

Dr ing. BORIS APSEN

RIJEŠENI ZADACI VIŠE MATEMATIKE

PRVI DIO

Znak: 8702 Sv

Izdanje:

Prof. dr. ing. Boris Apsen

RIJEŠENI ZADACI VIŠE MATEMATIKE, I

VIII. izdanje

Izdavač:

IRO Tehnička knjiga

Zagreb, Jurjišćeva 10

Za izdavača odgovara:

Ing. Zvonko Vistrička

Urednik izdanja:

Ing. Stanko ŠOŠTARIĆ

Tisak:

GRO "Mirko Gembarovski", N. Gradiška

Tiskano u 5000 primjeraka

Tisak dovršen:

U veljači 1987.

© B. Apsen, 1966.

YU ISBN 86-7059-030-1

BROJEVI IRACIONALNI I KOMPLEKSNI • NIZOVI I NJIHOVE GRANICNE VRIJEDNOSTI (LIMESI) • GRANICNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA • ELEMENTARNE FUNKCIJE, NJIHOVA SVOJSTVA, GRAFOVI I PRIMJENA • ASIMPTOTE KRIVULJA • DERIVACIJE • RACUNANJE DERIVACIJA • TEOREMI DIFERENCIJALNOG RACUNA • NEODREĐENI OBLICI • GEOMETRISKA PRIMJENA DERIVACIJA • EKSTREMNE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA • NAJMANJE I NAJVEĆE VRIJEDNOSTI FUNKCIJA U ZADANOM INTERVALU • KONVEKSNOST I KONKAVNOST KRIVULJA • TAČKE INFEKSIJE • KINEMATIČKO ZNAČENJE DERIVACIJE • ISPITIVANJE TOKA FUNKCIJA I KONSTRUKCIJA GRAFA • REDOVI BROJEVA • KRITERIJ KONVERGENCIJE • REDOVI FUNKCIJA • REDOVI POTENCIJA • TAYLOROV I MAC-LAURINOV REDOVI

TEHNIČKA KNJIGA
ZAGREB

PREDGOVOR PETOM IZDANJU

U jesen prošle godine nesmiljena smrt istr gla je iz redova naših dugogodišnjih plodnih autora prof. dr ing. Borisa Apsena.

B. Apsen bio je jedan od prvih autora naše izdavačke kuće. Tijekom svog tridesetogodišnjeg rada izdali smo devet njegovih djela i tiskali ih u desetak izdanja i stotine tisuća primjeraka. Njima su se služile i još se služe mnoge generacije studenata među kojima danas ima vrhunskih stručnjaka u praksi i profesora na fakultetima.

Kao i svaka prirodna ili tehnička znanost tako je i matematika doživjela u ovo naše vrijeme značajan razvitak, no bez obzira na to djela pok. profesora Apsena dobro služe svojoj namjeni, a tako će biti sigurno još duže vremena.

Na ovom mjestu i na ovaj način želimo mu izraziti u ime nas i svih onih koji su se služili djelom pok. profesora i onih koji će to tek činiti, veliku zahvalnost jer je i kao pedagog i kao autor to zaslužio.

Zagreb, januara 1981.

Izdavač

PREDGOVOR

Nastavljajući svoj rad na olakšanju studija više matematike, sastavio sam ovu „Zbirku riješenih zadataka” u kojoj sam riješio i rastumačio preko 700 zadataka, uz mnogobrojne slike. Ti zadaci potanko ilustriraju teoriju brojeva i funkcija, nizove, limese i redove kao i diferencijalni račun prateći u stopu gradivo obrađeno u I dijelu moga Repetitorija više matematike.

Većina zadataka uzeta je iz poznatih izvrsnih zbirki ruskih autora Bermana, Demidoviča i dr., pri čemu je veći dio zadataka potanko obrađen i riješen, dok ih manji dio sadrži samo slične zadatke s rezultatima za njihovo samostalno rješavanje.

Na početku svakog poglavlja navedene su upute i formule prema kojim se rješavaju dotični zadaci. Formule su označene brojevima iz I dijela Repetitorija, pa se dotično gradivo može lako pronaći i ponoviti.

Preporučuje se da se nakon studija svakog pojedinog poglavlja Repetitorija odmah prouče i riješe pripadni zadaci iz zbirke.

B. Apsen

SADRŽAJ

PREDGOVOR	5
I. BROJEVI IRACIONALNI I KOMPLEKSNI. OPERACIJE S KOMPLEKS- NIM BROJEVIMA — formule	11
Zadaci 1 do 15	12
II. SLJEDOVI (NIZOVI) I NJHOVE GRANIČNE VRIJEDNOSTI — formule	20
Zadaci 16 do 24	20
III. ODREĐIVANJE GRANIČNIH VRIJEDNOSTI ILI LIMESA	25
A. Granične vrijednosti funkcija realne promjenljive n — formule	25
Zadaci 25 do 43	25
B. Granične vrijednosti funkcija realne promjenljive x — formule	28
Zadatak 44	29
a. Neodređenosti oblika $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ — upute	29
Zadaci 45 do 96	30
b. Neodređenosti oblika $\infty - \infty$ i $0 \cdot \infty$ — uputa	37
Zadaci 97 do 109	37
c. Neodređenosti oblika 1^∞ i nekih drugih oblika — uputa	39
Zadaci 110 do 133	40
IV. ELEMENTARNE FUNKCIJE. NJHOVA SVOJSTVA, GRAFOVI I PRI- MJENA	44
A. Cijele racionalne funkcije ili polinomi	44
a. Linearne funkcije — formule	44
Zadaci 134 do 140	44
b. Kvadratne funkcije — formule	46
Zadaci 141 do 163	46
c. Kubne funkcije — formule	54
Zadaci 164 do 169	54
B. Razlomljene racionalne funkcije	56
Zadaci 170 do 183	56
C. Iracionalne funkcije	61
Zadaci 184 do 192	61
D. Lučna mjera kuta. Trigonometrijske funkcije — formule	63
Zadaci 193 do 203	64
E. Eksponencijalne funkcije	66
Zadaci 204 do 208	66

F. Hiperbolne funkcije — formule	68
Zadatak 209	69
G. Funkcije zadane parametarski — formule	70
Zadaci 210 do 220	71
H. Inverzne funkcije	73
a. Pojam. Grafički prikaz	73
zadaci 221 do 225	73
b. Pojedine inverzne funkcije	75
1. Ciklometrijske ili arkus-funkcije	75
Zadaci 226 do 239	75
2. Logaritamske funkcije	79
Zadaci 240 do 252	79
3. Area-funkcije	83
Zadaci 253 do 257	83
V. ASIMPTOTE KRIVULJE $y=f(x)$, odnosno $F(x,y)=0$ — formule	85
Zadaci 258 do 270	85
VI. DERIVACIJE	93
A. Definicija derivacije. Geometrijsko značenje derivacije. Jednadžba tangente i normale — formule	93
Zadaci 271 do 279	93
B. Računanje derivacija	98
a. Deriviranje sume, produkta i kvocijenta algebarskih funkcija — formule	98
Zadaci 280 do 308	98
b. Složene funkcije. Deriviranje složenih funkcija — formule	103
Zadaci 309 do 320	103
c. Deriviranje trigonometrijskih funkcija — formule	106
Zadaci 321 do 335	106
d. Deriviranje logaritamskih funkcija — formule	108
Zadaci 336 do 345	108
e. Deriviranje ciklometrijskih (arkus) funkcija — formule	109
Zadaci 346 do 354	110
f. Deriviranje eksponencijalnih funkcija — formule	111
Zadaci 355 do 366	111
g. Deriviranje hiperbolnih funkcija — formule	112
Zadaci 367 do 374	112
h. Deriviranje area-funkcija — formule	113
Zadaci 375 do 382	113
i. Posebna vrsta derivacije (logaritamsko deriviranje) — uputa	114
Zadaci 383 do 393	114
j. Deriviranje različitih složenih funkcija	117
Zadaci 394 do 413	117
k. Računanje derivacija funkcija inverznih s obzirom na zadane — formule	120
Zadaci 414 do 419	120
l. Računanje derivacija viših redova — uputa	121
Zadaci 420 do 430	121
m. Deriviranje funkcija zadanih implicitno, tj. u obliku $F(xy)=0$ — uputa	123
Zadaci 431 do 438	123

C. Teoremi diferencijalnog računa	125
a. Rolleov teorem	125
Zadaci 439 do 444	125
b. Lagrangeov teorem srednje vrijednosti	126
Zadaci 445 do 453	127
D. Određivanje vrijednosti neodređenih oblika. L' Hospitalovo pravilo	129
a. Neodređeni oblici $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$ — formule	129
Zadaci 454 do 467	129
b. Neodređeni oblici $0 \cdot \infty$ i $\infty - \infty$ — uputa	131
Zadaci 468 do 481	132
c. Neodređeni oblici 0^0 , 1^∞ i ∞^0 — uputa	133
Zadaci 482 do 490	134
E. Značenje predznaka prve derivacije funkcije. Rast i pad funkcije — upute	136
Zadaci 491 do 504	136
F. Geometrijska primjena derivacija — formule	139
Zadaci 505 do 513	139
G. Određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije $y=f(x)$	143
a. Opći slučajevi — formule i upute	143
Zadaci 514 po 533	143
b. Posebni slučajevi — upute	149
Zadaci 534 do 545	149
c. Zadaci za maksimum i minimum funkcija — uputa	152
Zadaci 546 do 569	152
H. Određivanje najmanjih i najvećih vrijednosti funkcije u zadanom zatvorenom intervalu — upute	161
Zadaci 570 do 583	161
J. Konveksnost i konkavnost krivulja. Tačke infleksije — uputa	166
Zadaci 584 do 592	166
K. Mehaničko, odnosno kinematičko značenje prve i druge derivacije funkcija — upute	168
Zadaci 593 do 608	168
L. Ispitivanje toka funkcija i konstrukcija njihovih grafova — postupak	172
Zadaci 609 do 616	172
VII. REDOVI	177
A. Redovi brojeva	177
a. Osnovni pojmovi konvergencije i divergencije redova — upute	177
Zadaci 617 do 628	178
b. Redovi sa pozitivnim članovima. Kriteriji konvergencije	181
1. Kriterij uspoređivanja — upute	181
Zadaci 629 do 645	182
2. D'Alembertov kriterij — uputa	185
Zadaci 646 do 653	185
3. Cauchyjev kriterij — uputa	187
Zadaci 654 do 660	187

4. Raabeov kriterij — uputa	188
Zadaci 661 do 665	188
c. Alternirani redovi. Leibnizov kriterij — uputa	189
Zadaci 666 do 670	190
d. Redovi s pozitivnim i negativnim članovima poredanim bilo kako. Apsolutno konvergentni redovi. Bezuvjetno i uvjetno konvergentni redovi — uputa	191
Zadaci 671 do 675	191
B. Redovi funkcija	192
a. Općeniti redovi funkcija	192
1. Područje konvergencije reda funkcija — uputa	192
Zadaci 676 do 681	193
2. Uniformna konvergencija reda funkcija. Weierstrassov kriterij — uputa	195
Zadaci 682 do 688	195
b. Redovi potencija	197
1. Općeniti redovi potencija — upute	197
Zadaci 689 do 700	197
2. Taylorovi i Mac-Laurinovi redovi — formule i upute	200
Zadaci 701 do 719	201
c. Približno računanje pomoću redova potencija	206
Zadaci 720 do 727	206

PRVI DIO

(Brojevi formula odgovaraju brojevima u I dijelu Repetitorija više matematike)

I. BROJEVI IRACIONALNI I KOMPLEKSNI OPERACIJE S KOMPLEKSNIM BROJEVIMA

Formule

$$\left. \begin{array}{l} \text{Broj } \frac{m}{n} = \text{racionalni broj} \\ \text{Broj } \frac{m}{n} = \text{iracionalni broj} \end{array} \right\} \text{ Ovdje su } m \text{ i } n \text{ cijeli brojevi.}$$

$$z = x + iy \quad (7)$$

$$\left. \begin{array}{l} i = \sqrt{-1} \\ i^2 = -1 \end{array} \right\} \quad (8)$$

$$\left. \begin{array}{l} i^3 = -1 \\ i^4 = 1 \\ i^5 = i^4 \cdot i = i \\ i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1 \end{array} \right\} \quad (9)$$

itd.

$$z_1 = z_2 \text{ kada je } x_1 = x_2 \text{ i } y_1 = y_2$$

Za

$$x = r \sin \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (12)$$

Kako svaki iracionalni broj, tako i log 14 možemo prikazati sa dva niza ili slijeda racionalnih brojeva:

Lijevi niz	Desni niz	Duljina intervala u kojem leži vrijednost log 14
1,1	$< \log 14 < 1,2$	0,1
1,14	$< \log 14 < 1,15$	0,01
1,146	$< \log 14 < 1,147$	0,001
1,1461	$< \log 14 < 1,1462$	0,0001
1,14612	$< \log 14 < 1,14613$	0,00001

Iracionalni broj log 14 prikazali smo sa dva niza racionalnih brojeva, odnosno racionalnih tačaka brojnog pravca, tj. tačaka kojima su apscise racionalni brojevi. Vidi sl. 1. Kako vidimo, ta dva niza racionalnih brojeva imaju slijedeća svojstva: članovi lijevog niza rastu, dok desnog opadaju; svaki član lijevog niza manji je od svakog člana desnog niza, a razliku između svakog para članova iz desnog i lijevog niza možemo načiniti po volji malenom.

Idemo li u tim nizovima sve dalje i dalje, steže se sve više razmak u kojem leži zadani iracionalni broj, pa ga možemo po volji tačno aproksimirati pomoću racionalnih brojeva iz tih nizova, pri čemu racionalni brojevi lijevog niza daju aproksimacije zadanog iracionalnog broja na manje, a desnog niza na više.

U našem primjeru oba se niza stežu na jednu tačku, kojoj je apscisa označena simbolom log 14.

2. Na isti način prikaži iracionalni broj log 2,8.

U zadacima 3 do 6 uklj. izračunaj vrijednosti zadanih izraza.

3. $z = (2 + 3i)(3 + 2i)(-i)$.

Prema (9):

$$z = (6 + 9i + 4i - 6)(-i) = (13i)(-i) = 13.$$

4. $z = 2i^6 - 3i^{15} + 4i^{20} - i^{-5}$.

Prema (9):

$$z = 2i^4 \cdot i^2 - 3i^{4 \cdot 3} \cdot i^3 + 4i^{4 \cdot 5} - \frac{1}{i^4 \cdot i} =$$

$$= 2 \cdot 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 1 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{i} = -2 + 3i + 4 \cdot \frac{i}{i^2} = -2 + 3i + i = 2 + 4i.$$

5. $z^5 = \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^5$.

Izvršimo prijelaz na trigonometrijski oblik kompleksnog broja, tj. na oblik $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Prema (12a):

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}$$

$$\log 14 = 1,14613.$$

Črtica ispod posljednje (pete) znamenke mantise kazuje da je šesta znamenka mantise 5 ili veća od 5, pa je vrijednost log 14 zaokružena na više.

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} \quad (12a)$$

$$r = |z| = + \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$z_1 = z_2$$

$$r_1 = r_2$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + 360^\circ \cdot k$$

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

$$(\cos \varphi \pm i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi \pm i \sin n\varphi$$

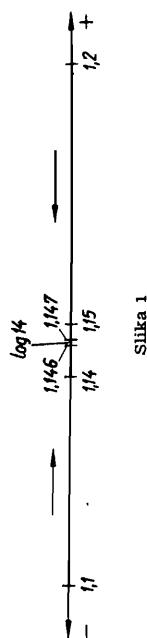
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 360^\circ \cdot k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 360^\circ \cdot k}{n} \right)$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \dots, (n-1).$$

Zadaci

U zadacima 1 i 2 prikaži zadane iracionalne brojeve sa dva niza racionalnih brojeva i naznači svojstva tih nizova.



Slika 1

1. log 1

Logaritmi su u većini slučajeva iracionalni brojevi. Iz tablice logaritama izračunatih na pet decimala tačno vadimo:

φ je u II kvadrantu, jer je samo u tom kvadrantu $\sin \varphi > 0$, a $\cos \varphi < 0$.

