
odakle se dobija $x=36$ zubaca.

378. Kad $\downarrow$ 21 radnik radeći po $\downarrow$ 8^h za $\uparrow$ 6 dana izradi $\uparrow$ 720 profila, onda
će $\downarrow$ x radnika radeći po $\downarrow$ 7^h za $\uparrow$ x dana izraditi $\uparrow$ 1260 profila.

Veličina x dana i veličina y radnika su obrnuto srazmerne, veličine x dana i z časova su takođe obrnuto srazmerne i, na kraju, x dana i t profila je direktno proporcionalno (što je označeno strelicama), pa se dobija složena proporcija:

$x:6=8:7$
$=21:28$
$=1260:720$,

iz koje je $x=\frac{6\cdot8\cdot21\cdot1260}{7\cdot28\cdot720}=9$ dana.

379. Analogno prethodnom zadatku dobija se šema:

$\downarrow$ 40 radnika $\uparrow$ 20 dana $\downarrow$ 6 h $\downarrow$ 192 000
$\downarrow$ 50 radnika $\uparrow$ x dana $\downarrow$ 8 h $\downarrow$ 160 000

i odavde složena proporcija $x:20=40:50$
$=6:8$
$=160\,000:192\,000$, pa je:

$$x=\frac{20\cdot40\cdot6\cdot160\,000}{50\cdot8\cdot192\,000}=10\text{ dana}.$$

380. 12 sijalica.

381. 62 kg.

382. 4 500 kruna.

383. Posle 15 dana otišlo je 13 radnika. Znači da posle 15 dana 65 radnika treba još 10 dana da rade, pa da posao završe, tj.:

$\downarrow$ 65 radnika $\uparrow$ 8 dana
$\downarrow$ 52 radnika $\uparrow$ x dana

Odakle sledi proporcija $x:8 = 65:52$, $x = \frac{65 \cdot 8}{52} = 10$ dana.

384. Iz šeme $\downarrow$ 65 radnika $\uparrow$ 8 dana / $\downarrow$ 52 radnika $\uparrow$ x dana

sledi proporcija $x:3 = 6:9$, $x = \frac{6 \cdot 3}{9} = 2$ dana.

385. 4 400 dinara.

386. 25 tabli.

4.3. Račun podele i mešanja

387. Ako sa x označimo deo premije prvog radnika, onda je $270\,000 - x$ deo drugog radnika. Po pretpostavci, ovi delovi treba da stoje u razmeri brojeva 650 i 700, što se izražava proporcijom:
$x:(270\,000 - x) = 650:700$.
Pošto članove druge razmere skratimo sa 50 i primenimo osnovno svojstvo proporcije, dobijamo jednačinu:
$14x = 13 \cdot 270\,000 = 13x$
$27x = 13 \cdot 270\,000 \Leftrightarrow x = 130\,000$.
Deo premije prvog radnika je 130 000 dinara, a deo drugog je $270\,000 - 130\,000 = 140\,000$ dinara.

388. Neka su x, y i z zarade sva tri radnika. One su direktno proporcionalne brojevima dana i brojevima časova, odnosno ukupnom broju časova:
$x:y:z = 150 \cdot 6:9 \cdot 8:12 \cdot 7$
ili
$x:y:z = 90:72:84$.
Pošto drugu razmeru skratimo sa 6, dobija se proporcija:
$x:15 = y:12 = z:14 = k$.
Zarade radnika su $x = 15k$, $y = 12k$, $z = 14k$, a po uslovu zadatka njihov je zbir jednak ukupnoj zaradi.
$15k + 12k + 14k = 246\,000 \Rightarrow k = 6\,000$.
Zarada prvog radnika $x = 15k = 90\,000$ dinara, drugog radnika je $y = 12k = 72\,000$ dinara i trećeg $z = 14k = 84\,000$ dinara.

389. 128 m, 216 m, 112 m.

390. Cu = 287,28 kg, Zn = 155,05 kg, Pb = 13,68 kg.

391. Ako prvo lice dobije x, onda drugo lice dobije $x + \frac{x \cdot 20}{100} = \frac{6x}{5}$, a treće dobije $\frac{6x}{5} + \frac{6x}{5} \cdot \frac{20}{100} = \frac{36x}{25}$.

Na osnovu pretpostavke dobija se jednačina:
$x + \frac{6x}{5} + \frac{36x}{25} = 728\,000$, $x = 200\,000$.

Prvo lice dobija $x = 200\,000$ dinara, drugo $\frac{6x}{5} = 240\,000$ dinara, a treće $\frac{36x}{25} x = 288\,000$ dinara.

392. Grupa visokokvalifikovanih dobije 252 000 dinara, a svaki radnik ove grupe po 12 000 dinara, grupa kvalifikovanih – 504 000 dinara, svaki radnik po 8 000 dinara i treća grupa – 630 000 dinara, po radniku 5 000 dinara.

393. 2,4 m.

394. Ukupan otpor je $R = R_1 + R_2 + R_3$. Otpori su $R_1 = 4$ oma, $R_2 = 6$ oma i $R_3 = 14$ oma.

395. Dobit po pogonima: A – 1 380 000 dinara, B – 2 070 000 dinara, C – 1 035 000 i pogon D – 1 035 000 dinara.

396. Ako je x količina vode u litrima 40° C, tada je:
$40x + 25(90 - x) = 90 \cdot 30 \Rightarrow x = 30$.
Treba 30 l vode od 40° C i 60 l od 25° C.

397. Vrednost x kg prve vrste iznosi $x \cdot 720$ dinara. Vrednost $(1\,200 - x)$ kg druge vrste iznosi $(1\,200 - x) \cdot 480$ dinara. Vrednost 1 200 kg mešavine iznosi $1\,200 \cdot 640$ dinara. Zbir vrednosti pomešanih vrsta jednak je vrednosti mešavine:
$72x + (1\,200 - x)48 = 1\,200 \cdot 64$, odakle se dobija $x = 800$.
Od prve vrste treba uzeti 800 kg, a od druge vrste 400 kg.

398. Analogno prethodnom zadatku je:
$600x + 900(600 - x) = 600 \cdot 850$, $x = 100$.
Srebra finoće 600‰ treba 100 grama, a srebra finoće 900‰ 500 grama.

399. Iz jednačine $\frac{52 \cdot x}{100} + \frac{(144 - x)88}{100} = \frac{144 \cdot 72}{100}$ dobija se da je $x = 64$.
Dakle, treba uzeti 64 l jačine 52%, 80 l jačine 88%.

400. Iz jednačine $6 \cdot 0{,}45 + 14 \cdot 0{,}75 = 20x$ nalazimo da je jačina mešavine $x = 0{,}66$.

401. Ako se uzme x kg zlata finoće $900‰$, onda je $(30 - x)$ kg zlata finoće $600‰$. Kako su količine čistog zlata pre i posle legiranja jednake, sleduje:
$0{,}9x + 06(30 - x) = 0{,}8 \cdot 30 \Rightarrow x = 20$.

402. Ako se deo vazduha sa azotom označi sa N, kiseonik sa O i ostali sastojci sa X, tada je:

$$N + O + X = 546 \text{ i } N : O : X = \frac{78}{100} : \frac{21}{100} : \frac{1}{100},$$

odakle se dobije da je $N = 439{,}92$, $O = 118{,}44$ i $X = 5{,}64$.

403. Upotrebi jednačinu $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$.
$R_1 = 17$ oma, $R_2 = 34$ oma i $R_3 = 85$ oma.

404. Ako je x količina dodatne vode, biće:
$900(450 + x) = 450 \cdot 1100 \Leftrightarrow x = 100$.

4.4. Procentni i promilni račun

405. **Napomena.** – U procentnom računu pojavljuju se tri promenljive veličine: procenat (p), osnovna vrednost ili glavnica (G) i procentni iznos ili prinos (P), a pored ovih i stalna veličina, broj 100 (ili 1 000). U zadacima glavnica se pojavljuje:
a) kao čista glavnica (G) od koje se izračunava prinos. U ovom slučaju zadatke rešavamo procentnim računom od sto;
b) kao uvećana glavnica ($(G + P)$ – čista glavnica uvećana za prinos. U ovom slučaju zadatke rešavamo procentnim računom na sto;
c) kao umanjena glavnica ($G - P$) čista glavnica umanjena za prinos. U ovom slučaju zadatke rešavamo procentnim računom u sto.
U sva tri slučaja iz dve date od triju promenljivih veličina G, P i p i broja (100 ili 1 000) možemo izračunati treću nepoznatu veličinu.
15 dinara rabata dobija se od glavnice 100 dinara, P dinara rabatom dobija se od glavnice 55 300 dinara. Pošto su prinosi (P i 15) direktno proporcionalni glavnicama (55 400 i 100), sledi proporcija:
$P : 15 = 55400 : 100$,
odakle je $P = \frac{55400 \cdot 15}{100} = 8310$ dinara.

406. Pošto su P i p direktno proporcionalni uvećanoj glavnici $G + P = 1272000$ i $100 + p = 106$, sledi:
$P : p = (G + P) : (100 + p)$,
ili
$P : 6 = 1272000 : 106$,
odakle dobijamo:
$P = \frac{1272000 \cdot 6}{106} = 72000$ dinara.
Nabavna cena je $G = 1272000 - 72000 = 1200000$ dinara.

407. Pošto su P i p direktno proporcionalni umanjenoj glavnici $(G - P)$ i $(100 - p)$, sledi:
$P : p = (G - P) : (100 - p)$
ili
$P : 5 = 212135 : 95$,
odakle dobijamo:
$P = \frac{212135 \cdot 5}{95} = 11165$ dinara.
Nabavna cena je $212135 + 11165 = 223300$ dinara.

408. Prvi iznos je čista, a drugi uvećana glavnica, pa je prinos:
$P = 5844800 - 562000 = 2248000$ dinara.
Fond je povećan od 5 620 000 dinara na 224 800 dinara. Fond je povećan od 100 dinara na p, pa je:
$p : 224800 = 100 \cdot 5620000$,
odakle je:
$p = \frac{2248000}{5620000} = 4\%$.

409. Prva suma je čista, a druga suma umanjena glavnica, pa je prinos:
$P = 13540 - 10832 = 2708$,
a procenat:
$p = \frac{100P}{G} = \frac{100 \cdot 2708}{13540} = 20\%$.

410. Pre pojeftinjenja 1 m štofa je koštao 7 000 dinara, posle pojeftinjenja košta 6 160 dinara.

411. Poznata je uvećana glavnica, pa je:

$$G = \frac{(G + P) \cdot 100}{100 + p} = 73000.$$

Proizvodnja $G + P = 89\,060$ jedinica.
Norma $G = 73\,000$ jedinica.

412. 51 200 dinara.

413. Poznata je umanjena glavnica, pa se iz proporcije:
$(G - P):(100 - p) = G:100$ ili $37\,000 : 94 = G:100$ dobije da je cena koštanja $G = 400\,000$ dinara.

414. Provizija je 576 000 dinara.

415. 8,65%.

416. 5 800 dinara.

417. 94%.

418. 8%.

419. 34,5 kg.

420. Kupovna cena je bila 124 000 dinara, a troškovi 4 960 dinara.

421. 2 500 dinara.

422. 5 200 dinara.

423. 82 kg.

424. 10 913 kg.

425. 120 učesnika.

426. 14 000 dinara.

427. 30 dinara.

428. 28 968; 23 376; 62 016.

429. 1,5%.

430. 86 000 dinara.

431. 4 896 dinara.

432. Pošto je 1 251 999 uvećana glavnica, tada je:

$$P = \frac{1\,251\,999 \cdot 2}{1\,002} = 2\,499.$$

Kupovna cena robe je 1 249 500 dinara.

433. Površina datog pravougaonika $P_1 = ab$. Površina novog $P_2 = 1{,}3a \cdot 0{,}7b = 0{,}91ab = 0{,}91P$. Dakle, P_1 manje je od P_2 za 9%.

434. Neka je x – cena prve knjige, y – cena druge knjige. Prema uslovu zadatka $x = y + 0{,}25y = 1{,}25y$. Odatle je $y = \frac{x}{1{,}25} = 0{,}80x$, tj. $y = 80\%$.

435. Ako je x stara cena, a y nova cena, onda je $y = 1{,}5x$, odatle $x = \frac{y}{1{,}5}$, tj. $x = \frac{2}{3}y \approx 0{,}667\,y$, odnosno za $33\frac{1}{3}\%$ traženo smanjenje.

436. Ako je x broj učenika koji je radio vežbu, tada je
$\frac{12}{100}x + \frac{32}{100}x + 14 = x$, odavde je $x = 25$ učenika.

4.5. Kamatni račun

Primedba:
Iznos od $\uparrow$ 100 dinara naraste na $\uparrow$ p dinara za $\uparrow$ 1 godinu;
iznos od $\uparrow$ K dinara naraste na $\uparrow$ I dinara za $\uparrow$ t godinu.
Kako su ove veličine direktno proporcionalne to je:
$I : p = K : 100 = t : 1 \Rightarrow I = \frac{Kpt}{100}$.

437. Ako je K ulog (kapital), p kamatna stopa, I kamata, vreme u godinama t, tada je:
$$I = \frac{Kpt}{100} = \frac{540\,000 \cdot 7{,}5 \cdot 4}{100} = 162\,000 \text{ dinara.}$$

438. Pošto je mesec 12-ti deo godine, biće:
$$I = \frac{K \cdot p \cdot m}{1\,200} = \frac{108\,000 \cdot 8 \cdot 4}{1\,200} = 2\,880 \text{ dinara.}$$

439. Pošto je dan 360-ti deo računske godine, biće:
$$I = \frac{K \cdot p \cdot d}{36\,000} = \frac{75\,000 \cdot 6 \cdot 80}{36\,000} = 1\,000 \text{ dinara.}$$

440. Primenom obrasca:
$K = \frac{1\,200\,I}{p \cdot m}$, dobijamo da je $K = 120\,000$ dinara.

441. 10%.

442. 25. aprila.

443. Ako sa x označimo sumu duga, onda je $\frac{x \cdot 8 \cdot 4}{100}$ kamata na taj dug. Tada sledi jednačina:

$x + \frac{x \cdot 8 \cdot 4}{100} = 132\,000$ dinara,

odakle je $x = 100\,000$ dinara.
Dakle, dug je 100 000 dinara, a kamata 32 000 dinara.

Primedba. – Ovde je kapital uvećan za kamatu, onda kamatu i kapital izračunavamo interesnim računima na sto.

444. Ako je ulog x, onda je interes na taj dug: $\frac{x \cdot 6 \cdot 75}{36\,000}$, pa sledi jednanačina $x + \frac{x \cdot 6 \cdot 75}{36\,000} = 121\,500$, odakle je $x = 120000$ dinara.

445. Ako sa x označimo sumu duga, onda je $\frac{x \cdot 4 \cdot 3}{100}$ trogodišnja kamata na taj dug. Radi toga dužnik je primio $x - \frac{x \cdot 4 \cdot 3}{100}$, što iznosi 440 000 dinara, pa sledi jednačina: $x - \frac{x \cdot 4 \cdot 3}{100} = 440\,000$, odakle je $x = 500\,000$ dinara.

Primedba.– Ako je kapital umanjen za kamatu, onda se kamata i kapital izračunavaju interesnim računom u sto.

446. Kapital je 230 000 dinara, a kamata 4 600 dinara.

447. 7700 dinara.

448. $K = 220\,000$ dinara, $I = 2\,200$ dinara.

449. 150 000 dinara.

450. 444 000 dinara.

V GLAVA

5. IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE

5.1. Podudarnost figura

451. a) Prvo dokazati podudarnost pravouglih trouglova BEC i $B_1E_1C_1$ (E podnožje visine h_b), odakle sledi da je $\angle C = \angle C_1$ itd.
b) Dokazati podudarnost oba para pravouglih trouglova na koje visina h_b deli trougao; odatle sledi podudarnost trouglova ABC i $A_1B_1C_1$.

452. a) Ako je $CE = t_c$ i $C_1E_1 = t_{c_1}$, pomoćni trouglovi BEC i $B_1E_1C_1$ su podudarni (SSS); odatle je ugao B jednak uglu B_1 itd.
b) Pravougli trougao CDE, gde je $CD = h_c$, a $CE = t_c$ i trougao $C_1D_1E_1$ su podudarni; odatle sledi da su uglovi AEC i $A_1E_1C_1$ jednaki. Trouglovi AEC i $A_1E_1C_1$ su takođe podudarni itd.

453. a) Trouglovi ACF i $A_1C_1F_1$ su podudarni (SUS); odatle sledi da je $\alpha = \alpha_1$ itd.
b) Trouglovi ABQ i $A_1B_1Q_1$ su podudarni $BQ = s_\beta$ itd.

454. a) Pravougli trouglovi ABD i $A_1B_1D_1$ su podudarni ($AD = h_b$); odatle sledi da je $\angle B = \angle B_1$ itd.

455. Pravougli trouglovi ABC i $A_1B_1C_1$ su podudarni (SUU) itd.

456. Trouglovi BCD i $B_1C_1D_1$ su podudarni, pa je $DB \cong D_1B_1$ i odavde je $AB - DB \cong A_1B_1 - D_1B_1$, tj. $AD \cong A_1D_1$.

457. Pravougli trouglovi ADM i BDM su podudarni (SUS); odatle sledi da je $AM = MB$ i $\angle MAD = -\angle MBD$ itd.

466. Posmatrajmo trouglove ABC i EDC (sl. 3).
Pošto je: $BC = CD$ (pretpostavka),
$\angle 1 = \angle 2 = 90°$ (pretpostavka),
$\angle 3 = \angle 4$ (unakrsni);
tada je $\Delta ABC = \Delta CDE \Rightarrow BA = DE = 70$ m.

467. Bez uputstva.

468. Bez uputstva.

469. Bez uputstva.

470. a) Četvorougao $B_1C_1A_1H$ je trapez;
b) Četvorougao $AC_1A_1B_1$ je paralelogram, njegove dijagonale se polove.

471. Iz podudarnosti trouglova BAF i CAE sledi tvrđenje.

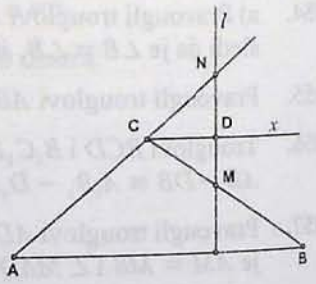
472. Neka je $AE = AH = CF = CG$. Tvrdimo da je četvorougao $EFGH$ pravougaonik. Zaista $\Delta AEH \cong \Delta CFG$ (zašto?). Odatle sledi da je $EH = FG$. Iz podudarnosti trouglova BEF i DGH sledi da je $EF = HG$. Dakle, četvorougao $EFGH$ je paralelogram.
Međutim, $\angle AEH + \angle BEF = 90°$, jer je $\angle AEH = 90° - \angle A$, $\angle BEF = 90° - \angle B$, $\angle A + \angle b = 180°$, pa je $\angle FEH = 90°$, što znači da je taj paralelogram pravougaonik.

473. Konstruiše se $CE \| BD$ i $C_1D_1 \| B_1D_1$ četvorouglovi $BECD$ i $B_1E_1C_1D_1$ su paralelogrami, $\Delta ACE \cong \Delta A_1C_1D_1$ itd.

474. Bez uputstva.

475. Ako je $CM \perp BB'$ tada je trougao CMB podudaran sa trouglom $AA'D$, pa je $BM = AA'$. Četvorougao $MCC'B'$ je pravougaonik $CC' = MB'$ itd.

476. Neka je prava $Cx \| AB$ i neka je $l \cap x = \{D\}$ (sl.17). Tada su trouglovi MCD i CDN podudarni jer je:
$CD = CD$, $\angle CDM = \angle CDN = 90°$,
$\angle NCD = \angle CAB$, $\angle ABC = \angle MCD$
(uglovi sa paralelnim kracima).
Iz podudarnosti sledi da je
$CM = CN$, pa je trougao MCN jednakokraki.



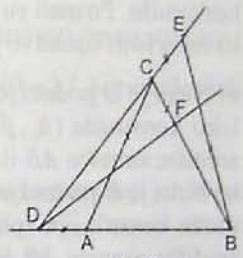
Sl. 17

477. Trouglovi BNM, CNP, APM su podudarni jer je
$AM = BN = CP = a + d$ (a stranica trougla ABC),
$BM = CN = AP = d$ i $\angle B = \angle C = \angle A$. Iz podudarnosti trouglova sledi tvrđenje $MN = NP = PM$.

478. Neka je AD težišna duž trougla ABC i neka je $BE \perp AD$ i $CF \perp AD$, $F \in AD$, $E \in AD$. Iz podudarnosti pravouglih trouglova BDE i CDF sledi da je $BE = CF$.

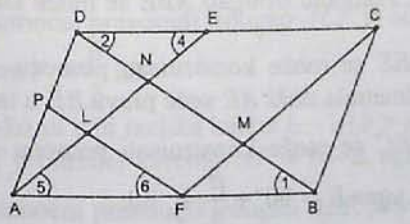
479. Neka je $DH \perp BB_1$ ($H \in BB_1$), tada je $DH = FB_1$. Iz podudarnosti trouglova BDE i BDH i iz prethodne jednakosti sledi $DE = DH = FB_1$. Dakle: $BE + CF = FB_1 + CF = CB_1$.

480. 1° $DB = DC$ (Tačka D pripada simetrali DF duži BC), te je ΔBCD jednakokraki.
2° $\angle DBC = \angle DCB = \angle BAC \Rightarrow \angle DAC = \angle BCE$. Pošto je
$BC = AC$ (po pretpostavci) i
$CE = DA$ (po pretpostavci),
tada je
$\Delta DAC \cong \Delta BCE$ (I stav) $\Rightarrow$
$BE = DC$; a kako je
$DC = DB \Rightarrow BE = BD$ i trougao DBE je jednakokraki (sl. 18).

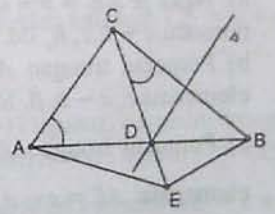


Sl. 18

481. Posmatrajmo trouglove FBM i EDN (sl. 19). Kako je $FB = ED = \frac{1}{2}AB$, $\angle 1 = \angle 2$ (naizmenični), $\angle 3 = \angle 4$ (sa paralelnim kracima), tada je $\Delta FBM \cong \Delta EDN$ (II stav) $\Rightarrow BM = ND$. Posmatrajmo takođe trouglove: AFL i FBM, gde je $EP \| BD$. Kako je $AF = FB$ (po pretpostavci), $\angle 5 = \angle 3$ (saglasni), $\angle 6 = \angle 1$ (saglasni), tada je $\Delta AFL \cong \Delta FBM$ (II stav) $\Rightarrow FL = BM$. Pošto je $FL = MN$, imamo $BM = MN = ND$, što je trebalo dokazati.



Sl. 19



Sl. 20

482. 1° Tačka $D \in s$ (s je simetrala duži BC) (sl. 20), pa je $DB = DC$. Trougao DBC je jednakokraki.
2° $\Delta ADC \cong \Delta BCE$ (I) itd.

483. Ako je AA' visina jednakokrakog trougla, a $MF \perp AA'$ ($F \in AA'$), tada su trouglovi AMF i EME podudarni (zašto?) itd.

484. Posmatrati trouglove ABN i BCM, zatim trouglove ABP i ACM.

485. a) Neka je E središte stranice BC. Pomoćni trougao ABE se lako konstruiše, jer su mu poznate sve tri stranice $\left(\frac{a}{2}, c, t_a\right)$.

b) Pomoćni trougao ABE se može konstruisati, jer su mu poznate dve stranice i jedan ugao (c, t_a, β).

486. a) Ako je D podnožje visine h_b, pomoćni trougao ABD se lako konstruiše. Poznati su kateta h_b i oštar ugao α.
b) Iskoristiti uputstvo pod a).

487. a) Neka je D podnožje visine h_c. Pomoćni pravougli trougao BCD se lako konstruiše (h_c, β). Kružnica $k(C, t_c) \cap BD = \{E\}$. Tačka E je središte stranice AB itd.
b) Neka je E podnožje visine h_b. Pomoćni pravougli trougao ABE se može konstruisati (poznata je kateta h_b i hipotenuza c). Ako je D središte stranice AB, kružnica $k(D, t_c) \cap AE = \{C\}$.

488. a) Neka je $AE = a + c$. Pomoćni trougao AEC se može konstruisati, jer su poznati stranica $a + c$, ugao $E = \frac{\beta}{2}$ i visina h_c. Simetrala s duži EC seče stranicu AE u tački B itd.
b) Neka je $BE = a + b$. Pomoćni trougao BEA se može konstruisati (ugao $E = \frac{\gamma}{2}, a + b, c$) itd.

489. a) Neka je $AE = b + a$. Pomoćni trougao ABE se može konstruisati pomoću $a + b, c, h_c$ itd.
b) Pomoćni trougao ABE se može konstruisati pomoću poznatih elemenata $c, a - b, \beta$. Simetrala duži AE seče pravu BE u tački C itd.

490. a) Pomoćni trougao AEC se može konstruisati pomoću poznatih elemenata: $AE = c - a$, ugao $E = 90° + \frac{\beta}{2}$, h_c itd.

b) Pomoćni trougao AET se može konstruisati jer su poznate njegove stranice $AE = \frac{c}{2}, AT = \frac{2}{3}t_a, ET = \frac{1}{3}t_c$, gde je T težište trougla, a E središte stranice AB itd.

491. a) Neka je dat raspored tačaka $M - A - B - N$ na pravoj p tako da je $AM = b$ i $BN = a$; tada je $MN = 2s$. Možemo konstruisati pomoćni trougao MNC, jer je ugao $M = \frac{\alpha}{2}$ i ugao $N = \frac{\beta}{2}$. Tačke A i B pripadaju duži MN i simetralama duži MC, odnosno NC itd.
b) Iskoristiti analizu zadatka pod a).

492. a) Pomoćni pravougli trougao ABD može se konstruisati, poznata mu je hipotenuza a i kateta $AD = h_b$ itd.
b) Bez uputstva.
c) Pomoćni trougao AMC se može konstruisati jer su stranica $MC = a + b$, ugao $M = \frac{\beta}{2}$, a ugao $C = 180° - 2\beta$. Simetrale duži AM i MC seku se u tački B itd.

493. a) Pomoćni pravougli trougao BDE može se konstruisati jer su poznati kateta $DE = a + h$, ugao $B = 75°$ i ugao $E = 15°$. Presek simetrale s duži BE i duži DE određuje teme C trougla itd.
b) Trougao BDE može se konstruisati jer su poznati stranica $BE = a - h$, ugao $\beta = 60°$ i ugao $E = 105°$ itd.

494. a) Pomoćni pravougli trougao ACE se može konstruisati. Poznati su elementi ΔACE: kateta $CE = a + c$, ugao $C = 90°$ i ugao $E = 22° 30'$; itd.
b) U pravouglom trouglu CEA kateta $CE = c - a$, ugao $C = 90°$ i ugao $E = 67° 30'$; pa se lako konstruiše itd.

495. b) Iskoristiti da je težišna duž koja odgovara hipotenuzi jednaka polovini hipotenuze itd.
c) Pomoćni pravougli trougao ACF je određen katetom $CF = a + c$ i uglom $F = \frac{\beta}{2}$ itd.
d) Ako su dati razlika kateta $b - a\,(b > a)$ i ugao α, pomoćni trougao ABF je određen katetom $AF = b - a$, uglom $A = \alpha$ i uglom $F = 135°$.

496. a) Pomoćni pravougli trougao ABE je određen katetom $AE = a + d$, uglom $A = 90°$ i uglom $E = 22° 30'$ itd.
b) Pomoćni pravougli trougao BEC je određen katetom $BE = d - a$, uglom $B = 90°$ i uglom $E = 67° 30'$: BC je stranica kvadrata itd.

497. a) Trougao AEC je određen stranicom $AE = a + b$, stranicom $AC = d$ i uglom $E = 45°$. Simetrala duži CE u preseku sa AE određuju teme B itd.
b) Pravougli trougao ABE može se konstruisati jer su poznate kateta $AB = a$ i kateta $BE = b + d$. Simetrala s duži AE seče BE u tački C itd.

c) Trougao AMC se može konstruisati; poznati su: stranica $AM = a - b$, stranica $AC = d$ i ugao $M = 135°$. Presek simetrale s duži MC sa pravom AM određuje teme B pravougaonika itd.
d) Pravougli trougao ABN je određen katetama $AB = a$ i $BN = d - b$, te se lako konstruiše. Simetrala s duži AN seče pravu BN u tački C itd.

498. a) Može se konstruisati trougao ABC jer su poznate dve stranice i visina koja odgovara jednoj od njih.
b) Može se konstruisati trougao ABO, gde je O presek dijagonala.
c) Može se konstruisati trougao ABC, gde je ugao $B = 180° - \alpha$ itd.
d) Može se konstruisati pravougli trougao AEO, gde je E projekcija preseka dijagonala O na stranicu AB.

499. a) Može se konstruisati pravougli trougao ABO, gde su O presek dijagonala, ugao $A = \frac{\alpha}{2}$ i ugao $O = 90°$ itd.
b) Može se konstruisati pravougli trougao ABO, poznate su katete $AO = \frac{d_1}{2}$ i $OB = \frac{d_2}{2}$.
c) Trougao ABM je određen stranicama $AB = a$, $AM = \frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2}$ i uglom $M = 45°$, pa se može konstruisati.
d) Trougao ABL se može konstruisati, jer su mu poznati $AL = \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2}$, $AB = a$ i ugao $M = 135°$.

500. a) Neka je $CE \| AD$. Trougao EBC se može konstruisati jer su poznate $EB = a - b$, $EC = d$ i njegova visina h itd.
b) Trougao EBC se može konstruisati jer su poznati: $EB = a - b$, $BC = c$, ugao $E = \alpha (CE \| AD)$.
c) Neka je $CE \| BD$, E pripada pravoj AB. Trougao AEC se može konstruisati pošto su poznati: $AE = a + b$, $AC = d_1$, $EC = d_2$ itd
d) Trougao EBC se može konstruisati pošto su poznati: $BE = a - b$, ugao $E = \alpha$ i visina koja odgovara stranici EB itd.

501. Koristiti uputstvo iz prethodnog zadatka.

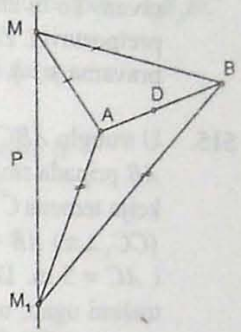
502. Koristiti uputstvo iz prethodnog zadatka.

503. Bez uputstva.

5.2. Ortogonalnost pravih i ravni. Ugao prave i ravni

506. Traženo geometrijsko mesto tačaka je simetrijska ravan date duži.

508. Neka je D sedište duži AB. Dokažite da je ravan određena tačkama M, D i M_1 normalna na duži AB (sl. 21). Kako je $MA = MB$ (zašto?), trougao MAB je jednakokraki, MB je njegova visina, pa je $MD \perp AB$. Slično $M_1D \perp AB$, dakle ravan određena tačkama MDM_1 normalna je sa dve prave koje se seku i koje joj pripadaju itd.



Sl. 21

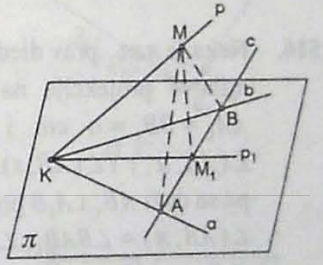
509. a) $\frac{a}{2}$ cm; b) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm; c) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ cm.

510. 60° (trougao MAB je jednakostraničan).

511. $AB = 2a$ (vidi prethodni zadatak).

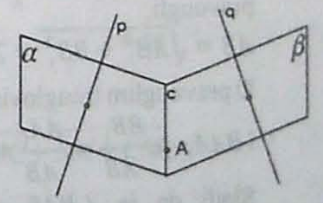
512. 9 cm.

513. Neka prava p prodire ravan π u tački K, prava p_1 je projekcija prave p na ravan π; a i b prave koje pripadaju ravni π i simetrične su sa p_1 (sl. 22). Uočite na pravoj p tačku M i odredite njenu projekciju M_1 na pravoj p_1. Kroz tačku M_1 konstruišite pravu $c \perp p_1$ i odredite $a \cap c = \{A\}$ i $b \cap c = \{B\}$. Koristeći podudarnost trouglova KM_1A i KM_1B dokažite da su podudarni i trouglovi KMA i KMB, itd.



Sl. 22

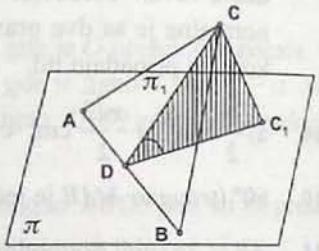
514. Konstruišite ravan $\alpha \perp p$, koja sadrži datu tačku A i ravan $\beta \perp q$, koja takođe sadrži datu tačku A (sl. 23). Odredite presek ove dve ravni, tj. $\alpha \cap \beta = c$. Pošto prava c pripada ravni $\alpha \perp p$, sledi da je $c \perp p$, a pošto prava c pripada i ravni $\beta \perp q$, to je $c \perp q$. Dakle, c je tražena prava. Ako pretpostavimo da ravni α i β imaju više zajedničkih pravih, tom slučaju



Sl. 23

ravni α i β bi se poklapale i prave p i q bi bile normalne na jednu istu ravan. To bi značilo da su one međusobno paralelne, što je suprotno pretpostavci. Znači prava c je jedina prava koja sadrži A i normalna je pravama p i q, tj. zadatak ima samo jedno rešenje.

515. U trouglu ABC, $AC = BC$ (sl. 24) AB pripada ravni π, C_1 je projekcija temena C na ravan ($CC_1 \perp \pi$) $AB = 6\,\text{m}, CC_1 = 2\,\text{m}$ i $AC = 5$ m. Da bismo odredili traženi ugao, uočimo visinu CD trougla ABC, a ona je u ovom slučaju i težišna duž trougla. Ravan δ, određena tačkama C, D i C_1 je normalna na AB (pošto je $CD \perp AB, CC_1 \perp AB, CC_1 \perp \pi$).



Sl. 24

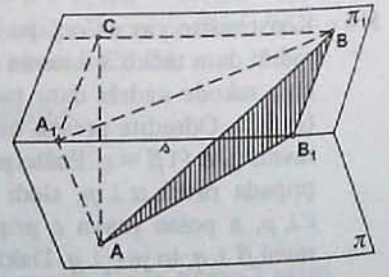
Sledi da je ugao CDC_1 ugao diedra. Iz pravouglog trougla CDC_1 je $CD = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$. Pošto je $\frac{CC_1}{CD} = \frac{1}{2}$ sledi da je ugao $CDC_1 = 30°$.

516. Neka je $\pi s \pi_1$ prav diedar, tačka A i B na njegovim stranama i A_1 i B_1 njihove projekcije na ivici s diedra. (sl. 25). Dato je da je $AA_1 = BB_1 = a$ cm i $A_1B_1 : AA_1 = \sqrt{2}$. Traže se: $\angle(AB, \pi)$, $\angle(AB, \pi_1)$ i $\angle(AB, s)$. Na osnovu pretpostavke je $AA_1 \perp \pi$, $BB_1 \perp \pi$, pa su duži AB_1 i A_1B projekcije duži AB na ravan π i π_1. Sledi da su: $\angle(AB, \pi) = \angle BAB_1$; $\angle(AB, \pi_1) = \angle ABA_1$. Iz jednakosti $AA_1 = a$ i $A_1B_1 = a\sqrt{2}$, pa se iz pravouglog trougla AA_1B_1 dobija $AB_1 = \sqrt{AB_1^2 + A_1B_1^2} = a\sqrt{3}$.

Pošto je trougao ABB_1 takođe pravougli, $AB = \sqrt{AB_1^2 + BB_1^2} = 2a$.

U pravouglim trouglovima ABB_1 i BAA_1 je $\frac{BB_1}{AB} = \frac{AA_1}{AB} = \frac{1}{2}$.

Sledi da je $\angle BAB_1 = 30°$ i $\angle ABA_1 = 30°$ što znači da je $\angle(AB, \pi) = \angle(AB, \pi_1) = 30°$.



Sl. 25

Da bismo odredili $\angle(AB, s)$, konstruišimo u ravni π_1 $BC \| s$ i $A_1C \perp s$, koje se seku u tački C. Dobijeni četvorougao A_1B_1BC je pravougaonik, pa je:

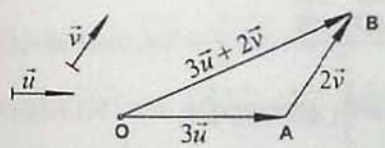
(1) $BC = A_1B_1 = a\sqrt{2}$ i $A_1C = BB_1 = a$, sledi da je:

(2) $AC = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$.

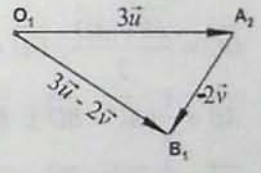
Iz (1) i (2) trougao ABC je jednakokraki, a pošto je $AC^2 + BC^2 = AB^2$, on je i pravougli. Dakle, $\angle(AB, s) = \angle ABC = 45°$.

5.3. Vektori

517. U proizvoljnoj tački O odrediti vektor $\overrightarrow{OA} = 3\vec{u}$, a zatim vektor $\overrightarrow{Ab} = 2\vec{v}$; vektor $\overrightarrow{OB}$ je traženi vektor tj. $\overrightarrow{OB} = 3\vec{u} + 2\vec{v}$ (sl. 26). Iz tačke O_1 konstruisati vektor $\overrightarrow{O_1A_1} = 3\vec{u}$, zatim vektor $\overrightarrow{A_1b_1} = -2\vec{v}$. Vektor $\overrightarrow{O_1B_1} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$ (sl 27).

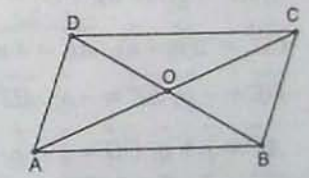


Sl. 26



Sl. 27

518. Po pretpostavci je $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ ∧ $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO}$ (sl. 28). Zbir ovih jednakosti daje $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{DO} + \overrightarrow{OC} \Rightarrow$ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, tj. četvorougao $ABCD$ je paralelogram.



Sl. 28

519. $\left.\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}\\ \overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}\end{aligned}\right\} \Rightarrow 2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} =$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{O} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Vektori $\overrightarrow{BM}$ i $\overrightarrow{CM}$ su dva suprotna vektora, pa je njihov zbir nula vektor.

520. Neka su A_1 B_1 C_1 središta stranica BC, AC i AB trougla ABC; $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$ $\overrightarrow{CC_1}$ su vektori koji se poklapaju sa odgovarajućim težišnim linijama AA_1, BB_1, CC_1, tada je

$\overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2}$; $\overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2}$; $\overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2}$.

Zbir ovih jednakosti daje

$\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} + \overrightarrow{CA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + \overrightarrow{BC} =$

$= \frac{3}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{O} = \overrightarrow{O}$; $\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{O}$, tj.

vektori $\overrightarrow{AA_1}, \overrightarrow{BB_1}, \overrightarrow{CC_1}$ obrazuju trougao.

521. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}$.

522. $\overrightarrow{OA} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$, $\overrightarrow{OB} = \frac{\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}}{2}$;

$\overrightarrow{OC} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}}{2}$, $\overrightarrow{OD} = \frac{\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}}{2}$.

523. $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$, $\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$,

$\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

527. b) $\overrightarrow{AC} = 2(\vec{m} + \vec{n})$, $\overrightarrow{DD_1} = -\vec{m}$, $\overrightarrow{EE_1} = -\vec{n}$, $\overrightarrow{AD} = 4\vec{n}$,

$\overrightarrow{CC_1} = 2(\vec{m} - \vec{n})$, $\overrightarrow{AE} = 4\vec{n} - 2\vec{m}$, $\overrightarrow{CC_1} = \vec{n} - \vec{m}$.