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \sqrt{3}, \quad \varphi_0 = 60^\circ; \quad \varphi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$z = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ.$$

Prema (15):

$$\begin{aligned} z^5 &= \cos (120^\circ \cdot 5) + i \sin (120^\circ \cdot 5) = \cos 600^\circ + i \sin 600^\circ = \cos 240^\circ + i \sin 240^\circ = \\ &= -\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$6. \quad z = \frac{5+3i}{-2-i}.$$

Brojnik i nazivnik množimo s kompleksnim brojem koji je konjugiran s obzirom na nazivnik, tj. s $(-2+i)$, da nazivnik postane realan:

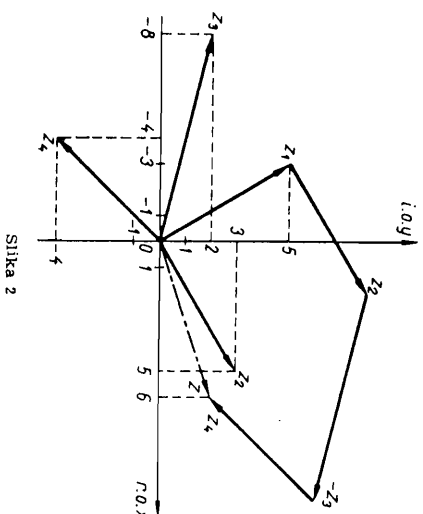
$$z = \frac{(5+3i)(-2+i)}{(-2-i)(-2+i)} = \frac{-10-6i+5i-3}{(-2)^2-(i)^2} = \frac{-13-i}{4+1} = -\frac{13}{5} - \frac{1}{5}i.$$

U zadacima 7 do 9 uklj. obavij računski i grafički naznačene operacije nad zadanim kompleksnim brojevima.

$$7. \quad z = z_1 + z_2 - z_3 + z_4 \quad \text{za} \quad z_1 = -3+5i, \quad z_2 = 5+3i, \quad z_3 = -8+2i, \quad z_4 = -4-4i.$$

$$z = z_1 + z_2 - z_3 + z_4 = (-3+5+8-4) + (5+3-2-4)i = 6+2i.$$

Grafičko rješenje:



Slika 2

$$8. \quad z_1 \cdot z_2 \quad \text{za} \quad z_1 = 2+2i \quad \text{i} \quad z_2 = 1+3i.$$

$$z_1 \cdot z_2 = (2+2i)(1+3i) = 2+2i+6i-6 = -4+8i.$$

Grafičku vrijednost $z_1 \cdot z_2$ određujemo prema formuli (14), koja kazuje da je argument od $z_1 \cdot z_2$ tj. $\arg(z_1 \cdot z_2) = \varphi_1 + \varphi_2$ i da je radijus-vektor produkta $r_1 \cdot r_2$.

Prema (12) i (12a):

$$\begin{aligned} r_1 &= +\sqrt{4+4} = 2\sqrt{2} \approx 2,8 \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{2}{2} = 1; \quad \varphi_1 = 45^\circ \\ z_1 &= 2\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \sin 45^\circ) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= +\sqrt{1+9} = \sqrt{10} \approx 3,2 \\ \operatorname{tg} \varphi_2 &= \frac{3}{1} = 3; \quad \varphi_2 \approx 71^\circ 30' \\ z_2 &= \sqrt{10}(\cos 71,5^\circ + i \sin 71,5^\circ). \end{aligned}$$

Prema (14):

$$z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{5}(\cos 116,5^\circ + i \sin 116,5^\circ).$$

Grafička konstrukcija (Vidi sl. 3).

$$\varphi = \varphi_2 + \varphi_1.$$

Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$r : r_1 = r_2;$$

odakle:

$$r = r_1 \cdot r_2.$$

9. Na isti način analitički i grafički izračunaj:

$$z_1 \cdot z_2 \quad \text{za} \quad z_1 = 3+4i \quad \text{i} \quad z_2 = -1+i.$$

$$[-7-i].$$

10.

Određi na dva načina kvocijent kompleksnih brojeva: $z_1 = -5+12i$ i $z_2 = -3-4i$ i prikaži grafički z_1 , z_2 i $\frac{z_1}{z_2}$.

Računajući s logaritamskim računalom* na jednu decimalu tačno, dobivamo:

$$I \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{-5+12i}{-3-4i} = \frac{(-5+12i)(-3+4i)}{(-3-4i)(-3+4i)} = \frac{15-36i-20i-48}{9+16} = \frac{-33-56i}{25} = -1,3-2,2i$$

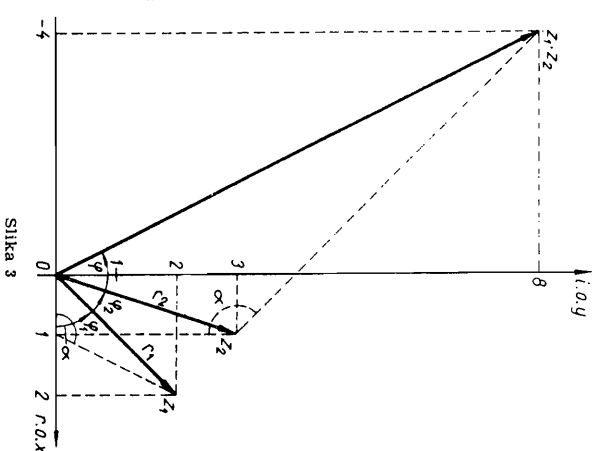
II $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$.

Prema (12a):

$$r_1 = +\sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \varphi_1}{\cos \varphi_1} = \frac{y}{x} = \frac{12}{-5} = -2,4.$$

* Vidi od istog autora: Logaritamsko računalo, izdanje Tehničke knjige, Zagreb, 1967.



Slika 3

φ_1 je u II kvadrantu, jer je $\sin \varphi_1 > 0$, a $\cos \varphi_1 < 0$, pa je:

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = +2,4, \quad \varphi_0 = 67^\circ \quad \text{ i } \quad \varphi = 180^\circ - 67^\circ = 113^\circ$$

$$z_1 = 13 (\cos 113^\circ + i \sin 113^\circ).$$

Na isti način dobivamo za $z_2 = -3 - 4i$:

$$r_2 = +\sqrt{9+16}=5$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3} = 1,3; \quad \varphi_2 \text{ je u III kvadrantu, jer je } \sin \varphi_2 < 0 \quad \text{ i } \quad \cos \varphi_2 < 0.$$

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = 1,3, \quad \varphi_0 = 53^\circ$$

$$\varphi_2 = 180^\circ + 53^\circ = 233^\circ$$

$$z_2 = 5 (\cos 233^\circ + i \sin 233^\circ).$$

Prema (17):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{13}{5} [\cos (113^\circ - 233^\circ) + i \sin (113^\circ - 233^\circ)] = \frac{13}{5} [\cos (-120^\circ) + i \sin (-120^\circ)] =$$

$$= \frac{13}{5} (\cos 240^\circ + i \sin 240^\circ)$$

Pokus:

$$\frac{z_1}{z_2} = 2,6 (-\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ) = 2,6 (-0,5 - i 0,86) = -1,3 - 2,2i.$$

Grafičko rješenje. Vidi sl. 4.

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = -120^\circ,$$

odnosno $+240^\circ$.

Iz sličnosti trokuta slijedi:

$$r : 1 = r_1 : r_2,$$

pa je

$$r = \frac{r_1}{r_2}.$$

11. Zadatak 6 riješi prijelazom na trigonometrijski oblik zadanih kompleksnih brojeva, uz pokus i grafičku konstrukciju kvocijenta.

12. Izračunaj i prikaži grafički

$$\sqrt[5]{-3+i\sqrt{3}}.$$

Označimo:

$$z_0 = -3 + i\sqrt{3}$$

Prelazimo prema (12a) na oblik $z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-3} = \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi}$$

$\sin \varphi > 0$
 $\cos \varphi < 0$ } φ je u II kvadrantu,

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \varphi_0 = 30^\circ; \quad \varphi = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

$$r = +\sqrt{9+3} = \sqrt{12}$$

$$z_0 = \sqrt{12} (\cos 150^\circ + i \sin 150^\circ).$$

Prema (18):

$$z = \sqrt[5]{-3+i\sqrt{3}} = \sqrt[10]{12} \left\{ \cos \frac{150^\circ + 360^\circ \cdot k}{5} + i \sin \frac{150^\circ + 360^\circ \cdot k}{5} \right\}$$

ili

$$z = \sqrt[10]{12} \{ \cos (30^\circ + 72^\circ \cdot k) + i \sin (30^\circ + 72^\circ \cdot k) \}$$

$$k = 0, 1, 2, 3, \text{ i } 4.$$

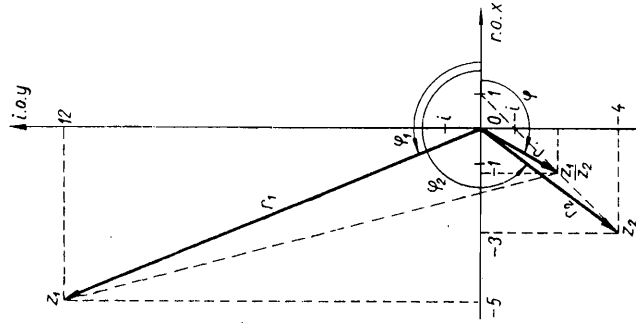
$$k=0 \quad z_1 = \sqrt[10]{12} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ) = \sqrt[10]{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \sqrt[10]{12} (0,87 + i 0,5).$$

$$k=1 \quad z_2 = \sqrt[10]{12} (\cos 102^\circ + i \sin 102^\circ) = \sqrt[10]{12} (-\sin 12^\circ + i \cos 12^\circ) = \sqrt[10]{12} (-0,21 + i 0,98).$$

$$k=2 \quad z_3 = \sqrt[10]{12} (\cos 174^\circ + i \sin 174^\circ) = \sqrt[10]{12} (-\sin 84^\circ + i \cos 84^\circ) = \sqrt[10]{12} (-0,99 + i 0,10).$$

$$k=3 \quad z_4 = \sqrt[10]{12} (\cos 246^\circ + i \sin 246^\circ) = \sqrt[10]{12} (-\cos 66^\circ - i \sin 66^\circ) = \sqrt[10]{12} (-0,41 - i 0,91).$$

$$k=4 \quad z_5 = \sqrt[10]{12} (\cos 318^\circ + i \sin 318^\circ) = \sqrt[10]{12} (\sin 48^\circ - i \cos 48^\circ) = \sqrt[10]{12} (0,74 - i 0,67).$$



Slika 4

Grafički prikaz:

$$\log r = \log \sqrt[10]{12} = \frac{1}{10} \log 12 = 0,107918$$

$$r = \sqrt[10]{12} \approx 1,282. \quad \text{Vidi sl. 5.}$$

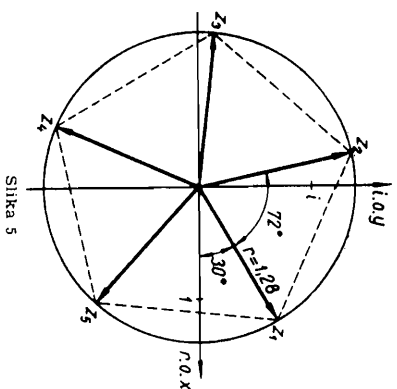
13. Izračunaj i prikaži grafički

$$\sqrt[4]{-2-i2}.$$

14. Pokaži da je

$$\sin 4\varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi - 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi$$

$$\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1.$$



Slika 5

U tu svrhu razvijamo Moivreovu formulu (16) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$ po binomnoj formuli (vidi Repetitorij elementarne matematičke, formula (48)), pa dobivamo:

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi = & \cos^n \varphi + \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi i \sin \varphi + \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi i^2 \sin^2 \varphi + \\ & + \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi i^3 \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi i^4 \sin^4 \varphi + \dots + n \cos \varphi i^{n-1} \sin^{n-1} \varphi + i^n \sin^n \varphi. \end{aligned}$$

Kako je prema (9) $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = +1$ itd, dobivamo

$$\begin{aligned} \cos n\varphi + i \sin n\varphi = & \cos^n \varphi + \\ & + i \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi - i \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Znamo da su dva kompleksna broja jednaka, kad su im jednaki realni i imaginarni dijelovi, pa imamo:

$$\begin{aligned} \cos n\varphi = & \cos^n \varphi - \binom{n}{2} \cos^{n-2} \varphi \sin^2 \varphi + \binom{n}{4} \cos^{n-4} \varphi \sin^4 \varphi + \dots \\ \sin n\varphi = & \binom{n}{1} \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi - \binom{n}{3} \cos^{n-3} \varphi \sin^3 \varphi + \binom{n}{5} \cos^{n-5} \varphi \sin^5 \varphi + \dots \end{aligned}$$

Kako je

$$\binom{n}{1} = n; \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}; \quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3};$$

$$\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ itd, uvrštenje } n=4 \text{ u izvedene formule daje}$$

$$\cos 4\varphi = \cos^4 \varphi - \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cos^0 \varphi \sin^4 \varphi =$$

$$= \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi = \cos^4 \varphi - 6 \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) + (1 - \cos^2 \varphi)^2.$$

Nakon uredjenja dobivamo:

$$\cos 4\varphi = 8 \cos^4 \varphi - 8 \cos^2 \varphi + 1.$$

$$\sin 4\varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \varphi \sin^3 \varphi = 4 \cos^3 \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi =$$

$$= 4(1 - \sin^2 \varphi) \cos \varphi \sin \varphi - 4 \cos \varphi \sin^3 \varphi.$$

Nakon uredjenja dobivamo:

$$\sin 4\varphi = 4 \sin \varphi \cos \varphi - 8 \sin^3 \varphi \cos \varphi.$$

15. Pomoću gore izvedenih formula za $\cos n\varphi$ i $\sin n\varphi$ pokaži da vrijede relacije:

$$\sin 3\varphi = 3 \sin \varphi - 4 \sin^3 \varphi$$

$$\cos 3\varphi = 4 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi.$$

To znači: počevši od člana a_{n_0} , gdje je $n_0 = n + 1 = 10$, tj. od a_{10} apsolutna veličina razlike između limesa 1 i člana niza a_{10} manja je od $\varepsilon = \frac{1}{10}$.

Pokažimo to:

$$\left| 1 - \frac{n_0}{n_0 + 1} \right| = 1 - \frac{10}{11} = \frac{1}{11} < \frac{1}{10}.$$

Odredi za isti niz n_0 , ako je:

- a) $\varepsilon = 0,01$ i b) $\varepsilon = 0,001$

[$n_0 = 100$, odnosno 1000].

17. Za niz $a_n = \frac{1}{n^2}$ odredi limes A i n_0 , ako je $\varepsilon = 0,1$.

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

$$|A - a_n| = \left| 0 - \frac{1}{n^2} \right| < \frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{10}, \text{ pa je}$$

$$n > 3,2$$

$$n_0 = 4; \quad a_{n_0} = \frac{1}{16}.$$

Počevši od $n \geq 4$ $|A - a_n| < 0,1$.

Pokus:

$$\left| 0 - \frac{1}{16} \right| = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}.$$

Za isti niz izračunaj n_0 , ako je:

- a) $\varepsilon = 0,01$ i b) $\varepsilon = 0,001$.

[$n > 10$; $n > 32$].

18. Za niz $\frac{1}{2}, \frac{7}{8}, \frac{31}{32}, \frac{127}{128}, \dots$ odredi:

- a) Opći član a_n niza, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i c) počevši od kojeg člana a_{n_0} $|A - a_n| < \frac{1}{64}$.

Ad a) Opažamo da su u nazivnicima članova zadanog niza neparne potencije broja 2, dok je brojnik svakog člana za 1 manji od nazivnika, pa je:

$$a_n = \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}}.$$

II. SLJEDOVİ (NIZOVİ) I NJIHOVE GRANIČNE VRIJEDNOSTI (LIMESI)

Formule

Beskonačni niz $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ čiji je opći član a_n konvergira i ima za limes konačnu određenu vrijednost A , kad broj članova n teži u beskonačnost, tj.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A, \quad (21)$$

ako je

$$|A - a_n| < \varepsilon, \text{ čim je } n > n_0(\varepsilon).$$

Zadaci

16. Odredi graničnu vrijednost A niza $a_n = \frac{n}{n+1}$ kad $n \rightarrow \infty$ i pokaži počevši od kojeg je člana a_{n_0} zadovoljen uvjet $|A - a_n| < \varepsilon$, ako je $\varepsilon = 0,1$.

Računamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \text{brojnik i nazivnik dijelimo sa } n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = 1, \text{ jer } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

Prema (20):

$$\left| 1 - \frac{n}{n+1} \right| < \frac{1}{10}$$

ili

$$\left| \frac{n+1-n}{n+1} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{10}$$

ili recipročno:

$$n+1 > 10$$

pa je:

$$n > 9.$$

Ad b) $A = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n-1} - 1}{2^{2n-1}} = \text{brojnik dijelimo s nazivnikom } 2^{2n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right) = 1,$

jer $\frac{1}{2^{2n-1}} \rightarrow 0$, kad $n \rightarrow \infty$.

Ad c) $|A - a_n| = \left|1 - \left(1 - \frac{1}{2^{2n-1}}\right)\right| = \frac{1}{2^{2n-1}} < \frac{1}{64}$ ili $2^{2n-1} > 64$

ili

$$2^{2n-1} > 2^6$$

pa je

$$2n - 1 > 6.$$

Odatle je

$$2n > 7 \quad \text{i} \quad n > \frac{7}{2}$$

pa je

$$\underline{n_0=4}, \text{ odnosno } \underline{a_4 = \frac{127}{128}}.$$

Pokus:

$$|1 - a_n| = \left|1 - \frac{127}{128}\right| = \frac{1}{128} < \frac{1}{64}.$$

19. Članovi niza a_n su binomni koeficijenti. Odredi $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.

Iz binomnog reda (155):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots + \frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} x^n$$

vidimo da su ti koeficijenti

$$\frac{m}{1}, \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}, \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \dots,$$

pa je

$$a_n = \frac{m(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot [m-(n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n},$$

dok za $n=m+1$:

$$a_n = a_{m+1} = 0, \text{ jer je posljednji faktor brojnika } [m-(m+1-1)] = m-m=0.$$

Kako su i svi slijedeći faktori brojnika, počevši od a_{m+1} jednaki nuli, bit će

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

20. Pokaži da ne postoji $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ za niz

$$a_n = 1 + (-1)^n.$$

Za članove niza neparnog indeksa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n-1} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n-1} = 1 - 1 = 0,$$

a za parnog indeksa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n} = 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{2n} = 1 + 1 = 2.$$

Zadani niz ima dvije tačke gomilanja 0 i 2 pa nema limesa.