528. $\overrightarrow{DE} = -\vec{p}$, $\overrightarrow{EF} = -\vec{q}$, $\overrightarrow{AD} = 2\vec{q}$, $\overrightarrow{AE} = a\vec{q} - \vec{p}$,

$\overrightarrow{AC} = \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{CD} = \vec{q} - \vec{p}$, $\overrightarrow{FA} = \vec{p} - \vec{q}$.

529. $\overrightarrow{DF} = \vec{a} - \vec{p} + \vec{q}$, $\overrightarrow{FG} = -\vec{b}$, $\overrightarrow{DG} = \vec{a} + \vec{q} - (\vec{p} + \vec{b})$,

$\overrightarrow{EF} = 2\vec{a} - \vec{p} + \vec{q}$.

534. $\overrightarrow{O_2O_3} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$; $\overrightarrow{O_1O_3} = \vec{q} + 2\vec{p}$; $\overrightarrow{O_2O_1} = 2\vec{q}$.

535. Vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su kolinearni ako je $\vec{p} = k\vec{q}$, gde je $k \in R$. Kako je $\vec{q} = 2(\sqrt{2}\vec{a} + \vec{b}) = \sqrt{2}\vec{p}$, vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su kolinearni;

b) $\vec{q} = \sqrt{5}\vec{p}$, vektori $\vec{p}$ i $\vec{q}$ su kolinearni;

c) $\vec{q} = \sqrt{3}\vec{p}$, kolinearni;

d) $\vec{q} = \vec{p} + \vec{a}$, nisu kolinearni;

e) $\vec{q} = \sqrt{3}\vec{p}$, kolinearni.

536. Nisu nikad kolinearni.

537. Iskoristiti da je $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AT}$, $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BT}$ i $\overrightarrow{MT} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CT}$ itd.

539. Vektor $\overrightarrow{NP}$ može se izraziti na ovaj način:

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CP}$,

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$.

Zbir ovih jednakosti se svodi na sledeći način:

$2\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AB} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AF}$.

Odavde sledi $\overrightarrow{NP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$.

(Vektor $\overrightarrow{DC} = -\overrightarrow{AF}$, a vektor $\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$).

541. Ako je P središte duži NL i O proizvoljna tačka, tada je:

(1) $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Slično, ako je Q središte duži MK, takođe:

(2) $\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$.

Iz (1) i (2) sledi

(3) $P \equiv Q$.

Kako tačka P pripada duži NL, a tačka Q duži MK i znamo da je

(4) $NL \cap MK = \{S\}$, to iz (3) i(4) sledi $P \equiv Q \equiv S$.

542. Kako je: $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BQ} = -\overrightarrow{BP} + \overrightarrow{BQ}$, $\overrightarrow{BP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$, to je $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

Pošto je $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$, vektori $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{AC}$ su kolinearni ($PQ \| AC$).

543. a) Na osnovu sl. 29 očigledno je:

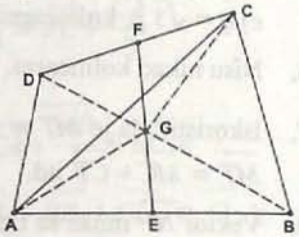
(1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$;

(2) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{DC},\ \overrightarrow{EF}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$.

Zbir jednakosti (2) dobija se

$2\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ ili

(3) $\overrightarrow{EF}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})$.



Sl. 29

Zbir jednakosti (1) je:

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$

(4) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD})=2\overrightarrow{AC}$.

Kombinovanje (3) i (4) dobija se $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}+2\overrightarrow{EF}=2\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{EF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$, što je trebalo dokazati.

f) Očigledne su jednakosti:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB},\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC},\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD},\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}$,

njihov zbir je:

$\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DG}+\overrightarrow{GA}=\overrightarrow{AB}+$

$\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DA}=\vec{0}$

ili $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=-(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{DG})$, odnosno

$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$, što je trebalo dokazati.

544. a) $\vec{a}+\vec{b}=\left(-3,\frac{3}{2}\right),|\vec{a}+\vec{b}|=1{,}5\sqrt{5}$;

b) $\vec{a}-\vec{b}=\left(-7,\frac{9}{2}\right),|\vec{a}-\vec{b}|=\frac{\sqrt{277}}{2}$;

c) $3\vec{a}+3\vec{b}=(-11,6),|3\vec{a}+3\vec{b}|=\sqrt{157}$;

d) $2\vec{a}-4\vec{b}=(-18,12),|2\vec{a}-4\vec{b}|=2\sqrt{117}$.

545. a) $\vec{v}=(-m-5)\vec{i}+(-3m-4)\vec{j}$;

b) ni za jednu vrednost parametra m vektor $\vec{v}$ nije nula vektor.

546. Da bismo vektor $\vec{v}$ razložili po vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, potrebno je da važi $m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{v}$ (gde su m i n koeficijenti razlaganja); tada je

$m(2\vec{i}-\vec{j})+n(-4\vec{i}+3\vec{j})=4\vec{i}+2\vec{j}$

$(m-4n)\vec{i}+(-m+3n)\vec{j}=4\vec{i}+2\vec{j}$.

Ovi vektori su jednaki ako i samo ako je

$2m-4n=4\wedge -m+3n=2$;

odavde se dobije da je $m=10$ i $n=4$, pa je $\vec{v}=10\vec{a}+4\vec{b}$.

547. $m=2,n=-2$.

548. $\vec{c}=\frac{11}{14}\vec{a}+\frac{15}{14}\vec{b}$.

549. Ako je O koordinatni početak pravouglog Dekartovog sistema, tada je

$\vec{a}=\overrightarrow{OA_2}-\overrightarrow{Oa_1}$ i $\overrightarrow{OA_1}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j},\overrightarrow{OA_2}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}$.

Zamenom u prethodnu jednakost dobija se da je

$\vec{a}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$.

550. Ako se iskoristi rešenje prethodnog zadatka, dobija se:

$\overrightarrow{AB}=(1,7),\ |\overrightarrow{AB}|=5\sqrt{2};\overrightarrow{BC}=(-7,1),\ |\overrightarrow{BC}|=5\sqrt{2}$;

$\overrightarrow{AC}=(-6,8),\ |\overrightarrow{AC}|=10$;

551. $\overrightarrow{AB}=(9,-3),\ \overrightarrow{AD}=(-1,2),\overrightarrow{AC}=(5,5),\overrightarrow{BD}=(-10,5),$
$\overrightarrow{BC}=(-4,8),\overrightarrow{CD}=(-6,-3)$.

552. 8 ili −8.

553. Vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$ su kolinearni, $y=6$.

554. Iz jednakosti $\vec{b}=k\vec{a}:m\vec{i}+4\vec{j}=k(3\vec{i}-2\vec{j})$ dobija se $k=-2$ i $m=-6$.

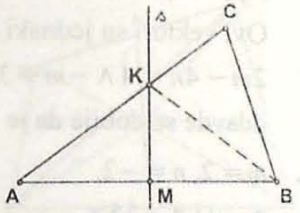
555. $D(9,4)$.

556. Neka je druga komponenta sile $\vec{F},\overrightarrow{F_2}=(x,y)$. Kako je $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}$, onda je $2\vec{i}+8\vec{j}+x\vec{i}+y\vec{j}=3\vec{i}-4\vec{j}$; odavde je $\vec{F}=(1,-12)$.

5.4. Osna i centralna simetrija

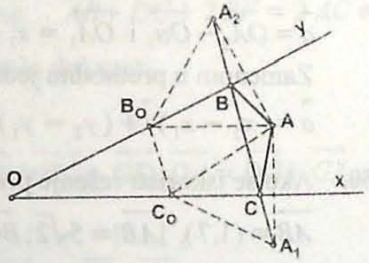
5.4.1. OSNA SIMETRIJA

561. Neka je AB data duž, s njena osa simetrije, a C tačka koja pripada istoj poluravni sa tačkom B. Pošto su A i C sa suprotnih strana ose s, to $CA \cap s = \{K\}$ (sl. 30); tada je $AK = BK$. Kako je $AK + KC = BK + KC$, a $BK + KC > BC$, onda je $AK + KC > BC$, tj. $AC > BC$.



Sl. 30

562. Analiza. – Neka je traženi trougao AB_0C_0. Tačka B_0 i C_0 pripadaju kracima ugla xOy. Spajanjem B_0 i C_0 sa simetričnim slikama A_2 i A_1 tačke A u odnosu na ose simetrije Ox i Oy dobijamo otvoren obim trougla, koji je jednak dužini izlomljene linije $A_1C_0B_0A_2$ (sl. 31). Ova izlomljena linija ima najmanju dužinu ako pripada pravoj liniji, tj. C_0 i B_0 se poklapaju sa A_1 i A_2.



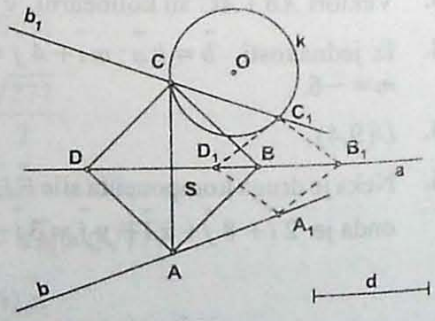
Sl. 31

Konstrukcija. – Konstruisati simetrične slike A_1 i A_2 tačke u odnosu na Ox i Oy. Prava A_1A_2 seče krake ugla Ox i Oy u tačkama B i C; one su temena traženog trougla.

Dokaz.– Dokaz sledi iz analize i konstrukcije;

Diskusija.– Za $\angle xOy < 90°$ zadatak ima jedno rešenje; za $\angle xOy \geq 90°$ nema rešenja.

563. Analiza. – Neka je $ABCD$ traženi romb (sl. 32). Da bismo konstruisali romb treba odrediti jedno teme, na primer C.



Sl. 32

Pošto su dijagonale romba njegove ose simetrije, simetrična slika prave b u odnosu na a seče K u temenu C.

Konstrukcija. – Konstruisati pravu b_1 simetričnu sliku pravoj b u odnosu na a. Odrediti sliku A tačke C i središte S romba, zatim u ostala dva temena B i D.

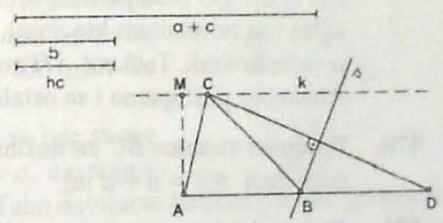
Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Diskusija. – 1) $b_1 \cap K = \{C, C_1\}$ dva rešenja.

2) $b_1 \cap K = \{C\}$ jedno rešenje.

3) $b_1 \cap K = \varnothing$ nema rešenja.

564. Analiza. – Neka je traženi trougao ABC (sl. 33). Na produženoj stranici AB odredimo tačku D, tako da je $AD = a + c$. Trougao ADC je određen i može se konstruisati. Trougao DCB je jednakokraki, a visina koja odgovara osnovici je osa simetrije i seče AD u trećem temenu trougla.



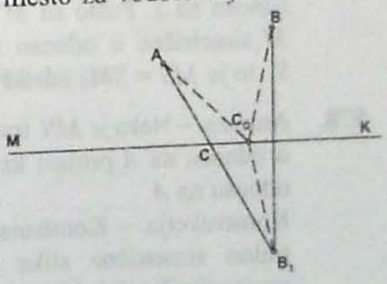
Sl. 33

Konstrukcija.–Konstruisati duž $AD = a + c$; na odstojanju h_c od AD konstruišemo $k \| AD$. Kružni luk sa centrom u A i poluprečnikom b seče pravu k u tački C, a simetrala s duži DC seče AD u temenu B.

Dokaz. – Trougao ABC je traženi, pošto je $AC = b$; $AB + BC = AB + BD = a + c$, visina $h_c = AM$ po konstrukciji.

Diskusija. – Za $h_c \leq b < a + c$ zadatak ima jedno rešenje.

565. Analiza. – Neka je najpodesnije mesto za vodotoranj u tački C_0, a dužina vodovoda $AC_0 + BC_0$ minimalna. Neka je B_1 simetrična slika tačke B u odnosu na obalu MK; tada je $C_0B = C_0B_1$, a zbir $AC_0 + C_0B_1$ treba da je manji od bilo koje izlomljene linije koja spaja A i B_1, tj. izlomljena linija AC_0B_1 (sl. 34) treba da postane prava linija. $AB_1 \cap MK = \{C\}$ je optimalno mesto za vodotoranj.



Sl. 34

Konstrukcija.– Konstruiše se simetrična tačka B_1 tačke B u odnosu na obalu MK. $AB_1 \cap MK = \{C\}$ je tražena tačka.

Dokaz.– Pretpostavimo da $AC + BC$ nije najkraće rastojanje tačke C_0 od A i B, tj. $AC_0 + C_0B_1 < AC + CB_1$ ili $AC_0 + C_0B_1 < AB_1$, a to je protivurečno teoremi o zbiru dve stranice trougla.
Diskusija.– Zadatak ima uvek samo jedno rešenje.

566. Konstruisati simetričnu sliku jednog kraka datog ugla simetrijom $\sigma\rho$. Presek slike kraka sa drugim krakom određuje jedno teme kvadrata itd.

567. Vidi zadatak 562.

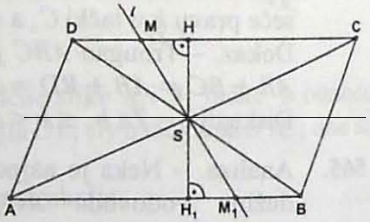
569. Neka je H ortocentar ΔABC, a A_1, B_1, C_1 presečne tačke opisane kružnice oko ΔABC, sa produžecima visina trougla. Kako je $\angle B = \angle AA_1C$ (kao periferijski nad istim lukom) i $\angle B = \angle A_1HC$ (kao uglovi sa normalnim kracima), tada je $\angle AA_1C = \angle A_1HC$, tj. ΔA_1HC je jednakokrak. Tačke A_1 i H su simetrične u odnosu na simetralu BC. Analogno postupamo i sa ostalim dvema stranicama.

570. Produžiti stranicu BC za dužinu dijagonale, zatim konstruisati simetralu duži $BE = b + d$ itd.

571. Konstruisati pomoćni pravougli trougao ABE, čije su katete a i $d - b$, zatim konstruisati simetralu duži AE itd.

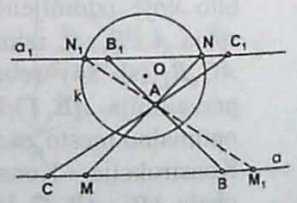
5.4.2. CENTRALNA SIMETRIJA

577. Ako prava $l \exists S$, $l \cap DC = \{M\}$ centralno simetrična slika tačke M je $M_1 \in AB$, jer je AB centralno simetrična slika CD u odnosu na S. Pošto su M i M_1 simetrične u odnosu na S, to je $MS = SM_1$ (sl. 35).



Sl. 35

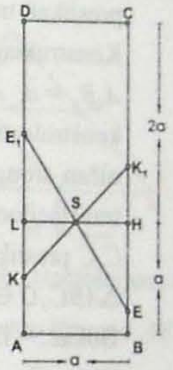
578. Analiza. – Neka je MN tražena duž (sl. 36). Simetrična slika a_1 prave a u odnosu na A prolazi kroz tačku N. Tačke M i N su simetrične u odnosu na A.
Konstrukcija. – Konstruisati centralno simetrične slike B_1 i C_1 proizvoljnih tačaka B i C prave a u odnosu na tačku A, tj.
$\delta_A(B) = B_1$, $\delta_A(C) = C_1$,
$\delta_A(a) = a_1$,



Sl. 36

$a_1 \cap K = \{N\}$, a $NA \cap a = \{M\}$.
Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.
Diskusija. – 1) $a_1 \cap K = \{N, N_1\}$ dva rešenja;
2) $a_1 \cap K = \{N\}$ jedno rešenje;
3) $a_1 \cap K = \varnothing$ nema rešenja.

579. Analiza. – Neka su $ABCD$ granice parcele, pri čemu je $AB = a, BC = 3a, LS = SH$, a K, E i S je mesta redom: pumpa, stablo i električni stub (sl. 37).
$KS \cap BC = \{K_1\}, K_1$ je simetrična tačka za K u odnosu na S; takođe su E i E_1 centralno simetrične u odnosu na S; što znači položaj pravih AD i BC je određen. SL i SH su normale prema AD i BC.
Konstrukcija. – Konstruisati sa iste strane tačke L i H duži $LA = HB = a$, a u suprotnom smeru $LD = HC = 2a$. Tako dobijamo temena parcele (granice).
Konstrukcija i dokaz slede iz analize.
Diskusija. –
a) K, S, E ne pripadaju istoj pravoj – jedno rešenje.
b) K, S, E pripadaju istoj pravoj i $SK = SE$ – zadatak je neodređen.
c) K, S, E pripadaju istoj pravoj i $SK \neq SE$ – nema rešenja.



Sl. 37

585. Konstruisati ΔATM, gde je $AT = \frac{2}{3}t_a$, $TM = \frac{2}{3}t_c$ i $AM = \frac{2}{3}t_b$. Ako je S središte duži TM, simetrija $\delta_S(A) = B$, tada su B i A dva temena, a T težište trougla.

5.5. Translacija

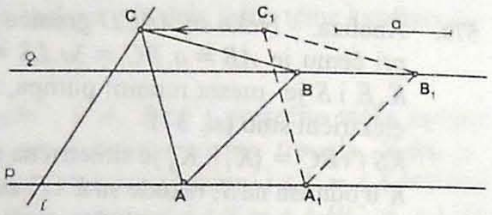
591. a) $\tau_{\overrightarrow{AC}}$;
b) $\tau_{\vec{u}}(\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \frac{\overrightarrow{BC}}{2})$;
c) $\tau_{\overrightarrow{BO}}$; ($O$ presek dijagonale).

595. a) $\tau_{\vec{v}}(\vec{V} = \overrightarrow{AA_1} + \vec{AB})$.

596. Bez uputstva.

597. Analiza. – Neka je traženi ΔABC (sl.38). Preslikati trougao ABC translacijom za vektor $\overrightarrow{CC_1}$ ma kog modula u pravcu paralelnih pravih u $\Delta A_1B_1C_1$. Trougao $A_1B_1C_1$ se može lako konstruisati, zatim ga preslikati translacijom za vektor $\overrightarrow{CC_1}$, čiji kraj pripada pravoj l.

Konstrukcija. – Nad duži $A_1B_1 = a$, $A_1 \in p, B_1 \in q$ konstruisati jednakostraničan trougao $A_1B_1C_1$, a translacijom za vektor $\overrightarrow{C_1C}$ preslikati ga u $\Delta ABC, C \in l$.



Sl. 38

Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Diskusija. – Neka je $d = \rho(p, q)$ rastojanje između paralelnih pravih. Tada:

$1° a > d$ zadatak ima 4 rešenja;

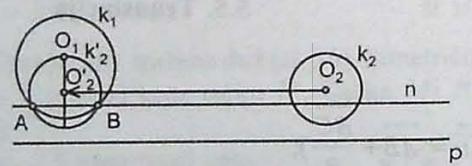
$2° a = \frac{2d\sqrt{3}}{3}$ ili $a = d$, zadatak ima dva rešenja;

$3° a < d$ zadatak nema rešenja.

598. Nema uputstva.

599. Uočiti proizvoljnu tačku A na pravoj l_2 pa konstruisati duž AB jednaku datoj duži i paralelnu sa l_1, a zatim konstruisati kroz tačku B pravu $q \| l_2$, $q \cap l_3 = \{B_1\}$ itd.

602. Konstrukcija je prikazana na slici 39.

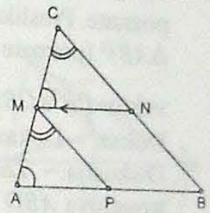


Sl. 39

603. Kružnicu $K(O, r)$ preslikati translacijom u $K'(O', r)$ za vektor $\vec{v}$, čiji je intenzitet jednak datoj duži, a pravac isti sa pravom AB. $K' \cap K = \{N, N_1\}$ ili $K' \cap K_1 = \{N\}$ ili $K' \cap K_1 = \emptyset$ itd.

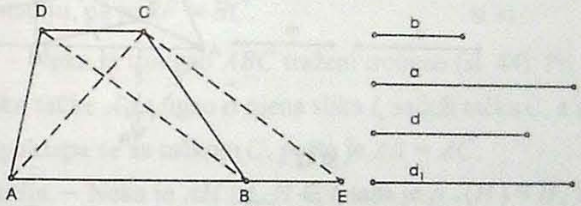
604. Preslikati datu pravu p translacijom za vektor $\vec{v}$ u p'. $p' \cap k = \{M, M'\}$ ili $p' \cap k = \{M\}$ ili $p' \cap k = \emptyset$ itd.

605. U ΔABC (sl. 40) tačka M je središte stranice AC i $MN \| AB$. Preslikati duž BN translacijom za vektor $\overrightarrow{MN}$ u duž PM. Iz podudarnosti trouglova $\Delta APM \cong \Delta MNC$ sledi da je i $MN = CN$ i $AP = MN$, a iz translacije je $MP = NB$ i $PB = MN$ pa je $CN = NB$ i $AB = AP + PB = MN + MN = 2MN$.



Sl. 40

606. Analiza. – Neka je $ABCD$ traženi trapez (sl. 41); ako translacijom za vektor $\overrightarrow{DC}$ preslikamo dijagonalu DB u CE, dobićemo trougao AEG kome su poznate sve tri stranice.



Sl. 41

Konstrukcija. – Konstruisati ΔAEC stranice $AC = d$, $EC = d_1$ i $AE = a + b$, a translacijom duži EC za vektor $\overrightarrow{CD}$ preslikamo u duž BD.

Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Dikusija. – Za $|d_1 - d| < a + b < d_1 + d$ zadatak ima rešenja. Ako ovaj uslov nije ispunjen, nema rešenja.

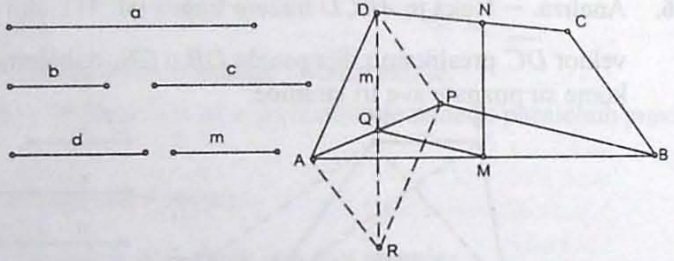
607. Analiza. – Neka je $ABCD$ traženi četvorougao (sl. 42) a M i N središta suprotnih stranica AB i CD. Povezivanjem datih elemenata postižu se sledeće tri translacije: a) preslikati translacijom stranicu BC za vektor $\overrightarrow{CD}$ u PD; b) duž MN za vektor $\overrightarrow{ND} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ u položaj QD; c) odsečak PD za vektor $\overrightarrow{DA}$ u položaj RA. Iz $\overrightarrow{MQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CD}$ sledi da je Q središte duži AP, a iz $RA = PD$ da je Q presek dijagonala paralelograma $ARPD$. Trougao ARD je određen i može se konstruisati. Trougao APD može se konstruisati jer su mu poznate

dve stranice i medijana, a takođe i trougao ABP čije su sve tri stranice poznate, a samim tim i četvorougao $ABCD$ može se konstruisati.

Konstrukcija. – Konstruisati trougao ARD čije su sve tri stranice poznate. Preslikati AR translacijom za vektor $\overrightarrow{AD}$ u DP. Konstruisati i ΔABP (poznate sve tri stranice), zatim preslikati DP translacijom za vektor $\overrightarrow{PB}$ u CB; dakle četvorougao $ABCD$ je konstruisan.

Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Diskusija. – Zadatak ima jedno rešenje ako je moguća konstrukcija trouglova ABD i ABP, tj. ako su ispunjene relacije:
$|d-b|<2m<d+b$ i $|a-c|<AP<a+c$.



Sl 42.

609. a) Translacijom za vektor $\overrightarrow{DC}$ preslikati AD u EC. Trougao EBC je pomoćni i može se konstruisati jer su poznati stranica $EB=a-b$ i nalegli uglovi α i β itd.

b) Istu translaciju kao pod a).

Pomoćni trougao EBC može se konstruisati – poznate su sve tri stranice itd.

c) Translacijom za vektor $\overrightarrow{DC}$ preslikati dijagonalu DB u CE. Pomoćni trougao AEC može se konstruisati jer su poznate sve tri stranice: $a+b, d_1, a_2$ itd.

5.6. Rotacija

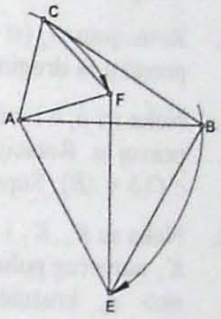
614. Centar rotacije koja preslikava datu duž AB jednaku i neparalelnu sa nekom duži A_1B_1 je tačka u kojoj se seku simetrale duži, čije su krajnje tačke homologne tačke rotacije itd.

615. Presek simetrala duži AB i KL je tačka O, koja je centar rotacije, a ugao rotacije je 90°.

616. Pri rotaciji prava se preslikava u pravu koja zaklapa sa svojim likom ugao jednak uglu rotacije itd.

617. Pri rotaciji ugla CAB u smeru kazaljke na satu oko tačke A, poluprava AC poklapa se sa polupravom AB.

Pri ovoj orijentaciji imamo:
$\angle CAF=-60°$, $\angle BAE=-60°$,
$AC=AF$ i $AB=AE$,
što znači da su tačke E i F slike tačaka B i C, pri rotaciji oko tačke A za ugao $-60°$ (sl. 43). Duž EF je lik duži BC za istu rotaciju, pa je $EF=BC$.



Sl. 43

618. Analiza. – Neka je trougao ABC traženi trougao (sl. 44). Pri rotaciji prave l oko tačke A za ugao α njena slika l_1 sadrži tačku C, a slika B_1 tačke B poklapa se sa tačkom C, pošto je $AB=AC$.

Konstrukcija. – Neka je $AH\perp l$, $H\in l$; tada je $\rho_{\alpha}^{\rightarrow}(H)=H_1$ i $\rho_{\alpha}^{\rightarrow}(l)=l_1$, $AH_1\perp l_1$; $l_1\cap k=\{C,C_1\}$, $\rho_{-\alpha}^{\rightarrow}(C)=B$. Tačke B i C su temena traženog trougla ABC.

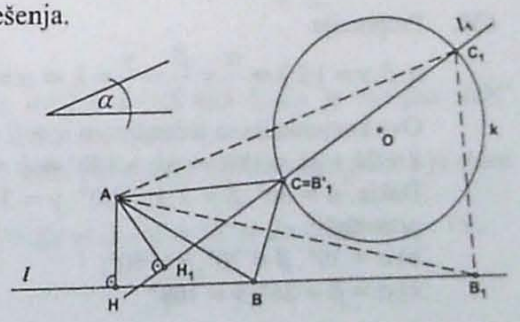
Dokaz. – Dokaz sledi iz analize i konstrukcije.

Diskusija. – Ako je

1° $l_1\cap k=\{C,C_1\}$, dva rešenja;

2° $l_1\cap k=\{C\}$, jedno rešenje;

3° $l_1\cap k=\emptyset$, nema rešenja.



Sl. 44

619. Neka je A_1 dato teme traženog jednakokrakog trougla, na stranici BC. Rotacijom stranica AC za dati ugao $\vec{\alpha}_1$ oko tačke A_1 preslikava se u $A'C'$. Neka je $A'C' \cap AB = \{C_1\}$. Tačka C_1 rotacijom za suprotan ugao $-\vec{\alpha}_1$ oko A_1 preslikava se u B_1. Trougao $A_1B_1C_1$ je traženi trougao itd.

620. Rotacijom $\rho_{\vec{\alpha}}(\alpha = 30°)$ oko tačke A jednog kraka ugla, čija slika u preseku sa drugim krakom određuje drugo teme trougla itd.

621. Neka su a, b i c date paralelne prave i neka je A bilo koja tačka na pravoj a. Rotacijom $\rho_{\vec{\alpha}}(\alpha = 60°)$ oko A pravu c preslikamo u c', $c' \cap b = \{B\}$. Suprotnom rotacijom $\rho_{-\vec{\alpha}} B$ preslikamo u C itd.

622. Neka su K_1, K_2 i K_3 tri date koncentrične kružnice, K_1 najmanjeg, a K_3 najvećeg poluprečnika i neka je $A \in K_3$. Rotacijom $\rho_{\vec{\alpha}}(\alpha = 60°)$ oko A, kružnicu K preslikati u $K_1', K_1' \cap K_2 = \{B, B_1\}$, zatim suprotnom rotacijom $\rho_{-\vec{\alpha}}(\alpha = 60°)\, B$ preslikati u C itd.

623. Neka su p, q i r date paralelne prave i neka je A bilo koja tačka prave p. Rotacijom $\rho_{-\vec{\alpha}}(\alpha = 90°)$ prava r se preslikava u $r', r' \cap q = \{B\}$, zatim rotacijom $\rho_{-\vec{\alpha}}$ oko tačke A, tačku B preslikati u D itd.

626. Neka su p i q date paralelne prave, rotacijom $\rho_{\vec{\alpha}}(\alpha = 90°)$ oko A imamo $\alpha_{\vec{\alpha}}(p) = p$; neka je $p' \cap q = \{B\}$ itd.

627. Analogno prethodnom zadatku.

628. Rotirati dati kvadrat oko date tačke za $\vec{\alpha} = 60°$.

629. Rotirati jednu datu kružnicu oko date tačke za dati ugao itd.

5.7. Neke važnije teoreme o trouglu, četvorouglu, mnogouglu i kružnici

630. Proporcija

$$\alpha:\beta:\gamma = 1:2:3 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1} = \frac{\beta}{2} = \frac{\gamma}{3} = k \Leftrightarrow a = k \wedge \beta = 2k \wedge \gamma = 3k.$$

Ova konjunkcija sa jednačinom $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ daje

$k + 2k + 3k = 180° \Leftrightarrow 6k = 180° \Leftrightarrow k = 30°$.

Dakle, $\alpha = 30°, \beta = 2 \cdot k = 60°, \gamma = 3 \cdot k = 3 \cdot 30° = 90°$ – trougao je pravougli.

b) $\alpha = 30°, \beta = 70°, \gamma = 80°$;

c) $\alpha = \beta = 36°, \gamma = 108°$.

631. $25°, 68°, 87°$.

632. a) Pravougli,
b) tupougli,
c) oštrougli.

633. $48°, 132°$.

634. $45°$.

635. $135°$.

636. Nema uputstva.

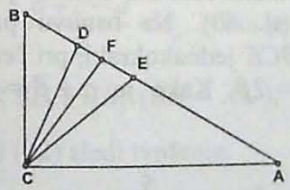
637. $\alpha = 30°, \beta = 70°, \gamma = 80°$.

638. $\alpha = 60°, \beta = 80°, \gamma = 40°$.

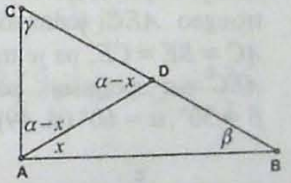
639. $\alpha = 80°, \beta = 40°, \gamma = 60°$.

640. $\alpha = 60°, \beta = 24°, \gamma = 96°$.

641. Neka je CD hipotenuzina visina, CE težišna duž i CF simetrala pravog ugla (sl.45). Kako je ugao $DCE = 28°$, to je ugao $CED = 62°$. Pošto je $CE = EA$, tada je $\angle ECA = \angle EAC = 31°$. Što znači da je $\angle ACD = 59°$, traženi $\angle DCF = \angle DCA - \angle FCA = 59° - 45° = 14°$.



Sl. 45



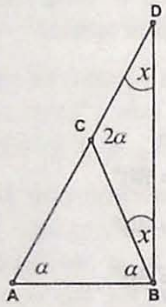
Sl. 46

642. $\alpha = \beta = 72°, \gamma = 36°$.

643. Neka je traženi ugao $BAD = x$ (sl. 46). Kako je trougao ADC jednakokraki tada je $\angle CAD = \angle ADC = \alpha - x$.
$\angle ADC = \angle DAB + \angle ABD$ (spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva unutrašnja), tj.
$\alpha - x = \beta + x \Leftrightarrow \alpha - \beta = 2x \Leftrightarrow \alpha - \beta = 30° \Leftrightarrow 2x = 30° \Leftrightarrow x = 15°$.

644. $24°, 60°, 96°$.

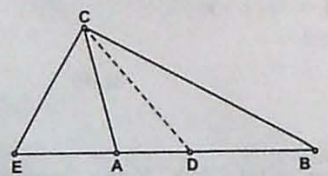
645. Kako je $AC = BC$ i $AC = CD$,
to je $BC = CD$, trougao BCD je takođe jednakokraki (sl. 47). Ugao $BCD = \alpha + \alpha = 2\alpha$, spoljašnji ugao trougla jednak je zbiru dva unutrašnja nesusedna. Iz trougla BCD imamo da je
$2\alpha + 2x = 180° \Leftrightarrow \alpha + x = 90°$,
ugao $ABD = \alpha + x = 90°$, tj. trougao BCD je pravougli.



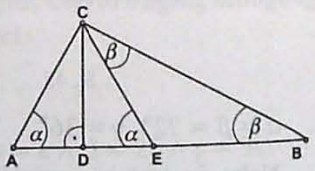
Sl. 47

646. Simetrale CD i CE obrazuju prav ugao (sl. 48), tj. ugao $ECD = 90°$, $CE = CD$. Trougao CDE je jednakokrako pravougli, odakle je $\alpha = 115°$ i $\beta = 25°$.

647. Neka je ABC pravougli trougao, ugao $C = 90°$, i neka je $CA < CB$. Ako je D podnožje visine, a E tačka duži DB tako da je $AD = DE$, trougao AEC jednakokraki (sl. 49). Na osnovu pretpostavke $AC = BE = CE$, pa je trougao BCE jednakokraki, pri čemu je ugao $AEC = \alpha$ spoljašnji, pa je $\alpha = 2\beta$. Kako je $\alpha + \beta = 90°$, to je $\beta = 30°, \alpha = 60°$ (sl. 49).



Sl. 48



Sl. 49

648. Ako se simetrale uglova α i β seku u tački S, tada iz trougla ABS sledi da je $\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + 135° = 180° \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} = 45° \Leftrightarrow \alpha + \beta = 90°$.
Dakle ugao $\gamma = 90°$.

649. $\angle ADC = 22°, \angle BEC = 34°$.

650. a) $58°, 61°, 61°$; b) $48°, 66°, 66°$; c) $74°, 53°, 53°$; d) $32°, 74°, 74°$.

651. $70°, 70°, 40°$.

652. Po pretpostavci $\angle CAE = \angle ABD = \beta$, a $\angle BAD = \angle ACE = \gamma$. $\angle ADE = \beta + \gamma$ i $\angle AED = \beta + \gamma$, to je $\angle ADE = \angle AED$. Dakle trougao ADE je jednakokraki.

653. Na osnovu pretpostavke dobija se da je $\angle DCA = \angle DAC = 35°$, odatle je $AD = DC$.

654. Treći ugao trougla je $72°$, a ugao između simetrala je $126°$.

655. Bez uputstva.

656. Neka je AD visina a AE simetrala ugla α. Tada je
$\angle BAE = \frac{\alpha}{2}, \angle BAD = 90° - \beta, \angle DAE = \frac{\alpha}{2} - (90° - \beta) = \frac{\beta - \gamma}{2}$.

657. Bez uputstva.

658. Neka je $AD = t_a$. Iz trouglova ACD i ABD imamo $b < t_a + \frac{a}{2}$ i
$c < t_a + \frac{a}{2}$. Njihov zbir daje $b + c < 2t_a + a \Leftrightarrow$
(1) $\frac{b + c - a}{2} < t_a$. Neka je $AE = 2t_a$, tada je
$AE < BE + AB$, $(BE = AC)$, $2t_a < \frac{b + c}{2} \Leftrightarrow$ (2) $t_a < \frac{b + c}{2}$.
Iz (1) i (2) sledi tvrđenje.

659. Neka je AD težišna duž a AD visina ($\angle A = 90°$), tada je trougao AOB jednakokraki, $\angle OAB = \beta$, a $\angle BAD = \gamma$, dakle: $\angle DAO = \beta - \gamma$.

660. $\beta = 60°$.

661. Neka je duž $NP \parallel AC, P \in AB$; tada je $\Delta CMN \cong \Delta NPB$, odakle sledi tvrđenje.

662. Neka su a, b i c dužine stranica trougla ABC. Poznato je da je ma koja stranica trougla manja od zbira ostalih dveju stranica, pa je $a < b + c$. Odavde sledi niz ekvivalencija:

$a+a<a+b+c \Leftrightarrow 2a<a+b+c \Leftrightarrow a<\frac{a+b+c}{2}$,

čime je tvrđenje dokazano.

663. Kako je kateta pravouglog trougla manja od hipotenuze, biće $h_a<c, h_b<a, h_c<b$. Odavde sledi da je $h_a+h_b+h_c<a+b+c$.

664. Ako je $a<b<c$, tada je $a<b$, $a<c$ i $a=a$, pa je $3a<a+b+c$ itd.

665. Iskoristiti da je $t_a>c-\frac{a}{2}; t_b>a-\frac{b}{2}; t_c>b-\frac{c}{2}$ itd.

667. Ako su M, N, P, Q redom središta stranica AB, BC, CD i AD romba $ABCD$, tada je $MN=\frac{1}{2}AC$, $PQ=\frac{1}{2}AC$ i $PN=\frac{1}{2}BD$, $MQ=\frac{1}{2}BD$ (zadatak 438). Odavde na osnovu tranzitivnosti jednakosti sledi da je $MN=PQ$ i $PN=MQ$ itd.

667. Iskoristi uputstvo prethodnog zadatka.

668. Analogno prethodnom zadatku.

669. b) Težišna duž AA' trougla deli ugao α na uglove α_1 i α_2 ($\alpha_1+\alpha_2=\alpha$). Takođe je $BA'=A'C=\frac{BC}{2}$.

Iz $\Delta ABA'$, s obzirom na pretpostavku $AA'<\frac{BC}{2}$, sledi da je $AA'<BA' \Rightarrow \beta<\alpha$, a iz $\Delta AA'C$ je $AA'<A'C \Leftrightarrow \gamma<\alpha$. Odavde je $\beta+\gamma<\alpha_1+\alpha_2=\alpha$, tj. $\beta+\gamma<\alpha$. Ako uzmemo u obzir $\alpha+\beta+\gamma=180°$, tada je $\alpha+\alpha<180° \Leftrightarrow 2\alpha<180°, \alpha<90°$, što je trebalo dokazati.

670. Trouglovi ASM i BSN su jednakokraki (zašto?) itd.

673. Neka je $NC=NB$, prava DN seče produžetak stranice AB u tački E, $\Delta NCD \cong \Delta NBE$ itd.

674. Ako je $D' \in AB$ i $C' \in AB$, tako da je $DD' \perp AB$ i $CC' \perp AB$ tada je $\Delta ACC' \cong \Delta BDB'$ itd.

676. Tangentne duži konstruisane iz tačke na kružnici jednake su, tj. $AM=AN, BM=BP$ i $CP=SN$. Obim trougla $AB+BC+CA=AB+BP+PC+CA=AB+BM+NC+CA=AM+AN=2AM$, čime je dokaz završen.

680. Četvrti ugao tog četvorougla jednak je:
$360-(75°+105°+100°)=360°-280°=80°$.
Kako su uglovi 75° i 105°, 100° i 80° suplementni, pomenuti četvorougao je tetivni, tj. može se opisati kružnica.

681. 20°; 60°; 100°.

683. Neka je poluprava $Bx \perp b$, a s simetrala duži AB. Središte tražene kružnice nalazi se u preseku poluprave Bx i simetrale s, tj. $Bx \cap s=\{O\}$ itd.

684. Bez uputstva.

685. Središte kružnice određeno je u preseku normale u datoj tački i simetrale ugla koji zahvataju date prave itd.

686. Bez uputstva.

687. Konstruišimo tangentu Bt kružnice $K(O,R)$, gde je R dati poluprečnik, zatim tetivu BC, koja sa tangentom Bt gradi dati ugao α, i na kraju tetivu BA, koja gradi dati ugao β sa BC itd.