U zadacima 21 do 24 uki. odredi granične vrijednosti zadanih nizova, prehodno napisavi njihove opće članove.

$$21. \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}, \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}}, \dots$$

Vidimo da su:

$$a_1 = \sqrt[3]{3}$$

$$a_2 = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3^3}$$

$$a_3 = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^3}} = \sqrt[3]{3^6}$$

$$a_4 = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3\sqrt[3]{3}}}} = \sqrt[3]{3\sqrt[3]{3^6}} = \sqrt[3]{3^{16}}$$

$$\dots \dots \dots$$

Zadani niz poprima oblik:

$$\sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{3^3}, \sqrt[3]{3^6}, \sqrt[3]{3^{16}}, \dots$$

Opažamo da su eksponenti korijena parni brojevi i da su eksponenti radikanda za 1 manji od eksponenata korijena, pa su neparni brojevi. Slijedi:

$$a_n = \sqrt[3]{3^{2n-1}}.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3^{2n-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3^{1-\frac{1}{2n}} = 3,$$

jer je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

22. 5,3; 5,34; 5,344; 5,3444;...

Članovi zadanog niza približne su uzastopne vrijednosti mješovitog periodskog razlomka čiji je period 4, a preperiod 3.

Pomoću sume beskonačnog geometrijskog niza [vidi (57) u Repetitoriju elementarne matematike, § 13, 2. b)] možemo izračunati racionalni broj koji je limes zadanog niza:

$$A = 5,34 = 5 \frac{34-3}{90} = 5 \frac{31}{90}.$$

$$23. \quad 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \dots$$

$$24. \quad \frac{2}{1}, \frac{4}{3}, \frac{6}{5}, \frac{8}{7}, \dots$$

$$\left[\frac{(-1)^{n-1}}{n}; 0 \right].$$

$$\left[\frac{2n}{2n-1}; 1 \right].$$

III. ODREĐIVANJE GRANIČNIH VRIJEDNOSTI ILI LIMESA

A. Granične vrijednosti funkcija prirodne promjenljive n , tj, cijele i pozitivne promjenljive ($n=1, 2, 3, 4, \dots$).

Formule

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a|^n = \begin{cases} 0 & \text{za } |a| < 1 \\ 1 & \text{za } |a| = 1 \\ \infty & \text{za } |a| > 1 \end{cases} \quad (21a)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a|} = 1 \quad (21b)$$

gdje je a koji god realni broj.

Zadaci

U zadacima 25 do 36 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih funkcija od n .

$$25. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \dots + \frac{n-1}{n^2} \right).$$

$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2+3+\dots+(n-1)}{n^2} =$ brojnik predlaže zbroj $(n-1)$ članova aritmetičkog niza kome je $a_1 = 1$, dok je posljednji član $a_{n-1} = n-1$, pa prema formuli (55) $S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$ za sumu članova aritmetičkog niza (vidi Repetitorij elem. matematike, §13.1.) =

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + (n-1)}{n^2} \cdot \frac{n-1}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - n}{2n^2} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{n}}{1} = \frac{1}{2}.$$

$$26. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1+3+5+7+\dots+(2n-1)}{n+1} - \frac{2n+1}{2} \right] = \text{prema (55)} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{[1+(2n-1)] \cdot \frac{n}{2} - \frac{2n+1}{2}}{n+1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{\frac{n^2}{2} - \frac{2n+1}{2}}{n+1} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n-1}{2(n+1)} = \\ &= -\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{n+1} = \text{brojnik i nazivnik dijelimo sa } n = -\frac{3}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{3}{n}}{1+\frac{1}{n}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$27. \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} \right].$$

Traži se granična vrijednost sume $(n-1)$ članova geometrijskog niza čiji je prvi član $a_1 = 1$, dok je kvocijent niza $q = -\frac{1}{3}$, pa prema formuli (57) (v. Reptitorij elem. matematike, § 13, 2.a) $S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ dobivamo:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 \cdot \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1}{-\frac{1}{3} - 1} = \frac{3}{4}, \text{ jer je } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = 0 \text{ prema (21a).}$$

$$28. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \right)$$

Uzmemo li u obzir da je $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$, $\frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ itd, dobivamo:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1.$$

$$29. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+2)!(n+1)!}{(n+3)!}$$

Znamo da je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$, pa svaki član zadanog razlomka možemo izraziti sa $n!$

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)(n+2) + n!(n+1)}{n! \cdot (n+1)(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n[(n+1)(n+2)+1]}{n!(n+1)(n+2)(n+3)} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+3}{(n+2)(n+3)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+2} = 0. \end{aligned}$$

$$30. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2}{n^3}.$$

Zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva možemo prikazati u obliku $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pa dobivamo:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{1}{6} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(2 + \frac{1}{n}\right) \right] = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3}, \text{ jer } \frac{1}{n} \rightarrow 0, \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

$$31. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n+1} + 5^{n+1}}{3^n + 5^n}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \left[\left(\frac{3}{5}\right)^{n+1} + 1 \right]}{5^n \left[\left(\frac{3}{5}\right)^n + 1 \right]} = \frac{5^n \cdot 5}{5^n} = 5, \text{ jer prema (21a)} \left(\frac{3}{5}\right)^n \rightarrow 0, \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

$$32. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 5^{n+2}}{3 - 5^n}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 5^{n+2}}{3 - 5^n} = \text{brojnik i nazivnik dijelimo s } 5^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{5^n} - 25}{\frac{3}{5^n} - 1} = \frac{1}{-1} = -1, \text{ jer } \frac{1}{5^n} \rightarrow 0 \text{ i } \frac{3}{5^n} \rightarrow 0 \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

$$33. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2^n} - 1}{2^n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\sqrt{2} + 1} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} - 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2} + 1} = \frac{1 - 1}{1 + 1} = \frac{0}{2} = 0, \text{ jer je prema (21b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{2}} = 1.$$

$$34. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^{n+2} + 7^{n+2}}{4^{n+1} - 7^{n+1}}.$$

[-7].

$$35. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! - (n+1)!}{(n+1)!}.$$

[-1].

$$36. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}}.$$

$\left[\frac{4}{3}\right]$

U zadacima 37 do 43 uki. tražene limese odredi tako da prije prijelaza na limes podijeliš svaki član brojnika i nazivnika s najvišom potencijom promjenljive n .

$$37. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^3 - 3n + 1 + n^2}{2n^2 + 9n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5 - \frac{3}{n^2} + \frac{1}{n^3}}{\frac{2}{n} + \frac{9}{n^2}} = \frac{5}{0} = \infty, \text{ jer svi članovi osim 5 teže k } 0, \text{ kad } n \rightarrow \infty.$$

$$38. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n^2 + 1} + n)^2}{\sqrt{n^6 + 1}}.$$

Najviša potencija je $\sqrt[n]{n^6} = n^2$, pa svaki član zadane funkcije dijelimo sa n^2 .

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1 \right)^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^6}}} = \frac{(1+1)^2}{1} = 4.$$

$$39. \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n^3 - 2n^2 + 1} + \sqrt[n]{n^4 + 1}}{\sqrt[n]{n^6 + 6n^5 + 2} - \sqrt[n]{n^7 + 3n^3 + 1}}. \quad (21c)$$

$$\text{Za } a > 0: \lim_{x \rightarrow \pm \infty} ax = \pm \infty \quad (26a)$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{a}{x} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm 0} \frac{a}{x} = \pm \infty. \quad (26b)$$

Zadatak

44. Dokaži da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$, gdje je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$.

Ma kako velik bio zadani realni broj $|x|$, uvijek možemo naći dva uzastopna cijela pozitivna broja k i $k+1$ između kojih leži taj $|x|$, tj.:

$$k < |x| < k+1. \quad (a)$$

Napisavši $\frac{|x|^n}{n!}$ u obliku

$$\frac{|x|^n}{n!} = \underbrace{\frac{|x|}{1} \cdot \frac{|x|}{2} \cdot \frac{|x|}{3} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{k}}_{k \text{ faktora}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{k+1} \cdot \frac{|x|}{k+2} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{n-1} \cdot \frac{|x|}{n}}_{(n-k) \text{ faktora}} \quad (b)$$

opažamo da je produkt prvih k faktora neka konstanta koju označimo sa C , dok je svaki od ostalih faktora, kojih ima $(n-k)$, s obzirom na nejednakost (a) manji od 1. Zamijenimo li svaki od tih $(n-k)$ faktora s najvećim od njih, tj. s prvim $\frac{|x|}{k+1}$, povećat ćemo desnu stranu jednakosti (b), pa je:

$$\frac{|x|^n}{n!} < C \cdot \left(\frac{|x|}{k+1} \right)^{n-k}. \quad (c)$$

Kako je $\frac{|x|}{k+1} < 1$, dobivamo s obzirom na (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^n}{n!} = 0$,

jer je prema (21a): $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{|x|}{k+1} \right)^{n-k} = 0$.

a. NEODREĐENOSTI OBLIKA $\frac{0}{0}$ I $\frac{\infty}{\infty}$

Upute

Opća pravila određivanja graničnih vrijednosti:

I. Granična vrijednost ili limes razlomljene racionalne funkcije $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, tj. kvocijenta dvaju polinoma u x , kad $x \rightarrow \infty$, određuje se tako da se prethodno brojnik i nazivnik podijele sa x^n , gdje je n stepen najvišeg od tih polinoma.

B. Granične vrijednosti funkcija realne promjenljive x
 x prima sve vrijednosti od $-\infty$ do $+\infty$.

Formule

$$\text{Za } x \text{ koji god realni broj:} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} |x|^n = \begin{cases} 0 & \text{za } |x| < 1 \\ 1 & \text{za } |x| = 1 \\ \infty & \text{za } |x| > 1 \end{cases} \quad (21a)$$

II. Na isti način može se kadšto odrediti limes kvocijenta koji sadrži iracionalne izraze.

III. Izraze koji sadrže iracionalne članove moramo prethodno racionalizirati uvođenjem nove promjenljive, ukoliko uspije sve x izraziti sa tom novom promjenjivom.

IV. Ako se traži limes $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ kad $x \rightarrow a$, a uvištenje $x=a$ daje neodređenost $\frac{0}{0}$, treba prethodno brojnik i nazivnik zadane razlomljene racionalne funkcije pokratiti jedan ili više puta s binomom $(x-a)$.

V. Limes iracionalnih funkcija određuje se na više načina:

- 1) uvođenjem nove promjenljive iracionalni izraz se svodi na racionalni,
- 2) iracionalnost se prenosi iz nazivnika u brojnik, ili obratno, iz brojnika u nazivnik.

Zadaci

U zadacima 45 do 49 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih izraza prema pravilu I.

$$45. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 - 3x^2 - 5}{5x^3 - 7x + 8} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} - \frac{5}{x^3}}{\frac{5}{x^3} - \frac{7}{x^4} + \frac{8}{x^3}} = \frac{2}{5}, \text{ jer } \frac{3}{x} \rightarrow 0, \frac{5}{x^3} \rightarrow 0, \frac{8}{x^3} \rightarrow 0 \text{ kad } x \rightarrow \infty.$$

$$46. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 5x - 1}{4x - 9} = \text{brojnik i nazivnik podijelimo sa } x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{5}{x} - \frac{1}{x^2}}{\frac{4}{x} - \frac{9}{x^2}} = \frac{2}{0} = \infty.$$

$$47. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - x + 5}{2x^4 - 3x - 7} = \text{brojnik i nazivnik podijelimo sa } x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{x} - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}}{2 - \frac{3}{x^3} - \frac{7}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$48. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(4x^2 - 5)^2 (2x - 7)^5}{8x^9 - 3} = \text{brojnik i nazivnik podijelimo sa } x^9 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4}{8 - \frac{3}{x^9}} = \frac{(4x^2 - 5)^2 (2x - 7)^5}{8 - \frac{3}{x^9}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{4x^2 - 5}{x^2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2x - 7}{x}\right)^5}{8 - \frac{3}{x^9}} = \frac{1}{8} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(4 - \frac{5}{x^2}\right)^2 \cdot \left(2 - \frac{7}{x}\right)^5 \right] = \frac{1}{8} \cdot 16 \cdot 32 = 64.$$

$$49. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x + 3)^3 (3x - 2)^2}{x^5 + 5} = \frac{[72]}{[72]}$$

U zadacima 50 do 54 uklj. odredi granične vrijednosti prema pravilu II.

$$50. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2} + \frac{1}{x^2}} + \frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{1 + \frac{1}{x}} = 1.$$

$$51. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^4 + 1} - \sqrt{x^4 + 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} - \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}} = 1.$$

$$52. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = 2.$$

$$53. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^3 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x^3 + x} - x} = \frac{[5]}{[2]}.$$

$$54. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 4}{2x^3 - \sqrt{x^2}} = \frac{[5]}{[2]}.$$

U zadacima 55 do 64 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih izraza prema pravilu III

$$55. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt{1+x} - 1} = \frac{[5]}{[2]}.$$

Uvištenje $x=0$ daje neodređenost oblika $\frac{0}{0}$. Stavimo $1+x=t^2$ i uzimamo u obzir da $t \rightarrow 1$ kad $x \rightarrow 0$.

$$L = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t^2 - 1}{t^2 - 1} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t+1)(t-1)}{(t-1)(t^2+t+1)} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{t+1}{t^2+t+1} = \frac{2}{3}.$$

$$56. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2}{\sqrt{x^2-2} - \sqrt{x+1}} = \text{(uvištenje } x=1 \text{ daje } \frac{0}{0}, \text{ stavimo } x=t^2, \text{ pa } t \rightarrow 1 \text{ kad } x \rightarrow 1) = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t^2-1)^2}{\sqrt{t^4-2} - \sqrt{t+1}} = \lim_{t \rightarrow 1} \frac{(t-1)^2(t^2+t+1)^2}{(t-1)^2} = \lim_{t \rightarrow 1} (t^2+t+1)^2 = 3^2 = 9.$$

$$57. \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt{x} - 4} = \text{(stavimo } x=t^2, \text{ kad } x \rightarrow 64, t \rightarrow \sqrt{64} = 8) = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t - 8}{t - 4} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{(t-2)(t+2)}{(t-2)(t+2)} = \lim_{t \rightarrow 8} \frac{t+2}{t+2} = \frac{10}{10} = 1.$$

$$58. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{x}{2} - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2x} = \infty.$$

$$59. \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = \frac{\sqrt{x-1}-2}{x-5} = (x-1) = x^2+1; \quad x = \sqrt{x-1}, \quad \text{pa } x \rightarrow 2 \text{ kad } x \rightarrow 5 = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{t^2+1-5} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t-2}{(t+2)(t-2)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{1}{t+2} = \frac{1}{4}.$$

$$60. \quad \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x+3}-3}{x^2-36} = (x+3=t^2, \quad x=t^2-3; \quad t=\sqrt{x+3}, \quad \text{pa } t \rightarrow \sqrt{6+3}=3 \text{ kad } x \rightarrow 6) = \\ = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t^2-3)^2-36} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t^2-3+6)(t^2-3-6)} = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{t-3}{(t^2+3)(t+3)(t-3)} = \\ = \lim_{t \rightarrow 3} \frac{1}{(t^2+3)(t+3)} = \frac{1}{12 \cdot 6} = \frac{1}{72}.$$

$$61. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}.$$

$$62. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[4]{x} - 1}.$$

63. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}.$

64. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{\sqrt{x + 12} - 3}.$ $\left[-36 \right].$

U zadacima 65 do 70 uklj. izračunaj granične vrijednosti zadanih izraza po pravilu IV.

65. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3} = \frac{0}{0}$ (uvjetenje $x = 3$ daje neodređenost $\frac{0}{0}$, jer iz $x^2 - 2x - 3 = 0$ slijedi: $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$) $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$.

66. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$.

Uvrštenje $x=1$ u zadani izraz daje $\frac{0}{0}$, a to kazuje da je $x=1$ nul-tačka polinoma u brojniku i polinoma u nazivniku, pa je svaki polinom djeljiv sa $(x-1)$. Prvo dijeljenje brojnika sa $(x-1)$ daje x^2+x-2 , a drugo $x+2$, pa brojnik možemo napisati u obliku $(x-1)^2 \cdot (x+2)$. Postupajući na isti način dobivamo nazivnik u obliku $(x-1)^2 \cdot (x^2+2x+3)$. Slijedi:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)^2(x+2)}{(x-1)^2(x^2+2x+3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

67. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 18x^2 + 81}{2x^2 - 3x - 9}$.

Uvrštenje $x = 3$ daje $\frac{0}{0}$. Iz $x^4 - 18x^2 + 81 = 0$, odnosno $u^2 - 18u + 81 = 0$ slijedi $u_{1,2} = 9$, pa je $x_{1,2} = +3$ i $x_{3,4} = -3$, dok iz $2x^2 - 3x - 9 = 0$ slijedi $x_1 = 3$ i $x_2 = -1$.