689. a) Konstruišimo skup tačaka l na rastojanju R od date prave h, a zatim kružnicu $K_1(0, r+R)$. Ako je:
a) $K_1 \cap l=\{O_1, O_2\}$, O_1 i O_2 su središta traženih kružnica – zadatak ima dva rešenja;
b) $K_1 \cap l=\{O_1\}$, O_1 je središte tražene kružnice – zadatak ima jedno rešenje;
c) $K_1 \cap l=\varnothing$ – zadatak nema rešenja.

690. Vidi poznatu teoremu u udžbeniku.

691. Konstruiši skup tačaka iz kojih se data duž vidi pod datim uglom.

692. Data stranica trougla se vidi pod datim uglom itd.

693. Vidi uputstva za prethodne zadatke.

694. Vidi uputstvo prethodnog zadatka.

695. Vidi uputstvo prethodnog zadatka.

696. Obim trougla $a+b+c$ se vidi iz temena pravog ugla pod uglom 135°, dalje kao prethodni zadaci.

697. Neka je prava t tangenta kružnice K u tački M. Središte tražene kružnice je presek simetrale s ugla (t, p) i poluprave OM itd.

698. Tačke N i N_1 pripadaju pravoj OM i simetrične su u odnosu na tačku M, tako da je $MN = R_1$. Središte tražene kružnice je presek prave OM i simetrale duži O_1N, odnosno duži O_1N_1 itd.

699. Središte tražene kružnice je presek kružnica $L(O, R+r)$ i $L_1(O_1, R_1+r)$.

701. Konstruiše se skup tačaka k iz kojeg se data stranica trougla vidi pod datim uglom, a zatim prava l paralelna sa datom stranicom, na odstojanju jednakom datoj visini od date stranice. Treće teme trougla je u preseku kružnice k i prave l. Ako je $k \cap l = \{C, C_1\}$, zadatak ima dva rešenja. Ako je $k \cap l = \{C\}$, zadatak ima jedno rešenje. Ako je $k \cap l = \varnothing$, zadatak nema rešenja.

705. Neka je $AA_1 = t_a$. Iz trougla AA_1B sledi da je: $t_a < c + \frac{a}{2}$, a iz trougla AA_1C da je: $t_a < b + \frac{a}{2}$.

Ako se uzme zbir ovih nejednakosti, dobija se tvrđenje.

707. Neka simetrala s katete BC seče ovu katetu u tački E, a hipotenuzu u tački M. Kako je $MB = MC$, to je $\gamma = \delta$, pa je $MC = MB$ (sl. 50). Pošto je $\varepsilon + \delta = 90°$, i $\alpha + \gamma = 90°$, i $\gamma = \delta$ to je $\alpha = \varepsilon$, pa je $MA = MB$. Odatle sledi da je $MA = MC = MB$, što je trebalo dokazati.

712. $\alpha = 15°$.

713. $\alpha = 75°$, $\beta = 105°$.

714. $\alpha = 54°$.

715. $\alpha = 120°$.

716. $\beta = 41°$.

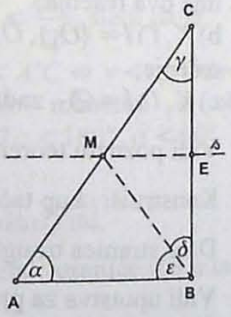
717. 28° i 46°.

719. 11 cm ili 21 cm.

720. Nema uputstva.

721. Nema uputstva.

722. Nema uputstva.



Sl 50

723. Visina trougla $a = x + R$. Iz pravouglog trougla OAD dobija se da je:

$$x^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2,$$

gde je O centar opisane kružnice, a D središte osnovice trougla. Ako se eliminiše x iz prethodnih jednačina, dobija se tvrđenje.

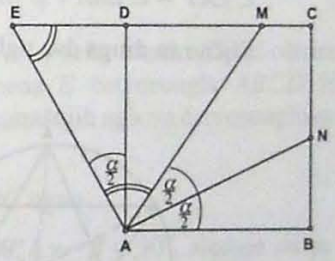
725. Iskoristiti osobinu srednje linije trapeza.

726. $\alpha = 45°$, $\beta = 67°30'$, $\gamma = 90°$ i $\delta = 157°30'$.

727. Neka je $AM \cap BC = \{K\}$. Ugao AKB je spoljašnji ugao trougla ACK, pa je $\angle AKB > \angle ACK$. Na isti način je $\angle AMB > \angle AKB$. Na osnovu ove dve nejednakosti sledi nejednakost $\angle AMB > \angle ACB$.

728. Odrediti na pravoj DC, iza D u odnosu na C, tačku E tako da je $ED = NB$ (sl. 51). Trougao ABN podudaran je trouglu ADE, pa je $\angle BAN = \angle EAD = \frac{\alpha}{2}$.

Ugao $MAE = \angle EAD = 90° - \frac{\alpha}{2}$, pa je $MA = ME = DM + DE = DM + NB$.



Sl. 51

729. $\angle CAB = \angle DCA$, kao naizmenični. $\angle CAB = \angle CAB_1$, Jer je prava AB_1 simetrična sa pravom AB u odnosu na CA. Dakle, $\angle DCA = \angle CAB_1$, pa je trougao AEC jednakokrak ($AE = EC$). Dalje je $CB_1 = CB = DA$ i $\angle DEA = \angle CEB_1$, kao unakrsni, pa je trougao ADE podudaran sa trouglom CB_1E.

730. Stranica AB je zajednička hipotenuza pravouglih trouglova ABM i ABN. Tačke A, B, M i pripadaju kružnici k sa centrom u tački O, koja je središte duži AB itd.

732. Neka je EFD dobijeni trougao (sl. 52),

tada je ugao $EDF = \frac{1}{2}\angle EOF =$

$= \frac{1}{2}(180° - \alpha) = 90° - \frac{\alpha}{2}$.

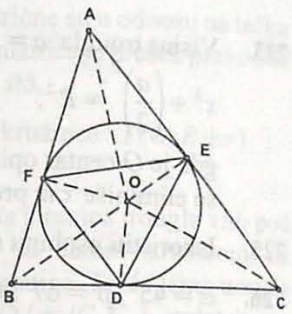
Ugao $DEF = \frac{1}{2}\angle DOF =$

$\frac{1}{2}(180°-\beta) = 90-\frac{\beta}{2}.$

Ugao $EFD = \frac{1}{2}\angle EOD =$

$= \frac{1}{2}(180°-\gamma) = 90°-\frac{\gamma}{2}.$

(Primedba. Periferijski ugao jednak je polovini centralnog nad istom tetivom).

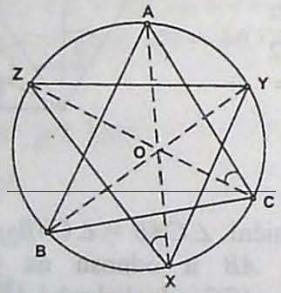


Sl. 52

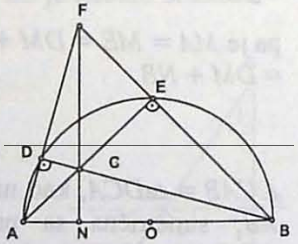
733. Na osnovu primedbe u prethodnom zadatku imamo da je $\angle ZXA = \angle ZCA = \frac{1}{2}\gamma$, $\angle ABY = \angle YXA = \frac{\beta}{2}$ (sl. 53), pa je

$\angle ZXY = \angle ZXA + \angle AXY = \frac{\gamma+\beta}{2} = \frac{180°-\alpha}{2} = 90°-\frac{\alpha}{2}.$

Slično za druga dva ugla.



Sl. 53



Sl. 54

734. Neka su D, E i F dodirne tačke, i to: B–D–C, C–E–A, A–F–B. Tada je $BD = BF$, $CD = CE$, $AE = AF$ (tangentne duži), dalje je
$BC - AB = BD + CD - BF - AF =$
$= BD + CE - BD - AE = CE - AE$, što je trebalo dokazati.

735. Uglovi ABD i AEB su pravi (sl. 54). Prema tome, AE i BD su visine trougla ABF, FN je treća visina, tj. $FG \perp AB$.

736. Uglovi: APB, BPC i CPD su međusobno jednaki, kao periferijski nad jednakim tetivama itd.

737. Neka je M tačka preseka stranica AB i DC, trouglovi BMC i AMC su jednakokraki, izračunati njihove uglove itd.

738. $\varphi = 60°$.

739. Bez uputstva.

740. Neka je dodirna tačka proizvoljne tangente; tada je $\angle AOC = \angle COE = \alpha$ i $\angle BOD = \angle DOE = \beta$ (zašto?). Tada je

$\angle COD = \alpha + \beta = \frac{2\alpha+2\beta}{2} = \frac{180°}{2} = 90°.$

742. Neka je E presečna tačka simetrale unutrašnjih uglova α i β četvorougla $ABCD$. Iskoristiti teoremu o zbiru unutrašnjih uglova trougla AEB i četvorougla $ABCD$ itd.

743. Neka se simetrale unutrašnjih uglova α i γ seku u tački E pod oštrim uglom x. Unutrašnji ugao kod temena E četvorougla $ABCD$ je $180°-x$. Iskoristiti teoremu o zbiru unutrašnjih uglova četvorouglova $ABCD$ i $AECD$ itd.

745. Simetrala ugla α gradi sa stranicom BC ugao $x = \beta + \frac{\alpha}{2}$. Iz sistema $\alpha+\beta+\gamma = 180° \wedge \gamma-\beta = 90°$, sleduje da je $\alpha + 2\gamma = 270°$, $\frac{\alpha}{2}+\gamma = 135°$. Iz jednačine $x+\gamma+\frac{\alpha}{2} = 180°$ proizlazi da je $x = 180°-135° = 45°$.

746. $30°, 150°$.

747. $60°, 30°$.

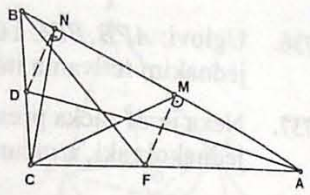
748. Iz podudarnosti trouglova ABF i COF sledi da je trougao AFC jednakokrako pravougli, pa je ugao $45°$.

749. $72°, 36°$.

750. $60°$.

751. $88°, 92°$.

752. Primenom podudarnosti trouglova imamo:
iz podudarnosti trouglova BCF i BMF sledi $BC = BM$.
Iz podudarnosti trouglova ACD i AND sledi $AC = AN$.
Trouglovi BCM i ACN su jednakokraki (sl. 55).



Sl. 55

Iz trougla BCM sledi ugao $M = \frac{180°-\beta}{2}$,

a iz trougla ACN sledi da je ugao $N = \frac{180°-\alpha}{2}$.

Odatle proizlazi da je ugao $MCN = \frac{\alpha+\beta}{2} = 45°$.

753. Iz podudarnosti trouglova ABG i AEC sledi da je $BG = EC$, odatle $\angle ABG = \angle CEA = \varphi$. Iz trougla
$BHE \Rightarrow \angle H + 45° + \varphi + 45° - \varphi = 180° \Leftrightarrow \angle H = 90° \Leftrightarrow BG \perp CE$.

754. 144°.

755. Osmougao.

756. 180°.

757. 170 dijagonala.

758. $\frac{360°}{n} - \frac{360°}{n+2} = 6° \Leftrightarrow n(n+2) = 120° \Leftrightarrow n(n+2) = 10 \cdot 12 \Leftrightarrow$
$n = 10 \vee n+2 = 12 \Leftrightarrow n = 10$; 35 dijagonala.

759. 27.

760. $s_{n+5} - s_n = (n-2+5)180° - (n-2)180° = 900°$.

761. 31 500°.

762. 45°.

763. $t = 8$.

765. $AD = AE + DE = 8 + 10 = 18$. ($BE^2 = 80, BE^2 = ED \cdot AE$, $ED = 10$).

766. Kako je $\Delta BA_1B_1 \cong \Delta CB_1C_1$ (SUS), odatle sledi da je $A_1B_1 = B_1C_1$ itd.

767. Iskoristiti teoremu o uglu između tangente i tetive i teoremu o transferzalnim uglovima.

768. Četvorougao $ABMN$ je tetivni, pa je ugao $MNB = 180° - \alpha$, tj. ugao $MNC = \alpha$, ugao $tCB = \alpha$ (ugao između tangente i tetive). Kako je $\angle MNC = \angle NCt = \alpha$, dakle naizmenični uglovi su jednaki, prave MN i t su paralelne.

769. Neka je $AD \cap BC = \{S\}$ i $\angle ASB = 90°$, to je:
(1) $AC^2 = AS^2 + CS^2$
(2) $BC^2 = BS^2 + DS^2$
(3) $AB^2 = AS^2 + BS^2$
(4) $DC^2 = DS^2 + CS^2$.
Zbir (1) i (2) je $AC^2 + BC^2 = AS^2 + CS^2 + BS^2 + DS^2$,
a zbir (3) i (4) $AB^2 + DC^2 = AS^2 + BS^2 + DS^2 + CS^2$.
Odatle je $AC^2 + BC^2 = AB^2 + DC^2$; čime je dokaz završen.

770. Kako je $\angle CPD = \angle APD = \angle PDC$ to jo $PC = CD = 2BC$, pa je $\angle BPC = 30°$. Traženi ugao je $\angle APD = 75°$.

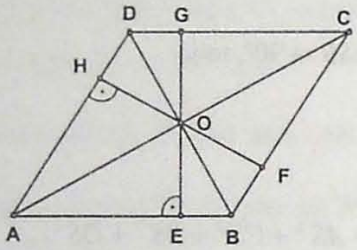
771. a) Trouglovi BCM i CDN su podudarni, pa je $\angle MBC = \angle NCD$. Kako je $\angle NCD + \angle NCB = 90°$, to je $\angle MBC + \angle NCB = 90°$, odatle $\angle BEC = 90°$.
b) Četvorougao $ABEN$ je tetivni, pa je $\angle AEB = \angle ANB$. Kako je $\angle ANB = \angle CMB = \angle MBA$, to je trougao ABE jednakokraki.

772. Trouglovi BEC i DCF su podudarni. Iz podudarnosti sledi da je $\angle BEC = \angle DCF$ i $\angle BCE = \angle DFC$ i $\angle EBC = \angle BCD$ (naizmenični). U trouglu BEC je : $\angle BEC + \angle BCE + \angle BCD = 180°$ ili $\angle DCF + \angle BCE + \angle BCD = 180°$. Znači duži EC i CF pripadaju jednoj pravoj.

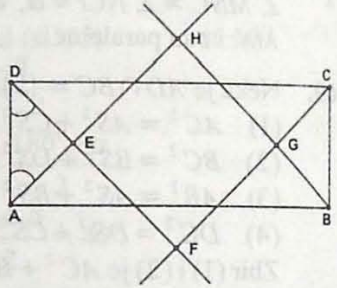
773. Neka je tačka M na simetrali datog ugla i $BM \| Ax (B \in Ay)$ i $CM \| Ay (C \in Ax)$. Prema tome, četvorougao $ACMB$ je paralelogram pa je $BM = AC, CM = AB$. Trougao AMC je jednakokraki (zašto?) pa je $CA = MC = MB = AB$, čime je dokaz završen.

774. Neka je $OE \perp AB$ i $OG \perp CD$ (sl. 56), to OE i OG pripadaju jednoj pravoj, takođe OF i OH pripadaju jednoj pravoj. Sem toga je $OE = OF = OG = OH$ jer su to visine podudarnih trouglova: AOB, BOC, COD, AOD. Prema tome, dijagonale EG i FH četvorougla $EFGH$ su jednake i uzajamno se polove, pa je taj četvorougao pravougaonik.

775. Kako je svaki od uglova EAD, EDA jednak po $45°$, ugao $AED = 90°$. S druge strane $DE \,||\, BG$ i $AE \,||\, CG$ tj. četvorougao $EFGH$ je pravougli paralelogram. Međutim $GF = CF - CG$, $EF = DF - DE$, pošto je $CF = DF$ i $CG = DF$ to je $GF = EF$, tj. četvorougao $EFGH$ je kvadrat (sl. 57), itd.



Sl. 56



Sl. 57

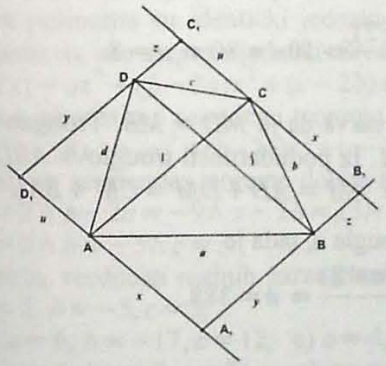
776. Neka je u trapezu $ABCD, CD < AB$ i $CD = AD + BC$. Odredimo tačku E tako da je $D - E - C \wedge DE = DA$, tada je $CE = CB$. Trouglovi ADE i BCE su jednakokraki.
Odatle je $\angle DAE = \angle DEA, \angle CBE = \angle CEB$.
Kako je $CD \,||\, AB$, to je $\angle DEA = \angle BAE, \angle CEB = \angle EAB$.
Odatle proizilazi da je $\angle DAE = \angle BAE$ i $\angle CEB = \angle EAB$, tj. prave AE i BE su simetrale uglova A i B na osnovici trapeza.

777. Vidi dokaz u prethodnom zadatku.

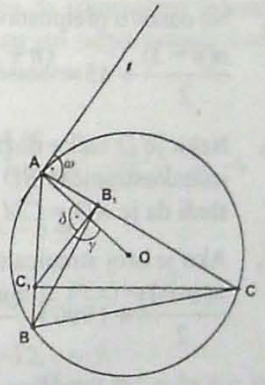
778. U datom konveksnom četvorouglu $ABCD$ neka su dijagonale $AC = l, BD = f$, treba dokazati da je $l + f > a + c$ ili $l + f > b + d$.
Neka su: $A_1B_1 \,||\, AC$ i $C_1D_1 \,||\, AC, D \in D_1C_1, B \in A_1B_1$ a $B_1C_1 \,||\, BD$ i $A_1D_1 \,||\, BD, B \in AA_1B_1, D \in C_1D_1$ (sl. 58).
Iz odgovarajućih paralelograma sledi da je:
$AA_1 = B_1C = x; A_1B = D_1D = y; BB_1 = DC_1 = z; AD_1 = CC_1 = u$.
Iz trouglova $AA_1B, BB_1C, CC_1D, ADD_1$ sledi redom:
$x + y > a, x + z > b, z + u > c, y + u > d$.
Zbirovi prve i treće nejednačine, zatim druge i četvrte su:
(1) $x + y + z + u > a + c$
(2) $x + y + z + u > b + d$.
Kako je $y + z = l, x + u = f$ (1) i (2) postaju
(3) $l + f > a + c$ i $l + f > b + d$,
što je trebalo dokazati.

779. Ako iskoristimo oznake i sliku prethodnog zadatka imamo:
$l < a + b, l < c + d, f < b + c, f < a + d$, njihov zbir je
$2l + 2f < 2a + 2b + 2c + 2d$ ili
(4) $l + f < a + b + c + d$.
S druge strane, zbir (3) iz prethodnog zadatka $2l + 2f > a + b + c + d$ ili
(5) $\dfrac{a + b + c + d}{2} < l + f$.
Iz (4) i (5) imamo
$\dfrac{a + b + c + d}{2} < l + f < a + b + c + d$, što je i trebalo dokazati.

780. Ako su unutrašnji uglovi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ a spoljašnji $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$ tada je $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360° \Leftrightarrow \gamma + \delta = 180° - \alpha + 180° - \beta$.
Kako je $\alpha_1 = 180° - \alpha, \beta_1 = 180° - \beta$, dobijamo neposredno da je $\gamma + \delta = \alpha_1 + \beta_1$. Kraj dokaza.



Sl 58



Sl. 59

781. Neka je At tangenta u tački A kružnice opisane oko trougla ABC. Kako je četvorougao BCB_1C_1 tetivni (sl.59) to je $\beta + \varphi = 180°$, sa druge strane, $\varphi + \delta = 180°$, pa je $\beta = \delta$. Kako je $\beta = \omega$ (zašto?) sledi da je $\delta = \omega$. Dakle, $At \,||\, C_1B_1$, $(OA \perp At)$, što je trebalo dokazati.

782. Neka je ugao pri vrhu α a uglovi na osnovici β i γ $(\beta = \gamma)$, tada je $\beta = \gamma = 2\alpha$, pa je $\alpha + \beta + \gamma = 5\alpha = 180° \Rightarrow \alpha = 36°, \beta = \gamma = 72°$.
Centralni ugao $BOC = 72°$. Manji luk BC je petina kružne linije a tetiva BC stranica pravilnog petougla.

783. Kako je $a = R\sqrt{2}, b = R\sqrt{3}$, odatle je $\frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{b}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{2}{3}$.

783. Neka je u ΔABC, $\angle C = 90°$, $CD = DB$, $BE = p$, $AE = q$, tada je $p^2 = BD^2 - DE^2, q^2 = AD^2 - DE^2$.
Njihova razlika $p^2 - q^2 = AD^2 - BD^2 = AD^2 - CD^2 = AC^2$.

784. a) Na osnovu pretpostavke imamo
$\frac{n(n-3)}{2} = 1710 \Leftrightarrow n(n-3) = 3420 \Leftrightarrow n(n-3) = 60 \cdot 57 \Leftrightarrow n = 60$.
Dakle, mnogougao ima 60 stranica.
b) Nema rešenja.

786. Neka su x, y, z tangentne duži konstruisane iz temena A, B, C. Tada je $(x+z)^2 + (y+z)^2 = (x+y)^2 \Leftrightarrow xz + yz + z^2 = xy \Leftrightarrow$
$xz + xy + yz + z^2 = 2xy \Leftrightarrow (y+z)(x+z) = 2xy$. Kraj dokaza.

785. Na osnovu pretpostavke je
$\frac{n(n-3)}{2} + 45 = \frac{(n+5)(n+2)}{2} \Leftrightarrow 10n = 80 \Leftrightarrow n = 8$.

786. Neka je D tačka duži AM takva da je $MD = MB$. Trougao BMD je jednakostraničan $BD = BM$. Iz podudarnosti trouglova ABD i BMC sledi da je $AD = CM$, pa je $AM = AD + DM = CM + BM$.

787. Ako je broj stranica mnogougla n, tada je
$\frac{n(n-3)}{2} + 1990 = \frac{(n+5)(n+2)}{2} \Leftrightarrow n = 388$.

790. Kako je $\frac{n(n-3)}{2} = 8n \Leftrightarrow n = 19$. Pa je $(19-2)180° = 3060°$.

VI GLAVA

6. RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI

6.1. Polinomi i operacije sa njima

791. $1 - 2x + 4x^2 + 5x^3$.

792. a) $3x^2 + 6x + 3$; b) $x^4 - x^3 + x^2 - 1 + 1$.

793. $11 + 10x + 4x^2 + 9x^3$.

794. $2x^4 + 3x^3 - 13x^2 + 13x - 11$.

795. a) $x^3 + 3x^2 + x$; b) $x^3 + x^2 - x - 2$; c) $x^5 + 3x^4 + x^2 - x + 1$.

796. a) $-9x^2 + 3$; e) $29x^2 + 21x - 26$.

797. $P(x) = 3 - x^2$.

798. a) Za određivanje koeficijenata a, b, c treba da iskoristimo teoremu: dva polinoma su identički jednaka ako su im odgovarajući koeficijenti uz iste stepene jednaki. Sređeni polinom
$Q(x) = ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c$.
Ako iskoristimo navedenu teoremu dobija se:
$P(x) = Q(x) \Leftrightarrow ax^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c = 2x^3 - 9x^2 + 13x - 6$.
Daljom primenom teoreme dobija se:
$a = 2 \wedge b - 2a = -9 \wedge x - 2b = 13 \wedge -2c = -6 \Leftrightarrow$
$a = 2 \wedge b = -5 \wedge c = 3$.
Dakle, vrednosti realnih parametara za koje je $P(x) = Q(x)$su
$a = 2, b = -5, c = 3$;
b) $a = 6, b = -17, c = 12$; c) $a = 4, b = -12, c = 5$;
d) $a = 1, b = -3, c = 3$; e) ne postoji polinom $ax^2 + bx + c$ koji zadovoljava postavljeni uslov.

799. a) $x - 1$; b) $3x - 5$; c) $2x^2 + 3x + 4$; d) $2x - 1$.

800. a) $a - b$; b) $a^2 - ab + b^2$; c) $a - b$; d) $x - 1$.

801. a) $a = 1$; b) $a = 0{,}5$.

802. a) $a = -2, b = -5, c = 6$; b) $a = -7, b = 1, c = 6$.

803. Ostatak $r = p(1) = 1$, (Bezuov stav).

804. $r = p(-2) = 255$.

805. $r = p\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{39}{16}$.

806. $r = p\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{175}{8}$.

807. Ostatak deljenja polinoma $P(x)$ sa $f(x)$ je linearni polinom $r(x) = ax + b$, tj.

$$(1)\ \frac{P(x)}{f(x)} = Q(x) + \frac{r(x)}{f(x)} \Leftrightarrow P(x) = Q(x)f(x) + ax + b.$$

Za date polinome dobija se
$P(x) = Q(x)(x-3)(x-1) + ax + b$. Kako je $P(3) = -1$ a $P(1) = -3$, tada iz (1) imamo $3a + b = -1 \wedge a + b = -3$. Odavde je $a = 1$, $b = -4$, $r(x) = x - 4$.

808. $r = 2$.

809. $r(x) = 5$.

810. Kako je
(1) $p(x) = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$.
Primenom Bezuovog stava $P(1) = 5$, $P(-1) = 3$. Za $x = 1$ i $x = -1$ iz (1) sledi $a + b = 5 \wedge -a + b = 3$. Odatle je $a = 1$, $b = 4$. Dakle, ostatak delenja $P(x)$ sa $x^2 - 1$ je $r(x) = x + 4$.

811. $r(x) = 3x + 3$.

812. Primeni Bezuov stav, $m = -1$.

813. $m_1 = 5 \vee m_2 = 1$.

814. $r = p(1) = 0 \Leftrightarrow -n^3 + 4n^2 - 3n = 0 \Leftrightarrow -n(n-1)(n-3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n_1 = 0 \vee n_2 = 1 \vee n_3 = 3$.

815. $a = 3$, $b = 0$.

816. $a = -31$, $b = 71$, $c = -42$.

817. $m = 6$.

818. Iz identiteta
$6x^5 + mx^4 + 27x^3 + nx^2 - 5x + 6 = (3x^2 - 5x + 6)(ax^3 + bx^2 + cx + d)$
proizlazi da je $a = 2$, $b = -3$, $c = 0$, $d = 1$, $m = -19$ i $n = -15$.
Količnik $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

819. $m = -14$, $n = 24$, $Q(x) = x^2 + 3x - 4$.

820. $m = 0$, $n = 1$, $Q(x) = x^2 + 1$ ili $m = 0$, $n = -4$, $Q(x) = x^2 - 4$.

821. $m = -4$, $n = 4$, $Q(x) = x - 3$.

822. $m = 7$, $n = 1$, $Q(x) = x^2 + 3x + 7$.

6.2. Rastavljanje polinoma na činioce

824. a) $4x^2 + 12xy + 9y^2$;
c) $((a+b)+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$;
d) $(a-(b+c))^2 = a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc$;
h) $2a^2 + 2ab\sqrt{6} + 3b^2$.

825. a) $x^3 + 6x^2 + 12x + 8$; b) $8x^3 - 36x^2y + 5xy^2 - 81y^3$.

826. a) $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$; d) $x^2 - 4mx + 4m^2 = (x-2m)^2$;
e) $a^2 + \frac{4}{5}a + \frac{4}{25}$; f) $a^2 + 2\sqrt{5}a + 5 = (a+\sqrt{5})^2$;
g) $1 - 4p + p^2 = (1-2p)^2$; h) $a^2 - ab + \frac{b^2}{4} = (a - \frac{b}{2})^2$;
k) $x^4 + y^6 2x^4y^3 = (x^2 + y^3)^2$; l) $a^2 + 0{,}25 - a = (a - 0{,}5)^2$.

827. a) $(x-1)(x+1)$; c) $(4-a)(4+a)$; e) $(3a-1)(3a+1)$;
f) $(3x-\sqrt{3})(3x+\sqrt{3})$; g) $(x^2y - 0{,}1)(x^2y + 0{,}1)$;
h) $(0{,}5xy - 0{,}01)\cdot(0{,}5xy + 0{,}01)$.

828. a) $\left(\frac{1}{2}a - \frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{3}b\right)$; b) $\left(\frac{4}{5}x - \frac{3}{4}y^2\right)\left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{4}y^2\right)$;
d) $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - a\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + a\right)\left(\frac{1}{2} + a^2\right)\left(\frac{1}{4} + a^4\right)$;
g) $(a-b)(a+b)(a^2+b^2)$.

829. a) $(a+b-c)(a+b+c)$; c) $(x-2y-3z)(x-2y+3z)$;
d) $(a-5b-ab)(a-5b+ab)$; f) $(1-2x+5y^2)(1+2x-5y^2)$.

830. a) $(2a+b-x-3y)(2a+2b+x+3y)$;
b) $(4a-2b+1)(-2b-1)$;
c) $8x(3y-x)$;
d) $(2a+2b+c-5)(2a+2b-c+5)$.

831. a) $(3a-2b)(3a+2b)(9a^2+4b^2)$;
b) $\left(\frac{1}{3}xy - 5\right)\left(\frac{1}{3}xy + 5\right)\left(\frac{1}{9}x^2y^2 + 25\right)$;
d) $(x-3)(x+2)$;
e) $\left(2x - \frac{11}{15}\right)\left(2x + \frac{1}{15}\right)$;

f) $\left(x-\frac{5}{3}\right)(x-1)$.

832. a) $(x-1)(x^2+x+1)$; c) $(1-3a)(1+3a+9a^2)$;
d) $(4a-b^2)(16a^2+4ab^2+b^4)$;
f) $(10a-0{,}1b)(100a^2+ab+0{,}01b^2)$.

833. $(x+2)(x^2-2x+4)$;
d) $\left(3+\frac{1}{2}y\right)\left(9-\frac{3}{2}y+\frac{1}{4}y^2\right)$;
e) $(1+0{,}1x)(1-0{,}1x+0{,}01x^2)$; g) $(a+12)(a^2+3a-1)$.

834. a) $(2x+1)^2$; b) $(0{,}1x+5y)^2$; c) $(a+0{,}5)^2$;
d) $(y-z)^2$; e) $(a^2-4c)^2$; h) $\left(\frac{3m}{2}+2\right)^2$.

835. a) $(a-2b)^3$; b) $(3x+y)^3$; c) $(1+5m)^3$;
d) $(2x-1)^3$; e) $\left(\frac{1}{3}+a^2\right)^3$; f) $(3m-4n)^3$.

836. a) $a(a-b)$; b) $6a^3(2a^2+3)$; c) $mr(1-m)$;
d) $2a^n(a+3)$; e) $a^m x(a^n-1)$; f) $5a^n+1(a^n+2-3)$.

837. a) $4a(b+3c-2d)$; b) $(a+b)(2+x)$;
c) $3a^2b(3ab-2+4b^2)$; d) $(x+1)(a-b)$.

838. a) $(x+y)(3+a)$; b) $(m+n)(x-y)$;
c) $(c+d)(a-p)$; d) $(a^2+b^2)(x+y)$;
e) $(x-3)(b+c-1)$; f) $(x+y+1)(p-q+r)$.

839. a) $(a+4)(a+4)$; b) $(a-b)(a^2+2b^2)$;
c) $(x-3)(x^2+3)$; d) $(2a+b)(2a+c)$.

840. a) $(2a-3c)(7b-5a)$; b) $(a+b)(z^2+z+1)$;
c) $2xy^3(2x^2+1)(4xz^2-3y)$; d) $a(a+b)(a-c)$;
e) $(x+y)(a^2-a+1)$; f) $(a+b+c)(x-1)x$.

841. a) $(x-1)(x-9)$; b) $(m+7)(m-1)$; c) $2(x+1)(x-6)$;
d) $(x+2)(x+5)$; e) $(a+6)(a-1)$; f) $(x-3)(x-8)$.

842. a) $(2x+1)(x-3)$; b) $(2x+5)(x-7)$; c) $(2a+1)(3a+4)$;
d) $(3y+2)(y+6)$; e) $(y+2)(a-1)$; f) $3(2b-1)(b-6)$.

843. a) $(a+b+c)(a+b-c)$; b) $(x-y-3)(x-y+3)$;
c) $(2-p+q)(2+p-q)$; d) $(4m-3x+2y)(4m+3x-2y)$;
e) $(ab-c-5)(ab-c+5)$; t) $(x-y-1)(x+y+1)$.

844. a) $(a-b)(a+b+1)$; b) $(x-y)(x+y-1)$;
c) $(2a-m)(2a+m-1)$; d) $(a+1)(a+2)(a-2)$.

845. a) $(x-y)(2-x+y)$; b) $(m+n+x-y)(m+n-x+y)$;
c) $(a-b)(x-a+b)$; d) $(3+a+b-c)(3+a-b+c)$.

846. a) $(7x+2)(x+3)(x-3)$; b) $(x-1)^2(x+1)$;
c) $(x-y)^2(x+y)$; d) $(y^2+1)(x-1)(x+1)$.

847. a) $(a+b)(b-2)(b+2)$;
b) $(x+2)(x-1)(x^2+x+1)$;
c) $(a-1)(a+1)^2(a^2-a+1)$;
d) $(x-1)(x+1)(p-q)(p^2qp+q^2)$.

848. a) $(x-1)(x+1)(x+3)(x^2-3x+9)$;
b) $(a-1)(a+1)(a^2-a+1)(a^2+a+1)$;
c) $(x-1)(y-1)(x^2+x+1)(y^2+y+1)$;
d) $(a+2)(b-1)(b+1)(a^2-2a+4)$.

849. a) $(x-y)(x-z)(z-y)$; b) $(b-4)(b-1)(b+3)$;
c) $(x-3)(x-4)$; d) $(x+1)(2a+4)$.

850. a) $5x^n(x-2)(x+2)$; b) $a^n b^n(b-2)(b+2)$;
c) $3x^{a+1}(x^{a+1}-3)(x^{a+1}+3)$; d) $4a^n(a^n-5)(a^n+5)$.

851. a) $x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-4x^2=$
$(x^2-2x+2)(x^2-2x+2)$;
b) $(x^2+2xy+2y^2)(x^2-2xy+2y^2)$;
c) $(a^2+ab+b^2)(a^2-2ab+b^2)$;
d) $1+x^2+x^4=(1+x^2)^2-x^2=(1-x+x^2)(1+x+x^2)$.

852. a) $x^5+x+1=x^5-x^2+x^2+x+1=x^2(x^3-1)+x^2+x+1=$
$=x^2(x-1)(x^2+x+1)+(x^2+x+1)=(x^2+x+1)(x^3-x^2+1)$;
b) $x^8+x^4+1=x^8+2x^4+1-x^4=$
$=(x^4-x^2)(x^4+x^2+1)=(x^4-x^2+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$

853. a) $(x-y)(x-z)(y-z)$; b) $((x+y+z)^3-x^3)-(y^3+z^3)=$
$=(x+y+z-x)((x+y+z)^2+x(x+y+z)+x^2)-$
$-(y+z)(y^2-yz-z^2)=$
$=(y+z)(3x^2+3xy+3xy+3xz+3yz)=3(y+z)(x+y)(x+z)$.

c) Neka je $x^2+5x=y$, tada je:
$y(y+10)+24=y^2+10y+24=(y+4)(y+6)=$
$(x^2+5x+4)(x^2+5x+6)=(x+1)(x+3)(x+4)(x+2)$.

854. Pošto su prosti činioci broja 12: $\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm6,\pm12$, treba odrediti koji činioc anulira dati polinom. Kako je $P(-1)=0$, to je $P(x)$ deljiv sa $x+1$. Količnik je $Q(x)=x^3-3x^2-4x+12$. Dakle, $P(x)=(x+1)(x^3-3x^2-4x+12)$. Ponovimo postupak za polinom $Q(x)$, $Q(2)=0$, polinom $Q(x)$ je deljiv sa $x-2$, odgovarajući količnik je x^2-x-6, pa je:
$P(x)=(x+1)(x-2)(x^2-x-6)=(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)$.

855. $P(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$.

856. $P(x)=(x+4)(x+2)(x-2)(x-3)$.

857. $P(x)=(x+3)(x+2)(x-2)(x-3)$.

858. $P(x)=(x+2)(x+1)(x-1)(x-2)(x-3)$.

859. $P(x)=(x+3)(x+2)(x-1)(x-2)(x-3)$.

860. $P(x)=(x-1)(x+1)(x+2)(x-3)(x+4)$.

864. Dati polinom $P(x)=x(x-1)(x^2+x+1)(x^8+1)+1$, pa je za $x>1$ i $x<0$ $P(x)>0$.
S druge strane, $P(x)=x^{12}+(1-x)(1+x^4(1+x+x^2+x^3+x^4))$, pa je za $0<x<1$ takođe $P(x)>0$, tj. polinom $P(x)$ je pozitivan za svako x.

865. Kako je $P(n)=(n^2-n+1)$, sledi da je $P(n)>0$ za svako n.

869. $\left(\frac{1}{2}-a-b^2\right)^2$.

870. $(x-1)(x+1)(x^2+1)(x^8+1)$ itd.

871. $(-a+b+c+d)(a-b+c+d)(a+b-c+d)(a+b+c-d)$.

872. $(x-1)(x+1)(y-1)(y+1)(z-1)(z+1)$.

873. $(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)+1-4x^2y^2=(x^2+y^2+1)^2-4x^2y^2=$
$=(x^2+y^2+1-2xy)(x^2+y^2+1+2xy)$.

874. $(a+1)^2(a^2+1)(a^2-a+1)$.

875. Smenom $x=ty$, dati polinom postaje
$y^4(t^4-7t^3+5t^2+31t-30)=y^4(t-1)(t-3)(t-5)(t+2)$, kako je $t=\frac{x}{y}$ činioci polinoma su $(x-y)(x-3y)(x-5y)(x+2y)$.

876. $(x+2)(x+4)(x^2+5x+8)$, (smena: $x^2+4x+8=t$).

877. $(x-1)(x+2)(x^2+x+5)$, (smena: $x^2+x+1=y$).

878. Množenjem krajnjih i srednjih činioca proizvoda dati polinom se svodi na oblik $(x^2+8x+7)(x^2+8x+15)+15$.
Smenom $x^2+8x+7=y$, postupno se dobijaju činioci datog polinoma $(x+2)(x+6)(x^2+8x+10)$.

879. $((x^2+1)+x)(x^3+(x^2+1))-1=$
$=x^3(x^2+1)+x^4+(x^2+1)^2+x(x^2+1)-1=$
$=(x^2+1)(x^3+2x^2+x)=x(x+1)^2(x^2+1)$.

880. $(6x^3+1)^2$.

881. $(2x+2b-a)^2$.

882. $(x+1)^2(x^2+1)+x^2=(x^2+1)^2+2x(x^2+1)+x^2=(x^2+1+x)^2$.

883. Smena, $a+\frac{1}{a}=t$, tada je $a^2+\frac{1}{a^2}=t^2-2$, dati polinom postaje,
$(3t-4)^2=\left(3\left(a+\frac{1}{a}\right)-4\right)^2$.

884. $(a^2+a+1)^2$.

885. $(x^2+x-1)^2$.

886. Dati polinom se svodi na oblik:
$(x^2+5ax+4a^2)(x^2+5ax+6a^2)+a^4=$
$=(x^2+5ax)^2+10a^2(x^2+5ax)+25a^4=(x^2+5ax+5a^2)^2$.

887. $a^2(a+1)^2=(a(a+1))^2$.

6.3. Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima

888. a) $\frac{2}{3a}$, $(a,b\neq0)$; b) $\frac{1}{2}$, $(a,b\neq0)$; c) $\frac{a}{3c}$, $(a,c\neq0)$.