Dobivamo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)^2(x+3)^2}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+3)^2}{x+1} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$68. \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 2}.$$

$$69. \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}.$$

70. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$ $\left[\frac{2}{-5} \right].$

Uputa

Pri određivanju graničnih vrijednosti izraza, koji sadržavaju goniometrijske funkcije, često se ti izrazi svode na

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad (86)$$

pri čemu se uzima u obzir da su:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Zadaci

U zadacima **71** do **96** uklj. odredi granične vrijednosti zadanih izraza.

71. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \left(\begin{smallmatrix} \text{uvrštenje} \\ 0 = 0 \end{smallmatrix} \right) \text{daje } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1.$

72. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7 \sin 7x}{7x} = 7 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 7$ stavimo $7x = u$, pa $u \rightarrow 0$ kad $x \rightarrow 0$ =

$$= 7 \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} = \text{prema (86)} = 7 \cdot 1 = 7.$$

73. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sin x}{x} = \text{uvrštenje } x=3 \text{ daje } = \frac{\sin 3}{3} = \frac{1}{3} \sin 3.$

$$74. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sin 3x} = \text{uvrštenje } x=0 \text{ daje } \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 \cdot 4x \sin 4x}{3 \cdot 4x \sin 3x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} \right) =$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin 4x}{4x}}{\frac{\sin 3x}{3x}} = \text{prema (86)} = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{4}{3}.$$

$$75. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3\pi x}{3\pi x} \cdot \frac{\sin \pi x}{\sin 3\pi x} \right) = \frac{1}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \pi x}{\pi x}}{\frac{\sin 3\pi x}{3\pi x}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{3}.$$

$$76. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \cdot \sin x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x = 0,$$

jer je $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, dok $\sin x$ kad $x \rightarrow \infty$ ne teži k određenoj vrijednosti, već oscilira između -1 i 1 .

$$77. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x} = 0.$$

$$78. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \left(\text{stavimo } \frac{1}{x} = u, \text{ pa } u \rightarrow 0, \text{ kad } x \rightarrow \infty \right) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin u}{u} =$$

= prema (86) = $\frac{1}{1} = 1$.

$$79. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a}{x} \cdot \frac{\operatorname{tg} ax}{a} \right) = a \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} ax}{ax} = a \quad (\text{prema zadatku 71}).$$

$$80. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \text{prema poznatoj trigonometrijskoj formuli [v. Repetitorij elem. mat., formula (24)]} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{x^2} \quad | :4 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{\frac{x^2}{4}} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \text{prema (25)} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \frac{1}{2} \cdot 1^2 = \frac{1}{2}.$$

$$81. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{x} \quad | :2 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{x}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = 0 \cdot 1 = 0.$$

$$82. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{x^3} \quad | :8 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{2}}{\frac{x^3}{8}} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \infty \cdot 1 = \infty.$$

$$83. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \text{prema poznatoj trigonometrijskoj formuli [v. Repetitorij elem. mat., formula (31)]} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{2 \cos \frac{x+a}{2} \cdot \sin \frac{x-a}{2}}{2}}{x - a} \quad | :2 = \lim_{x \rightarrow a} \left[\cos \frac{x+a}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}} \right] = \cos a \cdot 1 = \cos a.$$

$$84. \text{ Na isti način izračunaj, uz primjenu trigonometrijske formule (33)} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x - \cos a}{x - a} = [-\sin a].$$

$$85. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \cdot \sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x + \cos^2 x)}{x \cdot 2 \sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 \frac{x}{2} (1 + \cos x + 1 - \sin^2 x)}{2}}{x \cdot 2 \cos x \cdot 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin \frac{x}{2} (2 + \cos x - 1 + \cos^2 x)}{2}}{2x \cdot \cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} = \text{brojnik i nazivnik dijelimo sa 4} =$$

$$= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\frac{1}{\cos x} + 1 + \cos x \right)}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot (1 + 1 + 1) = \text{prema zadatku 71} = \frac{3}{4} \cdot 1 = \frac{3}{4}.$$

$$86. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 1 \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \text{prema zadacima 71 i 80} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

$$87. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt[3]{(1 - \sin x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt[3]{1 - \sin^2 x}}{\sqrt[3]{(1 - \sin^2 x)^2}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{(1 - \sin^2 x)^3}{(1 - \sin^2 x)^6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{(1 + \sin x)^3 (1 - \sin x)^3}{(1 - \sin x)^6}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sqrt[3]{\frac{(1 + \sin x)^3}{1 - \sin x}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{0}} = \infty.$$

Uputa

Ako zadana funkcija $f(x)$ kad $x \rightarrow a$ ili $x \rightarrow \infty$ predoduje razliku dviju pozitivnih beskonačno velikih veličina, tj. $\infty - \infty$, ili umnožak beskonačno male i beskonačno velike veličine, tj. $0 \cdot \infty$, zadana se funkcija transformira tako da se ta dva oblika svedu na predažnja dva $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, pa se limes funkcije određuje na način naveden gore pod a.

Zadaci

U zadacima 97 do 109 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih funkcija.

$$97. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\lg x} \right) = \text{(uvrštenje } x=0 \text{ daje neodređenost oblika } \infty - \infty) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\cos \frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$98. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 + 5x}) = \text{(uvrštenje } x = +\infty \text{ daje neodređenost } \infty - \infty) = \text{prema pravilu V} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{x^2 + 5x})(x + \sqrt{x^2 + 5x})}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x^2 - 5x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} = -5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x + \sqrt{x^2 + 5x}} =$$

$$= \text{(uvrštenje } x = +\infty \text{ daje neodređenost oblika } \frac{\infty}{\infty}, \text{ brojnik i nazivnik dijelimo sa } x) =$$

$$= -5 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \frac{5}{x}}} = -5 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}.$$

$$99. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0.$$

$$100. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2x} - \sqrt{x^2 + x})(\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x})}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + 2x) - (x^2 + x)}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 + x}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x}}} = \frac{1}{2}.$$

$$88. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 2x}{\sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\cos 2x \cdot \sin 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot 5x \cdot \sin 2x}{2 \cdot 5x \cdot \cos 2x \cdot \sin 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{5 \cos 2x} \cdot \frac{\sin 2x}{\sin 5x} \right) = \frac{2}{5 \cdot 1} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}.$$

$$89. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{1 + \sin 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{\sin 2x}{6x}}{\frac{1}{6} + \frac{\sin 3x}{6x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{6} \cdot \frac{2x}{3x}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3x}{3x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} - \frac{1}{9}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{2}{6}} = \frac{1}{4}.$$

$$90. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} = [\text{v. Rep. el. mat. form. (33)}] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin \frac{a+b}{2} \cdot \sin \frac{a-b}{2}}{x^2} =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin \frac{x(a+b)}{2}}{x} \cdot \frac{\sin \frac{x(a-b)}{2}}{x} \right) =$$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a+b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x(a+b)}{2}}{x} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot \frac{\sin \frac{x(a-b)}{2}}{x} \right) = -2 \cdot \frac{a+b}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a-b}{2} \cdot 1 = -\frac{b^2 - a^2}{2}.$$

$$91. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin 2x}{\lg x} = [2].$$

$$92. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos 2x} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2} \right].$$

$$93. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\lg bx} = \left[\frac{a}{b} \right].$$

$$94. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \cos x} = [1/2].$$

$$95. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg 3x}{\lg x} = [3].$$

$$96. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\lg x - \sin x}{\sin^3 x} = \left[\frac{1}{2} \right].$$

$$101. \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (\sqrt{x^2+1}-x).$$

Moramo uzeti posebno:

$$\begin{aligned} a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1}-x)(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\infty} = 0. \end{aligned}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+1}-x) = \infty + \infty = \infty.$$

$$102. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right).$$

Označimo li prvi član $\sqrt[3]{(x+1)^2}$ sa a , a drugi $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ sa b , dobivamo prema

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) \text{ da je } a-b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}. \text{ Prema tome:}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x + 1 - x^2 + 2x - 1}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{\sqrt[3]{x^4} + \sqrt[3]{x^2(x-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{\sqrt[3]{x}}}{\sqrt[3]{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} + \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}}} = \frac{0}{3} = 0.$$

$$103. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2+1}).$$

[+∞].

$$104. \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+a} - \sqrt{x}).$$

[0].

$$105. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-5x+6}-x).$$

$$\left[-\frac{5}{2} \right].$$

$$106. \lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = (\text{uvrštenje } x=1 \text{ daje neodređenost oblika } 0 \cdot \infty, \text{ zadanu funkciju treba}$$

$$\text{prikazati u obliku razlomka}) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x) \cdot \sin \frac{\pi x}{2}}{\cos \frac{\pi x}{2}} = \left(\text{uvrštenje } x=1 \text{ daje oblik } \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\cos \frac{\pi x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi x}{2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi x}{2} \right)} \cdot 1 = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\sin \frac{\pi}{2} (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{\pi}{2} (1-x)} =$$

$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2} (1-x)} = \text{prema (86)} = \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\pi}{2} (1-x)$$

Riješi isti zadatak na drugi način i to pomoću nove promjenljive t , supstituirajući $1-x=t$, pri čemu uzmi u obzir da $t \rightarrow 0$, kad $x \rightarrow 1$.

$$107. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x = (\text{opet imamo neodređenost oblika } 0 \cdot \infty, \text{ prelazimo na razlomak}) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin x}{\cos x} = \left(\text{sad imamo neodređenost oblika } \frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\left(\frac{\pi}{2} - x \right) \sin x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = \text{prema (86)} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$108. \lim_{n \rightarrow \infty} \left(n \sin \frac{x}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x \cdot \sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{x}{n}}{\frac{x}{n}} = x \cdot 1 = x.$$

$$109. \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \operatorname{ctg} 2x).$$

[0].

c. NEODREĐENOSTI OBLIKA 1^∞ I NEKIH DRUGIH

Uputa

Pri rješavanju neodređenosti navedenog oblika često se služimo formulama:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e = 2,71828 \dots \quad (22)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a \quad (22a)$$

(Izvod vidi u zadatku 110.)

$$\text{Za neprekinutu funkciju:} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(\lim x). \quad (87b)$$

Zadaci

U zadacima 110 do 139 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih izraza.

$$110. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x.$$

Uvrštenje $x = \infty$, daje neodređenost oblika 1^∞ . Stavimo $\frac{a}{x} = u$, pa je $x = au$, pri čemu $u \rightarrow \infty$, kad $x \rightarrow \infty$.

$$L = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^{au} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^a = \left[\lim_{u \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{u}\right)^u\right]^a = \text{prema (22)} = e^a.$$

Pokaži na sličan način da je $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = e^a$.

$$111. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = (\text{uvrštenje } x = 0 \text{ daje } 1^\infty) = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} = (\text{stavimo } \operatorname{tg} x = u, \text{ pa } u \rightarrow 0 \text{ kad } x \rightarrow 0) = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = \text{prema (22a)} = e.$$

$$112. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{2x}}{1 + \frac{1}{2x}}\right)^x$$

Imamo neodređenost oblika 1^∞ . Stavimo $-\frac{1}{2x} = u$, pa je $x = -\frac{1}{2u}$ i $u \rightarrow 0$ kad $x \rightarrow \infty$;

$$\frac{1}{2x} = v, \quad x = \frac{1}{2v}, \quad v \rightarrow 0 \text{ kad } x \rightarrow \infty.$$

$$L = \lim_{v \rightarrow 0} \frac{(1+v)^{\frac{1}{2v}}}{(1+v)^{\frac{1}{2v}}} = \text{prema (25)} = \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{\frac{1}{v}}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{v \rightarrow 0} (1+v)^{\frac{1}{v}}\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

$$113. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1 - 5x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 - 5x)^{\frac{1}{3}}.$$

Neodređenost oblika 1^∞ . Stavimo $-5x = u$, $x = -\frac{u}{5}$, $u \rightarrow 0$, kad $x \rightarrow 0$.

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{-5}{u}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-5} = e^{-5} = \frac{1}{e^5}.$$

$$114. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x \cdot (-1)} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{-x}\right]^{-1} = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

$$115. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-3}{x+2}\right)^{2x+1}.$$

$$\text{Računamo: } (x-3):(x+2) = 1 - \frac{5}{x+2}.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{5}{x+2}\right)^{2x+1}.$$

Imamo oblik 1^∞ . Stavimo $-\frac{5}{x+2} = u$; $u \rightarrow 0$, kad $x \rightarrow \infty$.

$$\text{Odatle: } x+2 = -\frac{5}{u}, \quad x = -\frac{5}{u} - 2, \text{ pa je } 2x+1 = -\frac{10}{u} - 3.$$

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{-\frac{10}{u}-3} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{-\frac{10}{u}}\right]^{-10} \cdot \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{-3} = e^{-10} \cdot 1 = \frac{1}{e^{10}}.$$

Riješi isti zadatak na drugi način i to tako da eksponent $2x+1$ binoma $\left(1 - \frac{5}{x+2}\right)$ pomnožiš i podijeliš sa $-\frac{5}{x+2}$, a zatim prijedeš na limes.

$$116. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}.$$

Uvrštenje $x = \frac{\pi}{4}$ daje 1^∞ .

$$\text{Stavimo } \operatorname{tg} x = 1+u, \text{ pa kad } x \rightarrow \frac{\pi}{4}, u \rightarrow 0. \quad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(1+u)}{1 - (1+u)^2} = -\frac{2(1+u)}{u(2+u)}.$$

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{-\frac{2(1+u)}{u(2+u)}} = \left[\lim_{u \rightarrow 0} (1+u)^{\frac{1}{u}}\right]^{-\frac{2(1+u)}{2+u}} = \frac{1}{e^{-1}} = \frac{1}{e}, \text{ jer je } \lim_{u \rightarrow 0} \left[-\frac{2(1+u)}{2+u}\right] = -1.$$

$$117. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{\operatorname{ctg}^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{5}{5 \operatorname{tg}^2 x}} =$$

$$= \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1 + 5 \operatorname{tg}^2 x)^{\frac{1}{5 \operatorname{tg}^2 x}}\right]^5 = \text{prema (22)} = e^5.$$

$$118. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + ax)^{\frac{b}{x}}.$$

[eab].

$$119. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^3 + 2}{5x^3}\right)^{\sqrt{x}}.$$

[1].

$$120. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} \right)^{x^2}. \quad [e].$$

$$121. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x}{2x-3} \right)^{3x}. \quad [1/\sqrt{e}].$$

$$122. \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{x^2}. \quad [+ \infty, \text{ kad } x \rightarrow + \infty; 0 \text{ kad } x \rightarrow - \infty].$$

$$123. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x. \quad [e^2]$$

$$124. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^{\frac{x+1}{x}}. \quad [1].$$

$$125. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{1}{2} \sec x}. \quad [e^2].$$

$$126. \lim_{x \rightarrow \pi} (1 + 3 \lg x)^{\csc x}. \quad [e^3].$$

$$127. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\lg^2 x}. \quad \left[\text{Sjeti se da je } \sin x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}}; \frac{1}{\sqrt{e}} \right].$$

$$128. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+2}{5x-7} \right)^{x^3} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+2}{5x-7} \right]^{x^3} = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{2}{x}}{5 - \frac{7}{x}} \right]^{x^3} = \left(\frac{3}{5} \right)^{x^3}.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{x^3} = 0, \text{ jer je } \frac{3}{5} < 1. \text{ Vidi (21a).}$$

$$129. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 3x}{x} \right)^{2+x}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{x} = 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} = 3 \cdot 1 = 3.$$

$$L = \lim_{x \rightarrow 0} 3^{2+x} = 3^2 = 9.$$

$$130. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = (\text{uvrštenje } x=0 \text{ daje neodredenost oblika } \frac{0}{0}, \text{ jer je } \ln 1 = 0) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} \ln(1+x) \right] = \infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{\frac{1}{x}} = [\text{za } x=0 \text{ dobivamo novu neodredenost } 1^\infty,$$

a prema (87b) možemo pisati, uzevši u obzir da je logaritamska funkcija neprekidna] =

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \ln e = 1.$$

$$131. \lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(2x+1) - \ln(x+2)] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln \frac{2x+1}{x+2} \right) = \text{prema (87b)} = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+1}{x+2} \right] =$$

$$= \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right] = \ln 2.$$

$$132. \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\frac{1}{x}}. \quad [e]$$

$$133. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} \right)^{\frac{\sin x}{x}}. \quad \left[\frac{3}{2} \right]$$

IV. ELEMENTARNE FUNKCIJE NJIHOVA SVOJSTVA, GRAFOVI I PRIMJENA

A. Cijele racionalne funkcije ili polinomi

a. LINEARNE FUNKCIJE

Formule

$$y = a_1 x + a_0.$$

(30)

Koeficijent smjera pravca

$$a_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha = \text{konst.}$$

(31)

a_0 je odsječak na osi Y .

Zadaci

134. Linearna funkcija zadana je sa dva izraza:

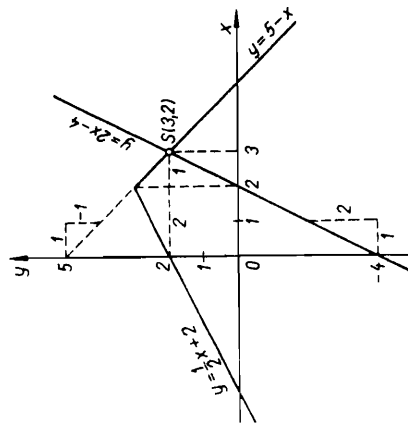
$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{za} \quad -\infty < x \leq 2$$

i

$$y = 5 - x \quad \text{za} \quad 2 \leq x < +\infty.$$

Odredi sjecište S grafa te funkcije sa grafom linearne funkcije $y = 2x - 4$.