889. a) $\frac{x+2}{2a}$, $(a\neq0,\ x\neq-2)$; b) $\frac{1}{2}$, $(x\neq0,\ a\neq-b)$;
d) -1, $(x\neq2)$; f) $\frac{m-3}{a}$, $(y\neq0,\ m\neq-3)$.

890. a) $-(a+1)$, $(a\neq1)$; b) $\frac{x-4}{y}$, $(y\neq0,\ x\neq4)$;

d) $\frac{a+b+2}{2}, (a+b+2\neq 0)$; e) $\frac{a-3}{b-1}, (a\neq -3)$.

891. a) $\frac{a+b}{3(a-b)}, (a\pm b)$; b) $\frac{1}{a^2-1}, (a\neq \pm 1, x\neq \pm 1)$;

d) $\frac{a(b+c)}{b}, (a,b\neq 0, b\neq c)$; e) $1, (x\neq \pm 1, a\neq \pm 1)$.

892. a) $\frac{a^n+b^n}{a^n-b^n}, (a\neq 0, a\neq b)$; b) $\frac{a^n-1}{a^n+1}, (b\neq 0, a\neq -1)$;

d) $\frac{1}{a(a-1)}, (a\neq 0, a\neq -1)$; e) $a^n(a-1), (a\neq 0, a\neq -1)$.

893. a) $\frac{x^4+x^2+1-x^2}{x^4+x^2+1+2x^3+2x^2+2x}=\frac{(x^2+1)^2-x^2}{(x^2+x+1)^2}=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$;

b) $\frac{a^4+a^2b^2+b^4+2a^2b^2-2a^3b-2ab^3}{(a^2+b^2)^2-(a-b)^2}=$

$=\frac{(a^2+b^2-ab)^2}{(a^2-ab+b^2)(a^2+ab+b^2)}=\frac{(a^2-ab+b^2)}{a^2+ab+b^2}$.

894. a) $\frac{a+b-c}{a-b+c}, (a+b+c\neq 0)$; b) $a+1, (a\neq \pm 1)$;

c) $\frac{a+b-2}{a-b+2}, (a+b\neq -2)$; d) $\frac{bc}{(b+c)^2-a^2}, \begin{pmatrix} a+b-c\neq 0 \\ a+c-b\neq 0 \end{pmatrix}$.

895. a) $\frac{x-3}{x-1}, (x\neq 2)$; b) $\frac{y-5}{y-1}, (y\neq -2)$; c) $\frac{x-3a}{x-b}, (x\neq a)$.

896. a) Ako je $x<3, |x-3|=-(x-3)$, onda je:

$\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}=\frac{(x-3)(-x+x+3)}{x(2x^2-6x+3x-9)}=\frac{3(x-3)}{x(x-3)(2x+3)}=$

$=\frac{3}{x(2x-3)}, (x\neq 3)$.

Ako je $x\geq 3, |x-3|=x-3$, onda je:

$\frac{x|x-3|+x^2-9}{2x^3-3x^2-9x}=\frac{(x-3)(2x+3)}{x(x-3)(2x+3)}=\frac{1}{x}, (x\neq 3, x\neq -\frac{3}{2})$;

b) $\frac{1}{a+1}$ za $a<2$; $\frac{1}{a+3}$ za $a\geq 2$;

c) $-\frac{1}{x}$, za $x<2$; $\frac{1}{x}$ za $x\geq 2$;

d) za $x<-1, -\frac{x+1}{x}$; za $x\in[-1,0]$ $\frac{x+1}{2-x}$; za $x>0$ $\frac{x+1}{x-2}$.

898. a) $\frac{a+2}{a-2}$ $(a\neq 0)$; b) $\frac{(x+y)^2}{x^2+xy+y^2}$.

899. a) $\frac{1}{1-y^2}$ $(xy\neq 0, x\neq \pm 1)$; b) $\frac{m^2-n^2}{a^2-b^2}$ $(x\neq \pm y)$.

900. a) $a-b$; b) $(x-a)(x-b)$ $(x\neq -a, x\neq -b)$.

901. $\frac{a+b-c-d}{a-b+c-d}$.

902. $\frac{a+b+c-d}{a-b-c-d}$.

903. $\frac{x+a-1}{x+b-1}$.

904. $\frac{a+b}{a-b}$.

905. $\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}, (a+b+c\neq 0)$.

906. $\frac{a+b+1}{a+b-1}$.

907. $(a+b+c+2)(a+b+c+1)$, (smena: $a+b+c=x$).

908. Na osnovu uslova zadatka dati razlomak je skraćen kvadratnim polinomom ax^2+bx+c zato važe identiteti:
$x^3+3x^2+x-5=(ax^2+bx+c)(x-1)$ i
$x^4+lx^3+mx^2+nx+p=(ax^2+bx+c)(x^2-4x+5)$, odakle se dobije: $a=1, b=4, c=5, l=0, m=-6, n=0$ i $p=25$.

909. Za $x<3, A=x+1$; za $x=3$; neodređen; za $x>3, A=x+3$.

910. Za $x<5, A=x+3$; za $x=5$, neodređen; za $x>5, A=x-1$.

911. Za $x<10, A=x+6$; za $x=10$, neodređen; za $x>10, A=x+12$.

912. $A=\dfrac{a+2}{a-2}$ $(a\neq\pm2)$.

913. a) $S=a(a-2)(a+2)$; b) $S=3(x-1)^2(x+1)$;
c) $S=(y+b)^2(a-b)$; d) $S=6y(y-1)(y+1)$.

914. a) $S=6a(a-5)^2(a+5)$; b) $S=3(a-1)(a+1)(a+3)$;
c) $S=5ab(a+b)(a-b)$; d) $S=-3(a-5)(a+5)$.

915. a) $S=xy(x+y)^2$; b) $S=18(m-n)^2(m+n)$;
c) $S=2(5a-1)^2(5a+1)^2$; d) $S=-5a(a^2+9)^2(a^2-9)$.

916. a) $S=-2(x-2)^2(x+2)$; b) $S=a(a+4)^3$;
c) $S=2(a^2+1)(a^2-1)$.

917. a) $S=-12(3a-5)^2(3+5)$; b) $S=10ay(y-1)^2(y+1)^2$;
c) $S=(2a+b)^2(2a-b)(4a^2-2ab+b^2)$.

918. a) $S=15nx^2(x-2)^2(x+2)^2$; b) $S=3x(2x-y)^2(2x+y)^2$;
c) $S=3abx(x+2)^2(x-2)^2$.

919. a) $\dfrac{1}{x}$; b) 1; c) $\dfrac{2m}{3}$; d) $\dfrac{x+1}{a}$; e) $\dfrac{6}{5-x}$.

920. a) $\dfrac{8a+11b}{3}$; b) $-\dfrac{4x+3y}{24}$; c) $\dfrac{3-2a}{12b^2}$, $(ab\neq0)$.

921. a) $\dfrac{2b}{a(a-b)}$, $(ab\neq0, a\neq\beta)$; b) $\dfrac{3b}{a^2-9b^2}$;
c) $\dfrac{1}{x+2}$, $(x\neq\pm2)$; d) 0, $(x\neq\pm1, x\neq0)$.

922. a) $\dfrac{x+1}{6(4x^2-1)}$, $\left(x\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$; b) $\dfrac{2x^2+5x-3}{(x-3)^2(x+3)}$, $(x\neq\pm3)$;
c) 0, $(a\neq\pm2)$; d) $\dfrac{51y-15}{2y(y^2-9)}$, $(y\neq0, y\neq\pm3)$.

923. a) -1, $(xy\neq0, x\neq y)$; b) $\dfrac{-a}{a+2}$, $(a\neq\pm2)$;
c) $\dfrac{2}{5-x}$, $(x\neq\pm5)$; d) $\dfrac{a-1}{a^2}$, $(a\neq1, a\neq0)$.

924. a) $\dfrac{2a^2}{a+b}$, $(ab\neq0, a\neq b)$; b) 1, $(ab\neq0, a\neq\pm b)$;
c) $\dfrac{11a+x}{6(a-x)}$, $(a\neq b, x\neq a)$.

925. a) 2, $(x\neq1)$; b) $\dfrac{9}{3x-1}$, $(x\neq\pm3, x\neq0)$;
c) $\dfrac{4x^2}{(x^2-25)^2}$; d) $\dfrac{12}{a-1}$, $(a\neq1)$.

926. a) $\dfrac{2x}{1-x}$, $(x\neq2)$; b) $\dfrac{2x+6}{x+5}$, $(x\neq3)$; c) $\dfrac{12}{x+7}$, $(x\neq-1)$.

927. a) $\dfrac{x}{y}$, $(2x-y\neq0, 2x+3y\neq0)$; b) $\dfrac{5x}{2-3x}$, $(x\neq\pm\dfrac{2}{3})$.

928. a) $6x$, $\left(x\neq\dfrac{1}{3}\right)$; b) $\dfrac{2(1-5x)}{1+5x}$, $\left(x\neq0, x\neq\pm\dfrac{1}{5}\right)$.

929. a) $\dfrac{6}{a+x}$, $(x\neq0, |x|\neq a)$; b) $\dfrac{2}{x+a}$, $(x\neq a)$.

930. a) $\dfrac{a}{a+x}$, $(a\neq\pm1)$; b) $a-b$, $(ab\neq0, a\neq b)$;
c) $\dfrac{3a^2}{x-1}$, $(x\neq\pm1, a\neq0)$; d) $\dfrac{3}{2}$, $(x\neq\pm y)$.

931. a) $\dfrac{2}{x-1}$, $(x\neq\pm1, a\neq0)$; b) $\dfrac{x+y+z}{b+c-a}$;
c) a, $(x\neq\pm1, x\neq\pm2, a\neq-1)$.

932. a) $\dfrac{4mn}{m^2-n^2}$; b) $-\dfrac{1}{2}$, $\left(x\neq-2 \text{ i } x\neq\dfrac{1}{2}\right)$;
c) $\dfrac{z}{x}$, $(z\neq0, x^2-yz\neq0)$; d) $\dfrac{1-b}{a}$, $(a\neq\pm1, b\neq-1)$.

933. a) $\dfrac{4}{9ab}$, $(a, b\neq0)$; b) $\dfrac{c}{6bx}$, $(a, b, c, x, y\neq0)$;
c) $\dfrac{(x-5)(x+3)}{x^2}$, $(x\neq-5, x\neq3)$; d) $\dfrac{b+y}{3(a-y)}$, $(b\neq\ ; a\neq y)$.

934. a) $\dfrac{mn}{m+n}$, $(m\neq0, n\neq0, m\neq n)$; b) $\dfrac{1+2x}{1+x}$, $(x\neq\pm1)$;
c) $\dfrac{6}{2x+1}$, $\left(x\neq0, x\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$; d) a, $(x\neq-1)$;
e) $\dfrac{x+2}{5x-11}$, $\left(x\neq4, x\neq-2, x\neq\dfrac{11}{5}\right)$.

935. a) $-\dfrac{a}{y}$, $(y\neq\pm a)$, $a\neq0$, $y\neq0$); b) $\dfrac{a-b}{a^2}$, $(a\neq b, a\neq0)$;

c) $4-2a$, $(a\neq 0, a\neq 2)$.

936. a) $x+5a$, $(x\neq 5a)$; b) $\frac{ax+by}{b^2}$, $(b\neq 0, x\neq 0, y\neq 0)$;

c) $3a$, $\left(a\neq 0, x\neq \pm\frac{3a}{4}\right)$; d) $2ab$, $(a\neq 0, b\neq 0)$;

e) $(u-v)^2$, $(u\neq v)$.

937. a) $\frac{4a^2+b^2}{2ab}$; b) $(2x+a)^2(2x-a)$; c) $1+a$; d) x.

938. a) $\frac{a-2b}{2b}$, $(b\neq 0)$; b) $\frac{1}{x^2}$, $(x\neq y\neq 0, x\neq -y)$.

c) 0, $(x\neq y\neq 0, x\neq -y)$; d) $\frac{x+y}{3}$, $(x\neq y\neq 0, x\neq y)$.

939. Za $x\neq 0, x^{n+1}$.

940. a) $\frac{1}{x+y}$, $(x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y)$; b) $\frac{x+1}{xy}$, $(x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y)$;

c) $\frac{2a}{3(a-4)}$, $(|a|\neq 2, a\neq 4)$; d) $-\frac{x+y}{y^2+x^2}$, $(x\neq 0, y\neq 0)$.

941. a) $\frac{2a+1}{2}$, $(|a|\neq 1)$; b) $-a$, $(a\neq 0, b\neq 0)$.

c) $\frac{1}{6a}$, $(a\neq 0, a\neq -2)$.

942. a) $\frac{1}{a+2x}$, $\left(x\neq 2, x\neq 3, |x|\neq \frac{a}{2}\right)$; b) $\frac{1}{a}$, $(x\neq -3, x\neq -1, x\neq 2a)$.

943. a) $\frac{2xy}{x^2+y^2}$, $(x\neq 0, y\neq 0, |x|\neq y)$; b) $\frac{x-y}{y}$, $(|x|\neq y, y\neq 0)$;

c) $\frac{x-2y}{2}$, $(x\neq 0, y\neq 0, |x|\neq 2y)$.

944. a) $\frac{2bc}{(b+c-a)^2}$; b) $\frac{1}{xy}$, $(x\neq 0, y\neq 0, x\neq -y)$;

c) $\frac{a+2}{a^{n+1}}$, $(a\neq 0, |a|\neq 1, a\neq 3)$.

945. a) $\frac{1}{z+2}$, $(|z|\neq 2)$; b) $\frac{1}{a-1}$, $(|a|\neq 1)$;

c) $\frac{m}{2c-m}$, $(c\neq 0, |m|\neq 2c)$.

946. a) $\frac{2(x-2y)}{x-y}$, $(x\neq y, |x|\neq 2y)$; b) $\frac{4m}{(m-1)^2}$, $(m\neq 0, m\neq 1)$;

c) 1, $(a\neq -1)$.

947. a) $9a^2$, $\left(|a|\neq \frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{4a^2+4a-5}{(2a+1)(2a-3)}$, $\left(|a|\neq \frac{3}{2}\right)$;

c) $\frac{1}{a-1}$, $(|a|\neq 1)$; d) 0, $\left(|m|\neq \frac{1}{2}\right)$.

948. a) $\frac{9}{x-y}$, $(|x|\neq y)$; b) 9, $(|x|\neq 2, x\neq 1)$;

c) $\frac{x+2}{2}$, $(|x|\neq 2, |x|\neq 1)$.

949. a) Pošto je $\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{1-x^2}$ onda je:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{2}{1-x^2}+\frac{2}{1+x^2}=\frac{4}{1-x^2}.$$

Dodavanjem ovom zbiru četvrtog razlomka, zatim petog i šestog dobija se konačno:

$$\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}+\frac{2}{1+x^2}+\frac{4}{1+x^4}+\frac{8}{1+x^8}+\frac{16}{1+x^{16}}=\frac{32}{1-x^{32}},$$

$(|x|\neq 1)$;

b) dati zbir se lako određuje ako se napiše u obliku:

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)+\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)+\left(\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+3}\right)+$$

$$+\left(\frac{1}{x+3}-\frac{1}{x+4}\right)+\left(\frac{1}{x+4}-\frac{1}{x+5}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x+5}=\frac{5}{x(x+5)};$$

c) 1; d) 1, $(|x|\neq 1)$; e) $\frac{2a-2}{a-2}$, $(a\neq 0, a\neq 2, a\neq 1)$.

950. Za $x<1$ razlomak je -1; za $-1\le x<1\wedge x\neq 0$, $\frac{2+x-x^3}{x^3+1}$; a za $x>1$, 1;

b) za $x<-2$, $\frac{3-x^2}{x+2}$; za $-2\le x<2$, $\frac{5-x^2}{x+2}$; a za $x\ge 2$, $\frac{x^2-3}{x+2}$;

c) za $x<-1$, 2; za $-1\le x<1$, $\frac{2x^2}{2x^2-1}$; za $x\ge 1$, 0;

d) za $x<0\wedge x\neq -1$, $\frac{1+x^2}{1-x^2}$; za $x\ge 0\wedge 1$, $x\neq\frac{1+x^2}{1-x^2}$.

952. a) 0, $(a\neq b\neq c)$; b) 1, $(x\neq y\neq z)$; c) 0, $(|a|\neq -b, b\neq -c)$.

953. 4.

954. $3x-2$.

955. $2a+3$.

956. $2x+1$.

957. $-\frac{ab}{(a+b)^2}$.

958. 2.

959. -1.

960. 2k−1.

961. 4.

962. Za a) i b) važi $x\neq y\neq z\neq 0$, a za c) i d) $a\neq b\neq c\neq 0$.

964. **Primedba.** U narednim zadacima rad se pojednostavljuje uvođenjem odgovarajuće smene.

$\frac{6}{x+y+3}$, (smena: $y+3=a$).

965. $\frac{2}{x+y+2}$, (smena: $y+2=a$).

966. $0, x\neq a+b\neq 0, x\neq -a-b$.

967. $4, |x+y|\neq b$.

968. $1, x+y\neq -1$.

969. $-\frac{x+y}{x+y+2}, |x+y|\neq 2$.

970. $-1, ((a+b)(c+d)\neq 0, a+b\neq c+d)$, (smene: $a+b=x, c+d=y$).

971. $\frac{2a^2}{a+c+d}$, $(|c+d|\neq a)$.

972. $\frac{11a+c+d}{6(a-c-d)}$, $(a\neq b,\ a\neq c+d)$.

973. $2, a+b\neq 1$.

974. $\frac{12}{x+y-1}$, $(x+y\neq 1$, smena: $x+y=a)$.

975. $\frac{6}{x+y+3}$, $(x\neq 0, x\neq y+3)$.

976. $\frac{2}{x+a+b}$, $(|x|\neq a+b)$.

977. $\frac{x-a-b}{a+b}$, $(|x|\neq a+b, a+b\neq 0)$.

978. $\frac{1}{x+y-1}$, $(|x+y|\neq 1)$.

979. $\frac{1}{a+b-1}$, $(a+b\neq 1)$.

980. $\frac{4(a+b)}{(a+b-1)^2}$, $(a+b\neq 0, a+b\neq 1)$.

981. ab, $(|a|\neq b)$.

982. $1, (mnp\neq 0,\ m\neq -n,\ m\neq -p,\ n\neq -p)$.

984. $4, (abc\neq 0)$.

985. b) Kvadriranjem pretpostavke $x+y+z=0$ dobija se:
(A) $x^2+y^2+z^2=-2(xy+yz+xz)$. Takođe iz pretpostavke se dobija $y-z=-x-2z$, $z-x=-y-2x$; $x-y=-z-2y$.
Zbir kvadrata ovih jednakosti svodi se na:
(B) $(y-z)^2+(z-x)^2+x-y)^2=5(x^2+y^2+z^2)+4(xy+xz+yz)$.
Količnik (A) i (B) postupno se transformiše na sledeći način:

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{(y-z)^2+(z-x)^2+x-y)^2}=\frac{-2(xy+yz+xz)}{5(x^2+y^2+z^2)+4(xy+xz+yz)}=$$

$$=\frac{-2(xy+xz+yz)}{-10(xy+xz+yz)+4(xy+xz+yz)}=\frac{1}{3};$$

c) pošto je

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=0 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$, odakle izlazi:

$$\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=-\frac{3}{a^2b}-\frac{3}{ab^2}.$$

Množenjem ove jednakosti sa abc dobija se:

$$\frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}=-3c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=-3c\left(-\frac{1}{c}\right)=3,$$

što je trebalo dokazati.

986. a) Prvi razlomak tvrđenja proširi se sa z a drugi sa zx i iskoristi da je $xyz=1$.

b) Posle identičnih transformacija leva strana tvrđenja postaje:

$$x^2+y^2+z^2+\frac{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{(xyz)^2}+6-$$

$$-\left(xyz+\frac{z}{xy}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}+\frac{xy}{z}+\frac{1}{xyz}+\frac{y}{xz}+\frac{x}{yz}\right)=$$

$$=x^2+y^2+z^2+x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2+6-$$

$$-\left(2+\frac{x^2y^2z^2}{xyz}+\frac{x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2}{xy}\right)=4;$$

c) proizvod:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{c}{a-b}=1+\frac{c}{b-1}\cdot\left(\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)=$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{b^2-bc+ac-a^2}{ab}=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{c(a-b)-(a^2-b^2)}{ab}=$$

$$=1+\frac{c}{a-b}\cdot\frac{(a-b)(c-(a+b))}{ab}=1+\frac{c}{ab}(c-(a+b));$$ pošto je

$c=-(a+b)$, to posmatrani proizvod ima vrednost

$1+\frac{2c^2}{ab}$. Na isti način dobijaju se proizvodi:

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b)}\right)\cdot\frac{a}{b-c}=1+\frac{2a^2}{bc}$$ i

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\cdot\frac{b}{c-a}=1+\frac{2b^2}{ac}.$$

Dakle,

$$\left(\frac{a-b}{c}+\frac{b-c}{a}+\frac{c-a}{b}\right)\left(\frac{c}{b-a}+\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}\right)=$$

$$=3+\frac{2c^2}{ab}+\frac{2a^2}{bc}+\frac{2b^2}{ac}=3+\frac{2(a^3+b^3+c^3)}{abc}=3+\frac{2\cdot 3abc}{abc}=$$

$=3+6=9$, jer je $a+b+c=0 \Rightarrow a^3+b^3+c^3=3abc$.

987. a) Leva strana se postupno transformiše na sledeći način

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{m(n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=$$

$=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$, čime je dokaz završen.

b), c), d), analogno pod a).

988. Očigledna jednakost $\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}=\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}$ za $k=1,2,3,\ldots n$

postaje $\frac{3}{1^2\cdot 2^2}=1-\frac{1}{2^2}$; $\frac{5}{2^2\cdot 3^2}=\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}$;

$$\frac{7}{3^2\cdot 4^2}=\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2},\ldots,\frac{2n+1}{n^2(n+1)}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Sumiranjem gornjih jednakosti dobija se:

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\ldots+\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2};$$

b) $\frac{n(n+1)}{2(2n+1)^2}$.

989. a^2b^2.

990. 1.

991. 4.

992. $\frac{1}{a^3b^3}$.

993. abc.

994. $a+b+c$ $\left(\text{uputstvo: } \frac{3}{a+b+c}=\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}+\frac{1}{a+b+c}\right)$.

995. $a+b+c$ (uputstvo: $3=1+1+1$).

996. $a+b+c$ (brojilac napiši u obliku:

$$\left(\frac{2a}{-a+b+c}+1\right)+\left(\frac{2b}{a-b+c}+1\right)+\left(\frac{2c}{a+b-c}+1\right).$$

997. $\frac{16abc}{(1+a)(1+b)(1+c)}$.

998. Zamenom datih vrednosti za x, y i z, dobije se tvrđenje.

999. $\frac{-2(a^2+b^2+ab)}{ab}$.

1000. $A(B(x))\,B(A(x))+1=\dfrac{1-\dfrac{1+x}{1-x}}{1+\dfrac{1+x}{1-x}}\cdot\dfrac{1+\dfrac{1-x}{1+x}}{1-\dfrac{1-x}{1+x}}=\dfrac{-4x}{4x}+1=0,$

$(x\neq\pm1, x\neq 0)$.

1001. Ako se kubira pretpostavka dobija se lanac ekvivalencija
$(a+b)^3=(-c)^3\Leftrightarrow a^3+b^3+3ab(a+b)=-c^3\Leftrightarrow$
$a^3+b^3+c^3=-3ab(a+b)=3abc$.

1002. Iz pretpostavke $b+c=-a, a+c=-b$ i $a+b=-c$, zamenom ove vrednosti u datu jednakost dobija se tvrđenje.

1003. Iz pretpostavke sledi da je $a+b=-c, a+c=-b$, pa je
$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)(a+c-b)=4bc$, analogno
$b^2-(a-c)^2=4ac, c^2-(a-b)^2=4ab$. Ako se iskoristi prethodni zadatak d je $a^3+b^3+c^3=3abc$, dokaz se lako izvodi.

1004. Ako se iskoristi uputstvo iz prethodnog zadatka i ekvivalencija $a+b+c=0\Leftrightarrow b^2+c^2=a^2-2bc$, tada je prvi sabirak

$$\frac{a^2(a^2-2bc)}{a^4-(b-c)^4}=\frac{a^2(a^2-2bc)}{(a^2+(b-c)^2)(a^2-(b-c)^2)}=$$
$$=\frac{a^2(a^2-2bc)}{(2a^2-4bc)4bc}=\frac{a^2}{8bc},$$ analogno drugi sabirak $\frac{b^2}{8ac}$, treći $\frac{c^2}{8ab}$.

Njihov zbir je $\frac{a^2}{8bc}+\frac{b^2}{8ac}+\frac{c^2}{8ab}=\frac{a^3+b^3+c^3}{8abc}=\frac{3}{8}$.

1005. Ako je vrednost razlomka $c=const.$ tada je

$$\frac{(x+y+mz)^2+(x+my+z)^2+(mx+y+z)^2}{(x-y)^2+(y-z)^2+(x-z)^2}-c=0.$$

Sređivanjem ove jednakosti dobija se
$F(x,y,z)=Ax^2+Ay^2+Az^2+Bxy+Bxz+Byz$, gde je
$A=m^2-2c+2, B=4m+2c+2$.
$F(x,y,z)=0\Leftrightarrow A=0\wedge B=0\Leftrightarrow m=-2$.

1006. Slično prethodnom zadatku, $m=5\vee m=6$.

1007. Iz pretpostavke $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=-\frac{1}{c}$, postupno se dobija $\frac{a+b}{c}=-\frac{ab}{c^2}$,

$\frac{a+c}{b}=-\frac{ac}{b^2}, \frac{b+c}{a}=-\frac{bc}{a^2}$, njihov zbir je
$\frac{a+b}{c}+\frac{a+c}{b}+\frac{b+c}{a}=-abc\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}\right)$. Kako je
$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^3=\left(-\frac{1}{c}\right)^3\ \frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}=\frac{3}{abc}$, odatle sledi tvrđenje.

1008. Vidi uputstvo prethodnog zadatka.

1009. Pretpostavka $\frac{m}{x}=\frac{n}{y}=\frac{p}{z}=k$, se može napisati u obliku,
(1) $m=kx\wedge n=ky\wedge p=kz$. Zbir kvadriranih jednačina (1) je
$m^2+n^2+p^2=k^2(x^2+y^2+z^2)\Leftrightarrow$
(2) $k^2=\dfrac{m^2+n^2+p^2}{x^2+y^2+z^2}$.

Sistem (1) se može napisati u obliku $\frac{m}{a}=\frac{kx}{a}\wedge\frac{n}{b}=\frac{ky}{b}\wedge\frac{p}{c}=\frac{kz}{c}$.

Zbir njihovih kvadrata je

(3) $\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}+\frac{p^2}{c^2}=k^2\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)=k^2\cdot 1=k^2.$

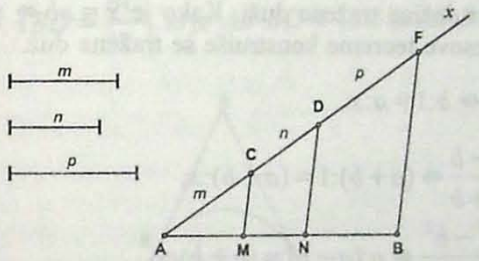
Iz (2) i (3) sledi tvrđenje.

VII GLAVA

7. HOMOTETIJA I SLIČNOST

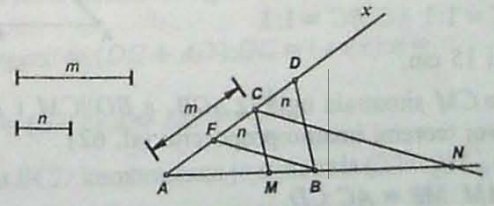
7.1. Proporcionalnost veličina. Talesova teorema

1010. Konstrukcija. Na polupravoj Ax odredimo redom tačke C, D i F tako da je $AC=m$, $CD=n$ i $DF=p$ (sl. 60). Zatim konstruišemo $DN\|FB$ i $CM\|FB$. Tačke M i N dele datu duž u datoj razmeri.
Dokaz. – Primenom Talesove teoreme dobija se:
$AM:MN:NB=AC:CD:DF$ ili $AM:MN:NB=m:n:p$.
Dakle, tačke M i N dele duž AB u razmeri $m:n:p$.



Sl. 60

1011. Na polupravoj Ax odredimo tačke C, D i F tako da je $AC=m$ i $CD=CF=n$ (sl. 61), zatim konstruišemo $DB\|CM$ i $CN\|FB$.



Sl. 61

Dokaz. – Primenom Talesove teoreme dobija se:

(1) $\frac{MA}{MB} = \frac{CA}{CD} = \frac{m}{n}$ i

(2) $\frac{NA}{NB} = \frac{CA}{CF} = \frac{m}{n}$.

Tačka M deli duž AB unutrašnjom podelom u razmeri $m:n$, a tačka N deli duž AB spoljašnjom podelom u istoj razmeri $m:n$, tj. $\frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB}$.

1012. Iskoristiti rešenje prethodnog zadatka.

1013. Na polupravoj Ax odredimo tačke M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5 tako da je $AM_1 = M_1M_2 = M_2M_3 = M_3M_4 = M_4M_5$, zatim $M_4N_4 \| M_5B$, $M_3N_3 \| M_5B$ itd.

1014. Neka je x dužina tražene duži. Kako je $x = ab \Leftrightarrow x:a = b:1$, primenom Talesove teoreme konstruiše se tražena duž.

b) $x = \frac{a}{b} \Leftrightarrow b:1 = a:x$;

c) $x = \frac{a-b}{a+b} \Leftrightarrow (a+b):1 = (a-b):x$;

d) $x = \frac{a^2-b^2}{a} \Leftrightarrow a:(a-b) = (a+b):x$.

1015. Analogno prethodnom zadatku.

1016. $AB = 12$ cm, $CB = 7{,}2$ cm.

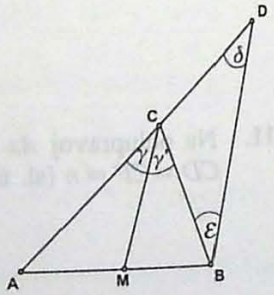
1017. $BC = 8$ cm.

1018. 3:5; 5:2.

1019. 6 m.

1020. $BD:BC = 1:3$; $EC:BC = 1:3$.

1021. 10 cm i 15 cm.



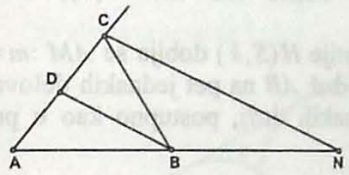
Sl. 62

1023. Neka je CM simetrala ugla $\angle ACB$, a $BD \| CM$ i $A-C-D$. Prema Talesovoj teoremi imamo proporciju (sl. 62)

(1) $AM:MB = AC:CD$.

Kako je $\gamma = \gamma'$, $\gamma = \delta$, $\gamma' = \varepsilon$, to je $\varepsilon = \delta$, ΔCBD jednakokraki, tj. $CB = CD$. Proporcija (1) postaje $AM:MB = AC:CB$. Kraj dokaza.

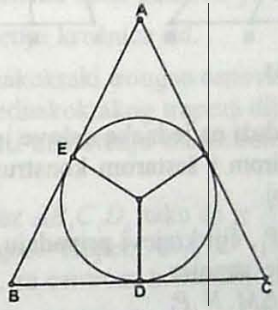
1024. Iskoristite dokaz prethodnog zadatka (sl. 63). Kako je $BD \| CN$, CN simetrala spoljašnjeg ugla kod temena C, prema Talesovoj teoremi dobija se $AN:NB = AC:CD$.



Slika 63.

1025. Neka je $DC = x$, tada je $BD = x-3$. Kako je $(x-3):x = 8:14$, (na osnovu prethodna dva zadatka) odatle je $x = 7$ cm, $BC = 11$ cm.

1026. Kako je $AE:EB = 7:5$, odatle $AB:EB = 12:5$ (sl. 64). Pošto je $BE = BD$, a $BD = \frac{BC}{2}$, to je $AB:BD = 12:5$ ili $AB:BC = 12:10 = 6:5$.



Slika 64.

1027. U trouglu ABC simetrala ugla B deli stranicu AC na dva dela tako da je

$DC:AD = a:c \Leftrightarrow (DC+AD):DC = (a+c):a \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b:DC = (a+c):a \Leftrightarrow DC = \frac{ab}{a+c}$.

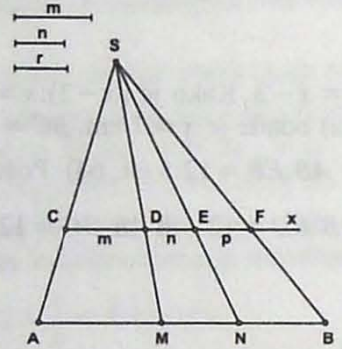
U trouglu BCD konstruisana je simetrala CD ugla C, odatle:

$\frac{OD}{OB} = \frac{DC}{a} = \frac{b}{a+c}$.

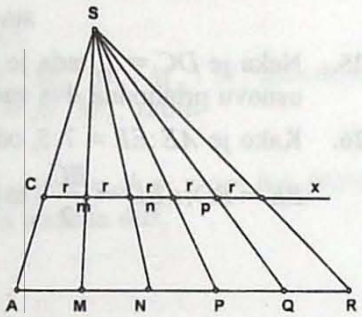
7.2. Homotetija

1028. Na polupravoj $Cx \| AB$ (sl. 65) postupno prenosimo odsečke $CD = m$, $DE = n$, $EF = p$. Prave $AC \cap BF = \{S\}$, $SD \cap AB = \{M\}$ i $SE \cap AB = \{N\}$.

Na osnovu homotetije $H(S,k)$ dobija se $AM : m = MN : n = NB : p$. Da bismo podelili duž AB na pet jednakih delova, na polupravu Cx nanosimo pet jednakih duži, postupno kao u prethodnom slučaju (sl. 66).



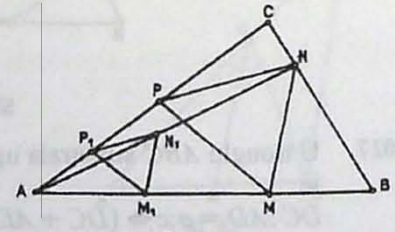
Sl. 65



Sl. 66

Ovaj način deljenja duži na jednake delove je opštiji i jednostavniji, jer je potrebno lenjirom i šestarom konstruisati samo jednu polupravu paralelnu datoj.

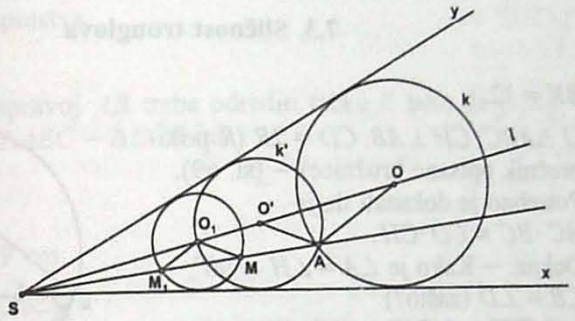
1031. Proizvoljna duž M_1P_1, čiji krajevi pripadaju dvema stranicama trougla ABC (sl. 67) je stranica jednakostraničnog $\Delta M_1N_1P_1$ koji je homotetičan sa traženim trouglom MNP u homotetiji $H(A,K)$. Teme N traženog trougla je presek poluprave AN_1 i strane BC.



Sl. 67

1032. Neka je xSy dati ugao i A data tačka u oblasti ugla (sl. 68). Središte tražene kružnice pripada simetrali Sl datog ugla xSy. Proizvoljna tačka O_1 simetrale Sl je središte kružnice $K_1(O_1)$, koja dodiruje krake datog ugla. Konstruisana kružnica $K_1(O_1)$ i tražena kružnica su homotetične u homotetiji $H(S,K)$. Tački A tražene kružnice odgovaraju dve homotetične tačke M i M_1 kružnice $K(O_1)$. Poluprečnik

sadrži tačku A i paralelan je sa O_1M ili O_1M_1, tj.: $AO' \| MO_1$ i $O_1M_1 \| AO$. Tačke O i O' su središta tražene kružnice. Ako A pripada oblasti datog ugla xSy i $\angle xSz < 180°$, zadatak ima dva rešenja.



Sl. 68

1034. Kružnice K i K_1 su inverzno homotetične u odnosu na centar homotetije M. Homotetična slika duži AC je duž BD itd.

1035. Iskoristiti homotetiju kružnica itd.

1036. Konstruisati jednakokraki trougao osnovice n i kraka m, zatim dopuniti trougao do jednakokrakog trapeza dijagonale p, pa potom iskoristiti datu visinu i homotetiju sa centrom u jednom od temena trapeza.

1037. Konstruisati trapez $AB_1C_1D_1$ tako da je $AB_1 = m$, $B_1C_1 = n$, visina p i $\angle A = \alpha$ dati ugao. Trapez $AB_1C_1D_1$ je homotetičan sa traženim trapezom $ABCD$, sa centrom homotetije A itd.

1039. Analogno prethodnom zadatku.

1040. Nema uputstva.

1041. Neka je O središte tetive datog odsečka. Konstruisati pravougli trougao čija je kateta n, hipotenuza m, tačka O središte katete n. Ako je n stranica, a m dijagonala pravougaonika, traženi pravougaonik je homotetičan sa ovim u odnosu na centar homotetije tačke O itd.

1042. Iskoristiti homotetiju čiji je centar u centru kružnog isečka.

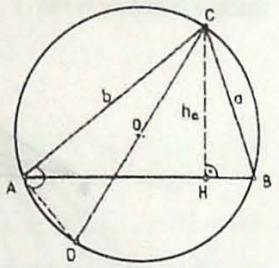
1043. Neka je l simetrala duži AB, $l \cap p = \{s\}$ i neka je $K'(O')$ ma koja kružnica sa središtem na simetrali l duži AB i tangenti p. Kružnica $K'(O')$ i tražena kružnica homotetične su sa centrom homotetije u tački S.

1044. Neka je $p \cap l = \{S\}$, a $K'(O')$ bilo koja kružnica sa središtem na pravoj l. Tražena kružnica homotetična je sa kružnicom $K'(O')$ i sa centrom homotetije u tački S.

7.3. Sličnost trouglova

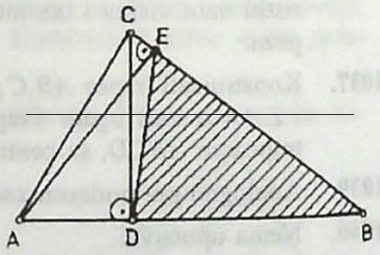
1045. $BK = 12$.

1048. U ΔABC, $CH \perp AB$, $CD = 2R$ (R poluprečnik opisane kružnice) – (sl. 69).
Potrebno je dokazati da je
$AC \cdot BC = CD \cdot CH$.
Dokaz. – Kako je $\angle A = \angle H = 90°$,
$\angle B = \angle D$ (zašto?)
$\Rightarrow \Delta CHB \sim \Delta CAD \Rightarrow CH : CA = CB : CD$
$CA \cdot CB = CD \cdot CH$.
Ako iskoristimo uobičajene oznake
$CA = b$, $CB = a$, $CH = h_c$, $CD = 2R$,
tvrđenje se može napisati u obliku $a \cdot b = 2R \cdot h_c$.



Sl. 69

1049. Dato je: ΔABC, $CD \perp AB$, $AE \perp BC$ (sl. 70). Dokazati: $\Delta DBE \sim \Delta ABC$. Dokaz: ugao $\angle B$ je zajednički za ΔABE i ΔCDB, $\angle E = \angle D = 90° \Rightarrow \Delta ABE \sim$
$\sim \Delta CDB \Rightarrow AB : BC = BE : DB$.
Pored toga, AB i BC su stranice ΔABC, BE i DB stranice ΔDBE, $\angle B$ je zajednički zahvaćen ovim stranicama, pa je $\Delta DBE \sim \Delta ABC$, čime je dokaz završen.



Sl. 70

1051. $MN = 5$ cm.

1052. 3,2 cm.

1053. 3 cm.

1054. 2.

1055. 6 cm, 4 cm, 6 cm.

1056. 19 cm i 23 cm.

1057. 45, 35, 30.

1058. 8,4 dm.

1059. 12 cm, 15 cm, 9 cm.

1060. 44 cm, 77 cm.

1061. 16,25 cm.

1062. 48 cm.

1063. Nema uputstva.

1064. 9 cm.

1066. Na polupravoj AB treba odrediti tačku E tako da je $BE = BC = a$; tada je $\Delta AEC \sim \Delta ECB$ itd.

1067. $h = \dfrac{b^2}{a}$.

1069. 6 cm i 9 cm.

1072. $\dfrac{2ms}{m+n}, \dfrac{2ns}{m+n}$.

1073. $\dfrac{ah}{a+b}$.

1074. $\dfrac{bc}{a-b}$.

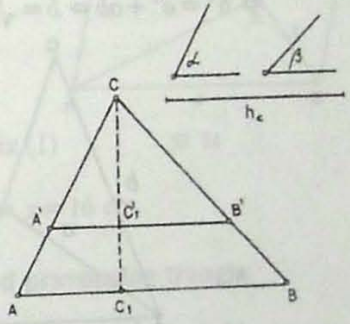
1075. 11,25 km, 1:250 000.

1076. 3 cm, 2,4 cm, 1,8 cm, 3,6 cm.

1078. 69 cm.

1079. 100 cm, 40 cm.

1080. 6 cm.



Sl. 71

1081. 18,6 cm, 27,9 cm, 37,2 cm.

1082. 30 cm, 22,5 cm, 13,5 cm, 12 cm.

1083. Analiza. – Ovaj zadatak rešavamo metodom „sličnih slika". Konstruišemo prvo lik sličan traženom, a zatim ga preslikamo izvesnom homotetijom na traženi lik. Konsrukcija. – Konstruišemo $\Delta A'B'C'$, tako da je $\angle A' = \alpha$, $\angle B' = \beta$. Neka je $CC' = h_c$ visina ovog trougla. Odredimo na polupravoj CC_1' tačku C_1, tako da je $CC_1 = h_c$. Konstruišimo zatim sliku trougla $CA'B'$ pri homotetiji sa centrom C i

$k = \dfrac{\overrightarrow{CC_1}}{\overrightarrow{CC_1'}}$ (sl. 71).

Dokaz. – Dokazujemo da je ΔABC traženi trougao. Iz osobine homotetije sledi da je
$\angle A = \angle A' = \alpha$, $\angle B = \angle B' = \beta$, $\angle C' = \angle C_1 = 90°$, tj. CC_1 je visina

trougla ΔABC. Po konstrukciji $CC_1 = h_c$, dakle ΔABC je zaista traženi trougao. Iz konstrukcije zaključujemo da zadatak uvek ima rešenje.

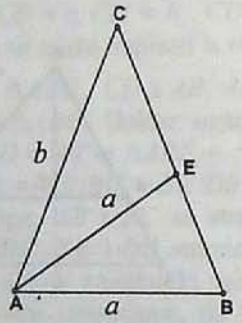
1084. Analogno prethodnom zadatku konstruišemo jednakostraničan $\Delta A'B'C'$ itd.

1089. $\frac{Rd}{R+r}, \frac{rd}{R+r}$.

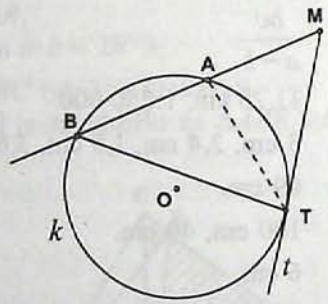
1092. Ako je $DE \cap AC = \{P\}$, tada je $\Delta AEP \sim \Delta PDC$, odakle sledi $AP:CP = AE:DE = AE:2AE = 1:2$.

1093. $\frac{k\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}, \frac{(a-k)\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}$.

1094. Neka je AE simetrala ugla BAC (sl. 72) Tada su trouglovi ABC i ABE slični (zašto ?). Iz sličnosti je:
$AB:AC = BE:AB \Leftrightarrow a:b = (b-a):a \Leftrightarrow a^2 = b(b-a) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow b^2 = a^2 + ab \Leftrightarrow b = \sqrt{a(a+b)}$.



Sl. 72



Sl. 73.

1095. Neka je $s \cap k = \{A,B\}$ i $t \cap k = \{T\}$. Trouglovi MAT i MBT (sl. 73) su slični jer je $\angle BMT = \angle AMT$ i $\angle MTA = \angle TBA$ (Ugao između tangente i tetive i periferijski ugao nad tom tetivom), pa je
$MA:MT = MT:MB \Leftrightarrow MT^2 = MA \cdot MB = 4 \cdot 9 = 36 \Rightarrow MT = 6\text{cm}$.

1096. Neka je AD visina jednakokrakog trougla koja odgovara osnovici, a E dodirna tačka kraka AB i kružnice, O centar kružnice. Iz sličnosti pravouglih trouglova ABD i AOE imamo $AB:BD = AO:EO = 12:5$. ($EO = DO$), odatle je $BD = 25$ cm, $BC = 50$ cm.

1097. Kako je $AM:MB = b:a \Leftrightarrow (AM+MB):MB = (a+b):a \Leftrightarrow$

(1) $MB = \frac{a^2}{a+b}$.

Trouglovi BMN i BAC su slični, pa je:
(2) $MN:BM = b:a$.
Iz (1) i (2) dobija se da je $MN = \frac{ab}{a+b}$.

1098. Kako je $BD:AD = a:b \Leftrightarrow c:BD = (a+b):a \Leftrightarrow$

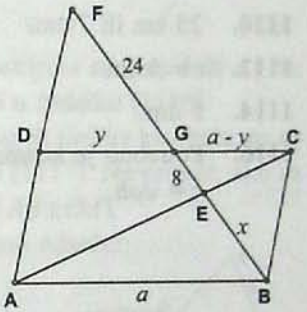
(1) $BD = \frac{ac}{a+b}$.

Iz sličnosti trouglova BED i BCA sledi da je
(2) $DE:BD = b:c$.
Iz (1) i (2) dobija se da je $DE = \frac{ab}{a+b}$.

1099. Trouglovi BEA i GEC su slični (sl. 74), odakle je

(1) $\frac{a-y}{8} = \frac{a}{x} \Leftrightarrow y = a - \frac{8a}{x}$.

Iz sličnosti trouglova DGF i GBC imamo



Sl. 74

(2) $\frac{y}{24} = \frac{a-y}{x+8}$. Eliminacijom y iz (1) i (2) dobija se jednačina $x^2 = 256 \Leftrightarrow x = 16$ cm.

7.4. Primena sličnosti kod pravouglog trougla

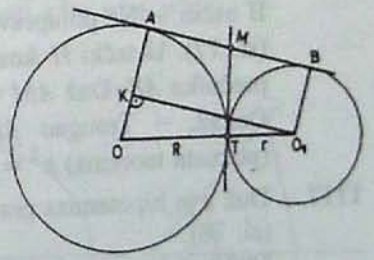
1103. 1° Neka je $O_1K \| AB$ u pravouglom trouglu ΔOO_1K hipotenuza $OO_1 = R+r$, a katete $OK = R-r$ i $O_1K = t$; tada je $t^2 = (R+r)^2 - (R-r)^2 \Leftrightarrow t^2 = 2R \cdot 2r$.

2° Kako je $\angle TAB + \angle TBA = \frac{1}{2}\angle AOT + \frac{1}{2}\angle TO_1B_1 =$

$\frac{1}{2}(\angle AOT + \angle TO_1B_1) = 90°$,

sledi da je $\angle ATB = 90°$ (sl. 75).

3° Zajednička unutrašnja tangenta MT seče AB u tački M, koja je središte duži AB pošto je $MA = MT = MB$. Kako je $MT \perp OO_1$ pro-izlazi da je OO_1 tangenta kružnice prečnika AB.



Sl. 75

1104. a) 65 cm, 25 cm, 169 cm, 60 cm; b) 255 cm, 136 cm, 289 cm, 120 cm; c) 255 cm, 289 cm, 64 cm, 255 cm; d) 338 cm, 50 cm,288 cm, 120 cm; e) 25 cm, 20 cm, 15 cm, 12 cm.

1105. 18,5 cm.

1106. 24 dm.

1107. 6 cm.

1108. 40 cm.

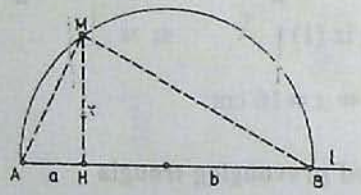
1109. 13 cm.

1110. 25 cm ili 7 cm.

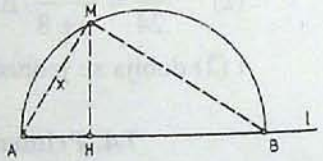
1112. $r = 6$ cm.

1114. 5 dm.

1116. Potrebno je konstruisati duž x tako da je $a:x = x:b$ ili $x^2 = ab$ ili $x = \sqrt{ab}$.



Sl. 76



Sl. 77

I način .– Na polupravoj Al konstruisati odsečke $HA = a$ i $Hb = b$ (sl. 76). U tački H konstruisati normalu do presečne tačke M sa kružnicom prečnika AB. Duž $HM = x$.

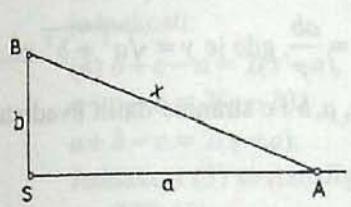
Dokaz. – Iz pravouglog trougla AMB je $HM^2 = AH \cdot HB$ (poznata teorema), dakle x je geometrijska sredina za a i b.

II način. – Na polupravoj Al konstruisati odsečke $AB = b$ i $AH = a$ (sl. 77). U tački H konstruisati normalu do preseka sa kružnicom prečnika AB. Duž $AM = x$.

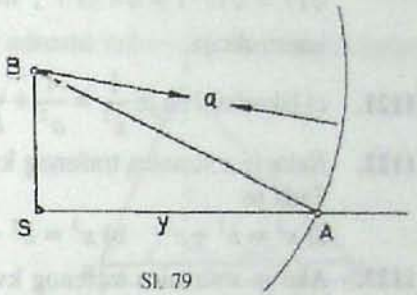
Dokaz. – Trougao ABM je pravougli, pa je $AM^2 = AB \cdot AH$ (poznata teorema) $x^2 = ab$.

1117. Duž x je hipotenuza pravouglog trougla SAB, katete $SA = a$ i $SB = b$ (sl. 78).

Duž y je kateta pravouglog trougla SAB, hipotenuza $BA = a$ i kateta $SB = b$ (sl. 79).



Sl. 78



Sl. 79

1118. 1°Kako je $x^2 = a \cdot ka$, sledi da je x geometrijska sredina duži a i ka; dakle konstrukcija može da se izvrši kao u zadatku (1116).

2° Broj k se može uvek predstaviti kao zbir ili razlika kvadrata, pa se konstrukcija može obaviti kao u zadatku (1117). Na primer, ako se konstruišu duži $OA = a$ (sl. 80), $AB = a\,(AB \perp OA)$, $BC = a\,(BC \perp OB)$ itd., dobiju se postupno odsečci:

$OB = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$,

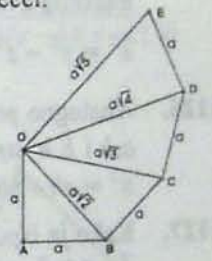
$OC = \sqrt{3a^2 + a^2} = a\sqrt{3}$,

$OD = a\sqrt{4}$,

$OE = a\sqrt{5}$ itd.

Da bismo konstruisali duž dužine $x = a\sqrt{13}$, predstavljamo je na jedan od sledećih načina:

$x^2 = a \cdot 13a$ ili $x^2 = (3a)^2 + (2a)^2$ ili $x^2 = (7a)^2 - (6a)^2$.



Sl. 80

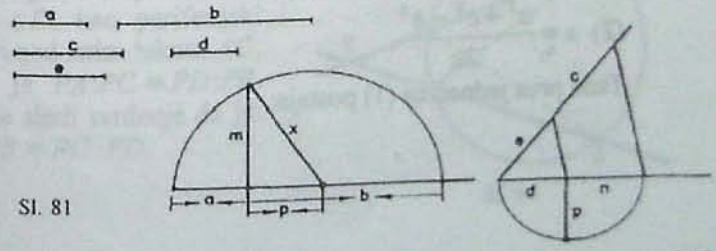
1119. Konstrukcija. – Obavićemo postupno sledeće konstrukcije (sl. 81).

a) konstruisati odsečak m iz jednakosti $m^2 = ab$;

b) konstruisati odsečak n iz jednakosti $e:c = d:n$;

c) konstruisati odsečak p iz jednakosti $p^2 = nd$;

d) konstruisati odsečak x iz jednakosti $x^2 = n^2 + p^2$;



Sl. 81

1120. Kako je $\sqrt{7}=\sqrt{7\cdot 1}=\sqrt{4^2-3^2}$; $\sqrt{12}=\sqrt{3\cdot 4}=\sqrt{4^2-2^2}$; $\sqrt{17}=\sqrt{17\cdot 1}=\sqrt{4^2+1^2}$, treba konstruisati jednu od prethodnih konstrukcija.

1121. c) Iskoristiti da je $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Leftrightarrow x=\frac{ab}{y}$, gde je $y=\sqrt{a^2+b^2}$ itd.

1122. Neka je x stranica traženog kvadrata, a, b i c stranice datih kvadrata. Tada je:
a) $x^2=b^2+c^2$; b) $x^2=b^2-c^2$ itd.

1123. Ako je x stranica traženog kvadrata, a i b stranice prvog pravougaonika, a,c i d stranice drugog pravougaonika, tada je
a) $x^2=ab+cd$; b) $x^2=ab-cd$ itd.

1124. $a_8=R\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $a_{12}=R\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

1125. a,h i b,h' su stranice i visine datih trouglova. Ako je x stranica traženog kvadrata, na osnovu pretpostavke $x^2=\frac{ah}{b}-\frac{bh'}{2}$. Odavde je $x^2=y^2-z^2$, gde je $y^2=\frac{a}{2}\cdot h$, $z^2=\frac{b}{2}\cdot h'$ itd.

1126. Analogno prethodnom zadatku, ako je x stranica traženog kvadrata, a,h i b,h' stranice i visine datih rombova, tada je $x^2=ah+bh'=y^2+z^2$, gde je: $y^2=ah$ i $z^2=bh'$ itd.

1127. Kako je ispunjena jednakost $a^2+b^2=c^2$, tvrđenje je tačno.
Za $p=2, q=1$; $a=4, b=3, c=5$.
Za $p=3, q=1$; $a=6, b=8, c=10$, itd.

1128. Primeni tri puta Pitagorinu teoremu.

1129. Primeni Pitagorinu teoremu.

1130. Iz pravouglih trouglova ACD i ABD (sl.82) je:

(1) $h^2=c^2-x^2$ i $h^2=b^2-(a-x)^2$.

Eliminacijom h iz (1) dobija se:

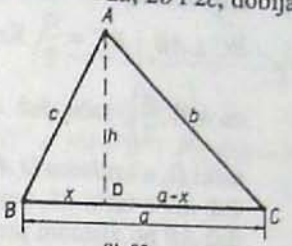
(2) $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}$.

Tada prva jednačina (1) postaje:

(3) $h^2=\left(c-\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)\left(c+\frac{a^2+c^2-b^2}{2a}\right)$. Ako se zatim od obe strane jednakosti $a+b+c=2s$ oduzme redom $2a$, $2b$ i $2c$, dobijamo jednakosti:

(4) $b+c-a=2(s-a)$,
$a+c-b=2(s-b)$ i
$a+b-c=2(s-c)$.

Jednakost (3) se transformiše na oblik (5):



Sl. 82

(5) $h^2=\frac{1}{4a^2}(b+a-c)(b-a-c)(a+c-b)(a+b+c)$.

Jednakost (4) i (5) određuje nepoznatu visinu h, tj.:

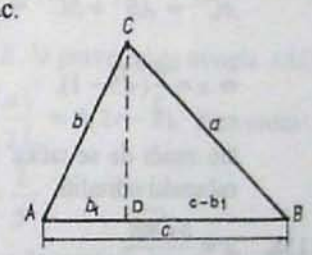
$h=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

Tada je površina trougla $P=\frac{ah}{2}=\frac{a}{2}\cdot\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ ili

(6) $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

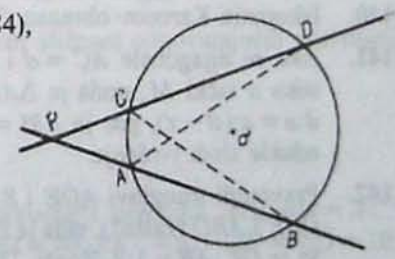
Obrazac (6) se naziva Heronov obrazac.

1131. Primenom Pitagorine teoreme na trouglove ACD i CBD (sl. 83) dobija se:
$h^2=b^2-b_1^2$, $a^2=h^2+(c-b_1)^2$.
Odatle sledi da je
$a^2=b^2+c^2-2cb_1$.
Ovaj obrazac se naziva Karnoov obrazac.



Sl. 83

1133. Kako je $\Delta PAD\sim\Delta PCB$ (sl. 84), jer je ugao P zajednički, a $\angle B=\angle D$, kao periferijski uglovi nad istim lukom AC, onda je $PA:PC=PD:PB$. Odatle sledi tvrđenje da je: $PA\cdot PB=PC\cdot PD$.

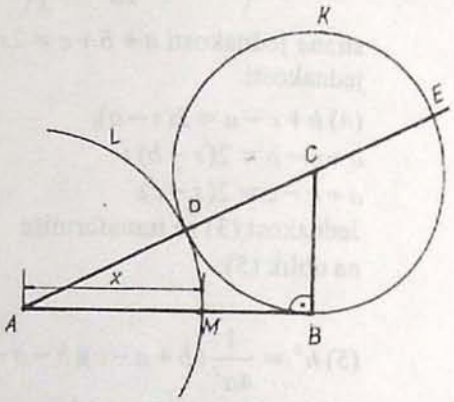


Sl. 84

1134. Iz sličnosti trouglova PAM i PMB sledi tvrđenje.

1135. Nema uputstva.

1136. Konstrukcija. – Neka je $BC \perp AB$ i $BC = \frac{a}{2}$. Kružnica $k\left(C, \frac{a}{2}\right)$, seče duž AC u tački D, a kružnica $L(A, AD)$ duž AB u tački M, koja deli duž AB po zlatnom preseku.



Sl. 85

Dokaz. – Ako se iskoriste prethodni zadatak i slika 85. biće:

(1) $AB^2 = AD \cdot AE$.

Neka je $AM = x$; tada je $AE = a + x$, pa

(1) postaje $x(x+a) = a^2 \Leftrightarrow x^2 = a(a-x) \Leftrightarrow a:x = x:(a-x)$, čime je dokaz završen.

Iz pravouglog trougla je:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x + \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{5a^2}{4}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

što znači da se tačka M, koja deli duž a po zlatnom preseku može računski odrediti.

1138. $x = \frac{a\sqrt{mn}}{n-m}$.

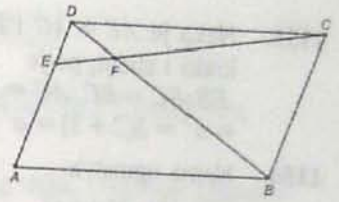
1139. $x = 3a$.

1140. Iskoristiti Karnoov obrazac. Tupougli; $h = 12$.

1141. Ako se dijagonale $AC = d$ i $BD = d$ pravilnog petougla stranice a seku u tački M, onda je $\Delta ABC \sim \Delta BCM$. Iz sličnosti sledi da je $d:a = a:(d-x)$, gde je $AM = x$. Treba dokazati da je $a = x = AM$, odakle sledi tvrđenje.

1142. Pravougli trouglovi ADE i BAD su slični, jer su im jednaki uglovi DAE i ABD (zašto?), tada je $DE:AD = AD:AB$. Kako je $AB = 2AD$, to je $DE:AB = 1:2$. Znači, DE je polovina stranice AD ili četvrtina od DC.

1143. Iz sličnosti trouglova FBC i DEF imamo : $BC:DE = BF:DF = 4$, odatle $BC = 4DE$ i $AD = 4DE$. Prema tome sledi da je $AE = 3DE$ (sl. 86).



Sl. 86

1144. Na osnovu zadatka 1136. sledi: $PD^2 = PA \cdot PB$ i $PA \cdot PB = PE^2$, odatle je $PD^2 = PE^2 \Leftrightarrow PD = PE$.

1145. $R = 5$.

1146. Ako je hipotenuza $2x$ i na osnovu sličnosti odgovarajućih trouglova imamo: $30:10 = 2x:(10-x) \Leftrightarrow x = 6 \Leftrightarrow 2x = 12$.

1147. Neka je $BE \perp AC$, $E \in AC$, tačka O presek dijagonala. Na osnovu pretpostavke ugao $EBC = \frac{1}{4} \cdot 90°$, znači ugao EBO je polovina pravog ugla, tj. 45°.

1148. Neka su dodirne tačke na kracima D i E, a na osnovici F. Kako je $AD = AF = BF = BE = 9$, $CD = CE = 18$. Iz sličnosti trouglova ABC i CDE imamo: $AB:DE = AC:CD \Leftrightarrow 18:DE = 27:18$, odatle je $DE = 12$.

1149. Prečnik AD seče osnovicu BC u tački E. Iz pravouglog trougla ABD, hipotenuzina visina $BE^2 = AE \cdot ED\left(\frac{a}{2}\right)^2 = h(2r-h)$. Zamenom u ovu jednačinu $a = 2r - h$ dobija se $h = \frac{2}{5}r$.

1150. Neka je BC osnovica trougla, a $DF = 2r$ prečnik kruga ($BC \| DF$). Trouglovi ABC i ADF su slični, otuda imamo: $12:2r = 9:(9-r) \Leftrightarrow 12(9-r) = 18r \Leftrightarrow r = 3{,}6$.

1151. $x = \frac{ar}{a+2r}$. (Uputstvo: iskoristiti sličnost odgovarajućih pravouglih trouglova).

1152. $r = 13$ dm.

1153. $x = 9$ dm.

1154. Trouglovi ABD i ACD su pravougli prečnika AD; $BD = AC$, $EB = EC$. Pa je $BE^2 = 144 - 64 = 80$, $BE^2 = ED \cdot AE \Leftrightarrow ED = 10$; $AD = 8 + 10 = 18$.

1155. Neka je $AE = AC$ i $E - A - B$. Trouglovi EBC i AEC su jednakokraki i slični, pa je
$EB:EC = BC:AC \Leftrightarrow (b+c):a = a:b \Leftrightarrow a^2 = b(b+c) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 = 2(2+3) \Leftrightarrow a^2 = 10 \Leftrightarrow a = \sqrt{10}$.

1156. Nema uputstva.

1157. $\frac{a(s-h)}{a-h}, \frac{h(a-s)}{a-h}$.

1158. $\frac{84}{13}$ cm.

1159. 18 cm, 7 cm.

VIII GLAVA

8. TRIGONOMETRIJA PRAVOUGLOG TROUGLA

8.1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla. Osnovne trigonometrijske identičnosti. Rešavanje pravouglog trougla

1160. $\sin\alpha = \frac{4}{5}, \cos\alpha = \frac{3}{5}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{5}, \operatorname{cotg}\alpha = \frac{3}{4}, \sin\beta = \frac{3}{5}, \cos\beta = \frac{4}{5}$, itd.

1162. $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}, \operatorname{cotg}\alpha = \sqrt{2}$.

1163. 19,2 cm, 14,4 cm.

1164. 30 cm, 24 cm.

1165. a) $\frac{1}{2}$; b) 2; c) 2.

1168. a) 1; b) 0; c) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$; d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

1170. $\operatorname{tg}\alpha = 1$; $\alpha = 45°$.

1171. a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$ i $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{4}{3}$;

b) $\sin\alpha = \frac{4a}{a^2+4}$; $\cos\alpha = \frac{a^2-4}{a^2+4}$.

1172. a) $\sin\alpha = \frac{9}{41}, \cos\alpha = \frac{40}{41}$ i $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{40}{9}$;

b) $\sin\alpha = \frac{a^2-9}{a^2+9}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2-9}{6a}$;

c) $\cos\alpha = \frac{6a}{a^2+3}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^2-9}{6a}$.

1173. $\frac{31}{99}$.

1174. Leva strana date jednakosti može se identično transformisati na sledeći način:
$\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=\sin^2\alpha(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)+\cos^2\alpha=$
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$. Važi za svako α.

1181. Iz date jednakosti sledi $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1\Rightarrow\sin^2\alpha=1-\sin^2\beta\Rightarrow$
$\Rightarrow\sin^2\alpha=\cos^2\beta$. Kako su uglovi α i β oštri, to je $\sin\alpha>0$, $\cos\beta>0$, pa je $\sin\alpha=\cos\beta\Leftrightarrow\sin\alpha=\sin(90°-\beta)\Leftrightarrow$
$\alpha=90°-\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta=90°$, tj. trougao je pravougli.

1183. Koristiti obrasce za komplementarne uglove.

1185. $A=1$.

1186. a) Iz sistema $2\sin\alpha+3\cos\alpha=3\wedge\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, nalazimo
$(\sin\alpha=0\wedge\cos\alpha=1)\vee\left(\sin\alpha=\frac{12}{13}\wedge\cos\alpha=\frac{5}{13}\right)$;

b) $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\alpha=\frac{4}{5}$; c) $\sin\alpha=\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

1187. m^2-2.

1188. Iz date jednakosti je:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)=\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=1-\frac{1}{4}\Rightarrow\sin\alpha\cos\alpha=\frac{3}{8},$$

pa je:

$$\sin^4\alpha+\cos^4\alpha=$$
$$(\sin^2\alpha)^2+(\cos^2\alpha)^2+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha=$$
$$(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2(\sin\alpha\cos\alpha)^2=1-2\left(\frac{3}{8}\right)^2=\frac{23}{32}.$$

1189. Za oštre uglove pravouglog trougla važi $\alpha+\beta=90°$, odakle je:
$\beta=90°-28°24'=61°36'$.
Iz definicije trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu je :
$\frac{a}{c}=\sin\alpha\Leftrightarrow a=c\sin\alpha\Leftrightarrow a=50\sin 28°24'$,
pa je: $5\approx 50\cdot 0{,}47562$ cm $\approx 23{,}78$ cm.
Slično je:
$\frac{b}{c}=\cos\alpha\Leftrightarrow b=50\cos 28°24'$,
pa je $b\approx 50\cdot 0{,}87965$ cm $\approx 43{,}98$ cm.

1190. Na osnovu Pitagorine teoreme je:

$$c=\sqrt{304^2+297^2}=\sqrt{92\,416+88\,209}=\sqrt{180\,625}=425\text{ cm}.$$

Kako je $\operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=\frac{304}{297}\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=1{,}02357\Rightarrow\alpha=45°40'$,
iz $\alpha+\beta=90°$ dobijamo $\beta=44°20'$.

1191. a) $a=1{,}662$ cm, $b=1{,}496$ cm, $\beta=42°$.

1192. a) $b=63$ cm, $\alpha=14°15'$.

1193. a) $c=53{,}12$ cm, $b=45{,}05$ cm.

1194. a) $b=380$ cm, $\alpha=34°39'$.

1195. a) $b=1{,}228$ cm, $c=2{,}123$ cm.

1196. $b=61{,}59$ cm, $\gamma=75°36'$.

1197. $\alpha=\beta=82°22'19''$, $\gamma=15°15'22''$.

1198. $a=15{,}886$ cm, $\alpha=66°36'$.

1199. Uočiti jednakokraki trougao čija je osnovica stranica pravouglog devetougla i krak poluprečnik opisanog kruga. Ugao pri vrhu ovog trougla je devetina punog ugla. Rešavanjem dobijamo $a=3{,}371$ cm, $R=3{,}884$ cm.

1200. $R=10{,}26$ cm, $r=9{,}758$ cm.

1201. $d_1=21{,}57$ cm, $d_2=10{,}52$ cm.

1202. 4,95 m.

1203. $d=\frac{800\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\approx 507{,}16\ m$.

1204. $\sqrt{72}$ km.

1205. $\alpha=52°13'39''$, $R=7137{,}69N$.

1206. 432,71 m.

IX GLAVA

9. LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE

9.1. Linearna jednačina sa jednom nepoznatom

1215. Nisu.

1217. Tvrđenje je tačno jer se data jednačina svodi na $0 \cdot x = 3$.

1218. Data jednačina je neodređena jer se svodi na oblik $0 \cdot x = 0$.

1219. Nisu, jer im se skupovi rešenja ne poklapaju.

1221. a) -27; b) neodređena; c) 7.

1222. a) 2; b) 1; c) $-\frac{1}{3}$

1223. a) -3; b) $-1{,}1$; c) nemoguća.

1224. $x = 10$.

1225. $x = -4$.

1226. $x = 12$.

1227. $x = 2$

1228. $x = 9$.

1229. $x = -3$.

1230. $x = 1{,}1$.

1231. a) 3; b) 13; c) $5\frac{1}{3}$; d) $\frac{1}{5}$.

1232. a) Nemoguća; b) 3; c) 7; d) 19.

1233. a) Neodređena; b) $\frac{5}{13}$; c) 3.

1234. a) 0,1; b) 20; c) 0,808.

1235. Data konjunkcija $x+3 \neq 0 \wedge x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x+3 \neq 0 \wedge (x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x-3 = 0$, odnosno $x = 3$,
tj. Rešenje date konjunkcije je $x = 3$;
b) $x = -1$; c) $x = -\frac{6}{5}$.

1236. a) Data jednačina $\frac{x-3}{x+1} = 0 \Leftrightarrow x-3 = 0 \wedge x+1 \neq 0$
$\Leftrightarrow x-3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$,
tj. rešenje date jednačine je $x = 3$.

1237. a) $x = -0{,}6$; b) $x = -\frac{1}{4}$; c) $x = 1$; d) $x = 12$.

1238. a) $y = 3$; b) $y = 9$; c) $\forall y \in R \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

1239. a) $a \in R \setminus \{0,2\}$; b) $x \in \emptyset$; c) $z = 3$.

1240. $x = -\frac{1}{2}, \left(|x| \neq \frac{3}{2}\right)$.

1241. $x = 3, \left(|x| \neq \frac{3}{2}\right)$.

1242. $x = -3, \left(|x| \neq \frac{5}{3}, x \neq 0\right)$.

1243. $x = 16, (x \neq 3, x \neq -4)$.

1244. $y = 22, (|y| \neq 2, y \neq -3)$.

1245. $y = -50, (y \neq 6, y \neq -1, y \neq -3)$.

1246. $t = \frac{5}{2}, (|t| \neq 4)$.

1247. Nema rešenje. Zašto?

1248. a) $x = -1$; b) $x = \frac{1}{3}$; c) $x = -8{,}5$; d) $x = \frac{9}{10}$.

1249. a) $y = -1$; b) $y = -\frac{1}{6}$; c) $y = 4$.

1250. a) Ako je $x < 0$, data jednačina:
$|x| + 2(x-3) = 6 \Leftrightarrow -x + 2x - 6 = 6 \wedge x < 0 \Leftrightarrow x = 12 \wedge x < 0$.
Ova konjunkcija je $\perp$, pa jednačina u ovom slučaju nema rešenja.
Ako je $x \geq 0$, data jednačina:
$|x| + 2(x-3) = 6 \Leftrightarrow x + 2x - 6 = 6 \wedge x \geq 0$
$\Leftrightarrow 3x = 12 \wedge x \geq 0$
$\Leftrightarrow x = 4 \wedge x \geq 0$.
Konjunkcija je tačna za $x = 4$; dakle rešenje date jednačine je $x = 4$.
b) $x = -2 \vee x = 6$; c) $x = 0 \vee x = 1$; d) $x = -5 \vee x = \frac{1}{3}$;

e) $0 \le x \le 1$; f) $-2 \le x \le 3$; h) $x_1 = 1 \vee x_2 = 3$; k) $x \ge 6$;

l) $x_1 = 1 \vee x_2 = \frac{11}{2}$; m) $x = -2 \vee x \ge 2$.

1251. a) $x \in [-5, 2]$; b) $x \in [7, +\infty)$; c) $x \in (-\infty, 5]$;

d) $x \in [4, +\infty)$; e) $x = 11 \vee x = -15$; f) $x = 24 \vee x = -12$.

1252. $x = \frac{4(7+4\sqrt{2})}{17}$.

1253. $x = \frac{3(3\sqrt{5}+2)}{41}$.

1254. $x = \frac{41-\sqrt{2}}{46}$.

1255. $x = \frac{49\sqrt{5}}{80}$.

1256. $x = -\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

1257. $x = \frac{5(7+\sqrt{6})}{43}$.

1258. $x = (12-7\sqrt{6})(1+\sqrt{2})$.

1259. $x = \frac{5\sqrt{10}+13}{2}$.

1260. a) $y = 3$; b) $y = \frac{1}{2}$; c) $y = \frac{1}{6}$; d) $y = 3$.

1261. a) $x = \frac{1}{2}$; b) $x = -2$.

1262. $x = 24$.

1263. $x = 2$.

1264. $x = 10$.

1265. $x = 24$.

1266. $x = 15$.

1267. $x = 20$.

1268. a) $x = 3$; b) $x = 24$.

1269. a) Data jednačina je ekvivalentna jednačini:
$(m-2)(m+2)x = -(m+2)$.
Za egzistenciju rešenja date jednačine u zavisnosti od realnog parametra postoje sledeće mogućnosti:
I slučaj. – Ako je $(m-2)(m+2) \neq 0$, tj.

$m \neq \pm 2$, Tada data jednačina ima broj $\frac{1}{2-m}$ kao jedinstveno rešenje.

II slučaj. – Za $m-2=0$, tj. $m=2$. Pošto smo za m dobili sasvim određenu vrednost, prethodno ćemo odrediti jednačinu koja odgovara toj vrednosti.
To je jednačina:
$(2-2)4x = -4$, tj. $0 \cdot x = -1$ i ona je nemoguća.

III slučaj. – Ako je $m+2=0$, tj. $m=-2$. Za tu vrednost parametra m data jednačina se svodi na jednačinu
$0 \cdot x = 0$, svaki realan broj je njeno rešenje.
b) Ako je $m \neq \pm 2$, $m \neq 0$, jednačina ima jedinstveno rešenje
$\frac{m-2}{m(m+2)}$.
Za $m=-2$ i $n=0$ jednačina se svodi na $0 \cdot x = 16$, odnosno $0 \cdot x = 4$; jednačina je nemoguća. Za $m=2$ jednačina se svodi na $0 \cdot x = 0$, pa je neodređena i ima bezbroj rešenja.

c) Ako je $m \neq 0$ i $m \neq 1$, jednačina ima jedinstveno rešenje $\frac{4}{m}$.

Za $m=0$ nemoguća, za $m=1$ neodređena.

d) Za $m \neq 3$ rešenje je $\frac{1}{m-3}$, a za $m=3$ jednačina je nemoguća.

1270. a) Za $a \neq 1$ rešenje je $x=-1$, a za $a=1$ neodređena;

b) za $a \neq 0$ rešenje je $x=4a$, za $a=0$, neodređena;

c) ako je $a \neq 0$ i $a \neq -1$, rešenje $x = \frac{a+1}{a^x}$, za $a=0$ nemoguća.

1271. a) Za $c \neq 0$ rešenje je $y=2c$, za $c=0$, neodređena;
b) za $a \neq 1$ rešenje je $y=a+1$, za $a=1$, neodređena;
c) za $b \neq c$ rešenje je $y=b+c$, za $b=c$, neodređena;
d) za $a \neq b$ rešenje je $y=b-a$, za $b=a$, neodređena.

1272. $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{b-a}$, $(|a|\neq b)$.

1273. $y=\dfrac{a^2+2b^2}{a-2b}$, $(a\neq 2b)$.

1274. $x=\dfrac{a^2+b^2-3ab}{b-a}$, $(b\neq a)$.

1275. $x=\dfrac{49a^2+68a+23}{38a+34}$.

1276. $x=\dfrac{1}{4a(a+1)}$, $(a\neq 0, a\neq -1)$.

1277. Za $a\neq 0$ jedinstveno rešenje $x=2a$, ako je $a=0$ jednačina je neodređena.

1278. Jednačina ima jedinstveno rešenje $x=3a$ za $a\neq 0$, a za $a=0$ jednačina je neodređena.

1279. Jednačina ima jedinstveno rešenje $x=\dfrac{36b}{25}$ za $b\neq 0$, a za $b=0$ neodređena je.

1280. a) Za $|x|\neq m$, rešenje $x=\dfrac{6m}{2}$;

b) ako je $a\neq b\neq 0, |a|\neq b$, rešenje jednačine je $x=\dfrac{(a-b)^2}{2b}$, za $a=b=0$ neodređena;

c) ako je $|x|\neq a, b\neq 0$ rešenje jednačine je $x=\dfrac{ab}{b-c^2}$, za $b=c$ jednačina je nemoguća, a ako je $b=c=0$, jednačina je neodređena.

d) za $|a|\neq b$ rešenje jednačine je $x=\dfrac{a^2}{b-a}$, a za $a=b=0$ jednačina je neodređena.

1281. a) Za $|a|\neq 2, a\neq 0$, rešenje jednačine je $x=\dfrac{8a-2}{a}$, za $a=0$ jednačina je nemoguća;

b) za $|n|\neq 3, n\neq 0$, rešenje jednačine $x=\dfrac{18n-3}{n}$, za $n=0$ jednačina je nemoguća;

c) ako je $a\neq 0, a\neq 2, a\neq -3$, rešenje jednačine je $x=\dfrac{6-a}{a+3}$, za $a=0$, $a=2$ i $a=-3$ jednačina je nemoguća;

d) ako je $|a|\neq\dfrac{1}{2}$, $a\neq 1$, rešenje jednačine je $x=\dfrac{4a^2}{1-a}$, a ako je $a=1$ jednačina je nemoguća.

1282. $x=a^2-b^2$, $(|a|\neq b, ab\neq 0)$.

1283. $x=\dfrac{a^2-b^2}{4}$, $(|a|\neq b)$.

1284. $x=-\dfrac{a}{2a+2}$, $(a\neq 0, x\neq 0, a\neq -1)$.

1285. $x=\dfrac{a^2(a+2)}{a+1}$, $(a\neq -1, a\neq 0)$.

1286. $x=2a$, $(x\neq 0, |x|\neq 2a-4b)$.

1287. $x=0, \left(a\neq 0, |x|\neq\dfrac{3a}{2}\right)$.

1288. $y=\dfrac{4-a}{a+2}$, $(|y|\neq 4, a\neq -2)$.

1289. $z=a+b$, (za $|z|\neq a, a\neq 0, a\neq -b$, a za $a=-b$ neodređena je).

1290. $x=\dfrac{3}{4}$, $(|a|\neq 2, a\neq 3)$.

1291. a) Ako je $x\neq a, x\neq b, a\neq b$ rešenje jednačine je $x=\dfrac{a+b}{2}$.

b) Posle sređivanja data jednačina ekvivalentna je konjunkciji $(a\neq 0\wedge x\neq -3x\neq 1)\wedge(1-6a)x=13a-4$.

Ako je $x\neq -3$, tj. $\dfrac{13a-4}{1-6a}\neq -3\Leftrightarrow a\neq -\dfrac{1}{5}$.

Za $x\neq 1$; $\dfrac{13a-4}{1-6a}\neq 1\Leftrightarrow a\neq\dfrac{5}{19}$.