Vidi sl. 6, na kojoj je pokazana i konstrukcija grafova linearnih funkcija.



Slika 6

$$\begin{aligned} y &= 5 - x & | - \\ y &= 2x - 4 & | - \\ \hline 0 &= -3x + 9 \end{aligned}$$

$$x = 3$$

$$y = 5 - 3 = 2.$$

$$S(3,2).$$

135. Odredi prirast linearne funkcije $y = 2x - 7$ kad x prelazi od vrijednosti $x_1 = 3$ prema $x_2 = 6$.

Prema (31):

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 6 - 3 = 3$$

$$\Delta y = [2(x + 3) - 7] - (2x - 7) = 2x + 6 - 7 - 2x + 7 = 6.$$

136. Funkcija $y = 2,5x + 4$ dobila je prirast $\Delta y = 10$. Odredi prirast argumenta.

Prema (31):

$$10 = [2,5(x + \Delta x) + 4] - (2,5x + 4)$$

$$10 = 2,5x + 2,5\Delta x + 4 - 2,5x - 4 = 2,5\Delta x.$$

Odatle:

$$\Delta x = \frac{10}{2,5} = 4.$$

137. Zadane su linearne funkcije $y = \frac{x-a}{a^2-b^2}$ i početna vrijednost $x_1 = a - b$ nezavisne promjenljive x . Odredi onu vrijednost x_2 nezavisne promjenljive, za koju je prirast $\Delta y = \frac{1}{a-b}$.

Prema (31) uzevši u obzir da je $\Delta x = x_2 - x_1 = x_2 - (a - b)$ i da je $\Delta y = f(x_2) - f(x_1)$ dobivamo:

$$\frac{1}{a-b} = \frac{(x + \Delta x) - a}{a^2 - b^2} - \frac{x - a}{a^2 - b^2}$$

ili

$$\frac{1}{a-b} = \frac{[x + x_2 - (a - b)] - a - x + a}{a^2 - b^2}$$

ili

$$\frac{1}{a-b} = \frac{x_2 - a + b}{a^2 - b^2} \cdot (a^2 - b^2)$$

$$a + b = x_2 - a + b,$$

pa je:

$$x_2 = 2a.$$

138. Odredi prirast funkcije $y = -3x + 1$, koji odgovara prirastu $\Delta x = 2$ nezavisne promjenljive.

[- 6].

139. Tačka koja vrši jednoliko gibanje nalazila se 12 s poslije početka gibanja 32,7 cm od neke početne tačke, a poslije 20 s na udaljenosti 43,4 cm. Izrazi udaljenost s kao funkciju vremena t .

Gibanje se zove jednoliko, ako je brzina gibanja v , tj. $\frac{s}{t} = \text{konst.}$, a iz $v = \frac{s}{t}$ slijedi jednadžba jednolikog gibanja:

$$s = vt$$

odnosno:

$$s = vt + s_0,$$

gdje je s_0 put što ga je tačka već prevalila do početnog momenta gibanja, tj. za $t = 0$. Iz zadatka slijedi da je tačka za vrijeme $20 \text{ s} - 12 \text{ s} = 8 \text{ s}$ prevalila put 43,4 cm - 32,7 cm = 10,7 cm, pa je brzina:

$$v = \frac{s}{t} = \frac{10,7 \text{ cm}}{8 \text{ s}} = 1,34 \text{ cm/s.}$$

Stijedi:

$$s = 1,34 t + s_0$$

(a)

Da odredimo s_0 uvrstimo u (a) $s = 43,4$ cm i $t = 20$ s:

$$43,4 = 1,34 \cdot 20 + s_0$$

a odarte

$$s_0 = 43,4 - 26,8 = 16,6 \text{ cm.}$$

Tražena jednačba zadanog jednolikog gibanja glasi:

$$s = 1,34 t + 16,6.$$

140. Napon u vodu opada jednoliko (linearno). Na početku pokusa napon je iznosio 12 volta, a na kraju pokusa, koji je trajao 8 s, pao je do 6,4 volta. Izrazi napon V kao funkcija vremena t i prikaži ga grafički.

$$[V = 100 - 0,7 t].$$

b. KVADRATNE FUNKCIJE

Formule

$$y = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

(32)

$$x^2 \pm p x \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q.$$

(34)

Zadaci

U zadacima 141 do 147 uklj. konstruiraj grafove zadanih kvadratnih funkcija, prethodno određivši najveću, odnosno najmanju vrijednost funkcije, tj. koordinate vrha parabole, te nultačke funkcije.

141. $y = 4x^2 + 4x - 3$.

Prema (34):

$$y = 4 \left(x^2 + x - \frac{3}{4} \right) = 4 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - \frac{3}{4} \right],$$

pa je:

$$y = 4 \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 - 4.$$

Budući da je koeficijent od x^2 pozitivan (4), parabola je otvorena prema gore, pa funkcija ima najmanju vrijednost $y = -4$ i to za $x = -\frac{1}{2}$, kako se to vidi iz jednačbe krivulje.

Koordinate vrha

$$V \left(-\frac{1}{2}, -4 \right).$$

Odredimo nultačke funkcije, tj. sječišta krivulje s osi X :

$$y = 0; \quad 4x^2 + 4x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 48}}{8} = \frac{-4 \pm 8}{8}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_2 = -\frac{3}{2}$$

Pokus:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) = -\frac{1}{2}.$$

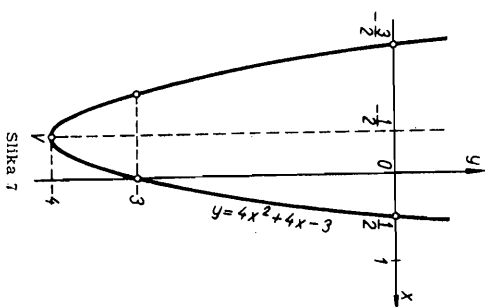
Uvrštenje $x_v = -\frac{1}{2}$ u $y = 4x^2 + 4x - 3$ daje

$$y_v = 4 \cdot \frac{1}{4} - 4 \cdot \frac{1}{2} - 3 = -4.$$

Za

$$x = 0 \quad y = -3.$$

Konstruiramo graf zadane funkcije, tj. parabolu kojoj je os simetrije okomita na os X . Vidi sl. 7.



Slika 7

142. $y = 6 + x - x^2$.

Prema (34):

$$y = -(x^2 - x - 6) = - \left[\left(x - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} - 6 \right]$$

$$y = - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{25}{4},$$

pa je:

$$V \left(\frac{1}{2}, +6\frac{1}{4} \right).$$

Budući da je u (a) koeficijent od x^2 negativan (-1), parabola je otvorena prema dolje, pa funkcija ima najveću vrijednost $y = 6\frac{1}{4}$ i to za $x = \frac{1}{2}$.

Nultačke:

$$y = 0, \text{ tj. } 6 + x - x^2 = 0.$$

Odarte

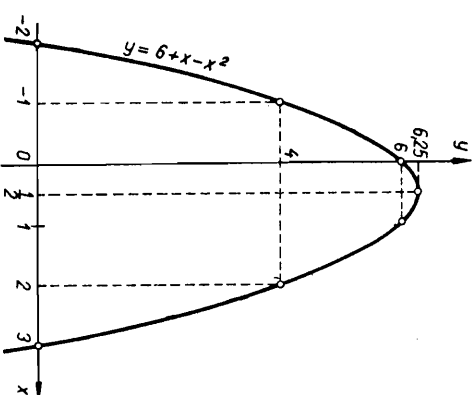
$$x_1 = -2; \quad x_2 = 3.$$

Pokus:

$$x_v = \frac{-2 + 3}{2} = \frac{1}{2}$$

$$y_v = 6 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 6\frac{1}{4}.$$

Slika 8



Za $x=0$ $y=6$, također za $x=1$.

Za $x=2$ $y=4$, također za $x=-1$,

jer je pravac $x=\frac{1}{2}$ os simetrije zadane parabole. Vidi sl. 8.

143. $y=x^2-2x+5$

Prema (34):

$$y=(x-1)^2-1+5$$

$$y=(x-1)^2+4$$

$$V(1,4),$$

tj. $y=4$ najmanja vrijednost funkcije i to za $x=1$ (koeficijent od x^2 je pozitivan!).

Nul-tačke:

$$y=0 \quad x^2-2x+5=0$$

$$x_{1,2}=1 \pm 2i.$$

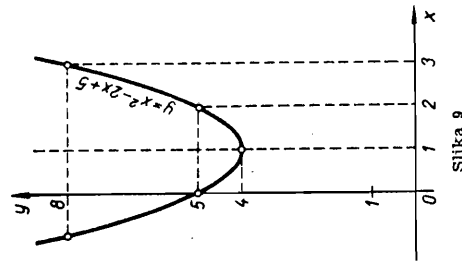
Realnih nul-tačaka nema, parabola ne siječe os X .

Da konstruiramo nekoliko tačaka parabole, uzmimo u obzir da je pravac $x=1$ os simetrije parabole, pa računamo ordinate samo onih tačaka parabole koje leže desno od osi simetrije, a tačke lijevo od osi dobivamo simetrijom

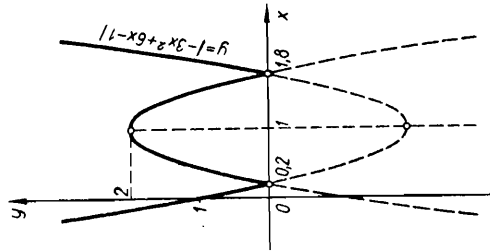
$$\text{za } x=2 \quad y=4-4+5=5$$

$$\text{za } x=3 \quad y=9-6+5=8$$

Vidi sl. 9.



Slika 9



Slika 10

144. $y = -3x^2 + 6x - 1$. To znači: zadana je apsolutna vrijednost kvadratne funkcije.

Najprije rišemo na gore navedeni način graf funkcije $y_1 = -3x^2 + 6x - 1$ prethodno određivši koordinate vrha i nul-tačke; dobivamo:

$$V(1,2) \quad \text{i} \quad x_{1,2}=1 \pm 0,8,$$

a zatim tu krivulju zrcalimo na osi X , da dobijemo graf zadane funkcije $y=|y_1| = |-3x^2 + 6x - 1|$, tj. graf apsolutne vrijednosti narisane funkcije. Vidi sl. 10.

145. $y=x^2-x-6$.

$$\left[V\left(-\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right); x_1=3, x_2=-2 \right]$$

146. $y=3-4x-4x^2$.

$$\left[V\left(-\frac{1}{2}, 4\right); x_1=-\frac{3}{2}, x_2=\frac{1}{2} \right]$$

147. $y=5-4x-x^2$.

$$[V(-2, 9)].$$

148. U $\triangle ABC$ kut $A=30^\circ$, a zbroj stranica koje zatvaraju taj kut iznosi 100 cm. Odredi stranicu AB trokuta uz uvjet da površina trokuta bude što veća.

Prema slici 11:

$$P = \frac{1}{2}bv \quad (a)$$

$$b+c=100$$

$$v=c \sin 30^\circ = \frac{c}{2}$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$P = \frac{1}{2}c \cdot \frac{1}{2}(100-c) \quad \text{ili} \quad P = 25c - \frac{c^2}{4}.$$

Površina P trokuta prikazuje se u obliku kvadratne funkcije, kojoj je graf parabola čija os simetrije je okomita na osi X . Kako je koeficijent od c^2 negativan, parabola je otvorena prema dolje, pa će koordinate vrha parabole dati traženu vrijednost stranice c i najveću vrijednost površine trokuta.

$$P = -\frac{1}{4}(c^2 - 100c),$$

ili prema (34):

$$P = -\frac{1}{4}[(c-50)^2 - 2500] \quad \text{ili} \quad P = -\frac{1}{4}(c-50)^2 + 625.$$

Koordinate vrha su (50, 625), pa je

$$\text{stanica } c = 50 \text{ cm} \quad \text{i} \quad P_{\text{maks}} = 625 \text{ cm}^2.$$

Nariši parabolu!

149. Koji valjak, čiji opseg osnog presjeka iznosi $s=100$ cm, ima najveći plašt?

Prema slici 12:

$$\text{Plašt } P = 2r\pi v$$

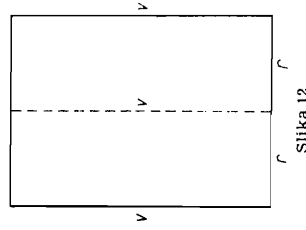
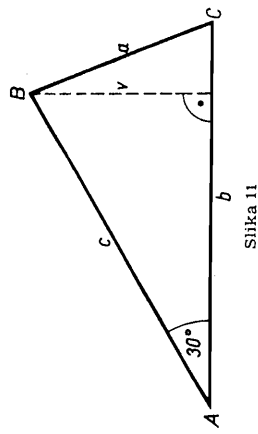
$$s = 2v + 4r = 100.$$

Odatle:

$$v = 50 - 2r.$$

(a)

(b)



Uvrštenje u (a) daje

$$P=2\pi r(50-2r),$$

ili

$$P=-4\pi r^2+100\pi r. \quad (c)$$

Plast valjka prikazan je kao kvadratna funkcija polunijera r baze s negativnim koeficijentom od r^2 (-4π), pa će koordinatne vrhove parabole dati tražene dimenzije valjka, uz maksimalni plast P .

Iz (c) slijedi:

$$P=-4\pi(r^2-25r), \quad \text{ili} \quad P=-4\pi\left[\left(r-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{4}\right], \quad \text{ili} \quad P=-4\pi\left(r-\frac{25}{2}\right)^2+625\pi.$$

Slijedi:

$$\text{Za } r=\frac{25}{2} \text{ cm} \quad P_{\max}=625\pi \text{ cm}^2$$

Prema (b)

$$v=50-25=25 \text{ cm}$$

Kako je $2r=v$, zaključujemo da od svih valjaka zadanog opsega osnovog preseka najveći plast ima valjak čiji je osnovni presjek kvadrat.

150. Tijelo se sastoji od uspravnog kružnog valjka na kojem se nalazi stožac iste osnovice. Kut kod vrha stošca iznosi 60° , a opseg osnovog preseka tijela 100 cm. Kakav mora biti poluprijem baze valjka, odnosno stošca, da plast tijela bude što veći?

Prema slici 13:

$$2x+2y+2s=100$$

$$s=\frac{x}{\sin 30^\circ}=\frac{x}{\frac{1}{2}}=2x, \quad (a)$$

pa je

$$2x+2y+4x=100,$$

ili

$$3x+y=50. \quad (b)$$

Kako je plast valjka $P_1=2\pi xy$, a stošca $P_2=x\pi s$, dobivamo s obzirom na (a) i (b):

$$P=P_1+P_2=2\pi x(50-3x)+\pi x \cdot 2x,$$

ili

$$P=-4\pi(x^2-25x).$$

Prema (34):

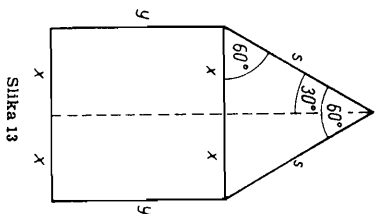
$$P=-4\pi\left[\left(x-\frac{25}{2}\right)^2-\frac{625}{4}\right],$$

ili

$$P=-4\pi\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+625\pi.$$

Tijelo ima najveći plast

$$P=625\pi \text{ cm}^2 \quad \text{za} \quad x=12,5 \text{ cm}$$



Slika 13

151. U isokračni trokut baze a i visine v upisan je pravokutnik kako je to prikazano na slici 14. Kolika mora biti visina y pravokutnika da njegova površina P bude što veća? Prema slici 14:

$$P=2xy. \quad (a)$$

Iz sličnosti trokuta BED i DCA slijedi:

$$\left(\frac{a}{2}-x\right):x=y:(v-y).$$

Odatle:

$$\left(\frac{a}{2}-x\right)(v-y)=xy,$$

ili

$$\frac{av}{2}-vy-x-\frac{a}{2}y+xy=xy,$$

a odatle

$$x=\frac{a}{2v}(v-y). \quad (b)$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$P=\frac{a}{v}(y(v-y)).$$

Odatle prema (34):

$$P=-\frac{a}{v}\left[\left(y-\frac{v}{2}\right)^2-\frac{v^2}{4}\right] \quad \text{ili} \quad P=-\frac{a}{v}\left(y-\frac{v}{2}\right)^2+\frac{av}{4}.$$

Pravokutnik ima najveću površinu $P=\frac{av}{4}$ za visinu $y=\frac{v}{2}$ = polovini visine trokuta.

Pokus:

$$y=\frac{v}{2}, \quad x=\text{prema (b)}=\frac{a}{4}$$

$$P=2 \cdot \frac{v}{2} \cdot \frac{a}{4}=\frac{av}{4}.$$

152. Na pravcu $y=x$ odredi tačku T tako da zbroj kvadrata udaljenosti te tačke od tačaka $A(-a, 0)$, $B(0, b)$ i $C(a, 0)$ bude što manji.