Ako $a\notin\left\{0,\dfrac{1}{6},-\dfrac{1}{5},\dfrac{5}{19}\right\}\Rightarrow x=\dfrac{13a-4}{1-6a}$

jedinstveno rešenje jednačine. Za $a=\frac{1}{6}$ jednačina je nemoguća.

c) Posle svođenja data jednačina ekvivalentna je konjunkciji
$(m\neq 1\wedge x\neq -2\wedge x\neq -1)\wedge(4m-1)x=5-8m.$

Za $x\neq -2$ tj. $\frac{5-8m}{4m-1}\neq -2\Rightarrow m\neq -3\Rightarrow m\neq\varnothing.$

Za $m\neq -1, \frac{5-8m}{4m-1}\neq -1\Leftrightarrow m\neq 1$. Dakle, ako $m\notin\left\{1,\frac{1}{4}\right\}$ jednačina ima jedinstveno rešenje $x=\frac{5-8m}{4m-1}$. Ako je $m=1$, $m=\frac{1}{4}$ jednačina je nemoguća, nema rešenja.

d) Ako je $a\neq 2$, rešenje jednačine je $x=\frac{a+3}{2(a-2)}$, a za $a=2$ jednačina je nemoguća.

1292. $v=\frac{w(n-M)}{M-n}, (v\neq w, n\neq M).$

1293. $t=\frac{p(R+r)}{r(p-r)}, (r\neq p\neq 0, r\neq R).$

1294. $s=\frac{P-r^2\pi}{r\pi}, (r\neq 0).$

1295. $r=\frac{3v+h^3}{3h^2}, (h\neq 0).$

1296. $x=\frac{1}{2}(m-1)^2.$

1297. $x=\frac{1}{2}ab.$

1298. $x=2n.$

1299. $x=2n+1$

1300. $x=\frac{1}{2}.$

1301. $x=0.$

1302. Za $b\neq 0$ i $a\neq c$ rešenje $x=\frac{ac}{a-b}$, za $b=0$ jednačina je neodređena, a za $a=0$ nemoguća.

1303. a) Za $a\neq 0$, $x=\frac{4(a+1)}{a^2+2a+2}$;

b) za $a>-1$, jer je $a^2+2a+2=(a+1)^2+1>0$ za svako a;

c) $x=0$ za $a=-1$.

1304. a) Za $m\neq 0$ i $m\neq 2$ rešenje $x=m+1$;

b) za $n\neq p\neq 0$ i $|x|\neq p$ rešenje $x=\frac{np}{m-n}, (m\neq n).$

1305. Data jednačina je ekvivalentna jednačini:

$$\left(\frac{x-a}{a+b}-c\right)+\left(\frac{x-ac}{a+c}-b\right)+\left(\frac{x-bc}{b+c}-a\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-ab-ac-bc}{a+b}+\frac{x-ac-bc-ab}{a+c}+\frac{x-bc-ab-ac}{b+c}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-ab-ac-bc)\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x-ab-ac-bc=0\wedge\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}\neq 0.$$

Odavde izlazi da je rešenje date jednačine:
$x=ab+ac+bc.$

Ako je $\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=0$, data jednačina postaje identitet i zadovoljena je za svako x.

1306. Data jednačina ekvivalentna je jednačini:

$$\left(\frac{x-a}{bc}-\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ac}-\frac{1}{a}-\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{x-b}{ab}-\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow (x-a-b-c)\left(\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\right)=0.$$

Ako je $abc\neq 0$, $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{ab}\neq 0$, rešenje date jednačine je $x=a+b+c.$

1307. Data jednačina je ekvivalentna jednačini:

$$\left(\frac{a+b-x}{c}+1\right)+\left(\frac{a+c-x}{b}+1\right)+\left(\frac{b+c-x}{a}+1\right)=$$

$$=4-\frac{4x}{a+b+c},\Leftrightarrow (a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)-4\frac{a+b+c-x}{a+b+c}=0$$

$$(a+b+c-x)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=a+b+c\wedge\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{4}{a+b+c}\neq 0.$$

1308. Slično prethodnom zadatku data jednačina ekvivalentna je jednačini:

$$\left(\frac{x+b}{a+b}-\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{x-b}{a-b}-\frac{x}{a}\right)+\left(\frac{x-b}{a^2-b^2}-\frac{b-x}{(a+b)^2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{ab-bx}{a(a+b)}-\frac{ab-bx}{a(a-b)}-\frac{2(ab-bx)}{(a+b)^2(a-b)}=0$$

$$\Leftrightarrow (ab-bx)\left(\frac{1}{a(a+b)}-\frac{1}{a(a-b)}-\frac{2}{(a+b)^2(a-b)}\right)=0.$$

Odatle je $ab-bx=0\Leftrightarrow x=a$ za $ab\neq 0$ i $a\neq\pm b$.

1309. $x=\frac{a-2}{a+2}$.

1310. $x=\frac{a+b}{3}$.

1311. $x=\frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$.

1312. Za $m\neq 3$, $x=\frac{-1}{m-3}$, za $m=3$ neodređena a za $m=-3$ nemoguća.

1313. $x=\frac{2m+2}{m-2}$.

1314. $x=1$.

1315. $x=3$.

1316. $x=0$.

1317. $x=\frac{7}{8}$.

1318. $x=6(a+b)$, ($|x|\neq a+b$). **Primedba.** U zadacima od 1318 do 1332, treba koristiti smenu za 1318, $a+b=c$, za 1319, $m+n=b$ itd.

1319. Za $a\neq\pm(m+n)$ rešenje jednačine je $x=\frac{a^2}{m+n-a}$.

1320. Za $|b+c|\neq 2$, $a\neq 0$ rešenje jednačine je $x=\frac{8(b+c)-2}{b+c}$, za $b+c=0$, jednačina je nemoguća.

1321. Za $|a+b|\neq 3, a+b\neq 0$ rešenje jednačine je $x=\frac{18(a+b)-3}{a+b}$, za $a+b=0$ jednačina je nemoguća.

1322. Ako je $b+c\neq 0$, $b+c\neq 2$, $b+c\neq -3$ rešenje jednačine je $x=\frac{6-c-b}{c+b+3}$.

1323. Ako je $|m+n|\neq\frac{1}{2}$, $m+n\neq 1$, rešenje jednačine je $x=\frac{4(m+n)^2}{1-m-n}$, a ako je $m+n=1$ jednačina je nemoguća.

1324. Ako je $a\neq 0$, $x\neq a$, $x\neq b+c$, $a+b+c\neq 0$, $b\neq -c$, rešenje je $x=\frac{a+b+c}{2}$.

1325. Ako je $m+n\neq 2$ i $m+n\neq 3$ rešenje jednačine je $x=\frac{m+n+3}{2(m+n-2)}$, a za $m+n=2$ jednačina je nemoguća.

1326. Za $|a+b|\neq 1$ i $a+b\neq 0$ rešenje jednačine je $x=\frac{1}{2}(a+b-1)^2$.

1327. Za $|m+n|\neq x$ rešenje je $x=\frac{m+n}{2b}$.

1328. Ako je $|x|\neq(m+n)^2$ rešenje je $x=\frac{1}{2}$.

1329. Za $|x|\neq\frac{3}{2}(a+b)$ i $a+b\neq 0$ rešenje jednačine je $x=\frac{3(a+b)}{8}$.

1330. Za $|m+n|\neq\frac{5}{2}$, $m+n\neq 0$ i $m+n\neq\frac{2}{3}$, $x=\frac{2(m+n)+3}{2(m+n)-3}$.

1331. Za $|m+n|\neq\frac{2}{3}$ i $m+n\neq -1$, $x=\frac{1}{3(m+n+1)}$.

1332. Za $a+b\neq\pm 3$, jednačina ima jedinstveno rešenje $x=-\dfrac{1}{a+b+3}$.

1333. Data jednačina ekvivalentna je jednačini:

$$\left(\frac{x-a}{b+c}-1\right)+\left(\frac{x-b}{c+a}-1\right)+\left(\frac{x-c}{a+b}-1\right)+3-\frac{3x}{a+b+c}=0\Leftrightarrow$$

$$(x-a-b-c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}-\frac{3}{a+b+c}\right)=0.$$

Odatle se dobija rešenje jednačine $x=a+b+c$.

1334. Data jednačina ekvivalentna je lancu ekvivalencija

$$(b-c)\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x-d}\right)-(a-d)\left(\frac{1}{x-b}-\frac{1}{x-c}\right)=0\Leftrightarrow$$

$$\frac{(b-c)(a-d)}{(x-a)(x-d)}-\frac{(a-d)(b-c)}{(x-b)(x-c)}=0\Leftrightarrow(x-b)(x-c)=(x-a)(x-d)\Leftrightarrow$$

$$(a+d-b-c)x=ad-bc\Leftrightarrow x=\frac{ad-bc}{a+d-b-c},$$

$(x\neq a,b,c,d$ i $a+b\neq b+c)$.

1335. $x=m,\ (m\neq 0)$.

1336. $x=ab,\ (|a|\neq b)$.

1337. $x=b,\ (ab\neq 0)$.

1338. $x=\dfrac{a^2+2b^2}{a+b},\ (|a|\neq b)$.

1339. $x=\dfrac{2}{a+b},\left(x\neq\dfrac{1}{a},x\neq\dfrac{1}{b},a+b\neq 0\right)$.

1340. $x=-91$.

1341. Za $x\neq-\dfrac{1}{a}$ rešenje je $x=\dfrac{4a}{a^2+1}$.

1342. $x=-2a,\ (x\neq 0,\ x\neq\pm a)$.

1343. $x=a,\ (a\neq 0,\ x\neq 0)$.

1344. $x=a+b+c$, (data jednačina je ekvivalentna jednačini

$$\left(\frac{x-a}{b+c}-1\right)+\left(\frac{x-b}{c+a}-1\right)+\left(\frac{x-c}{a+b}-1\right)=0).$$

1345. $x=\dfrac{1}{a^2+a+1},\ (x\neq\pm 1)$.

1346. $x=b,\ (x\neq 0,\ a\neq 0,\ b\neq 0)$.

1347. $x=ab,\ (a\neq\pm b)$.

1348. $x=a+b+c$. Uputstvo. Brojilac napisati u obliku

$$\left(\frac{2a}{x-2a}+1\right)+\left(\frac{2b}{x-2b}+1\right)+\left(\frac{2c}{x-2c}+1\right).$$

1349. $x=\dfrac{2a}{a+b},\ (a\neq b,\ x\neq a,\ x\neq b)$.

1350. $x=1$, za $a\neq b$; za $a=b$ neodređena.

1351. Za $a\neq c$, $x=\dfrac{a+c}{a^2+ac+c^2}$, za $a=c$ neodređena.

1352. Za $a\neq 0$, $x=\dfrac{3}{2a^2}$, za $a=0$ neodređena.

1353. Neka je $x-a=t$, $x-b=u$, tada data jednačina se svodi na jednačinu
$u^2-3u=t^2-3t$. Ako se vratimo na nepoznatu x dobija se $2(a-b)x=(a-b)(a+b+3)$. Ako je $a\neq b\neq\pm 1$, jedinstveno rešenje

$x=\dfrac{a+b+3}{2}$. Ako je $a=b$, neodređena.

9.2. Primena linearnih jednačina sa jednom nepoznatom na rešavanje raznih problema

1354. $x:(45-x)=7:8$; 21 i 24.

1355. $\dfrac{x}{47-x}=2+\dfrac{5}{47-x}$; 14 i 33.

1356. $\dfrac{3}{5}$.

1357. Neka je imenilac razlomka x, tada je brojilac $\frac{2}{3}x$. Na osnovu uslova zadatka je:

$$\frac{\frac{2}{3}x+5}{x+15}=\frac{1}{3}\quad 2x+15=x+15\quad x=0.$$

Razlomak koji zadovoljava postavljeni uslov ne postoji.

1358. 15,4; 1,54.

1359. 25.

1360. Jednačina koja izlazi iz postavljenog uslova je neodređena, pa su traženi brojevi: 12, 22, 32, 42, 52, 62, 72, 82, 92.

1361. 36.

1362. $45+x=2(x+22)$; kroz jednu godinu.

1363. $(x-5)4=x+18-5$; majka ima 29 godina, kćerka 11 godina.

1364. $(x+1)(x+2)-(x-1)(x-2)=600 \Leftrightarrow x=100$.

1365. Neka je traženo rastojanje x km. Tada je rastojanje po etapama:

$\frac{x}{2}$ km $\frac{x}{3}$ km i $\frac{x}{6}$ km, a vreme po etapama je:

$\frac{\frac{x}{2}}{80}$; $\frac{\frac{x}{3}}{60}$ i $\frac{\frac{x}{6}}{40}$. Po uslovu zadatka je:

$$\frac{x}{160}+\frac{x}{180}+\frac{x}{240}=23,$$

odakle nalazimo da je $x=1440$ km.

1366. Neka je srednja brzina jednaka x km/č, a rastojanje između A i B, s kilometara. Tada je:

$$\frac{s}{90}+\frac{s}{60}=\frac{2s}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{90}+\frac{1}{60}=\frac{2}{x} \wedge s\neq 0,$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{2\cdot 180}{5}=72 \text{ km/č}.$$

1367. Ako je prva kosmička brzina x km u sekundi, tada je druga $(x+3,3)$ km u sekundi, a treća $(x+3,3+5,2)$ km u sekundi. Na osnovu pretpostavke sledi: $x(x+8,5)=(x+3,3)^2+4,12$, odakle nalazimo da je $x=7,9$ km u sekundi, tj.: prva kosmička brzina jednaka je 7,9 km/s, druga kosmička brzina jednaka je 11,2 km/s, treća kosmička brzina jednaka je 16,4 km/s.

1368. $5t+6t=55$, posle 5 časova.

1369. $60t=80(t-2,5)$; u 16 h posle 300 km.

1370. $30t+22t=728$; posle 14 sekundi.

1371. $\left(\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{x}\right)5=1$, 30 dana.

1372. $\left(\frac{1}{4\frac{1}{3}}+\frac{1}{x}\right)3=1$; 9 časova i 45 minuta.

1373. $\left(\frac{1}{1\frac{1}{3}}-\frac{1}{2\frac{1}{6}}\right)x=1$; 3 časa i 28 minuta.

1374. $x+\left(x+20\frac{x}{100}\right)+\left(6\frac{x}{5}+6\frac{x}{5}\cdot\frac{20}{100}\right)=14\,500$;

I. 4 000 d; II. 4 800 d; III. 5 760 d.

1375. I. 6 000; II. 8 000; III. 10 000; IV. 12 000.

1376. 3 cm.

9.3. Linearna funkcija i njen grafik

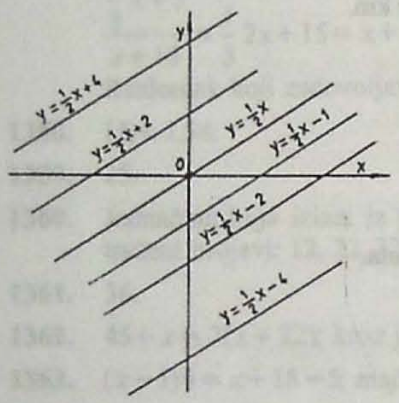
1378. Antidomen
$B=\{1,3,5,7,9\}$; $f=\{(1,1),(2,3),(3,5),(4,7),(5,9)\}$.

1379. $f(-2)=-5$; $f(0)=-8$; $f(3-f(0))=1$;
$f(f(x))=3(3x-2)-2=9x-8$;
$f(f(-x))=3(3(-x)-2)-2=-9x-8$.

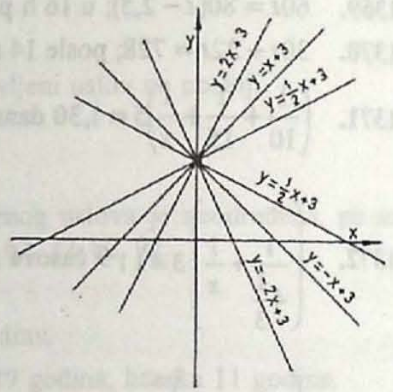
1380. $\left.\begin{array}{l} f(b)=ab+b \\ f(f(0))=a(a\cdot 0+b)+b=ab+b \end{array}\right\} \Rightarrow f(b)=f(f(0))$.

1381. $f(f(x))=3-(3-x)=x$.

1382. a) Grafici svih funkcija zaklapaju isti ugao sa x – osom a imaju različite odsečke na y – osi (sl. 87);



Sl. 87



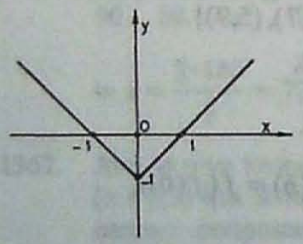
Sl. 88

b) imaju isti odsečak na y – osi, a različite ugaone koeficijente (sl. 88).

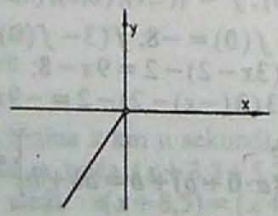
1384. a) Za $x<0$, $y=-x-1$, a za $x\geq 0$, $y=x-1$. Promene date funkcije su prikazane tabelom, a grafik ima oblik (sl. 89).

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y	$+\infty$	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	$+\infty$

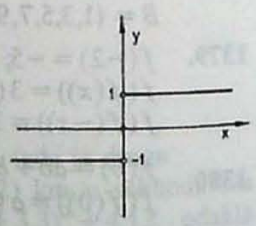
e) grafik je prikazan na slici 90;
f) grafik je prikazan na slici 91.



Sl. 89



Sl. 90



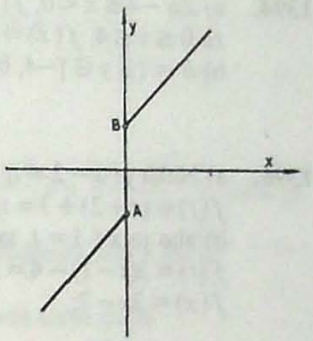
Sl. 91

1385. Ako je $x<0$, tada je

$$y=x-\frac{x}{x}=x-1.$$

Ako je $x>0$, tada je

$$y=x+\frac{x}{x}=x+1.$$



Sl. 92

Promene date funkcije prikazane su tabelom:

x	$-\infty$			0		$+\infty$
y	$+\infty$	↗	-1	||	$+1$ ↗	$+\infty$

a grafik je prikazan na slici 92. Tačke A i B ne pripadaju grafiku jer za $x=0$ funkcija nije definisana.

1386. $m=2$, $y=2x-4$.

1387. $k=4$, $y=2x-3$.

1388. $a=2$, $y=-2x+4$.

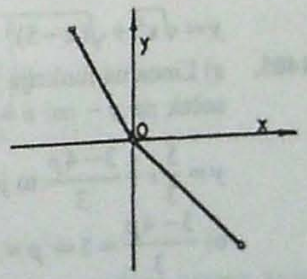
1389. $m=5$.

1390. $m=4$, $y=2x-3$.

1391. $a=-1$, $f(x)=-3x+5$.

1392. a) Za $x<-1$ i $x>1$, $y=2x-2$;
za $-1<x<1$, $y=-2$;
b) ako je $x<0$, $y=2x-1$, ako je
$0\leq x<1$, $y=-1$, i za $x\geq 0$, $y=1$;
c) za $x<-1$, $y=-1$,
za $-1\leq x<1$, $y=x$ i za $x\geq 1$, $y=1$.

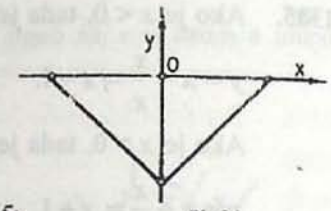
1393. $|x|-2x=\begin{cases}-3x, & (-2\leq x<0)\\ -x, & (0\leq x\leq 4)\end{cases}$
(sl. 93);



Sl. 93

b) $B=\{y\,|-4\leq y\leq 6\}$.

1394. a) Za $-4 \le x < 0$, $f(x) = -x - 4$;
za $0 \le x \le 4$, $f(x) = x - 4$, (sl.94);
b) $B = \{y \mid y \in [-4, 0]\}$.



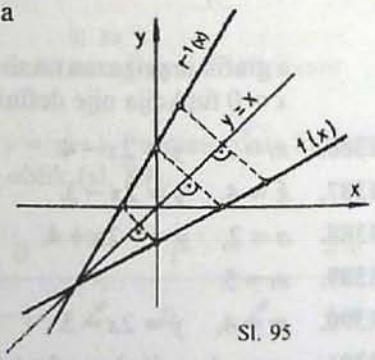
Sl. 94

1396. a) Neka je $x - 2 = t$, tada je
$f(t) = (t+2) + 3 = t + 5 \Rightarrow f(x) = x + 5$;
b) ako je $x + 1 = t$, tada je
$f(t) = 3(t-1) - 4 = 3t - 7 \Rightarrow$
$f(x) = 3x - 7$;

c) $f(x) = \frac{x}{2} + 1$.

1397. a) Primenom formule $f^{-1}(f(x)) = x$ dobija se $f^{-1}\left(\frac{1}{2}x - 1\right) = x$.

Rešavanjem ove funkcionalne jednačine po f^{-1} dobijamo traženu funkciju. Smenom $\frac{1}{2}x - 1 = t$ dobija se $x = 2t + 2$; tada je
$f^{-1}(t) = 2t + 2$ (sl. 95)
b) $f^{-1}(x) = -x + 3$;
c) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2$;
d) $f^{-1}(x) = -x + 2$;
e) $f^{-1}(x) = -3x - 3$;
f) $f^{-1}(x) = 5 - x$.



Sl. 95

1398. Primenom definicije kvadratnog korena dobija se:

$y = \sqrt{x^2} + \sqrt{(x-5)^2} = |x| + |x-5|$ itd.

1405. a) Linearna funkcija $y = kx + n$ sadrži koordinatni početak ako je odsečak na y – osi $n = 0$. Kako se data funkcija svodi na oblik

$y = \frac{5}{3}x + \frac{3-4p}{3}$ to je $\frac{3-4p}{3} = 0 \Leftrightarrow p = \frac{3}{4}$.

b) $\frac{3-4p}{3} = 5 \Leftrightarrow p = -3$.

1406. a) Ako je $2p + 1 = 0 \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}$, prava je $y = -\frac{4}{13}$;

b) $3p - 5 = 0 \Leftrightarrow p = \frac{5}{3}$, $x = -\frac{20}{13}$.

1407. a) Data funkcija je oblika $y = \frac{3m-2n+5}{m-n}x + \frac{2m-5n+1}{m-n}$, treba je uporediti sa jednačinom simetrale I kvadranta $y = x$, pa je:

$\frac{3m-2n+5}{m-n} = 1 \wedge \frac{2m-5n+1}{m-n} = 0$, odavde sledi da je

$m = -3$, $n = -1$.

b) $m = -\frac{11}{7}$, $n = -\frac{3}{7}$.

1408. $A = 6, B = -6$.

1409. $S(1,-3)$.

1410. $y = x - 1$.

1411. $m = 4$, $y = 2|x| - 3$.

1412. $m = 2$, $y = -2|x| + 4$.

9.4. Sistem linearnih jednačina

1413. Da.

1414. Da.

1415. a) $3, \frac{1}{3}$; b) (5, 2); c) (3, 1); d) (4, 7).

1416. a) (−2, 3); b) (3, − 2);
c) sistem neodređen $\left(\left(\alpha, \frac{-\alpha-1}{5}\right), \alpha \in R\right)$;
d) sistem neodređen $((\alpha, 5-2\alpha), \alpha \in R)$.

1418. a) (8,−4); b) (5, 2); c) (5, 7);
d) sistem je nemoguć.

1419. (−4, 1).

1420. Sistem ima bezbroj (mnogo) rešenja, tj. sve uređene parove koje zadovoljavaju jednačinu $4x - 3y - 2 = 0$.

1421. (1,3).

1422. $\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$

1423. $\left(13,\frac{12}{7}\right)$.

1424. (4, 3).

1425. (0, −2).

1426. $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{2}\right)$.

1427. a) (3, 4); b) (5,−3); c) (8, 5); d) (3, 2).

1428. a) Nemoguć; b) (1,−3).

1429. (2, 1).

1430. (3, 2).

1431. Svi uređeni parovi koji pripadaju pravoj $5x-2y=11$ su rešenja datog sistema.

1432. $\left(3,\frac{1}{2}\right)$.

1433. (3, 2).

1434. (5, 10).

1435. (3, 2).

1436. (5, 4).

1437. Sistem je neodređen, svaki uređeni par koji pripada pravoj $x+5y=5$, je rešenje sistema.

1438. a) Uvođenjem novih nepoznatih, na primer $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$, transformiše se u ekvivalentni sistem:
$14u+24v=10 \wedge 7u-18v=-5$,
odakle se rešenje dobija Gausovom metodom:
$u=\frac{1}{7}, v=\frac{1}{3}$, a tada je $\frac{1}{x}=\frac{1}{7}$ i $\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$,
pa konačno dobijamo rešenje sistema (7, 3);
b) $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{5}\right)$;

c) smena: $\frac{1}{x+2y}=u; \frac{1}{2x+y}=v$, (1, 2);

d) smena: $\frac{1}{x+y-1}=u; \frac{1}{x-y+1}=v$; (5, 4).

1439. Smena: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$, (1,5; 2,5).

1440. Smena: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v, (\frac{1}{5};\frac{1}{3})$.

1441. Smena: $\frac{1}{x-2}=u, \frac{1}{y-3}=v$, (4; 4).

1442. (7, 3).

1443. Smena: $\frac{1}{2x-3y}=u, \frac{1}{3x-2y}=v$, (5, 3).

1444. (3, 1).

1445. $\left(2,\frac{1}{2}\right)$.

1446. Smena: $\frac{1}{3x-2y-2}=u, 5x-4y+1=v$, (5, 4).

1447. Smena: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v$, (a, b).

1448. $(a+b, a-b)$.

1449. (5, 2).

1450. (−2,−5).

1451. (2, 1)

1452. Smena: $\frac{1}{2x+y-1}=u, \frac{1}{2x-y+3}=v$, (1, 1).

1453. (3,−1).

1454. (5, 3).

1455. (21,−2).

1456. (−14, 1).

1457. (5, 3).

1458. Sistem je nemoguć, nema rešenja.

1459. $(3, 2)$; $(-5, 2)$.

1460. $\left(\frac{3}{2}, \frac{11}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{11}{2}\right)$.

1461. $\left(\frac{44}{7}, -\frac{39}{7}\right)$.

1462. Ako je $x \geq 0$, $y \geq 0$ tada sistem postaje $x + y = 1$, $x + y = 1$. Rešenja su svi uređeni parovi čiji je zbir članova 1. Za $x < 0$ i $y < 0$ sistem postaje $x + y = -1$, $x + y = -1$. Rešenja su svi uređeni parovi čiji je zbir članova -1.

1463. $(2, 1)$.

1464. $\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$; $(-1, -1)$; $(1, 1)$ $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$.

1465. $(5, 1)$.

1466. $(2, 1)$; $(8, 13)$.

1467. a) $(2, 3)$;
b) $(4, 1)$;
c) da bismo izbegli rad sa razlomcima, korisno je izmeniti redosled jednačina i za prvu jednačinu, ako takva postoji, uzeti onu jednačinu u kojoj je koeficijent uz prvu nepoznatu 1 ili -1.
S obzirom na ovu napomenu, umesto datog sistema uzima se ekvivalentni sistem:
$x + y = -1$, $2x + y = 0$, $3x - 2y = 7$.
Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -2 i dodamo je drugoj, a zatim prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo trećoj, dobijamo ekvivalentni sistem:
$x + y = -1$, $-y = 2$, $-5y = 10$.
Iz druge i treće jednačine dobijamo $y = -2$. Zamenom -2 umesto y iz prve jednačine nalazimo $x = 1$. Prema tome, uređena dvojka $(1, -2)$ je jedinstveno rešenje datog sistema;
d) primenom Gausovog algoritma dati sistem ekvivalentan je sistemu $x + y = -1 \wedge -y = 2 \wedge -3y = -3$. Prema tome, za y se dobije iz druge jednačine $y = -2$, a iz treće $y = 1$, što je istovremeno nemoguće; dakle sistem je nemoguć.

1468. a) Ako se prva jednačina pomnoži sa 2 i doda drugoj, zatim se prva pomnoži sa 3 i doda trećoj, dobija se ekvivalentni sistem:

$$(1)\quad \begin{aligned} x + 2y - 5z &= 6, \\ 5y - 8z &= 17, \\ 9y - 19z &= 26. \end{aligned}$$

Eliminacijom y iz druge i treće dobija se jednačina $23z = 23$, pa je sistem (1) ekvivalentan trougaonom sistemu:

$$(2)\quad \begin{aligned} x + 2y - 5z &= 6, \\ 5y - 8z &= 17, \\ 23z &= 23. \end{aligned}$$

Iz sistema (2), sukcesivno iz treće jednačine, dobije se $z = 1$, iz druge $y = 5$ i, na kraju, iz prve $x = 1$; dakle rešenje datog sistema je uređena trojka $(1, 5, 1)$;

b) $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$; c) $(4, 5. 6)$; d) $(4, 3, 2)$; e) $(1, 2, 3)$;

f) $(2, 1, -3)$; g) $(10, 5, 2)$.

1469. a) $(5, 11, 17)$; b) $(4, 1, -1)$; c) $(1, -2, 3)$; d) $\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$.

1470. $(5, 3, -1)$.

1471. $(-5, 8, 7)$.

1472. Sistem je neodređen.

1473. $(11, 4, 5)$.

1474. $(12, 24, 36)$.

1475. $(-10, 30, 20)$.

1476. $(2, 3, 1)$.

1477. $(2, 1, -1)$.

1478. $(-1, 6, 8)$.

1479. $(1, 2, 5)$.

1480. $(9, 7, 3)$.

1481. $(6, 2, 1)$.

1482. $(6, 2, -2)$.

1483. (6, 4, 2).

1484. (1, 10, 100).

1485. (3, 5, 7).

1486. (−1, 1, 2).

1487. (6, 4, 2).

1488. (4, 2, 12)

1489. (51, 76, 1).

1490. (0, 1, 3).

1491. (3, 1, 1).

1492. (99; 112,5; 504).

1493. $\left(a-\frac{m(Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}, b-\frac{n(Aa+B+Cc)}{Am+Bn+Cp}, c-\frac{p(Aa+Bb+Cc)}{Am+Bn+Cp}\right)$.

1494. (5, 10, 15).

1495. (9, 10, 17).

1496. (1, 4, 7).

1497. a) (2, 1, −1); b) (−1, 6, 8); c) (−2, 2, 3); d) (4, 5, 6).

1498. a) (5, 6, 7); b) (7, 6, 5); c) (1, 2, 3); d) (4, 3, 5);
e) (2, 3, 4); f) (2, 3, 4).

1499. a) Smenom $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v, \frac{1}{z}=t$ dati sistem ekvivalentan je sistemu:

$6u+4v+5t=4 \wedge 3u+8v+5t=4 \wedge 9u-12v-10t=4 \Leftrightarrow$

$u=\frac{1}{3} \wedge v=\frac{1}{4} \wedge t=\frac{1}{5}$.

Rešenje datog sistema je uređena trojka (3, 4, 5);

b) (6, 12, 8); c) (4, 3, 1); d) (4, 3, 2).

1500. (4, 2, 1), (Smena: $\frac{1}{x}=u, \frac{1}{y}=v, \frac{1}{z}=t$).

1501. (1, 3, 5).

1502. Smena: $\frac{1}{2x+3y}=u, \frac{1}{3y+4z}=v, \frac{1}{3x+4z}=t$, (4, 2, 1).

1503. Dati sistem ekvivalentan je sistemu:

$\frac{4}{z}+\frac{2}{y}-\frac{2}{x}=-3 \wedge \frac{3}{z}-\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=-1 \wedge \frac{1}{z}+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}=1.$

Zatim smena: $\frac{1}{z}=u, \frac{1}{y}=v, \frac{1}{x}=t$, (1, 2, −2).

1504. (−1, 1, 2).

1505. Data produžna proporcija ekvivalentna je sistemu:

$\frac{3}{xy}+\frac{3}{xz}-\frac{3}{yz}=7 \wedge \frac{3}{xy}-\frac{3}{xz}+\frac{3}{yz}=11 \wedge -\frac{3}{xy}+\frac{3}{xz}+\frac{3}{yz}=5.$

Neka je $\frac{1}{xy}=u, \frac{1}{xz}=v, \frac{1}{yz}=t$, tada je $\frac{1}{xy}=3, \frac{1}{xz}=2, \frac{1}{yz}=\frac{8}{3}$,

odatle $x=\pm\frac{2}{3}, y=\pm\frac{1}{2}, z=\pm\frac{3}{4}$.

1506. (3, 2, 1).

1507. a) (8, 12, 4, 8); b) (1, 1, 1, 1); c) (1, −1, 2, −1); d) (1, 2, 3, 4).

1508. Izraz $ab-cd$ (a, b, c, d brojevi ili izrazi) dogovorno se zapisuje u obliku kvadratne šeme $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix}$ i naziva determinanta drugog reda

(znači: $\begin{vmatrix} a & d \\ c & b \end{vmatrix} = ab-cd$).

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5-2\cdot 2=5-4=1$;

b) 4; c) −2; d) 0; e) a^2-b^2; f) a^2-b^2-1; g) a^2+b^2;
h) x^3-y^3;

1509. a) $x=\frac{\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{4+5}{2+1}=\frac{9}{3}=3$,

$y=\dfrac{\begin{vmatrix}2&4\\1&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&-1\\1&1\end{vmatrix}}=\dfrac{10-4}{2+1}=\dfrac{6}{3}=2$, rešenje sistema je uređeni par $(3,2)$;

b) $\left(4,\dfrac{1}{2}\right)$; c) $(2,-1)$; d) $(3,1)$.

1510. a) Ako je $m\neq 2$ rešenje sistema $\left(\dfrac{1}{2-m},\dfrac{2(1-m)}{2-m}\right)$, a za $m=2$, sistem je nemoguć;
b) ako je $|a|\neq 4$, sistem ima jedinstveno rešenje $\left(\dfrac{1}{a+4},\dfrac{2}{a+4}\right)$, za $a=4$ neodređen, a za $a=-4$ nemoguć;
c) ako je $ab\neq 0$ rešenje sistema $(3b,-2a)$, a za $a=b=0$ sistem je neodređen;
d) za $a\neq 0$ jedinstveno rešenje $(5,-a)$, za $a=0$ sistem je neodređen.

1511. a) Za $m\neq 0$ i $n\neq 0$ jedinstveno rešenje (m,n) a za $m=n=0$ neodređen;
b) sistem ima jedinstveno rešenje $\left(\dfrac{3m+8}{m^2+6},\dfrac{4m-9}{m^2+6}\right)$;
c) ako je $m\neq 0$ i $m\neq 3$ jedinstveno rešenje:
$\left(\dfrac{m+2}{m},\dfrac{m+1}{m-3}\right)$, za $m=0$ i $m=3$ sistem je nemoguć;
d) za $a+b\neq 0$ jedinstveno rešenje $\left(\dfrac{1}{a+b},\dfrac{b^2}{a+b}\right)$, a za $a+b=0$ sistem je nemoguć;
e) za $a\neq 9$ jedinstveno rešenje $(-a-11,a+9)$, za $a=9$ sistem je neodređen;
f) za $a\neq -6$ jedinstveno rešenje $(10-a,a-6)$, za $a=-6$ neodređen.

1512. b) Za $|a|\neq b$ jedinstveno rešenje $\left(\dfrac{a^2}{a-b},\dfrac{b}{b-a}\right)$; za $a=b$ sistem je nemoguć, a za $a=-b$ neodređen;
c) za $|a|\neq b$ rešenje $\left(\dfrac{a}{a-b},\dfrac{b}{a+b}\right)$; $|a|=b$ neodređen;
d) za $|a|\neq 3b$ i $ab\neq 0$ rešenje je $(a+3b,a-3b)$.

1513. $(a,-a)$.

1514. $(a-2b+3c,a+2b-3c)$.

1515. $\left(\dfrac{abc}{ab+ac+bc},\dfrac{abc}{ab+ac+bc}\right)$.

1516. $\left(\dfrac{a}{a-b},\dfrac{b}{a+b}\right)$.

1517. $(a^4+a^2b^2+b^4,-ab(a^2+b^2))$.

1518. $\left(-b^2,\dfrac{b(a^2+b^2)}{a}\right)$.

1519. $\left(\dfrac{1}{a},\dfrac{b}{a}\right)$, $(a\neq 0)$.

1520. $(a-b,a+b)$, $(ab\neq 0)$.

1521. $\left(a+b,\dfrac{a}{b}\right)$, $(ab\neq 0)$.

1522. $(a,a+b)$.

1523. $\left(\dfrac{a}{a+b},\dfrac{b}{a+b}\right)$, $(a\neq 0,a\neq b)$.

1524. $(a-b,b-c)$.

1525. $\left(\dfrac{a^4}{(1+a)(1+a^2)},\dfrac{a^3(1+a+a^2)}{(1+a)(1+a^2)}\right)(a\neq 0,a\neq 1)$.

1526. $\left(\dfrac{a^3+b^3}{2b^2},\dfrac{a^2+ab-2b^2}{2b}\right)(a=0,b\neq 0)$.

1527. $\left(ab,\dfrac{a^3-b^3}{a+b}\right)$.

1528. $\left(\dfrac{a^2(a^3+a^2-1)}{a^2-a+1},\dfrac{a^2(a^3-a^2-1)}{a^2-a+1}\right)$, (smena: $x+y=u$, $x-y=v$).

1529. $(a,-a)$.

1530. Dati sistem ekvivalentan je sistemu:

$$\frac{x-c}{a+b}-1+\frac{y+b}{a+c}-1=0 \wedge \frac{y+b-a-c}{a-b}+\frac{x-b-a-c}{b+c}=0.$$

Rezultat: $(a+b+c, a+c-b)$.

1531. Iz prve jednačine koristeći osobinu proporcije: ako je $\frac{m}{n}=\frac{p}{q}$, onda je $\frac{m+n}{m-n}=\frac{p+q}{p-q}$, dobija se $\frac{2x}{2y}=\frac{a+b-c}{a+c-b} \Leftrightarrow x=\frac{a+b-c}{a+c-b}y$.

Zamenom x u drugoj jednačini nastaje lanac ekvivalencija

$$\frac{\frac{a+b-c}{a+c-b}y+c}{y+b}=\frac{a+b}{a+c} \Leftrightarrow (a+b)(y+b)=\frac{(a+c)(a+b-c)}{a+c-b}+c(a+c) \Leftrightarrow$$

$$(a+b)y-\frac{(a+c)(a+b-c)y}{a+c-b}=c(a+c)-b(a+b) \Leftrightarrow$$

$$y\frac{(a+b)(a+c)-b(a+b)-(a+c)(a+b)+c(a+b)}{a+c-b}=c(a+b)-b(a+b) \Leftrightarrow$$

$$y\frac{c(a+b)-b(a+b)}{a+c-b}=c(a+b)-b(a+b) \Leftrightarrow$$

$$y=a+c-b, \quad x=a+b-c, \quad (a+b-c, a+c-b).$$

1532. $\left(\frac{abc}{ab+ac+bc}, \frac{abc}{ab+ac+bc}\right)$.

1533. Za $k=\frac{1}{8}$ sistem je neodređen, $y>0$ za $x>\frac{2}{5}$.

1534. a) Za $|a| \neq b$ i $ab \neq 0$ rešenje je $(a+b, a-b)$.

b) za $ab \neq 0$ jedinstveno rešenje $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a-b}{2}\right)$ za $ab=0$ sistem neodređen;

c) za $ab \neq 0$ rešenje je $\left(\frac{a+b}{a}, \frac{a-b}{a}\right)$, a za $ab=0$ sistem je neodređen;

d) (a^3-b^3, a^3+b^3).

1535. $((m+n)^2, (m-n)^2)$.

1536. $((a+b)^2, (a-b)^2)$.

1537. $(2n+1, 1-2n)$.

1538. a) $\left(2n-1, \frac{2n+1}{n}\right)$;

b) (a^2+b^2, a^2-b^2).

1539. $a=2, b=2$ ili $a=0, b=0$.

1540. $a=1$ ili $a=-2$.

1541. a) $a=3$; b) $a=-2$.

1542. a) $m=-3$ b) $m=3$.

1543. $k \neq 2$.

1544. $p=\frac{16}{17}, q=\frac{8}{17}$.

1545. a) Sabiranjem sve tri jednačine dobija se:
$(m+2)(x+y+z)=m^2+m+1$.
Ako je $m \neq -2$, tada je:

(1) $x+y+z=\frac{m^2+m+1}{m+2}$.

Kombinovanjem (1) sa sve tri jednačine datog sistema dobija se:

$$x(1-m)=\frac{m^2+m+1}{m+2}-1=\frac{m^2-1}{m+2}.$$

$$y(1-m)=\frac{m^2+m+1}{m+2}-m=-\frac{(m-1)}{m+2}.$$

$$z(1-m)=\frac{m^2+m+1}{m+2}-m^2=\frac{(m-1)(1-m^2)}{m+2}.$$

Za $m \neq 1$ dati sistem ima jedinstveno rešenje:

$$\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(1+m)^2}{m+2}\right).$$

Za $m=1$ dati sistem se svodi samo na jednu jednačinu:
$x+y+z=1$,
neodređen je i ima beskonačno mnogo rešenja za $x=\alpha \in R$ i $y=\beta \in R$, $z=1-\alpha-\beta$, pa je rešenje sistema uređena trojka $(\alpha, \beta, 1-\alpha-\beta \mid \alpha \in R \wedge \beta \in R)$.

Za $m=-2$ jednačina (1) postaje:
$0(x+y+z)=3$,
tada je sistem nemoguć;
b) sumiranjem sve tri jednačine dobija se:
$(a+b+c)(x+y+z)=0$.
Kako je $a+b+c\neq 0$, onda je $x+y+z=0$, pa je $x+y=-z$,
$z+x=-y$, $y+z=-x$.
Dalje dati sistem svodi se na oblik:
$(b+c)(-x)-ax+c-b=0$,
$(c+a)(-y)-by+a-c=0$,
$(a+b)(-z)-cz+b-a=0$,
odakle se dobija jedinstveno rešenje

$$\left(\frac{c-b}{a+b+c},\frac{a-c}{a+b+c},\frac{b-a}{a+b+c}\right);$$

c) $(-abc, ab+bc+ac, -a-b-c)$.

1546. $(b^2-bc+c^2, a^2-ac+c^2, a^2-ab+b^2)$.

1547. Ako se prva jednačina podeli sa ab, druga sa ac, a treća sa bc, $(abc\neq 0)$ dobija se sistem

$\frac{y}{b}+\frac{x}{a}=\frac{c}{ab}\wedge\frac{x}{a}+\frac{z}{c}=\frac{b}{ac}\wedge\frac{z}{c}+\frac{y}{b}=\frac{a}{bc}$. Zbir sve tri jednačine sistema je $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right)$. Odavde je

$$\frac{z}{c}=\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)-\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{ab}+\frac{b}{ac}+\frac{a}{bc}\right)-\frac{c}{ab}$$

$z=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$, analogno $y=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$ i $x=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$.

1548. $\left(\frac{(c-d)(b-d)}{(c-a)(b-a)},\frac{(a-d)(c-d)}{(a-b)(c-b)},\frac{(b-d)(a-d)}{(b-c)(a-b)}\right)$.

1549. $\left(\frac{a-6}{3},\frac{a}{3},\frac{a+6}{3},\frac{a+12}{3}\right)$.

9.5. Primena sistema linearnih jednačina na rešavanje raznih problema

1550. $4x+(y+4)=50\wedge 3x-\frac{y}{2}=22$; (9, 10).

1551. $(x+3):(y+3)=1:2\wedge\frac{y}{x}=2+\frac{3}{x}$; sistem je neodređen.

1552. (6, 3).

1553. $\frac{5}{7}$.

1554. $\frac{9}{7}$.

1555. Na osnovu pretpostavke dobija se jednačina:
$xy=x+y\Leftrightarrow(x-1)(y-1)=1$.
Pošto celi brojevi $x-1$ i $y-1$ imaju proizvod 1, to traženi par (x, y) mora biti rešenje sistema:
$(x-1=1\wedge y-1=1)\vee(x-1=-1\wedge y-1=-1)$, odakle izlazi rešenje (0, 0) ili (2, 2).

1556. Označe se sa x i y težine u kilogramima prvog i drugog metala u splavu. Na osnovu pretpostavke dobija se sistem:

$$x+y=a\wedge\frac{px}{100}+\frac{qy}{100}=b\Leftrightarrow x=\frac{100b-aq}{p-q}\wedge y=\frac{ap-100b}{p-q}.$$

1557. Neka je p prost neparan broj, a x i y prirodni brojevi. Tada je:
$x^2-y^2=p\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=p$.
Pošto je p prost broj, tada je:

$$x-y=1\wedge x+y=p\Leftrightarrow x=\frac{p+1}{2}\wedge y=\frac{p-1}{2}.$$

Dakle, prost broj p može se predstaviti kao razlika kvadrata dva prirodna broja x^2-y^2 ako je $x=p+1$ i $y=\frac{p-1}{2}$.

1558. Na osnovu pretpostavke sledi:
$x^2-y^2=105\Leftrightarrow(x-y)(x+y)=1\cdot 105=3\cdot 25=7\cdot 25=5\cdot 25$.
Poslednja jednačina ekvivalentna je sistemima:
$(x-1=1\wedge x+y=105)\vee(x-y=3\wedge x+y=35)\vee(x-y=7\wedge$
$\wedge x+y=15)\vee(x-y=5\wedge x+y=21)$,
odakle izlazi da je:
$105=53^2-52^2=19^2-16^2-16^2=13^2-8^2=11^2-4^2$;

1559. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{8}\wedge\frac{6}{x}+\frac{9}{y}=\frac{51}{56}$, 14 časova i $18\frac{2}{3}$ časa.

1560. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}\wedge\frac{9}{x}+\frac{6}{y}=\frac{2}{3}$, 18 dana i 36 dana.

1561. $\frac{10x+y}{x+y}=5+\frac{1}{x+y}\wedge 10x+y=10y+x$. Traženi broj je 56.

1562. $x-y=5\wedge\frac{10x+y}{10y+x}=2+\frac{7}{10y+x}$. Traženi broj je 83.

1563. $x+y=s\wedge 10x+y=10y-x-m,\ x=\frac{9s-m}{18},\ y=\frac{9s+m}{18}$.

1564. Ako su godine sina sada x, a godine oca y, tada je $y-4=7(x-4)\wedge y+4=3(x+4)$, odakle izlazi $x=8$, $y=32$.

1565. $((x+y=46\wedge x+10=2(y+10))$, 12 godina i 34 godine.

1566. $\frac{a}{x}+\frac{a}{y}=1\wedge\frac{1}{x}=\frac{p}{100}\cdot\frac{1}{y};\ \left(a\left(1+\frac{p}{100}\right), a\left(1+\frac{100}{p}\right)\right)$.

1567. $av_1+av_2=d\wedge av_1-av_2=d\Leftrightarrow v_1=\frac{d(a+b)}{2ab},\quad v_2=\frac{d(a-b)}{2ab}$.

1568. $\frac{p-r}{3}$ cm $\cdot\frac{2r+p}{3}$ cm, za $p>4r$.

1569. $x+y+z=80\wedge\frac{x}{y}=3+\frac{3}{y}\wedge\frac{z}{x}=3+\frac{3}{x}$; (18, 6, 57).

1570. $x+y+z=16\wedge 100x+10y+z-(100x+10z+y)=72\wedge$
$\frac{100x+10y+z}{y}=76+\frac{7}{y}$. Traženi broj je 691.

1571. Ako su traženi brojevi x, y, z, a dati zbirovi a, b, c tada je:
$x+y=a\wedge y+z=b\wedge z+x=c\Leftrightarrow$
$x=\frac{a+c-b}{2}\wedge y=\frac{a+b-c}{2}\wedge z=\frac{b+c-a}{2}$.

1572. $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)m=1\wedge\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)m=1\wedge\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{x}\right)p=1\Leftrightarrow$

$x=\frac{2mnp}{mn+np-mp}\wedge y=\frac{2mnp}{np+pm-nm}\wedge z=\frac{2mnp}{pm+mn-pn}$.

9.6. Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i njihovo rešavanje

1573. a) $x>\frac{21}{19}$; b) $x<2$; c) $x>0$; d) $x<\frac{1}{4}$.

1574. a) $x<7$; b) $x<1$; c) $x\le 3$; d) $x\le\frac{9}{8}$.

1575. a) $2\le x\le 4$; b) $-4<x<1$; c) $x\in(-\infty,-1)\cup(4,+\infty)$;
e) $-3\le x\le-\frac{5}{3}$.

1576. 5.

1577. -1.

1578. a) Razlikujemo tri slučaja:
1° ako je $m>0$, tada je $mx>3\Leftrightarrow x>\frac{3}{m}$, pa je rešenje svaki broj koji je veći od $\frac{3}{m}$;
2° ako je $m<0$, tada je $mx>3\Leftrightarrow x<\frac{3}{m}$, pa je rešenje svaki broj koji je manji od $\frac{3}{m}$;
3° ako je $m=0$, tada nejednačina glasi $0\cdot x>3$; i nema ni jedno rešenje;
b) za $m=1$ je $0\cdot x<3$, pa je x ma koji realan broj;
ako je $m>1$, tada je $x<\frac{m+2}{m-1}$,
ako je $m<1$, tada je $x>\frac{m+2}{m-1}$;
c) za $m=2$, $x\in(-\infty,+\infty)$ za $m<2$, $x>\frac{m-3}{2-m}$ za $m>2$, $x<\frac{m-3}{2-m}$.

1579. a) $-2\le x\le 9$; b) $\frac{53}{4}<x<20$; c) $x\in\emptyset$;

d) $x\in\left(\frac{4}{19},\frac{4}{9}\right)$; e) $x>5$.

1580. a) Koristimo ekvivalenciju
$AB>0\Leftrightarrow(A>0\wedge B>0)\vee(A<0\wedge B<0)$,
gde su A i B bilo koji realni brojevi. Tada je:
$(x-1)(x-4)>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(x-1>0\wedge x-4>0)\vee(x-1<0\wedge x-4<0)$
$\Leftrightarrow(x>1\wedge x>4)\vee(x<1\wedge x<4)$
$\Leftrightarrow x>4\vee x<1$.
Prema tome, polazna nejednačina je ekvivalentna sa disjunkcijom $x>4\vee x<1$.

b) Iskoristite ekvivalenciju
$AB<0\Leftrightarrow(A<0\wedge B>0)\vee(A>0\wedge B<0)$; $-3\le x\le 5$;
c) Iskoristite ekvivalenciju

$\frac{A}{B}>0\Leftrightarrow(A>0\wedge B>0)\vee(A<0\wedge B<0)$; $2<x<5$;

d) $-3\le x<4$.

1581. a) Kako je $\frac{x-1}{x-2}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow\frac{x-1}{x-2}-\frac{3}{2}<0$

$$\Leftrightarrow\frac{2(x-2)-3(x-2)}{2(x-2)}<0$$

$$\Leftrightarrow\frac{4-x}{2(x-2)}<0,$$

tada se primenom ekvivalencije:

$\frac{A}{B}<0\Leftrightarrow(A>0\wedge B<0)\vee(A<0\wedge B>0)$

dobije da je $x\in(-\infty,-2)\cup(4,+\infty)$;
b) $x\in(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$;
c) $3<x<4$.

1582. a) $\{x\,|\,x=1,2,3,4\}$;
b) $\{m\,|\,m=1,2\}$;
c) $\{y\,|\,y=-4,-3,-2,-1\}$.

1583. a) $\{x\,|\,x=1\}$;
b) $\{m\,|\,m=-5,-1,-4,-3,-2,-1\}$;
c) $\{y\,|\,y=-2,-1,1,2,3\}$.

1584. a) $x<1$; b) $x>5$; c) $x>-2$; d) $z<0$;
e) $x>\frac{1}{2}$ ili $x<0$; f) $x<4$ ili $x>2$.

1585. a) $n\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2},-\infty\right)$; b) $n\in\left(-\frac{3}{2},4\right)$.

1586. $k\in(-2,3)$.

1587. 1° a) $k\in\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$;

2° a) $k\in(-1,3)$; b) $k\in(-1,5)$; c) $k\in(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$.

1588. $-2<m<4$.

1589. $a<-3$.

1590. $m\in\left(-\frac{2}{3},0\right)$.

1591. $x=\frac{2a}{a+2}$; $a\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$.

1592. $x=\frac{2a}{a-1}$; $a\in\left(1,\frac{3}{2}\right)$.

1593. $x=\frac{n}{2(n+1)}$; $n\in(-\infty,-2)\cup(-1,+\infty)$.

1594. $x=\frac{2b}{3b-4}$; $b\in\left(-\infty,-\frac{4}{3}\right)\cup(4,+\infty)$.

1595. $-2<m<-1$.

1596. $a>1$

1597. $m>-\frac{2}{3}$ ili $m<-\frac{5}{2}$.

1598. $n\in\left(-\frac{7}{15},\frac{10}{7}\right)$.

1599. $m\in\left(-\frac{8}{3},\frac{9}{4}\right)$.

1600. $m>2$.

1601. $x=\frac{10-5a}{3(a+3)}$, $y=\frac{2a-13}{3(a+3)}$, $\{a \mid a=3,4,5,6\}$.

1602. $x=\frac{7-m}{m-3}$, $y=\frac{2+m}{m-3}$, $\{m \mid m=4,5,6\}$.

1604. a) $x\in(-\infty,-6)\cup\left(-\frac{6}{7},+\infty\right)$; b) $x\in(-\infty,0)$;
c) $x\in(0,-\infty)$; d) $x\in(-\infty,1]\cup[5,+\infty)$.

1605. a) $x\in(-4,2)$; b) $x\in(-\infty,-12)\cup(3,+\infty)$.

1606. $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$.

1607. $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)$.

1608. $x\in(-3,0)\cup(0,+\infty)$.

1609. $x\in\left(0,\frac{3}{2}\right)$.

1610. $x\in\left(0,\frac{2}{3}\right)$.

1611. $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(3,+\infty)$.

1612. a) $y\in\left(\frac{1}{2},\frac{4}{3}\right)$; b) $m\in\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{12}\right)$; c) $t\in(-1{,}25;\,0{,}75)$.

1613. a) $x\in R$; b) $x\in(-5,0)\cup(2,+\infty)$.

1614. a) $a\in(-\infty,-3)\cup(-3,+\infty)$; b) $a\in\left(-1,\frac{1}{3}\right)\cup\left(\frac{1}{3},1\right)$.

1615. $x\in R$.

1616. $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

1617. $x\in(-18,+\infty)$.

1618. a) $x\in\left(-\infty,-\frac{19}{3}\right)$; b) $x\in\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$.

1619. a) $-4\le x\le 7$; b) $x\in\emptyset$; c) $x\in\emptyset$; d) $2\le x\le 9$;
e) $x\in(-\infty,1)\cup(3,4]$; f) $x\in(1,+\infty]$; g) $x\in[3,4]$; h) $x\in(1,3)$.

1620. a) Na osnovu pretpostavke $a<b\Rightarrow a+a<a+b\Rightarrow 2a<a+b\Rightarrow$

(1) $a<\frac{a+b}{2}$,

takođe na osnovu pretpostavke $a<b\Rightarrow a+b<b+b\Rightarrow a+b<2b$

(2) $\frac{a+b}{2}<b$.

Iz (1) i (2) sledi tvrđenje:

$a<\frac{a+b}{2}<b$.

c) Na osnovu pretpostavke $a<b\wedge c>0\Rightarrow ac<bc\Rightarrow$

$ab+ac<ab+bc\Rightarrow a(b+c)<b(a+c)\Rightarrow\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+c}$

čime je tvrđenje dokazano.

1621. Primedba. – 1° Aritmetička sredina A pozitivnih brojeva a i b je:
$A\overset{def.}{=}\frac{a+b}{2}$.

2° Geometrijska sredina G pozitivnih brojeva a i b je: $G\overset{def}{=}\sqrt{ab}$.

3° Harmonijska sredina H pozitivnih brojeva a i b je: $H\overset{def}{=}\frac{2ab}{a+b}$.

Uočimo li tačnu konjunkciju (k), sledi lanac ekvivalencija:

$(k)\quad((a-b)^2\ge 0\wedge a>0\wedge b>0)\Leftrightarrow(a-b)^2+4ab$

$(a+b)^2\ge 4ab\Leftrightarrow\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\ge ab$

(1) $\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$, tj. $A\ge G$.

Dalje slede ekvivalencije:

$\frac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}\Leftrightarrow\frac{a+b}{2ab}\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{ab}}$,

(2) $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}\Leftrightarrow H\ge G$.

Iz (1) i (2) sledi da je $H\le G\le A$.

1622. Ako iskoristimo dokazanu nejednakost $A\ge G$, tada je

$\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\ge\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}}\Leftrightarrow\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$.

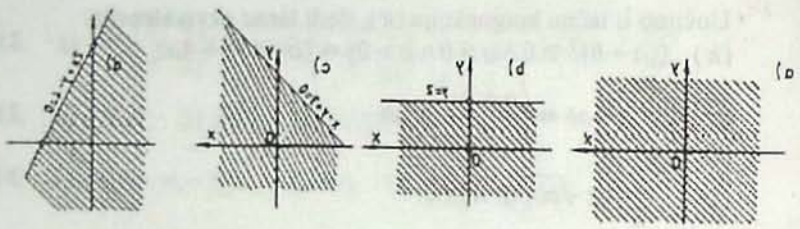
1623. Ako se iskoristi dokazana nejednakost $A \geq G$, dobija se
(1) $a+b \geq 2\sqrt{ab}, a+c \geq 2\sqrt{ac}$ i $b+c \geq 2\sqrt{bc}$.
Na osnovu pretpostavke sledi:
(2) $a+b=1-c, a+c=1-c$ i $b+c=1-a$.
Nejednakost (1) se svodi, ako se uzme u obzir (2), na oblik:
(3) $1-a \geq 2\sqrt{bc}, 1-b \geq 2\sqrt{ac}$ i $1-c \geq 2\sqrt{ab}$.
Njihov proizvod daje tvrđenje.

1624. Iskoristiti očigledne nejednakosti
$(a-b)^2 \geq 0, (a-c)^2 \geq 0, (b-c)^2 \geq 0$ i pretpostavku.

1625. Na osnovu pretpostavke sledi:
$a^2 \geq a^2-(b-c)^2, b^2 \geq b^2-(c-a)^2, c^2 \geq c^2-(a-b)^2$.
Njihov proizvod: $a^2b^2c^2 \geq (a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2 \Leftrightarrow$
$abc \geq (a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)$.

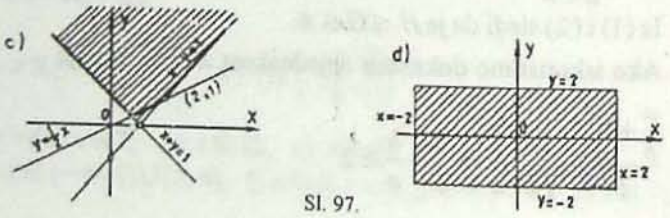
9.7. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate. Rešavanje problema linearnog programiranja

1626. Šrafirane oblasti prikazane su na slici 96 a – d.



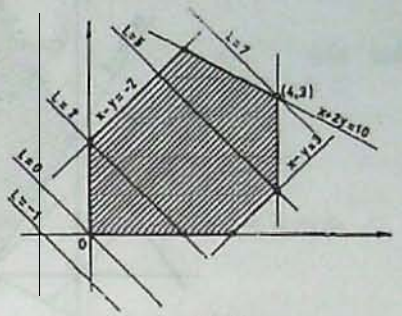
Sl. 96

1627. Na slici 97 prikazane su šrafirane oblasti pod c) i d).



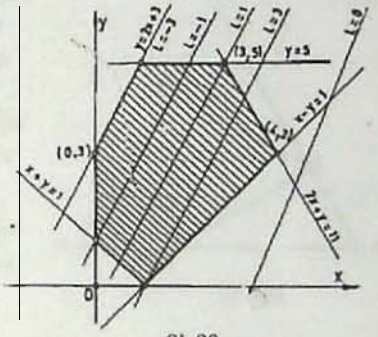
Sl. 97.

1628. Konstruišimo najpre skup dopustivih rešenja. Da bismo to postigli konstruišimo grafike pravih: $x-y=3$, $x=4$, $x+2y=10$ i $x-y=2$ i ispitajmo da li koordinatni početak zadovoljava odgovarajuće nejednačine. Zamenom $x=0$ i $y=0$ dobijamo da su sve date nejednačine tačne. Prema tome, skup dopustivih rešenja je šrafirana oblast na slici 98, pri čemu su uzeti i uslovi nenegativnosti rešenja ($x \geq 0$ i $y \geq 0$). Funkcija cilja je $L=x+y$. Varirajući L dobijemo familiju pravih. Od svih pravih koje seku skup dopustivih rešenja treba odrediti onu kod koje je L maksimalno. Kako L raste, grafik prave $x+y=L$ se translatorno pomera sleva nadesno. Ekstremum (maksimum) funkcije biće dostignut kada prava $x+y=L$ sadrži tačku (4, 3). Tada je $\max L=7$. Da smo tražili minimum, on bi bio dostignut za onu pravu koja sadrži tačku (0, 0). Prema tome, bilo da tražimo maksimum, bilo minimum, dobijemo tačno jedno rešenje.



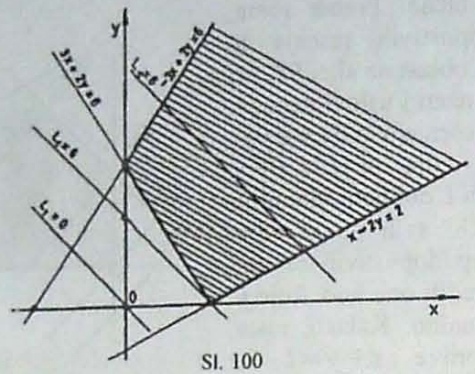
Sl. 98

1629. Konstruišimo najpre prave $x-y=1$, $2x+y=11$, $y=5$ i $x+y=1$ i ispitajmo tačnost odgovarajućih nejednakosti u tački $O(0, 0)$. Zamenom $x=0$ $y=0$ dobijamo da su prve četiri nejednačine tačne, a da peta nije. Skup dopustivih rešenja šrafiran je na slici 99. Na istoj slici prikazane su i neke od pravih $2x-y=L$ ($L \in R$). Kako L opada zdesna ulevo, minimalna vrednost se dobije za pravu $2x-y=3$, pa je $\min L=-3$. Tačke iz skupa dopustivih rešenja, koje sadrži prava $2x-y=3$, jesu sve tačke duži čije su krajnje tačke (0, 3) i (1, 5). Prema tome, u ovom slučaju problem nema jedinstveno rešenje, već ima beskonačno mnogo rešenja.



Sl. 99

1630. Funkcija L_1 ima najmanju vrednost $L_1 = 2$ za $x = 2$ i $y = 0$, a najveću vrednost nema (sl. 100). Slično se zaključuje da funkcija L_2 nema najmanju vrednost, a da je najveća $\max L_2 = -1$ za $x = 0$ i $y = 0$.



Sl. 100

1631. a) $\max L = 33$ za $x = 2$, $y = 5$; b) $\max L = 28$ za $x = 6$, $y = 2$; c) $\min L = 33$; d) nema rešenja; e) $\max L_1 = 46$, $\min L_2 = 20$.

X GLAVA

10. RAZNI ZADACI

1632. $x = 2$.

1633. Sistem $3x + y = 13 \wedge x - y = 7 \Leftrightarrow x = 5 y = -2$, znači i treća jednačina treba da sadrži $R(5,-2)$, tj.: $(a-2)^5 + 10 = 10 \Leftrightarrow a = 2$.

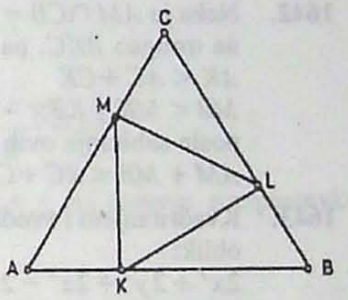
1634. Površina pravouglog trougla $P = \frac{ab}{2}$. Ako se uzme u obzir pretpostavka, dobije se $\frac{(a+b)^2}{8} = \frac{ab}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Rezultat: $\alpha = 45°, \beta = 45°, \gamma = 90°$.

1635. Dati izraz postupno se transformiše identičnim transformacijama na sledeći način:

$$(a+b+c)(ab+bc+ac) - abc =$$
$$= a^2b + b^2c + c^2a + ab^2 + bc^2 + ca^2 + 3abc - abc =$$
$$= (abc + a^2b) + (b^2c + ab^2) + (ac^2 + a^2c) + (bc^2 + abc) =$$
$$= ab(a+c) + b^2(a+c) + ac(a+c) + bc(a+c) =$$
$$= (a+c)(ab + b^2 + ac + bc) = (a+c)(b(a+b) + c(a+b)) =$$
$$= (a+c)(a+b)(b+c).$$

1636. Analiza. – Upisani trougao ima uglove od 60°, pa je i on jednakostraničan. Trouglovi AKM, BLK i CML podudarni su međusobom. Pravougli trougao AKL ima oštre uglove od 30° i 60°, pa je $AM = 2AK$. Konstrukcija i dokaz slede neposredno iz analize (sl. 101).



Sl. 101

1637. Dati izraz, identičnim transformacijama, postupno se rastavlja na činioce na sledeći način:

$$a^5 - a = (a-1)a(a+1)(a^2+1) =$$
$$= (a-1)a(a+1)((a^2-4)+5) =$$
$$= (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2) + 5(a-1)a(a+1).$$

Kako su činioci prvog sabirka pet uzastopnih celih brojeva, njihov proizvod je deljiv sa 30, a drugi sabirak ima za činioce broj 5 i tri uzastopna cela broja, pa je njihov proizvod deljiv sa 6, a čitav proizvod u drugom sabirku sa 30; dakle i dati izraz je deljiv sa 30.

1638. Trouglovi KLM i QMP su podudarni (zašto?), odakle sledi $KM = PQ$ (sl. 102).

1640. Za $x = 2$ dobija se jednačina

$$f(2)+3f\left(\frac{1}{2}\right)=4,$$

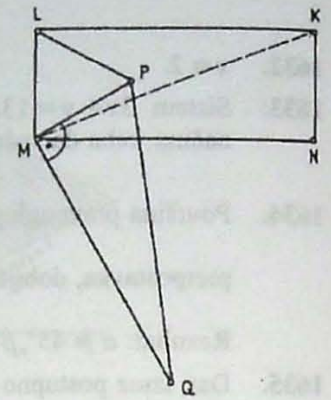
a za $x=\frac{1}{2}$ dobija se jednačina

$$f\left(\frac{1}{2}\right)+3f(2)=\frac{1}{4}.$$

Rezultat eliminacije $f\left(\frac{1}{2}\right)$ iz gornjih jednačina je jednačina

$-8f(2)=4-\frac{3}{4}$, odakle je

$$f(2)=-\frac{13}{32}.$$



Sl. 102

1641. Pošto je MN srednja linija trougla BCD, to je $MN \| BC$, tj. $MN \perp CA$. Pošto je i $CD \perp AM$, to je N ortocentar ΔACM, a AN je visina istog trougla, tj. $AN \perp MC$.

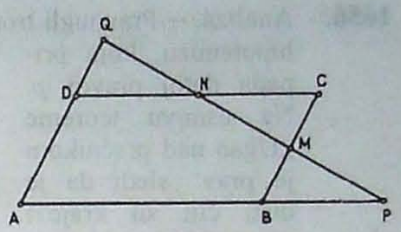
1642. Neka je $AM \cap CB = \{K\}$, tada se primeni nejednakost trougla najpre na trougao AKC, pa na trougao MKB:
$AK < AC + CK$
$MB < MK + KB$;
posle sabiranja ovih jednakosti dobija se
$AM + MB < AC + CB$.

1643. Kvadriranjem i svođenjem sličnih monoma pretpostavka se svodi na oblik:
$2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2xz-2yz=0$.
Odavde izlazi da je :
$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0$.
Zbir kvadrata jednak je nuli ako je svaki sabirak jednak nuli, tj.
$x-y=0$, $x-z=0$, $y-z=0$; odavde sledi da je $x=y=z$.

1646. Prava MN seče produžetke stranice AB i AD (sl. 103) u tačkama P i Q. Trouglovi: ΔBPM, ΔMCN i ΔNQD su međusobno podudarni (zašto?), pa je $PM = MN = NQ$. Pošto je MN srednja linija trougla BCD, tada je $MN \| BD$. Primenom Talesove teoreme sledi $BK = KL = LD$.

1647. 81.

1648. $x=\frac{1}{2}$.



Sl. 103

1649. Vrednost datog izraza $A = 0$, dakle ne zavisi od a i b.

1650. Ako se kvadrira jednakost (1) i uzme u obzir jednakost (2), dobije se :
(3) $xy = ab$,
Ako se (1) kubira i uzmu u obzir (2) i (1), dobije se tvrđenje.

1652. $2\sqrt{\frac{p^2+pq+p^2}{3}}$.

1654. Neka su α, β, γ unutrašnji uglovi trougla ABC, a α_1 spoljašnji ugao trougla sa temenom u A. Pošto je na osnovu pretpostavke

$AE = \frac{AD}{2}$, tada je $\angle DAE = 60°$ i $\angle ADE = 30°$. Iz $\angle ABD$ sledi:

$$(1)\ \beta=\frac{\alpha_1}{2}-30°,$$

a iz ABC sledi:

$$(2)\ \alpha_1=\beta+\gamma.$$

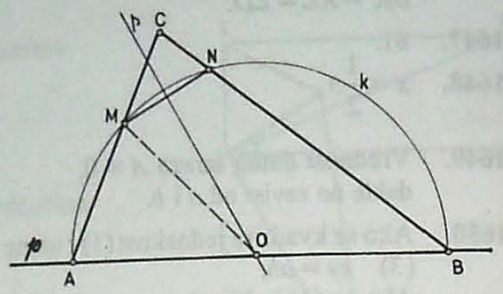
Iz (1) i (2) dobija se jednačina $\beta=\frac{\beta+\gamma}{2}+30°$.
Odavde sledi $\beta-\gamma=60°$.

1655. Neka je traženi dvocifreni broj $10x+y$, na osnovu pretpostavke može se formirati jednačina J, tj.:

$$J \Leftrightarrow \frac{10x+y}{y}=y+\frac{x}{y}$$
$$\Leftrightarrow 10x+y=y^2+x$$
$$\Leftrightarrow 9x=y(y-1)$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{y(y-1)}{9}.$$

Pošto su x i y prirodni brojevi manji od 10 i zadovoljavaju poslednju jednačinu, izlazi da je $x = 8$, $y = 9$, a traženi broj je 89.

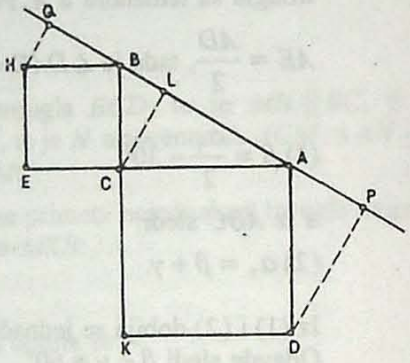
1656. Analiza. – Pravougli trouglovi AMB i ABN imaju istu (zajedničku) hipotenuzu, koja pripada datoj pravoj p. Na osnovu teoreme „Ugao nad prečnikom je prav“ sledi da je duž, čiji su krajevi date tačke M i N, tetiva polukružnice prečnika AB.



Sl. 104

Konstrukcija. – Neka je s simetrala date duži MN, a $s \cap p = \{O\}$. Konstruišimo kružnicu $K(O,OM)$. Dva temena trougla su tačke A i $B, k \cap p = \{A,B\}$. Treće teme C trougla se dobije u preseku pravih AM i BN (sl. 104). Dokaz se lako izvodi na osnovu analize i konstrukcije.

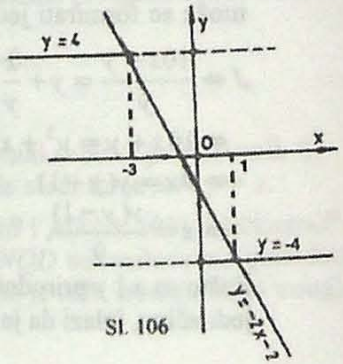
1658. Neka je $HQ \perp AB$ $DP \perp AB$ (sl. 105), tada je:
(1) $\Delta BQH \cong \Delta CLB$ $(USU) \Rightarrow BL = QH$;
(2) $\Delta APD \cong \Delta ACL$ $(USU) \Rightarrow AL = DP$.
Hipotenuza trougla $AB = AL + LB$. Na osnovu (1) i (2) sledi da je $AB = PD + QH$, čime je dokaz završen.



Sl. 105

1659. Data funkcija se svodi na oblik $y = |x-1| - |x+3|$. Ako se uzme u obzir definicija apsolutne vrednosti, onda je:
1) $x < -3 \wedge y = 4$,
2) $-3 \le x < 1 \wedge y = -2x - 2$,
3) $x \ge 1 \wedge y = -4$.

Grafik je prikazan na sl. 106.



Sl. 106

1660. Neka su brojevi m i n. Na osnovu pretpostavke je:

(1) $\frac{n}{5} = k + \frac{1}{5} \Rightarrow n = 5k + 1$,

(2) $\frac{m}{5} = l + \frac{2}{5} \Rightarrow m = 5l + 2, \quad k, l \in Z$.

Razlika četvrtih stepena podeljena sa 5

$$R = \frac{n^4 - m^4}{5} = \frac{(n^2 + m^2)(n^2 - m^2)}{5},$$

ako se uzmu u obzir (1) i (2), tada je

$$R = \frac{5(5k^2 + 2k + 51^2 + 41 + 1)(25k^2 + 10k - 51^2 - 201 - 3)}{5} \in Z,$$

čime je dokaz završen.

1661. Po pretpostavci imamo da je
$ax + b = kM$, $M \in Z$, $cx + d = kP$, $P \in Z$.
Odavde se dobija da je $b = kM - ax$ i $d = kP - cx$.
Razlika $ad - bc = a(kP - cx) - c(kM - ax) = k(aP - cM) \in Z$.
Dakle, razlika $ad - bc$ je deljiva sa k.

1662. Za $a \neq 0$, $x = \frac{2a+3}{2a-3}$; $x < -1$, $x \in \left(0, \frac{3}{2}\right)$.

1663. Za $a \neq \frac{3}{2}$, $x = \frac{3a}{2a+3}$; $x > 2$ za $a \in \left(-6, -\frac{3}{2}\right)$.

1664. Ako je $a \neq 9$, rešenje sistema je $(-a-11, a+9)$; da bi $x \ge 0$ i $y \le 0$ $a \in (-\infty, -11)$.

1665. Ako je $a \neq -6$, rešenje sistema je $\left(\frac{10-2}{2}, \frac{a-6}{2}\right)$, $y = 3x$ za $a = 9$.

1666. Za $a \neq -\frac{4}{3}$ rešenje jednačine je

$x = \frac{2a}{3a-4}$, $x < 1$ za $a \in \left(-\infty, -\frac{4}{3}\right) \cup (4, +\infty)$.

1667. $\angle MAN + \angle MBN = 180°$.

1668. Neka je x broj učenika u odeljenju, a y broj učenika sa ocenom dobar. Tada je

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{3}+\frac{x}{9}+y=x \Leftrightarrow y=\frac{7x}{18}\ (x, y\in\{21, 22, ..., 39\}).$$

$7x$ je deljivo sa 18 za $x=18$ i $x=36$, $18\notin\{21, 22, ..., 39\}$, pa je broj učenika u odeljenju 36, a sa ocenom tri ocenjeno je 14 učenika.

1669. Kvadriranjem prve jednakosti dobija se:

$(a+b)^2=(-c)^2 \Leftrightarrow a^2+b^2-c^2=-2ab$

$\Leftrightarrow (a^2+b^2-c^2)^2=4a^2b^2 \Leftrightarrow$

(1) $a^4+b^4+c^4=2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2$.

Kvadriranjem druge jednakosti je $(a^2+b^2+c^2)^2=1^2 \Leftrightarrow$

(2) $2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2=1-a^4-b^4-c^4$.

Iz (1) i (2) dobijamo:

$$a^4+b^4+c^4=1-a^4-b^4-c^4 \Leftrightarrow a^4+b^4+c^4=\frac{1}{2}.$$

1670. Ako je $y\geq 0$, tada je $y=x+|x-3|$. Odavde je:

a) $y\geq 0\wedge x\geq 3\wedge y=2x-3$;

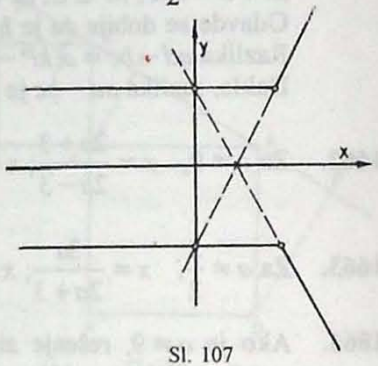
b) $y\geq 0\wedge x<3\wedge y=3$.

Ako je $y<0$, tada je $y=-x-|x-3|$. Odavde je:

a) $y<0\wedge x\geq 3\wedge y=-2x+3$,

b) $y<0\wedge x<3\wedge y=-3$

(sl. 107).



Sl. 107

1671. I način. – Postupno transformišemo dati izraz na ovaj način,

$n^3+11n=n(n^2+11)=n(n^2-1+12)=$

$=n((n-1)(n+1)+12)=n(n-1)(n+1)+12n$.

Prvi sabirak je deljiv sa 6 jer je proizvod tri sukcesivna broja deljiv sa 6. Drugi sabirak je deljiv sa 6 jer je 12 deljivo sa 6.

II način. – Broj je deljiv sa 6 ako je deljiv sa dva i sa tri. Broj je deljiv sa dva ako je deljiv sa $n=2k$ i $n=2k+1$. Broj je deljiv sa 3 ako je deljiv sa $n=3k$, $n=3k+1$ i $n=3k+2$. Lako se proverava da je ovo tvrđenje u ovom zadatku ispunjeno.

1672. Dati izraz postupno transformišimo na sledeći način:

$$\frac{a^3+1}{a-1}=\frac{a^3-1+2}{a-1}=\frac{(a-1)(a^2+a+1)+2}{a-1}=a^2+a+1+\frac{2}{a-1}.$$

Dati izraz je ceo broj ako i samo ako je $a-1=\pm 1$ i $a-1=\pm 2$. Odavde sledi da je $a\in\{-1, 0, 2, 3\}$.

1673. Kako je $z=-x-y$, tada je:

$z^3=-x^3-y^3-3x^2y-3xy^2$.

Odavde sledi da je:

$x^3+y^3+z^3=-3xy(x+y)=-3xy(-z)=3xyz$.

Dakle, zbir kubova ovakva tri broja je deljiv sa 3.

1674. Ako se odrede zbir i razlika datih jednačina, dobijamo da je:

$f\left(\frac{x}{x-1}\right)=\frac{3x}{2}$ i $g(2x+1)=\frac{x}{2}$. Ako se uvedu smene $\frac{x}{x-1}=t$ i $2x+1=z$, lako se dobija da je $f(x)=\frac{3x}{2x-2}$ i $g(x)=\frac{x-1}{4}$.

1675. Data jednačina se postupno svodi na ekvivalentne jednačine:

$x^2+xy+y^2=1 \Leftrightarrow x^2+2xy+y^2=1+xy$

$\Leftrightarrow (x+y)^2-1=xy$

$\Leftrightarrow (x+y+1)(x+y-1)=xy$.

Na osnovu pretpostavke treba odrediti koji celi brojevi su rešenja poslednje jednačine. Pošto su x i y celi brojevi to $x+y+1$ i $x+y-1$ treba da budu celi brojevi. Treba rešiti u skupu celih brojeva sledeće sisteme:

$(x=0\wedge x+y+1=0), (x=0\wedge x+y-1=0)$,

$(y=0\wedge x+y+1=0), (y=0\wedge x+y-1=0)$,

$(x+y+1=x\wedge x+y-1=y), (x+y+1=y\wedge x+y-1=x)$,

$(x+y+1=-x\wedge x+y-1=-y)$,

$(x+y+1=-y\wedge x+y-1=-x)$.