Prema formuli za kvadrat međusobne udaljenosti dviju tačaka $d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$ i slici 15 dobivamo:

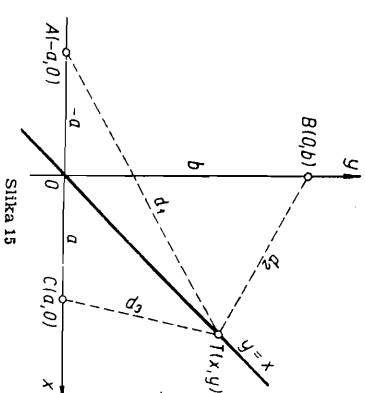
$$d_1^2+d_2^2+d_3^2=(x+a)^2+y^2+(x-a)^2+y^2+x^2+(y-b)^2=3x^2+3y^2-2by+2a^2+b^2,$$

a kako tačka T leži na pravcu $y=x$, dobivamo uvrstivši x mjesto y :

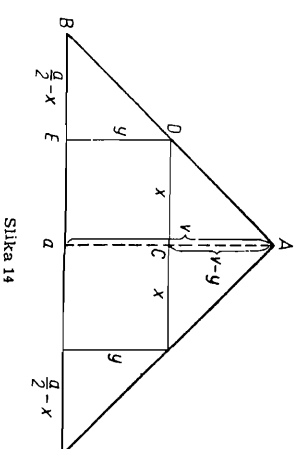
$$[dd]=6x^2-2bx+2a^2+b^2,$$

ili

$$[dd]=6\left[\left(x-\frac{b}{6}\right)^2-\frac{b^2}{36}+\frac{2a^2+b^2}{6}\right].$$



Slika 15



Slika 14

Slijedi: Tražena tačka $T\left(\frac{b}{6}, \frac{b}{6}\right)$, (T leži na pravcu $y=x$) dok je

$$[dd]_{\min} = -\frac{b^2}{6} + 2a^2 + b^2 = \frac{12a^2 + 5b^2}{6}.$$

153. Odredi na pravcu $a \equiv y = x + 2$ tačku T tako da zbroj kvadrata udaljenosti te tačke od pravaca $b \equiv 3x - 4y + 8 = 0$ i $c \equiv 3x - y - 1 = 0$ bude što manji. Vidi sl. 16.

Tražimo tačku $T(x, y)$, odnosno $T(x, x+2)$, za koju je $d_1^2 + d_2^2 = [dd] = \text{minimum}$. Prema poznatoj formuli za udaljenost tačke od pravca [vidi: Repet. elem. mat. IV, 6, (23)] računamo d_1 i d_2 prethodno izvršivši prijelaz na normalni oblik jednadžbi pravaca b i c :

$$3x - 4y + 8 = 0 \mid : - \sqrt{9+16} = -5$$

$$3x - y - 1 = 0 \mid : + \sqrt{9+1} = + \sqrt{10}$$

$$-\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt{10}}x - \frac{y}{\sqrt{10}} - \frac{1}{\sqrt{10}} = 0.$$

Uvrštenje koordinata tačke $T(x, x+2)$ daje:

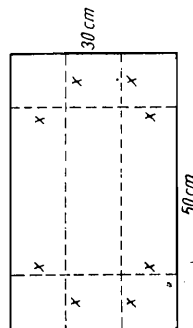
$$d_1 = \frac{x}{5}, \text{ pa je } d_1^2 = \frac{x^2}{25}$$

$$d_2 = \frac{2x-3}{\sqrt{10}}, \text{ pa je } d_2^2 = \frac{4x^2 - 12x + 9}{10}$$

$$d_1^2 + d_2^2 = \frac{22x^2 - 60x + 45}{50} = \frac{22}{50} \left(x - \frac{15}{11}\right)^2 + \frac{9}{110}.$$

Koordinate tačke $T\left(x = \frac{15}{11}; y = \frac{15}{11} + 2 = \frac{37}{11}\right)$ $[dd]_{\min} = \frac{9}{110}$.

154. Iz arka tvrdog papira pravokutnog oblika, dimenzija 30×50 cm, treba izrezati kutove tako da preklapajući arak po isprekidanim crtama dobiješ kutiju najvećeg pobočja (vidi sl. 17). Odredi stranice izrezanih kvadrata.



a)

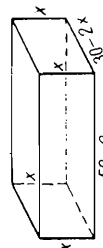
Slika 17

Iz slike 17 vidimo da je:

$$P = 2(50 - 2x)x + 2(30 - 2x)x, \text{ ili } P = -8(x^2 - 20x),$$

ili prema (34): $P = -8[(x - 10)^2 - 100]$, pa je $P = -8(x - 10)^2 + 800$.

Stranice kvadrata $x = 10$ cm, uz $P_{\max} = 800 \text{ cm}^2$.



b)

Slika 16

155. Prozor ima oblik pravokutnika s polukrugom gore. Koju osnovicu mora imati pravokutnik prozora da bi prozor propuštao što više svjetla, tj. da bi imao najveću površinu, ako opseg prozora iznosi 2 m (sl. 18)?

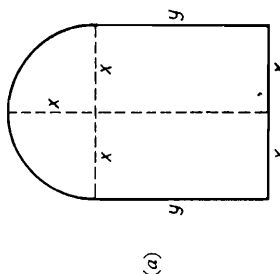
Prema slici i zadatku:

$$\text{Opseg} \quad s = 2x + 2y + \pi x = 2,$$

pa je

$$y = 1 - x - \frac{\pi}{2}x.$$

Površina



Uvrštenje (a) daje:

$$P = 2x \left(1 - x - \frac{\pi}{2}x\right) + \frac{\pi}{2}x^2, \text{ ili } P = 2x - \frac{4+\pi}{2}x^2 = -\frac{\pi+4}{2} \left(x - \frac{2}{\pi+4}\right)^2 + \frac{4}{(\pi+4)^2},$$

ili konačno $P = -\frac{\pi+4}{2} \left(x - \frac{2}{\pi+4}\right)^2 + \frac{2}{\pi+4}.$

Slijedi: Za osnovicu $2x = \frac{4}{\pi+4}$ m prozor propušta najviše svjetla, jer je za $x = \frac{2}{\pi+4}$

$$P_{\max} = \frac{2}{\pi+4} \text{ m}^2.$$

156. U zadani uspravni kružni stožac polumjera baze r i visine v upiši kružni valjak tako da im se središta baza podudaraju. Odredi polumjer x baze i visinu y valjka uz uvjet da plašt valjka bude što veći.

$$\left[x = \frac{r}{2}; y = \frac{v}{2}; P_{\max} = \frac{1}{2} \pi v r \right].$$

157. Iz komada žice duge 120 cm treba napraviti model pravokutnog paralelepipeda s kvadratičnom bazom. Kolike moraju biti stranice te baze, da bi potpuno oplošje paralelepipeda bilo što veće?

[Stranice baze i bočni bridovi moraju biti po 10 cm.]

158. Komad žice dug a cm treba razrezati na dva dijela, od jednog dijela napraviti kvadrat, a od drugog pravilan trokut. Na kakve dijelove treba razrezati žicu da zbroj površina tako dobivenih likova bude što veći?

$$\left[\text{Stranica trokuta mora biti } \frac{3a}{9+4\sqrt{3}} \text{ cm.} \right]$$

U zadacima 159 do 163 uklj. riješi grafički zadane kvadratne jednadžbe.

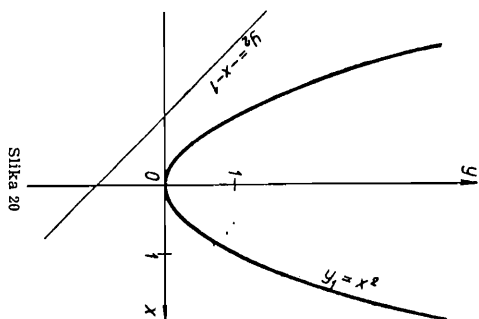
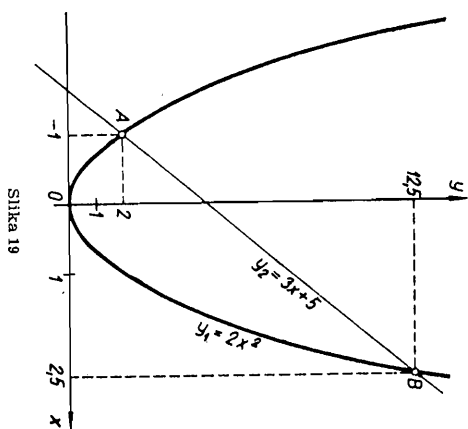
159. $2x^2 - 3x - 5 = 0$.

Prikažemo li zadanu kvadratnu jednadžbu u obliku:

$$2x^2 = 3x + 5,$$

pa narišemo li parabolu $y_1 = 2x^2$ i pravac $y_2 = 3x + 5$, apscise sjecišta tih likova, tj. apscise tačaka u kojim oba lika imaju jednake ordinate, dat će tražena rješenja kvadratne jednadžbe.

Na slici 19 vidimo da su apscise sjecišta A i B $x_1 = -1$ i $x_2 = 2,5$ tražena rješenja zadane jednačbe.



160. $x^2 + x + 1 = 0$

$$x^2 = -x - 1$$

$$y_1 = x^2; \quad y_2 = -x - 1.$$

Na slici 20 vidimo da se parabola i pravac ne sijeku, pa nemaju tačka jednakih koordinata. Slijedi: jednačba nema realnih rješenja.

161. $x^2 - x - 2,25 = 0.$

$$[x_1 \hat{=} -1,1; \quad x_2 \hat{=} 2,1].$$

162. $-4x^2 + 12x - 9 = 0.$

$$\left[x_1 = x_2 = \frac{3}{2} \right].$$

163. $3x^2 - 8x + 7 = 0.$

[nema realnih rješenja].

c. KUBNE FUNKCIJE

Formula

Opća kubna funkcija

$$y = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

Zadaci

U zadacima 164 do 169 uklj. konstruiraj grafove zadanih kubnih funkcija.

164. $y = -\frac{x^3}{2}$

$y(-x) = -\frac{1}{2}(-x)^3 = +\frac{x^3}{2} = -y(x)$ neparna funkcija, graf je simetričan s obzirom na ishodište 0.

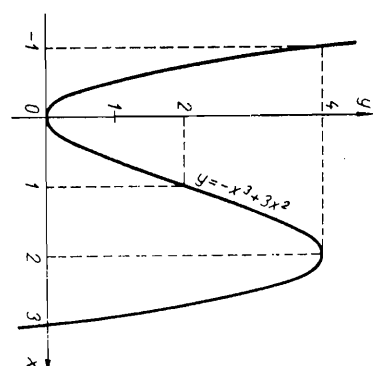
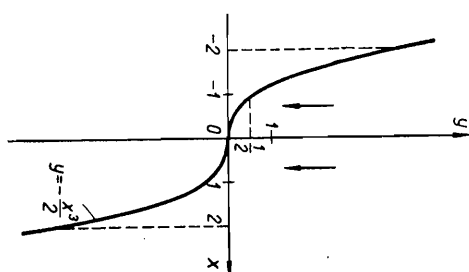
Nul-tačke: $y = 0; \quad -\frac{x^3}{2} = 0; \quad x^3 = 0 \quad x_{1,2,3} = 0$ trostruka nul-tačka, odnosno tačka infleksije. Graf funkcije siječe i dira os X prelazeći iz konvavnog dijela u konvexni.

Izračunajmo nekoliko tačaka:
 $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \mp \infty.$

$$\text{za } x = \pm 1 \quad y = \mp \frac{1}{2}$$

$$\text{za } x = \pm 2 \quad y = \mp 4$$

Vidi sl. 21.



Slika 21

Slika 22

165. $y = -x^3 + 3x^2.$

Nul-tačke:

$$y = 0; \quad -x^3 + 3x^2 = 0$$

$$-x^2(x-3) = 0$$

$x_{1,2} = 0$ dvostruka nul-tačka, u kojoj graf funkcije dira os X .
 $x-3=0, \quad x_3=0$ jednostruka, graf siječe os X .

Znamo da se za velike $|x|$ polinom vlada kao njegov najviši član, pa je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

Računamo:

$$\text{za } x = -2 \quad y = 20$$

$$x = -1 \quad y = 4$$

$$x = 1 \quad y = 2$$

$$x = 2 \quad y = 4.$$

Vidi sl. 22.

166. $y = x^3 - 3x^2 + 4$.

Nul-tačke: $y = 0$:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = 0 \quad \text{ili} \quad x^3 - 2x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$x^2(x-2) - (x-2)(x+2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$x-2=0; \quad x_1=2$$

$$x^2 - 2x - 2 = 0; \quad x_2=2; \quad x_3=-1$$

$x_{1,2}=2$ dvostruka nul-tačka, graf dira osi X.

$x_3=-1$ jednostruka, presjek s osi X.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} x^3 = \pm \infty$$

Računamo:

$$\text{za } x=-2 \quad y=-16$$

$$x=0 \quad y=4$$

$$x=1 \quad y=2$$

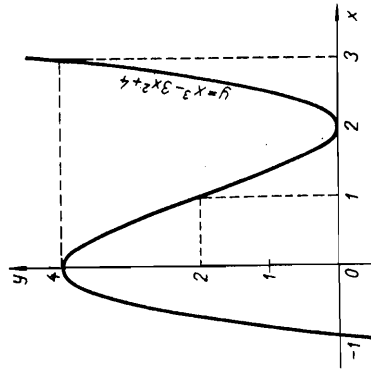
$$x=3 \quad y=4$$

Vidi sl. 23.

167. $y = x^3 + 3x^2$

168. $y = -x^3 - 3x^2$

169. $y = x^3 - 2x^2 + 1$



Slika 23

[y prikaži u obliku: $y = x^3 - x^2 - x^2 + 1$].

B. Razlomljene racionalne funkcije

Uputa

Cijela racionalna funkcija $y = P_n(x)$ definirana je za sve x , dok razlomljena racionalna funkcija, koja je kvocijent dvaju polinoma $y = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$, nije definirana u nul-tačkama nazivnika, jer u tim tačkama teži k beskonačnosti, tj. ima polove, ukoliko te nul-tačke nazivnika nisu istodobno i nul-tačke brojnika.

Zadaci

U zadacima 170 i 171 odredi područje definicije zadanih funkcija.

170. $y = \frac{x+4}{x^2-2x-3}$

Zadana funkcija definirana je za:

$$x^2 - 2x - 3 \neq 0,$$

ili, ako nazivnik rastavimo u faktore, za:

$$(x+1)(x-3) \neq 0.$$

Kako -1 i $+3$ nisu istodobno nul-tačke brojnika ($x=-4$), zaključujemo da je zadana funkcija y definirana za sve x , osim za $x_1=-1$ i $x_2=+3$, tj. za $-\infty < x < -1$ i za $-1 < x < 3$ i $3 < x < +\infty$. Prikaži grafički te intervale definicije.

171. $y = \frac{x+3}{x^3+4x-5}$

$$[-\infty < x < -5, -5 < x < 1 \text{ i } 1 < x < +\infty].$$

U zadacima 172 do 183 uklj. nariši približne grafove zadanih funkcija.

172. $y = \frac{x-1}{x-2}$

Nul-tačka funkcije: $y=0$ kad je brojnik $x-1=0$, tj. $x=1$ jednostruka nul-tačka funkcije u kojoj graf funkcije siječe os X.

Polovi: $y=\infty$, kad je nazivnik $x-2=0$, pa je $x=2$ pol I reda zadane funkcije:

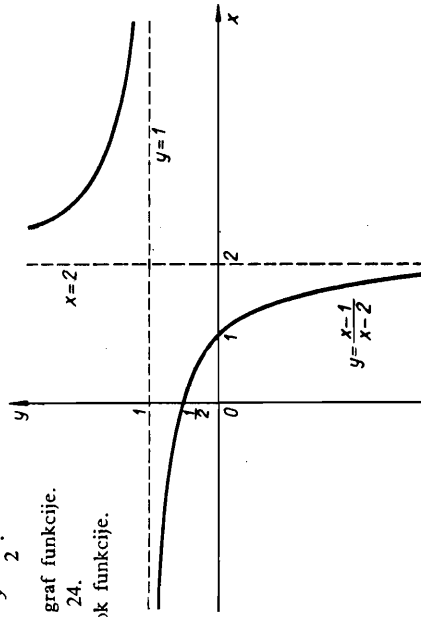
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{x-1}{x-2} = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{2 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{2}$$

Za $x=0 \quad y = \frac{1}{2}$.

Rišemo graf funkcije.

Vidi sl. 24.

Opiši tok funkcije.



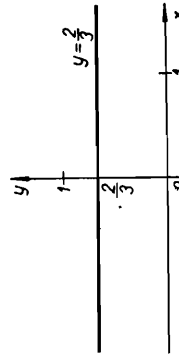
Slika 24

173. $y = \frac{2x-5}{3x-7,5}$

Funkcija nema nul-tačka, nema ni polova, jer je:

$$y = \frac{2(x-2,5)}{3(x-2,5)} = \frac{2}{3} \text{ za sve } x.$$

Vidi sl. 25.