Skup uređenih parova $\{(0,-1);(-1, 0);(0, 1);(1, 0);(1,-1);(-1, 1)\}$ su sva celobrojna rešenja.

1676. Stranice pravougaonika su: $x=3{,}3$ i $3x=9{,}9$ ili $x=4$ i $3x=12$.

1677. Stranica kvadrata je $x=12$ cm.

1678. Jedna dijagonala romba je visina $h=2\sqrt{5}$ cm, koja odgovara osnovici jednakokrakog trougla, druga dijagonala $d=4$ cm, a stranica romba $x=3$ cm.

1679. $d_1 = 40$ cm, $d_2 = 63$ cm.

1680. $a = 39$ cm, $b = 25$ cm.

1681. $m = 0$.

1682. Drugi polinom je oblika $Q(x) = x^2 + x + c$, c je realan broj. Iz identiteta $P(x) = (Q(x))^2$ dobija se da je $a = 3, b = 1, c = 1$ a polinom $Q(x) = x^2 + x + 1$.

1683. Ako se pomnoži data jednakost sa najmanjim zajedničkim imeniocem, dobija se jednakost:
$(A+B)x^2 + (B+C)x + A + C = x + 3$.
Ova jednakost važi za svako x ako i samo ako je
$A + B = 0 \wedge B + C = 1 \wedge A + C = 3$. Odatle se dobija da je
$A = 1, B = -1, C = 2$.

1684. $A = \frac{1}{2}, B = -\frac{1}{2}, C = 0, D = 1$.

1685. $A = B = -1, C = 1$.

1686. $A = -3, B = 1, C = 2, D = -2$.

1687. $A = -1, B = 2, C = 1, D = 2$.

1688. Za $m \neq 2$ i $x \neq 2$ jednačina ima jedinstveno rešenje $x = \frac{2m+2}{m-2}$.
Za $m = 2$ i $x = 2$ jednačina je nemoguća: $m \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

1689. Za $m \neq 3$ i $x \neq 2$ jednačina ima jedinstveno rešenje:
$$x = -\frac{1}{m+3}, m \in \left(-\infty, -\frac{7}{2}\right) \cup \left(-\frac{5}{2}, +\infty\right).$$

1690. $x = \frac{a-2}{a+2}, a \in [0, +\infty)$.

1691. $x = \frac{4-13a}{6a-1}$, za $a \neq 0, a \neq \frac{1}{6}, a \in \left(\frac{6}{25}, 2\right)$.

1692. $x = \frac{5-8m}{4m-1}, m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

1693. Dve tačke.

1696. Traženi polinom $P(Q(x)) = (x^2+3x+2)^2 - 3(x^2+3x+2) + 2$, smenom $x^2 + 3x = t$ dalje je $P(Q(x)) = (t+2)^2 - 3(t+2) + 2 = t(t+1) = (x^2+3x)(x^2+3x+1)$.

1697. Kako je $(x-1)(x^2+6x+8) = (x-1)(x+2)(x+4)$, primenom Bezuovog stava $P(1) = 0, P(-2) = 0, P(-4) = 0$, dobija se
$m + n + p + 9 = 0 \wedge -8n + 4n - 2p + 24 = 0$
$\wedge -64m + 16n - 4p + 264 = 0$. Odakle se dobija da je
$m = 4, n = -3, p = -10$.

1698. Na osnovu uslova zadatka imamo da je
$x^4 + 2ax^2 + bx + c = (x-1)^3(x+n)$, odakle se dobija da je
$a = -6, b = 8, c = -3, n = 3$.

1699. $m = -3, n = 1, p = 2$.

1701. $f(f(x)) = x$.

1702. a) Iz sličnosti $\Delta AMB \sim \Delta PMD$ sledi da je
(1) $AM : MP = MB : MD$;
iz sličnosti $\Delta MBN \sim \Delta AND$ sledi da je
(2) $MN : AM = MB : MD$.
Iz (1) i (2) sledi da je $AM^2 = MP \cdot MN$.
b) Iz sličnosti $\Delta DPA \sim \Delta ANB$ sledi da je
$DP : AD = AB : BN \Leftrightarrow DP \cdot BN = AD \cdot AB = const.$

1703. a) Pravougaonik stranica m i n je homotetičan upisanom pravougaoniku u trouglu ABC itd.
b) $\Delta ABC \sim \Delta QPC$ $(Q \in AC, P \in BC) \Rightarrow AB : QB = CH : CK$ $(K \in CH)$. Obim, $O = 2(QP + PS) = 2(CK + PS) = 2(CK + KH) = 2CH = 2AB$.

1704. a) Osenčeni deo je oblast trougla čija su temena
$$O(0, 0), A(5, 0), C\left(-\frac{15}{7}, -\frac{30}{7}\right);$$
b) sve tri tačke pripadaju grafiku.

1705. Data jednakost se transformiše postupno:
$a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 + c^4 + d^4 + 2c^2d^2 - 2c^2d^2 = 4abcd$
$(a^2 - b^2)^2 + (c^2 - d^2)^2 + 2(ab - cd)^2 = 0$.
Zbir kvadrata jednak je nuli ako i samo ako je svaki kvadrat jednak nuli, tj. $a^2 - b^2 = 0 \wedge c^2 - d^2 = 0 \wedge ab - cd = 0$, odatle sledi da je $a = b = c = d$.

1706. Dat izraz identički je jednak izrazu: $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-d)^2$. Zbir kvadrata je jednak nuli ako i samo ako je svaki kvadrat jednak nuli, tj. $(a-b)^2=0 \vee (b-c)^2=0 \vee (c-d)^2=0$, odavde je $a=b=c=d$.

1707. Neka je tačka T zajednička tačka kružnice i tangente PT, a Q presečna tačka kružnice i sečice PM, tada je: $PT^2=PM\cdot PQ \Leftrightarrow PM:PT=PT:QP \Leftrightarrow PM:a=a:QP$. Dakle, PQ je četvrta proporcionala za tri date duži, pa se tačka Q po Talesovoj teoremi lako odredi na pravoj PM, sada su poznate tri tačke M, N i Q oko kojih treba opisati kružnicu itd.

1708. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$(x-3)(y+1)=7 \Leftrightarrow x-3=\dfrac{7}{y+1}$. Odakle zaključujemo da je

$y+1=\pm 1 \vee y+1=\pm 7$, tj. $x-3\in\{-1,1;-7,7\}$, a $x\in\{-4, 2, 4, 10\}$.

Rešenje je skup uređenih parova

$(x,y)\in\{(4, 6);(2,-8);(10, 0);(-4,-2)\}$.

1709. Ako turista prelazi x km, tada je:

$\dfrac{105}{x-6}-\dfrac{105}{x}=2 \Leftrightarrow x(x-6)=21{,}15 \Leftrightarrow x=21$ km.

1710. $\dfrac{1}{4}v=\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{20}\right)(v-6) \Leftrightarrow v=36$ km. $AB=18$ km.

1711. $x^2+\dfrac{1}{x^2}=7 \Leftrightarrow x^2+2x\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}=9 \Leftrightarrow \left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2=9 \Leftrightarrow x+\dfrac{1}{x}=\pm 3$.

1712. Neka je dati razlomak x, tada je $x+\dfrac{1}{5}=3x \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{10}=\dfrac{k}{10k}$.

Znači, $10k-k=1\,998 \Leftrightarrow k=222$. Dakle, traženi razlomak je $\dfrac{222}{2\,220}$.

1713. Traženi razlomak je $\dfrac{40x}{71x}$, pa je

$40x+71x=1\,998 \Leftrightarrow 111x=1\,998 \Leftrightarrow x=18$, razlomak je $\dfrac{720}{1\,278}$.

1714. a) $x^3+\dfrac{1}{x^3}=18$; b) $x^4+\dfrac{1}{x^4}=47$.

1715. $x=\pm 1\,000$.

1716. Dati izraz se transformiše na oblik

$$\frac{n(n^4-5n^2+4)}{120}=\frac{n(n^2-4)(n^2-1)}{5!}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)(n-2)}{5!}=$$
$$=\binom{n+2}{5}$$

Ovo je binomni koeficijent, dakle prirodan broj.

Za $n+2\geq 5$, odnosno $n\geq 3$, za $n<3$, $\binom{n+2}{5}=0$.

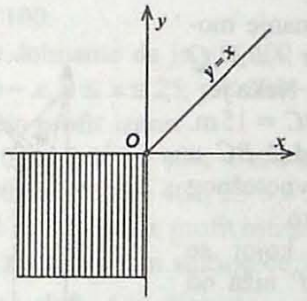
1717. Ako je x cifra desetica, onda je $11-x$ cifra jedinica, pa je prvi broj $10x(11-x)$ a drugi sa zamenjenim ciframa $10(11-x)+x$, pa je na osnovu pretpostavke $10(11-x)+x=3(10x+11-x)+5$. Traženi broj je 29.

1718. Na osnovu pretpostavke imamo
$100(10-x)+50+x=39+2(100x+50+10-x)$.
Odakle je $x=3$, broj je 357.

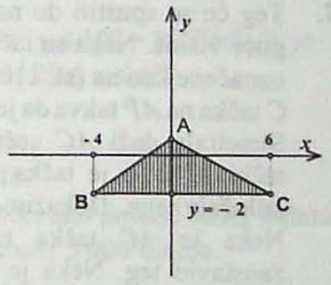
1719. Relaciju zadovoljavaju sve tačke u I kvadrantu koje pripadaju pravoj $y=x$ i koordinatni početak, sve tačke u III kvadrantu i sve tačke na negativnom delu x – ose (sl. 108).

1720. Bez uputstva.

1721. Svi uređeni parovi (x, y) u trouglu ABC i tačke na stranicama AB i AC. Temena trougla su: $A(0, 1), B(-3,-2), C(6,-2)$. (sl. 109).



Sl. 108



Sl. 109

1722. Broj pisan jedino ciframa 6 i 2 je deljiv sa dva ali nije sa 4, dok je razlika kvadrata, ako je paran broj, deljiva i sa 4.

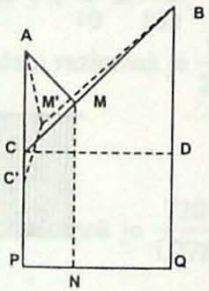
1723. Neka je A minimum prvih koordinata a B minimum drugih koordinata tačaka iz S i neka su (A,Y) i (X,B) dve tačke iz S. Kako u skupu $T=\{(x,y)\,|\,1\le x\le X, 1\le y\le Y\}$ ima konačno mnogo celobrojnih tačaka, postoji tačka (x,y) iz S koja mu ne pripada. Za nju važi $A\le x, Y\le y$ ili $X\le x, B\le y$.

1724. Kako je $k-(k+1)-(k+2)+(k+3)=0$ za $k=4,5,\ldots,1\,992$ i $1+2-3=0$ predznaci se mogu izabrati da vrednost izraza bude nula.

1725. Dovoljno je dokazati da se dijagonale polove. Neka je O presek dijagonala. Kako su površine trouglova ACD i ACB jednake, visine iz temena D i B su jednake. Iz jednakosti površina ACD i BCD sledi jednakost površina trouglova AOD i BOC. Kako su im visine iz temena D, odnosno B jednake, vredi $AO=CO$. Slično se pokazuje da je $BO=DO$.

1726. Trouglovi AEC i BFC su podudarni jer je $AC=CF, CE=CB$, $\angle ACE=\angle BCF=\gamma+60°$. Stoga je $AE=BF$. Ovi trouglovi rotacijom oko C za 60° preslikavaju se jedan u drugi. Stoga se i odgovarajuće prave AE i FB seku u nekoj tački O pod uglom od 60°, dakle $\angle AOF=\angle BOE=60°$. Kako se duž AF vidi iz tačke O pod uglom od 60°, četvorougao $AOCF$ je tetivan, pa je i $\angle COF=\angle CAF=60°$. Stoga je $\angle AOC=120°$. Slično se dokazuje da je $\angle BOC=120°$. Ugao $\angle AOB$ je dopuna zbira ovih uglova do punog ugla, pa iznosi takođe 120°. Analogno se dokazuje da se duži DC i BF seku u nekoj tački O' iz koje se duž AB vidi pod uglom od 120°. Kako su O i O' sa iste strane prave AB, moraju se O i O' poklapati. Time je dokaz završen.

1727. Teg će se spustiti do najmanje moguće visine. Neka su tačke A,B,P,Q označene kao na (sl. 110). Neka je C tačka na AP takva da je $BC=15$ m. Simetrala duži AC seče duž BC u tački M koja je tačka ravnotežnog položaja tega. Dokažimo to.
Neka je M' tačka na kojoj se zaustavio teg. Neka je M' niža od tačke M, i neka je C' tačka na AP, različita od A, takva da je $AM'=M'C'$.



Sl. 110

Tada je $AM'+M'B=C'M'+M'B\ge C'B>CB=15$ m (jer je C' niža od C). Dakle M je traženi položaj, a tražena visina se lako računa: $BD=12, CP=3\Rightarrow MN=7$.

1728. $\dfrac{5a-b}{5c+d}=\dfrac{6a+b}{6c+d}\Rightarrow\dfrac{6c+d}{5c+d}=\dfrac{6a+b}{5a+b}\Rightarrow\dfrac{c}{5c+d}=\dfrac{a}{5a+b}\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{5c+d}{c}=\dfrac{5a+b}{a}\Rightarrow\dfrac{d}{c}=\dfrac{b}{a}=k\Rightarrow d=kc, b=ka\Rightarrow$

$\Rightarrow\dfrac{7a+ka}{7c+kc}=8\Rightarrow\dfrac{a}{c}=8\Rightarrow\dfrac{9a+b}{9c+d}=\dfrac{9a+ka}{9c+kc}=\dfrac{a}{c}=8.$

Dakle $\dfrac{9a+b}{9c+d}=8.$

1729. Ne.
Neka je $2n^2=dk$.
$k^2(n^2+d)=k^2n^2+k^2d=k^2n^2+k2n^2=$
$=n^2(k^2+2k)=n^2[(k+1)^2-1]$.
Izraz $[(k+1)^2-1]$ nije kvadrat ni za jedno k.

1730. Neka je Ali-Baba poneo x kg dijamanata i y kg zlata. Jasno je da su x i y nenegativni realni brojevi. Iz ograničenosti prostora u kovčegu sledi da je:

$$\frac{x}{40}+\frac{y}{200}\le 1.$$

Kako Ali-Baba ne može da ponese teret teži od 100 kg, to je $x+y\le 100$.
Odavde dobijamo da je $y\le 200-5x$, $y\le 100-x$. Sledi da je $y\le 100-x$, $0\le x\le 25$; $y\le 200-5x$, $25\le x\le 40$.
Ali-Babin profit iznosi
$60x+20y\le 2\,000+40x$, $0\le x\le 25$;
$60x+20y\le 4\,000-40x$, $25\le x\le 40$.
Sledi da će Ali-Babin profit biti najveći ako ponese 25 kg dijamanata i 75 kg zlata, i u tom slučaju će iznositi 3 000 dinara.

1731. Razbijmo skup A na disjunktne podskupove:
A_0 – skup svih brojeva deljivih sa 3,
A_1 – skup svih brojeva koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 1, i

A_2 – skup svih brojeva koji pri deljenju sa 3 daju ostatak 2.
Broj elemenata u ovim podskupovima je, redom, 26, 27, 27.
Da bi zbir $a+b+c$ bio deljiv sa 3 moraju:
(1) sva tri sabirka davati pri deljenju sa 3 isti ostatak, tj. svi biti iz jednog od ovih podskupova, ili
(2) sabirci davati različite ostatke pri deljenju sa 3, tj. iz svakog od ovih podskupova biti po 1 sabirak.

Podskupova prve vrste ima $\frac{26\cdot 25\cdot 24}{6}+2\frac{27\cdot 26\cdot 25}{6}=m$,

a podskupova druge vrste ima $26\cdot 27^2=n$.
Traženi broj podskupova je $m+n$.

1732. $(a^2+b^2)^3=a^6+3a^4b^2+3a^2b^4+b^6=$

$=a^6-6a^4b^2+9a^2b^4+b^6-6a^2b^4+9b^2a^4=$

$=(a^3-3ab^2)^2+(b^3-3ba^2)^2=8^2+\sqrt{61^2}=125.$

$a^2+b^2=\sqrt[3]{125}=5.$

1733. Označimo sa A_1,B_1,C_1 presečne tačke simetrala uglova sa naspramnim stranicama. Tada imamo:

$$\overrightarrow{AA_1}=\frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}+\frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB},\quad \overrightarrow{BB_1}=\frac{a}{a+c}\overrightarrow{BA}+\frac{c}{a+c}\overrightarrow{BC}.$$

Označimo sa S centar upisanog kruga:

$\{S\}=AA_1\cap BB_1$, $\overrightarrow{AS}=\lambda\overrightarrow{AA_1}$ i $\overrightarrow{BS}=\mu\overrightarrow{BB_1}$.

Iz $\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BS}$ dobijamo:

$$\lambda=\frac{b+c}{a+b+c}\quad \mu=\frac{a+c}{a+b+c}.$$

Odatle se dobija $a\overrightarrow{AS}+b\overrightarrow{BS}+c\overrightarrow{CS}=\vec{0}$.

Neka je S_1 neka tačka za koju važi:

$a\overrightarrow{AS_1}+b\overrightarrow{BS_1}+c\overrightarrow{CS_1}=\vec{0}$.

Imamo $(a+b+c)\overrightarrow{SS_1}=\vec{0}\Rightarrow\overrightarrow{SS_1}=\vec{0}\Rightarrow S_1=S$.

1734. To je 4. Za $n>4$ i $n=ab$ imamo: $a\neq b$ ili $n=a^2, a>2$.

1735. Obeležimo sa K presek AE i CD. Trougao AKC je jednakokraki (jer je $\angle KCA=\angle KAC=30°$), pa je $AK=KC$ i $\angle AKC=120°$. Kako je $\angle AKC$ dva puta veći od $\angle ABC$ dobijamo da je K centar opisanog kruga oko ΔABC (centralni ugao nad tetivom AC je dva puta veći od periferijskog), pa je $AK=KB=KC$. ΔAKB je jednakokraki $(AK=KB)\Rightarrow\angle KAB=\angle KBD=50°-30°=20°$.
$\angle DKE=\angle AKC=120°$ (unakrsni uglovi), sledi da je četvorougao $DBEK$ tetivni, pa je $\angle KDE=\angle KBE$ (periferijski uglovi nad istom tetivom). $\angle KDE=\angle KBE=60°-20°=40°$. Znači $\angle CDE=40°$.

1736. a) $x^4+x^2y^2+y^4=x^4+2x^2y^2+y^4-x^2y^2=$
$=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$.

b) Neka je $a=3^{999}$. Dati broj je
$a^4+a^2+1=a^4+2a^2+1-a^2=(a^2+1)^2-a^2=$
$=(a^2+a+1)(a^2-a+1)$.
Kako je $3^{1998}+3^{999}+1>1$ i $3^{1998}-3^{999}+1>1$, to je dati broj složen.

1737. U izrazu $G(x,y)=(x-y)V(x,y)$ zamenimo $y=0$ i dobijemo

$$f(x)=\frac{x}{a^2(a-x)^2}((a-b)^2(c-x)c-(c-a)^2(b-x)b).$$

Slično, zamenom $x=0$ dobijamo $g(y)=f(y)$.
Proverom se utvrđuje da zaista važi za svako

$$x,y\in R\setminus\{0\}, x\neq y, V(x,y)=\frac{1}{x-y}(f(x)-f(y)).$$

1738. Da. Primetimo da je $1+3^3=4\cdot 7$, odakle sledi da je svaki broj oblika 3^n+3^{n+3}, gde je n nenegativan ceo broj, deljiv sa 7. Prvim potezom Arkadije zamenjuje prvu zvezdicu (ispred broja 1) znakom +. Zatim grupiše preostalih 1 998 članova u 333 šestorke uzastopnih stepena, a u okviru svake šestorke formira tri para oblika

$(3^{6k+1},3^{6k+4}),(3^{6k+2},3^{6k+5}),(3^{6k+3},3^{6k+6})$, $(k=0,1,2,3,\ldots,333)$.

Kad Branislav zameni zvezdicu nekim znakom, Arkadije zamenjuje zvezdicu istim znakom ispred drugog broja iz istog para. Dobijeni broj, očigledno, pri deljenju sa 7 daje ostatak 1.

1739. Tačka M se ne može nalaziti na nekoj od pravih AB,AC,BC. Prema tome, imamo sledeće slučajeve:

(1) M je unutar ΔABC. Tada je

$$P(\Delta ABM) = P(\Delta BCM) = P(\Delta CAM) = \frac{1}{3}P(\Delta ABC).$$

Ako bi se M nalazila unutar nekog od trouglova ABT, BCT, CAT (T je težište ΔABC), recimo unutar ΔABT, imali bismo $P(\Delta ABM) < P(\Delta ABT) = \frac{1}{3}P(\Delta ABC)$.

Dakle, mora biti $M = T$.

(2) Neko teme trougla ABC se nalazi unutar trougla određenog tačkom M i sa ostala dva temena. Neka je to teme A. Tada je $P(\Delta BCM) = P(\Delta ACM) + P(\Delta ABM) + P(\Delta ABC)$, pa ovakva tačka M ne zadovoljava traženi uslov.

(3) Tačke A, B, C, M su temena konveksnog četvorougla. Ako je S presek njegovih dijagonala (npr. $\{S\} = AB \cap CM$), imamo $P(\Delta ACM) = P(\Delta BCM) \Rightarrow h_A = h_B$, gde su h_A i h_B rastojanja tačaka A, B od prave CM redom, pa je $AS = SB$.

$P(\Delta ACM) = P(\Delta ABM) \Rightarrow P(\Delta ACS) = P(\Delta BMS) \Rightarrow CS = SM$.

Dakle, dijagonale četvorougla $ABCM$ se polove.

Prema tome, postoje ukupno 4 tražene tačke M: težište ΔABC, i tri tačke simetrične temenima trougla u odnosu na središta naspramnih stranica.

1740. Neka je $A_1, A_2, \ldots A_8$ osmougao kao u zadatku i neka su $a_1, a_2, \ldots a_8$ dužine njegovih stranica. Dokažimo da je četvorougao $A_1A_2A_5A_6$ paralelogram. Neka su p, q, r, s prave koje sadrže temena A_1 i A_2, A_3 i A_4, A_5 i A_6, A_7 i A_8, redom, a P, Q, R, S presečne tačke pravih p i q, q i r, r i s, s i p, redom. Lako je dokazati da je četvorougao $PQRS$ pravougaonik čije su stranice $PS = a_8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a_1 + a_2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $RQ = a_4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + a_5 + a_6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$. Kako je $PS = RQ$ dobijamo:

$$a_1 - a_5 = (a_4 + a_6 - a_8 - a_2) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Pošto su dužine stranica racionalni brojevi dobija se $a_1 - a_5 = 0$. Dakle, četvorougao $A_1A_2A_5A_6$ je paralelogram jer ima dve paralelne i jednake stranice. Njegove dijagonale A_1A_5 i A_2A_6 seku se u tački O. Slično se može dokazati da su i ostali četvorouglovi obrazovani parovima naspramnih stranica osmougla paralelogrami i da je tačka O zajednički centar simetrije tih četvorouglova, a time i datog osmougla.

1741. Neka je P središte duži A_1A_4. Tada je $B_1PB_3B_2$ paralelogram, pa je N središte duži PB_2;

MN je srednja linija trougla B_2PB_4, tj. $MN = \frac{1}{2}PB_4$.

Kako je PB_4 srednja linija trougla $A_1A_4A_5$, sledi da je $MN = \frac{a}{4}$.

1742. Označimo sa a broj 1 999. Tada je

$$P(1\,999) = P(a) = a^{2000} - (a+1)a^{1999} + \ldots - (a+1)a + a + 1$$
$$= a^{2000} - a^{2000} - a^{1999} + a^{1999} + \ldots + a^2 - a^2 - a + a + 1 = 1.$$

1743. Neka su $p_1, p_2, q \in Z$ i $NZD(p_1, p_2, q) = 1$ takvi da je $2\left(\frac{p_1}{q}\right)^2 + 5\left(\frac{p_2}{q}\right)^2 = 1$. Tada je $2p_1^2 + 5p_2^2 = q^2$, odnosno $q^2 \equiv 2p_1^2 \pmod 5$. Znači $5 \mid q$ i $5 \mid p_1$, pa $25 \mid 5p_2^2$. Dakle $5 \mid p_2$. To je kontradikcija sa pretpostavkom $NZD(p_1, p_2, q) = 1$.

1744. 1) $A = \emptyset$. Tada je ~ simetrična, antisimetrična i tranzitivna, a nije refleksivna.

2) A ima tačno jedan element. Tada ~ nije refleksivna, a jeste simetrična, antisimetrična i tranzitivna.

3) Ako A ima bar dva elementa, tada ~ nije ni refleksivna, ni antisimetrična, ni tranzitivna, a jeste simetrična.

1745. Neka prava koja prolazi kroz M i paralelna je sa BC seče AB i DC u tačkama P i R, a prava koja sadrži M i paralelna je AB neka seče AD i BC u tačkama S i Q. Tada je $MA < AP + MP = AS + AP$. Slično $MB < PB + QB$; $MC < CQ + RC$; $MD < DR + DS$ i sabiranjem dobijemo tvrđenje.

1746. $$\frac{n^{12} - 128n^6 + 4\,096}{(n^3 - 4n^2 + 8n - 8)^2} = \frac{(n^6 - 64)^2}{((n-2)(n^2+2n+4) - 4n(n-2))^2} =$$

$$= \left(\frac{(n^3-8)(n^3+8)}{(n-2)(n^2-2n+4)}\right)^2 =$$

$$= \frac{(n-2)^2(n^2-2n+4)^2(n+2)^2(n^2+2n+4)^2}{(n-2)^2(n^2-2n+4)^2} =$$

$$= ((n+2)(n^2+2n+4))^2.$$

1747. Označimo sa a broj 1 999. Tada je

$$P(1999) = P(a) = a^{2000} - (a+1)a^{1999} + \ldots - (a+1)a + a + 1$$
$$= a^{2000} - a^{2000} - a^{1999} + a^{1999} + \ldots + a^2 - a^2 - a + a + 1 = 1.$$

1748. a) $\Delta BKC \cong \Delta CLD \Rightarrow \angle BSL = \angle CSK = 180° - \angle SCK - \angle SKC =$
$= 180° - \angle LCD - \angle DLC = 90°$; $\angle BAL + \angle BSL = 180°$.
b) $\angle ASB = \angle ALB$ (jer je četvorougao $ABSL$ tetivni)
$\angle ALB = \angle CKB = \angle KBA$. Sledi $AS = AB$.

1749. 1) $A = \emptyset$. Tada je ~ refleksivna, simetrična, antisimetrična i tranzitivna.
2) $A \neq \emptyset$. Tada ~ nije ni refleksivna, ni antisimetrična, ni tranzitivna, a jeste simetrična.

1750. Jedino rešenje je
$p = 5$. $p = 5k \pm 1$. $5 \mid 4p^2 + 1$. $p = 5k \pm 2$. $5 \mid 6p^2 + 1$.

LITERATURA

1. Н.П. Антонов, М. Я.Бгобски, Б.Б. Никитин, А.М. Санкин: *Сборник задач по Элементарной математике*, Москва 1964.
2. Ив, Анев, А.Ангелов. П. Стамболов: *Сборник от задачи по алгебра, Софияа* 1958.
3. Alendorfer i Okli: *Principles of Mathematics*, u prevodu, Beograd 1966.
4. C. Bréard: *Mathématiques* 3e, Paris 1962.
5. C. Bréard: *Mathématiques* 2e, Paris 1969.
6. V.Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz algebre*, I razred gimnazije, Beograd 1972.
7. P. Vasić, R. Janić, V. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za II razred zajedničke osnove srednjeg usmerenog obrazovanja*, Beograd 1978.
8. A.Combes: *Excercices & Problémes de Mathématiques*, Paris 1968.
9. Doekciani, Berman, Frellich: *Modern algebra Strukture and Method Book I*: Boston.. New York. Atlanta. Geneva, ill. Dalas, Palo Alto.
10. В.К.Егерев, В. В. Зайцев, Б. А. Корденски, Т. Н. Маслова, И. Ф. Орловская, Р. И. Позойский, Г.С.Ряховская. М.И. Сканави: *Сборник задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы*, Москва 1969.
11. Д. К. Фарддеев и И.С.Соминский: *Алгебра*, Москва 1966.
12. Р. А. Калнин: *Алгебра и Элементарные функции*, Москва 1966.
13. В. А. Кречмар: *Задачник по алгебре*, Москва 1968.
14. Б. Ц. Кушенко: *Сборник конкурсных задач по математике*, Ленинград 1964.
15. V. Lespinard et R. Rernet: *Algebre classe de premiere* A'-C-M-M', Lyon 1961.
16. В.Б. Лидский, Л.В. Овсянников, А. Н. Тулойков, М. И. Шабунин: *Задачи по элементарной математике*, Москва 1968.
17. V. Lespinard et R. Pernet: Géométrie 1° A'CMM', Lyon 1961.
18. V. Mihailović: *Geometrija za I razred gimnazije*, Beograd 1964.
19. V.Mihailović: *Geometrija za II razred gimnazije, prirodno-matematičkog smera*, Beograd 1964.
20. Michel Queysanne, André Revuz: *Mathématique tome* 1, Paris 1969.
21. П.С. Моденов: *Сборник задач по специльном курсу Элементарные математике*, Москва 1864.
22. Б.Петканчин, С.Манолов, Н.Мартинов, К.Петров: *Сборник от задачи по математике за кандидат-студенти*, София 1965.
23. И.Х. Сивашински: *Задачник по элементарной математике*, Москва 1966.
24. I. Stamate, I. Stoian: *Culegere de probleme de algebra*, Bucuresti-1965.
25. К.У.Шахно: *Сборник задач по Элементарной математике, повышеной*, Минск 1965.
26. С.И. Туманов: *Алгебра*, Москва 1966.

BELEŠKA O AUTORU

Mr Vene Bogoslavov rođen je 1932. godine u selu Paralovu, opština Bosilegrad. Po završetku gimnazije u Bosilegradu, završio je matematiku na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu (1958).

Godine 1967. završio je specijalističke studije na Prirodno-matematičkom fakultetu, a magistrirao je 1981. godine na Elektrotehničkom fakultetu. U 1980. godini mr Vene Bogoslavov je za izuzetne rezultate u vaspitno-obrazovnom radu stekao zvanje pedagoškog savetnika.

Radni vek započeo je kao gimnazijski profesor u beogradskim srednjim školama. Od 1965. godine radi kao profesor u Petoj beogradskoj gimnaziji.

U toku rada mr Vene Bogoslavov bio je na mnogobrojnim funkcijama: rukovodilac aktiva matematičara grada Beograda i matične škole, mentor novim profesorima, član uređivačkog tima u Zavodu za udžbenike i nastavna sredstva, član odbora za proučavanje problema nastave matematike u osnovnim i srednjim školama pri Prosvetnom savetu Srbije i dr. Pored ovih funkcija, obavljao je i druge stručne poslove kao što su: član školskog odbora i saveta škole, u sindikatu itd.

Objavio je mnogobrojne knjige i članke iz oblasti matematike koji su doživeli zapažen uspeh, imali veliki broj izdanja u milionskom tiražu. Njegove zbirke postale su opšti jugoslovenski udžbenici koji se svakodnevno koriste na svim prostorima bivše i današnje Jugoslavije.

Udžbenici: *Zbirka zadataka iz matematike* za IV razred gimnazije (prvo izdanje 1968., 30. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 216802 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike* 1 (prvo izdanje 1970. g., 25. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 317835 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike* 2 (prvo izdanje 1971. g., 23. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 212816 primeraka); *Zbirka rešenih zadataka iz matematike* 3 (prvo izdanje 1972. g., 22. izdanje 1998. g.; ukupan tiraž 235310 primeraka); *Zbirka zadataka* za IV razred prirodno-matematičke struke-četiri izdanja (prvo izdanje 1980. g.; ukupan tiraž 32000 primeraka); *Zbirka zadataka* za II razred usmerenog obrazovanja-dva izdanja, ukupan tiraž 120.000 primeraka, koautori dr Petar Vasić, dr Radovan Janić; Matematika za IV razred usmerenog obrazovanja elektrotehničke i građevinske struke, koautori dr Petar Vasić, dr Radovan Janić i dr Dobrilo Tomić (ukupan tiraž 18.000 primeraka); *50 testova za proveru znanja iz matematike za osnovnu školu*, koautori: dr Dušan Adnađević, Gliša Nešković i Dragoslav Milić (prvo izdanje 1988. g., 7. izdanje 1995.g.; ukupan tiraž 139.000 primeraka); *Logaritamske tablice* (prvo izdanje 1993.g., ukupan tiraž 30.000 primeraka); *Logaritamska i eksponencijalna funkcija sa zbirkom zadataka*, koautor: Svetozar Branković (prvo izdanje 1996.g.).

Mr Vene Bogoslavov bio je recenzent mnogih udžbenika matematike. On je nosilac mnogih diploma, priznanja (Arhimedes, Plaketa Zavoda za izdavanje udžbenika) i zahvalnica.

Živi u Beogradu, penzionisan je 19. 09. 1999. g. kao profesor Pete beogradske gimnazije, sa 40 godina rada u nastavi.

SADRŽAJ

I GLAVA

1. LOGIKA I SKUPOVI 9
   1.1. Osnovne logičke operacije 9
   1.2. Osnovne skupovne operacije 13
   1.3. Relacije i funkcije 21
   1.4. Elementi kombinatorike 24

II GLAVA

2. UVOD U GEOMETRIJU. VEKTORI 30
   2.1. Tačka, prava, ravan. Odnosi pripadanja i rasporeda 30
   2.2. Paralelnost 31
   2.3. Duž i ugao 32

III GLAVA

3. REALNI BROJEVI 37
   3.1. Pregled brojeva. Polje realnih brojeva 37
   3.2. Približne vrednosti. Apsolutna i relativna greška. Granica greške. Značajne cifre i zaokrugljivanje brojeva 43

IV GLAVA

4. PROPORCIONALNOST VELIČINA 46
   4.1. Razmera i proporcija 46
   4.2. Primena proporcije 48
   4.3. Račun raspodele i mešanja 49
   4.4. Procentni i promilni račun 50
   4.5. Kamatni račun 52

V GLAVA

5. IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE . . . 54
   5.1. Podudarnost figura 54
   5.2. Ortogonalnost prave i ravni. Ugao prave i ravni 59
   5.3. Vektori 60
   5.4. Osna i centralna simetrija 64
      5.4.1. Osna simetrija 64
      5.4.2. Centralna simetrija 66
   5.5. Translacija 68
   5.6. Rotacija 70
   5.7. Neke važnije teoreme o trouglu, četvorouglu, mnogouglu i kružnici . . . 72

VI GLAVA

6. RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI . . . 84
   6.1. Polinomi i operacije sa njima 84
   6.2. Rastavljanje polinoma na činioce 87
   6.3. Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima 93

VII GLAVA

7. HOMOTETIJA I SLIČNOST 113
   7.1. Proporcionalna veličina. Talesova teorema 113
   7.2. Homotetija 114
   7.3. Sličnost trouglova 116
   7.4. Primena sličnosti kod pravouglog trougla 120

VIII GLAVA

8. TRIGONOMETRIJA PRAVOUGLOG TROUGLA 126
   8.1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla. Osnovne trigonometrijske identičnosti. Rešavanje pravouglog trougla 126

IX GLAVA

9. LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE 13
   9.1. Linearna jednačina sa jednom nepoznatom 131
   9.2. Primena linearnih jednačina sa jednom nepoznatom na rešavanje raznih problema 145
   9.3. Linearna funkcija i njen grafik 145
   9.4. Sistem linearnih jednačina 150
   9.5. Primena sistema linearnih jednačina na rešavanje raznih problema 163
   9.6. Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i njihovo rešavanje 166
   9.7. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate. Rešavanje problema linearnog programiranja 171

X GLAVA

10. RAZNI ZADACI 173

REŠENJA

I GLAVA

1. LOGIKA I SKUPOVI 184
   1.1. Osnovne logičke operacije 184

1.2. Osnovne skupovne operacije 187
1.3. Relacije i funkcije 194
1.4. Elementi kombinatorike 199

II GLAVA

2. UVOD U GEOMETRIJU 204
2.1. Tačka, prava, ravan. Odnosi pripadanja i rasporeda 204
2.2. Paralelnost 204
2.3. Duž i ugao 205

III GLAVA

3. REALNI BROJEVI 209
3.1. Pregled brojeva. Polje realnih brojeva 209
3.2. Približne vrednosti. Apsolutna i relativna greška. Granica greške. Značajne cifre i zaokrugljivanje brojeva 219

IV GLAVA

4. PROPORCIONALNOST VELIČINA 221
4.1. Razmera i proporcija 221
4.2. Primena proporcije 222
4.3. Račun raspodele i mešanja 224
4.4. Procentni i promilni račun 226
4.5. Kamatni račun 229

V GLAVA

5. IZOMETRIJSKE TRANSFORMACIJE . . . 231
5.1. Podudarnost figura 231
5.2. Ortogonalnost prave i ravni. Ugao prave i ravni 236
5.3. Vektori 239
5.4. Osna i centralna simetrija 244
5.4.1. Osna simetrija 244
5.4.2. Centralna simetrija 246
5.5. Translacija 247
5.6. Rotacija 250
5.7. Neke važnije teoreme o trouglu, četvorouglu, mnogouglu i kružnici . . . 252

VI GLAVA

6. RACIONALNI ALGEBARSKI IZRAZI . . . 267
6.1. Polinomi i operacije sa njima 267
6.2. Rastavljanje polinoma na činioce 269
6.3. Operacije sa racionalnim algebarskim izrazima 273

VII GLAVA

7. HOMOTETIJA I SLIČNOST 287
7.1. Proporcionalna veličina. Talesova teorema 287
7.2. Homotetija 290
7.3. Sličnost trouglova 292
7.4. Primena sličnosti kod pravouglog trougla 295

VIII GLAVA

8. TRIGONOMETRIJA PRAVOUGLOG TROUGLA 303
8.1. Trigonometrijske funkcije oštrog ugla. Osnovne trigonometrijske identičnosti. Rešavanje pravouglog trougla 303

IX GLAVA

9. LINEARNE JEDNAČINE I NEJEDNAČINE 306
9.1. Linearna jednačina sa jednom nepoznatom 306
9.2. Primena linearnih jednačina sa jednom nepoznatom na rešavanje raznih problema 317
9.3. Linearna funkcija i njen grafik 319
9.4. Sistem linearnih jednačina 323
9.5. Primena sistema linearnih jednačina na rešavanje raznih problema 335
9.6. Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom i njihovo rešavanje 337
9.7. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate. Rešavanje problema linearnog programiranja 342

X GLAVA

10. RAZNI ZADACI 345

LITERATURA 363

BELEŠKE O AUTORU 364

Mr Vene T. Bogoslavov

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 1

Dvadeset sedmo izdanje

Izdavač

ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA

Beograd, Obilićev venac 5

Likovni urednik

Mr TAMARA POPOVIĆ - NOVAKOVIĆ

Lektor

SELMA ČOLOVIĆ

Korice

ŽELJKO ĐUROVIĆ

Grafički urednik

DUŠAN KNEŽEVIĆ

Korektori

ZORICA BAČKOVIĆ

GORICA MARKOVIĆ

TATJANA ZORIĆ

Kompjuterska obrada

RADOVANOVIĆ „P.S. Tech"

Obim: 23 štamparska tabaka

Format: A5

Tiraž: 17 000 primeraka

Štampa DŠIP „Bakar" — Bor