Slika 25

$$174. y = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Nul-tačka nema, jer je brojnik konstanta. Polovi: $y = \infty$ za $(1-x)^2 = 0$, odnosno za

$$(1-x)(1-x) = 0,$$

pa je $x_{1,2} = 1$ pol II reda.

$$\text{Za } x = 0 \quad y = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{(1-x)^2} = 0.$$

Vidi sl. 26.

Opiši tok funkcije.

$$175. y = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

$y \neq 0$, jer je brojnik konstanta.

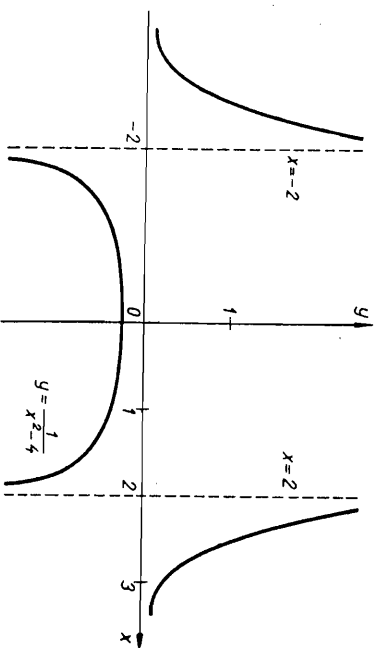
$y = \infty$ kad je nazivnik $x^2 - 4 = 0$, tj. za $x_1 = 2$ i $x_2 = -2$. To su dva pola I reda.

$$\text{Za } x = 0 \quad y = -\frac{1}{4}, \quad \lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = 0.$$

$y(-x) = \frac{1}{x^2 - 4} = y(x)$ — funkciju je parna, pa je njen graf simetričan na osi Y .

Vidi sl. 27.

Opiši tok funkcije.



Slika 27

$$176. y = \frac{x^2 + x - 6}{(x+2)^2}.$$

$y = 0$ kad je $x^2 + x - 6 = 0$, tj. za $x_1 = -3$ i $x_2 = 2$. $y = \infty$ kad je $(x+2)^2 = 0$, tj. $x_{1,2} = -2$ pol II reda.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}}{1 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}} = 1.$$

$$\text{Za } x = 0 \quad y = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2};$$

$$\text{za } x = -1 \quad y = -6.$$

Vidi sl. 28.

Opiši tok funkcije.

$$177. y = \frac{x^2 - 9}{x^2 - 2x - 3}.$$

Rastavivši brojnik i nazivnik u linearne faktore dobivamo:

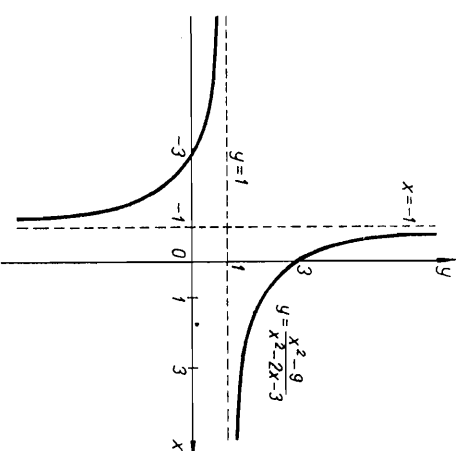
$$y = \frac{(x+3)(x-3)}{(x-3)(x+1)},$$

$$\text{pa je: } y = \frac{x+3}{x+1}$$

$$y = 0 \text{ za } x = -3; y = \infty \text{ za } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = 1. \text{ Za } x = 0 \quad y = 3.$$

Vidi sl. 29.

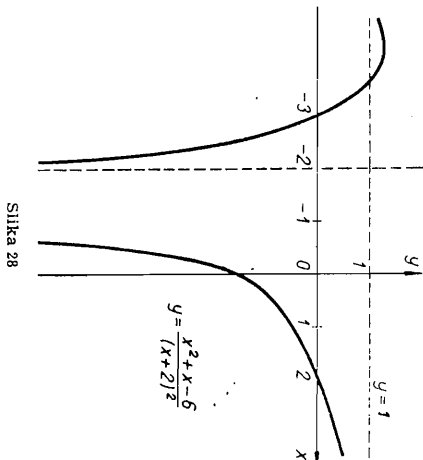


Slika 29

$$178. y = \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}.$$

U zadatku 66 pokazali smo da brojnik i nazivnik imaju zajednički faktor $(x-1)^2$, pa kraćenje daje:

$$y = \frac{x+2}{x^2+2x+3}.$$

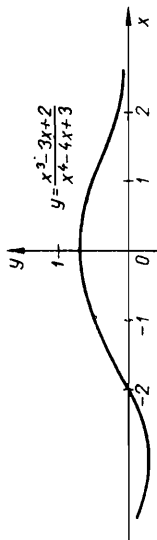


Slika 28

$y=0$ za $x=-2$; $y \neq \infty$, pa funkcija nema polova, jer su nul-tačke nazivnika konjugirano kompleksne.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{2}{x} + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Za $x=0$ $y = \frac{2}{3}$. Vidi sl. 30.

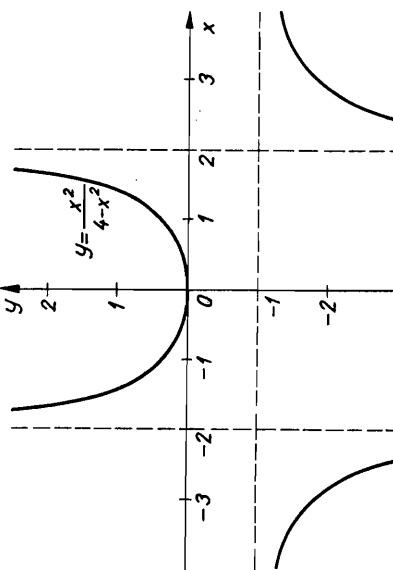


Slika 30

179. $y = \frac{x^2}{4 - x^3}.$

$y=0$ za $x_{1,2}=0$. To je dvostruka nul-tačka funkcije.
 $y=\infty$ za $x_{1,2}=\pm 2$. To su dva pola I reda.

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} = -1.$$



Slika 31

Kako je $y(-x)=y(x)$ funkcija je parna, graf je simetričan s obzirom na os Y. Vidi sl. 31

180. $y = \frac{2x}{3-x}.$

181. $y = \frac{x^3 + 1}{x + 1}.$ [Uputa: krati!].

182. $y = \frac{x}{x^2 - 9}.$

183. $y = \frac{1 - x^2}{x^2}.$

C. Iracionalne funkcije

Zadaci

Uputa

Kako su vrijednosti korijena s parnim eksponentom realne samo za pozitivne vrijednosti radikanda, prikazujemo grafički radikand y_1 pa iz grafa lako odredimo za koje vrijednosti x prima radikand y_1 pozitivne vrijednosti, te na taj način dobivamo traženo područje definicije zadane iracionalne funkcije y .

U zadacima 184 do 192 uklj. odredi grafički područje definicije zadanih funkcija.

184. $y = \sqrt{15 + 4x - 4x^2}.$

Prema (34) dobivamo iz $y_1 = 15 + 4x - 4x^2$: $y_1 = -4\left(x^2 - x - \frac{15}{4}\right)$

ili

$$y_1 = -4\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 16.$$

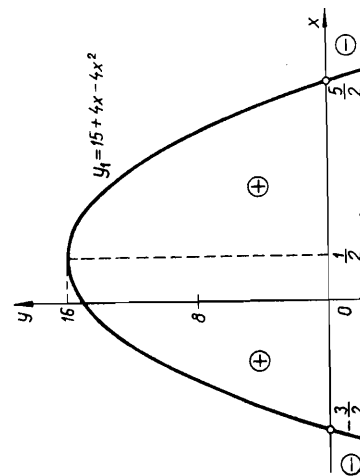
$V\left(\frac{1}{2}, 16\right)$, a iz $y_1 = 0$ slijedi:

$$x_1 = \frac{5}{2} \text{ i } x_2 = -\frac{3}{2}.$$

Na slici 32 vidimo da je radikand y_1 pozitivan, odnosno jednak nuli, u području

$$-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}.$$

Slika 32



U tom području definirana je zadana funkcija y .

$$185. y = \sqrt[4]{\frac{x^2}{1-x^2}}.$$

Kako je eksponent korijena paran, funkcija y definirana je samo za one x za koje je radikand

$$y_1 = \frac{x^2}{1-x^2} \geq 0.$$

Narišimo približno graf radikanda y_1 .

$y=0$ za $x^2=0$, tj. $x_{1,2}=0$ dvostruka je nulti-tačka.

$y=\infty$ za $1-x^2=0$, tj. $x_1=-1$ i $x_2=1$ dva su pola radikanda y_1 .

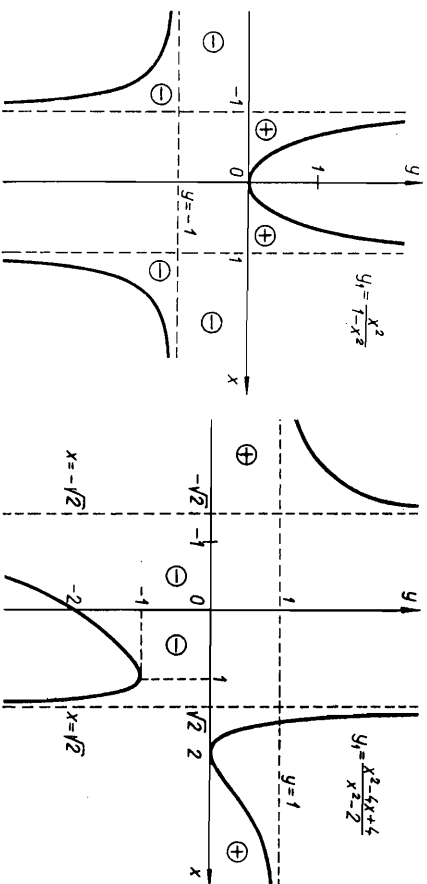
$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y_1 = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{\frac{x^2}{1-x^2} - 1} = -1.$$

$y(-x)=y(x) \rightarrow$ funkcija y_1 je parna, pa je graf simetričan s obzirom na os Y .

Na sl. 33 vidimo da je radikand konačan i pozitivan samo za $-1 < x < +1$, pa je zadana

funkcija $y = \sqrt[4]{\frac{x^2}{1-x^2}}$ definirana u intervalu: $-1 < x < +1$.

$$186. y = \sqrt{\frac{x^3-4x+4}{x^2-2}}.$$



Slika 33

Slika 34

Zadana funkcija y definirana je u području u kojem je radikand $y_1 = \frac{x^2-4x+4}{x^2-2} \geq 0$. Prikažimo grafički y_1 .

$y_1=0$, kad je $x^2-4x+4=0$, tj. za $x_{1,2}=2$

$y_1=\infty$, kad je $x^2-2=0$, tj. za $x_{1,2}=\pm\sqrt{2} \approx \pm 1,41$.

$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} y_1 = 1$; za $x=0$ $y_1=-2$.

Na slici 34 vidimo da je zadana funkcija y definirana u područjima:

$$-\infty < x < -\sqrt{2} \text{ i } \sqrt{2} < x < +\infty.$$

$$187. y = \sqrt[3]{-5+6x-x^2}.$$

Na ovom primjeru pokažimo kako se određuje područje definicije pomoću sustava nejednadžbi.

Zadana funkcija y prima realne vrijednosti, ako je radikand:

$$-x^2+6x-5 \geq 0 \mid \cdot (-1)$$

$$x^2-6x+5 \leq 0,$$

ili uzevši u obzir da su nulti-tačke radikanda $x_1=1$ i $x_2=5$:

$$(x-1)(x-5) \leq 0.$$

Umnožak dvaju množitelja negativan je, kad su množitelji različitog predznaka, pa iz (a) slijedi:

$$\text{I} \quad \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-5 \leq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 5 \end{array} \left\} 1 \leq x \leq 5$$

$$\text{II} \quad \left. \begin{array}{l} x-1 \leq 0 \\ x-5 \geq 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 5 \end{array} \left\} \text{taj susrav je nespojiv.}$$

Slijedi da je $1 \leq x \leq 5$ područje definicije zadane funkcije y .

$$188. y = \sqrt{2x^3+3x-20}.$$

$$\left[-\infty < x \leq -4 \text{ i } \frac{5}{2} \leq x < +\infty \right].$$

$$189. y = \sqrt{3-4x-4x^2}$$

$$\left[-\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \right].$$

$$190. y = \sqrt[3]{\frac{x^2}{x-1}}$$

$$\{x=0 \text{ i } 1 < x < +\infty\}.$$

$$191. y = \frac{1}{\sqrt{x^3}}$$

$$[0 < x < +\infty].$$

$$192. y = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

$$[-\infty < x < 0; \quad 0 < x < +\infty].$$

D. Lučna mjerila kuta. Trigonometrijske funkcije

Formulae

$$\alpha = \rho \cdot \arccos \alpha; \quad \rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} = 57^\circ,296, \dots \approx 57,3^\circ \quad (37)$$

$$\arccos \alpha = \frac{\alpha}{\rho} \quad (38)$$

$$\rho = 57^\circ 17'45'' = 3438' = 206265'' \quad (39)$$

$$l = r \cdot \arccos \alpha. \quad (40)$$

Zadaci

193. Dva mjesta leže na istoj paraleli širine $\varphi = 60^\circ$. Izračunaj njihovu međusobnu udaljenost l , ako razlika vremena u tim mjestima iznosi 3 sata.

Na slici 35 vidimo da je polumjer paralele

$$r = R \cos \varphi,$$

gdje je R polumjer Zemljine kugle.

Razlici u vremenu od 4 sata odgovara kut

$$\frac{360^\circ \cdot 3 \text{ sata}}{24 \text{ sata}} = 45^\circ,$$

pa prema (40) tražena udaljenost iznosi

$$l = r \arccos 45^\circ = \text{prema (a)} = R \cdot \cos 60^\circ \cdot \frac{\pi}{4},$$

ili uzevši $R = 6370$ km dobivamo:

$$l = 6370 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \approx 2500 \text{ km.}$$

194. Dva mjesta leže na istom meridijanu. Izračunaj njihovu međusobnu udaljenost, ako razlika geografskih širina tih mjesta iznosi 30° .

$$[l = R \cdot \arccos 30^\circ \approx 3340 \text{ km}].$$

195. Odredi područje definicije funkcije

$$y = \sqrt{\sin x}.$$

Zadana funkcija definirana je za one x za koje je radikand $\sin x$ pozitivan, odnosno jednak nuli. Kako znamo,

$$\sin x \geq 0 \text{ u I i II kvadrantu, tj. za } 0 \leq x \leq \pi,$$

$$\text{dalje u V i VI kvadrantu, tj. za } 2\pi \leq x \leq 3\pi,$$

$$\text{dalje za } 4\pi \leq x \leq 5\pi \text{ itd.,}$$

a za negativne x :

$$\text{za } -2\pi \leq x \leq -\pi; \text{ za } -4\pi \leq x \leq -3\pi \text{ itd.}$$

Sve te intervale u kojim je zadana funkcija $y = \sqrt{\sin x}$ možemo ukratko prikazati u obliku zatvorenog intervala definicije

$$[2k\pi; (2k+1)\pi],$$

gdje je $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ($2k$ je oznaka parna, a $(2k+1)$ neparna broja).

196. Nariši u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija:

$$y = \sin x \text{ i } y = \pm \sqrt{\sin x} \text{ za } -4\pi \leq x \leq +4\pi.$$

$$197. y = -\cos \frac{x-1}{2}.$$

Odredi amplitudu A , period P , odnosno frekvenciju f i početnu fazu n zadane funkcije.

Napisavši zadanu funkciju u obliku $y = -\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)$, dobivamo prema (52):

$$A=1; \quad P=\frac{2\pi}{1} = 2\pi; \quad f=\frac{1}{P} = \frac{1}{2\pi}.$$

Da odredimo početnu fazu n zadane funkcije, izvršimo prijelaz na sinus-funkciju. Prema $-\cos \alpha = \sin(270^\circ + \alpha)$ dobivamo:

$$-\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right) = \sin\left[\frac{3}{2}\pi + \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{3\pi-1}{2}\right),$$

pa je:

$$n = \frac{3\pi-1}{2}.$$

198. Na isti način odredi za funkciju $y = \cos \frac{2x+3}{6\pi}$ amplitudu, period, odnosno funkciju i fazu.

$$\left[A=1; \quad P=6\pi^2; \quad f=\frac{1}{6\pi^2}; \quad n=\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2\pi} = \frac{\pi^2+1}{2\pi} \right].$$

U zadacima 199–201 uklj. konstruiraj za jedan period grafove zadanih harmoničkih funkcija, prethodno određivši amplitudu, period i početnu fazu. (Način konstruiranja vidi: I dio Repetitorija, § 4., 4. f).

199. $y = 2 \sin(3x+2).$

$$\left[A=2; \quad P=\frac{2\pi}{3}; \quad n=2 = \arccos(2 \cdot \rho^2) \approx \arccos 114,6^\circ \right].$$

200. $y = \frac{1}{3} \sin 2\pi \left(x - \frac{1}{6}\right).$

$$\left[A=\frac{1}{3}; \quad P=1; \quad n=-\frac{\pi}{3} \right].$$

201. $y = 2 + 3 \sin\left(\frac{2}{3}x - \frac{\pi}{6}\right).$

[Uputa: Za pomoćnu os X' uzmi pravac $y=2$, pa s obzirom na koordinatni sastav $X'Y'$ nariši graf funkcije: $y = 3 \sin\left(\frac{2}{3}x' - \frac{\pi}{6}\right)$.]

202. Konstruiraj graf funkcije $y = \sin x^2$.

Funkcija je parna, jer je $\sin(-x)^2 = \sin x^2$, pa je graf funkcije simetričan s obzirom na os Y .

Kako vrijednosti sinusa bilo kojeg realnog argumenta leže između -1 i $+1$, graf zadane funkcije ležat će između pravaca $y = -1$ i $y = +1$.

Odredimo nul-tačke zadane funkcije. Znamo da je $\sin x = 0$ za $y = k\pi$, gdje je $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Zadana funkcija ima argument x^2 , pa su:

$$x = \pm \sqrt{k\pi}, \text{ gdje je } k=0, 1, 2, \dots \text{ nul-tačke.}$$

Računamo s logaritamskih računalom:

$$\text{Za } k=0 \quad x_{1,2}=0; \quad \text{za } k=1 \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\pi} \approx \pm 1,77;$$

$$\text{za } k=2 \quad x_{5,6} = \pm \sqrt{2\pi} \approx \pm 2,50; \quad x_{7,8} = \pm \sqrt{3\pi} \approx \pm 3,07 \text{ itd.}$$

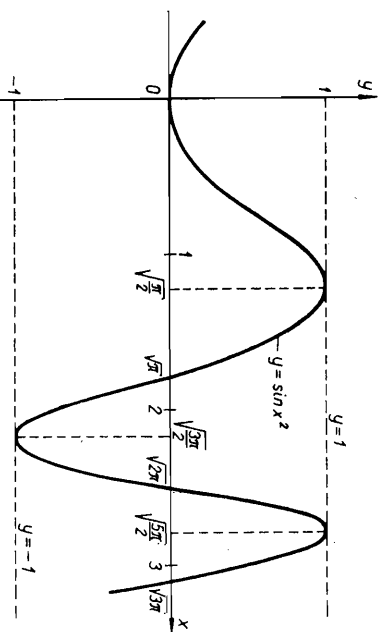
Znamo da je $\sin x = +1$ za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, a za naš primjer

$$\sin x^2 = +1 \text{ za } x = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, \text{ gdje je } k=0, 1, 2, 3, \dots$$

$$k=0: \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{\pi}{2}} = \pm 1,25; \quad k=1: \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{5\pi}{2}} = 2,80 \text{ itd.}$$

$$\sin x^2 = -1 \text{ za } x = \pm \sqrt{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}, \text{ gdje je } k=0, 1, 2, \dots$$

$$\text{za } k=0: \quad x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{3}{2}\pi} = \pm 2,17; \quad \text{za } k=1: \quad x_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{7}{2}\pi} = 3,32.$$



Slika 36

Rišemo graf. Vidi sl. 36. (Prikazan je samo dio grafa i to za $x \geq 0$, za $x < 0$ graf se dobiva zrcaljenjem naranog dijela na osi Y.)

203. Na sličan način konstruiranoj graf funkcije $y = \sin \sqrt{x}$.

E. Eksponencijalne funkcije

Zadaci

U zadacima 204 do 208 uklij. konstruiraj grafove zadanih funkcija.

204. $y = e^{x+1}$.

Kako eksponent $\frac{1}{x+1}$ funkcije ima pol I reda u nul-tački nazivnika, tj. za $x = -1$, funkcija y je u toj tački prekinuta.

Računamo: $\lim_{x \rightarrow -1+0} y, \text{ tj. kad } x \text{ teži prema } -1 \text{ zdesna, a zatim}$

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} y, \text{ tj. kad } x \text{ teži prema } -1 \text{ slijeva.}$$

Dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{x+1} = +\infty \quad \text{ i } \quad \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{x+1} = -\infty,$$

$$\left(\text{nariši graf funkcije } y = \frac{1}{x+1} \right)$$

$$\text{pa je } \lim_{x \rightarrow -1+0} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{+\infty} = \infty,$$

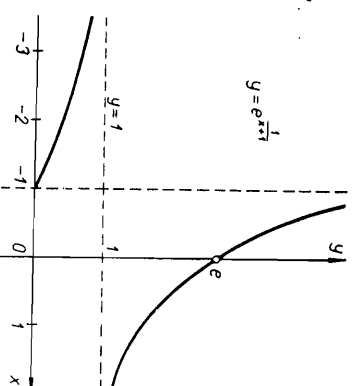
$$\text{a } \lim_{x \rightarrow -1-0} e^{\frac{1}{x+1}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0.$$

$$\text{Dakle imamo: za } x=0 \quad y=e \text{ i}$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{1}{e^{x+1}} = e^0 = 1.$$

Vidi sl. 37.

Vidimo da zadana funkcija ima za $x = -1$ tačku diskontinuiteta (prekinutosti) druge vrste, jer limes zdesna ne postoji (vidi § 8,1).



Slika 37

205. $y = \frac{\frac{1}{2}x - 1}{2x + 1}$.

Funkcija je definirana za sve x , jer je nazivnik različit od nule za sve x , dok je brojnik konačan.

Pokažimo da je funkcija prekinuta za $x=0$. U tu svrhu podijelimo brojnik s nazivnikom, tj. prikažimo funkciju u obliku:

$$y = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{2x + 1}$$

i odredimo granične vrijednosti y , pustivši da $x \rightarrow +0$, tj. teži k nuli pozitivnim vrijednostima (zdesna), i da $x \rightarrow -0$, tj. teži k nuli negativnim vrijednostima (slijeva).

Dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{2x + 1} \right) = 1 - 0 = 1,$$

$$\text{jer je } \lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{2x} = \infty,$$

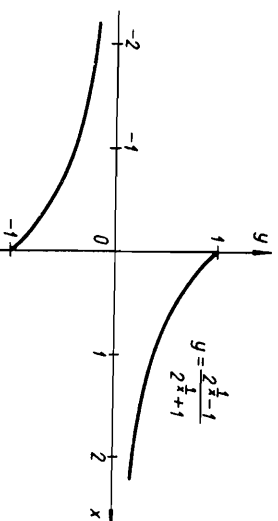
dok je:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{2x + 1} \right) = 1 - 2 = -1,$$

$$\text{jer je } \lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{2x} = -\infty.$$

Uzevši još u obzir da je $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} \left(1 - \frac{\frac{1}{2}}{2x + 1} \right) = 1 - \frac{2}{2} = 0$, rišemo graf zadane funkcije.

Vidi sl. 38.



Slika 38

Vidimo da funkcija za $x=0$ ima tačku diskontinuiteta prve vrste, jer postoje limes slijeva i limes zdesna, ali ti limesi nisu jednaki.

$$206. y = \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1-x}$$

Vidimo da je zadana funkcija definirana za sve x , jer je nazivnik različit od nule za sve x , dok je brojnik konstantan.

Medutim za $x=1$ ima eksponent $-\frac{1}{1-x} = \frac{1}{x-1}$ pol I reda, tj. $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{x-1} = +\infty$, a

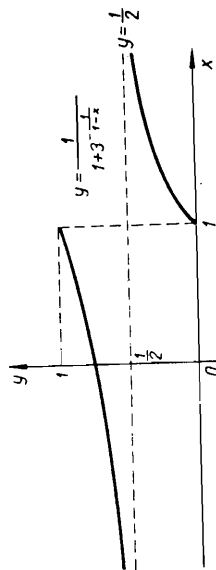
$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{x-1} = -\infty \quad (\text{nariši graf funkcije } y = \frac{1}{x-1}).$$

Kako je $\lim_{x \rightarrow 1+0} 3^{x-1} = \infty$, a $\lim_{x \rightarrow 1-0} 3^{x-1} = 0$, dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1-x} = 0, \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1-x} = 1.$$

pa funkcija za $x=1$ ima tačku diskontinuiteta prve vrste.

Uzevši još u obzir da je za $x=0$ $y = \frac{1}{1+3} - \frac{3}{1-x} = \frac{1}{4}$ i da je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \frac{1}{1+3} - \frac{1}{1-x} = \frac{1}{4}$, rišemo graf funkcije y (sl. 39).



Slika 39

$$207. y = \frac{1}{1+2^{x-1}}$$

[Ista tačka diskontinuiteta prve vrste.]

$$\lim_{x \rightarrow -0} y = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty.$$

$$208. y = 2^{\frac{1}{x}}$$

F. Hiperbolne funkcije

Formule

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

(58)

(58a)

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (59)$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x = e^x$$

$$\operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x = e^{-x}$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

Zadatok

209. Izvedi teoreme adicije i suptrakcije za hiperbolne funkcije.

$$\operatorname{sh}(x_1 + x_2) = \frac{1}{2}(e^{x_1+x_2} - e^{-(x_1+x_2)}) = \frac{1}{2}(e^{x_1} \cdot e^{x_2} - e^{-x_1} \cdot e^{-x_2}) =$$

$$= \text{prema (60)} = \frac{1}{2}[(\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_2) - (\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2 - \operatorname{sh} x_2)] =$$

= nakon množenja binoma i uredjenja dobivamo =

$$= \frac{1}{2}(2 \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + 2 \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2) = \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2. \quad (64)$$

$$\operatorname{ch}(x_1 + x_2) = \text{prema (58a)} = \frac{1}{2}(e^{x_1+x_2} + e^{-(x_1+x_2)}) =$$

$$= \frac{1}{2}(e^{x_1} \cdot e^{x_2} + e^{-x_1} \cdot e^{-x_2}) = \text{prema (60)} =$$

$$= \frac{1}{2}[(\operatorname{ch} x_1 + \operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_2) + (\operatorname{ch} x_1 - \operatorname{sh} x_1)(\operatorname{ch} x_2 - \operatorname{sh} x_2)] =$$

$$= \text{nakon uredjenja} = \operatorname{ch} x_1 \cdot \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \cdot \operatorname{sh} x_2. \quad (64)$$

Time smo izveli formule (64). Uvrstimo li u te formule $-x_2$ mjesto x_2 i uzmemo li u obzir da je $\operatorname{sh}(-x_2) = -\operatorname{sh} x_2$, a $\operatorname{ch}(-x_2) = \operatorname{ch} x_2$, dobivamo drugi sustav formula (64), tj. teoreme suptrakcije:

$$\operatorname{sh}(x_1 - x_2) = \operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2$$

$$\operatorname{ch}(x_1 - x_2) = \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 - \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2$$

Iz formula (64) slijedi:

$$\operatorname{th}(x_1 + x_2) = \frac{\operatorname{sh}(x_1 + x_2)}{\operatorname{ch}(x_1 + x_2)} = \frac{\operatorname{sh} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{ch} x_1 \operatorname{sh} x_2}{\operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 + \operatorname{sh} x_1 \operatorname{sh} x_2}$$

$$= \text{brojnik i nazivnik dijelimo sa } \operatorname{ch} x_1 \operatorname{ch} x_2 = \frac{\operatorname{th} x_1 + \operatorname{th} x_2}{1 + \operatorname{th} x_1 \operatorname{th} x_2}. \quad (64)$$

Opažamo veliku sličnost izvedenih formula s poznatim formulama iz trigonometrije, razlike su samo u predznacima.

Uvrštenje $x_1 = x_2 = x$ u formule adicije daje hiperbolne funkcije dvostrukog kuta:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \end{aligned} \quad (65)$$

$$\operatorname{th} 2x = \frac{2 \operatorname{th} x}{1 + \operatorname{th}^2 x}.$$

Iz (61) slijedi:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x &= \operatorname{sh}^2 x + 1 \\ \operatorname{sh}^2 x &= \operatorname{ch}^2 x - 1 \end{aligned}$$

Uvrštenje u (65) daje:

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{ch}^2 x - 1 = 2 \operatorname{ch}^2 x - 1,$$

pa je:

$$\operatorname{ch}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2} \quad (65')$$

$$\operatorname{sh}^2 x + 1 = \frac{\operatorname{ch} 2x + 1}{2},$$

odakle:

$$\operatorname{sh}^2 x = \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{2}. \quad (65'')$$

G. Funkcije zadane parametarski

Formule

Opći oblik:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2. \quad (66)$$

Kružnica

$$\text{sa središtem u } S(0,0): \begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (67)$$

$$\text{sa središtem u } S(p,q): \begin{cases} x = p + r \cos t \\ y = q + r \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (67a)$$

Elipsa

$$\text{sa središtem u } S(0,0): \begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi, \quad (68)$$

$$\text{sa središtem u } S(p,q): \begin{cases} x = p + a \cos t \\ y = q + b \sin t \end{cases} \quad 0 \leq t < 2\pi. \quad (68a)$$

Hiperbola:

istostrana: $a = b$. Za $a = b = 1$ dobivamo:

$$\begin{cases} x = \operatorname{ch} t \\ y = \operatorname{sh} t \end{cases} \quad -\infty < t < +\infty, \quad (69)$$

$$\text{raznostrana: } a \neq b: \begin{cases} x = a \operatorname{ch} t \\ y = b \operatorname{sh} t \end{cases} \quad -\infty < t < \infty. \quad (69a)$$

Zadaci

210. Jednadžba zadane krivulje u parametarskom obliku glasi:

$$\begin{aligned} x &= 2 + 5 \cos t \\ y &= -3 + 5 \sin t. \end{aligned}$$

Koja je to krivulja i leže li tačka $T_1(5, 1)$ na toj krivulji?

Usporedimo li jednadžbu zadane krivulje s jednadžbom (67a), vidimo da ta jednadžba predstavlja kružnicu polumjera $r = 5$ sa središtem u $S(2, -3)$. Uvrštenje $x = 5$ i $y = 1$ u zadane jednadžbe daje:

$$\begin{aligned} 5 &= 2 + 5 \cos t \\ 1 &= -3 + 5 \sin t \end{aligned}$$

Odatle:

$$\begin{aligned} \cos t &= \frac{3}{5} \\ \sin t &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1.$$

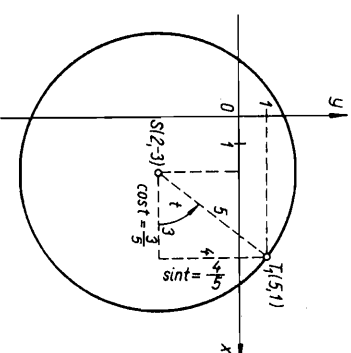
Zadana tačka leži na kružnici! Vidi sl. 40.

211. Koja je krivulja određena jednadžbama:

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t \\ y &= 2 \sin t \end{aligned}$$

i leži li tačka $T_1(2, \sqrt{3})$ na toj krivulji?

[Kružnica $r = 2$; $S(0,0)$; T_1 ne leži na toj kružnici]



Slika 40

U zadacima 212 do 216 uklj. prikaži u obliku $y=f(x)$ funkcije zadane parametarski.

212. $x = \ln t$

$$y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{t} \right).$$

Da uklonimo parametar t iz $x = \ln t$, pišemo po definiciji logaritma: $t = e^x$,

a uvrštenje u y daje: $y = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \cosh x$ (58a) $y = \cosh x$.

213. $x = t^2 + 1$

$$y = t^2.$$

Iz $y = t^2$ slijedi: $t = \sqrt{y}$. Uvrštenje u x daje: $x = \sqrt{y} + 1$ ili $y = (\sqrt{x-1})^2$.

214. $x = \operatorname{tg} t$

$$y = \sin 2t + 2 \cos 2t.$$

Napisavši y u obliku:

$$y = 2 \sin t \cos t + 2 \cos^2 t - 2 \sin^2 t,$$

izrazimo $\sin t$ i $\cos t$ pomoću poznatih formula $\frac{1}{\cos^2 t} = 1 + \operatorname{tg}^2 t$ i $\frac{1}{\sin^2 t} = 1 + \operatorname{ctg}^2 t$, iz

kojih slijedi uz $\operatorname{tg} t = x$: $\cos t = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ i $\sin t = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Uvrštenje u y daje:

$$y = 2 \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + 2 \frac{1}{1+x^2} - 2 \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}.$$

$$y = \frac{2(1+x-x^2)}{1+x^2}.$$

215. $x = 3t$

$$y = 6t - t^2.$$

216. $x = \cos t$

$$y = \sin 2t.$$

$$\left[y = 2x - \frac{x^2}{9} \right].$$

$$\{ y = 2x \sqrt{1-x^2} \}.$$

U zadacima 217 do 220 uklj. odredi vrijednost parametra t , koja odgovara koordinatama zadane tačke T krivulje kojoj je jednadžba dana u parametarskom obliku.

217. $x = 3(2 \cos t - \cos 2t)$

$$y = 3(2 \sin t + \sin 2t)$$

Uvrštenje $y=0$ u drugu jednadžbu daje:

$$2 \sin t + \sin 2t = 0, \text{ ili } 2 \sin t + 2 \sin t \cos t = 0, \text{ ili } 2 \sin t (1 + \cos t) = 0,$$

odakle:

$$\sin t = 0, \text{ pa je } t_1 = k\pi \text{ i } \cos t = -1, \text{ pa je } t_2 = \pi + 2k\pi,$$

gdje je

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Uvrštenje

$$t_1 = k\pi \text{ i } t_2 = \pi + 2k\pi \text{ za } k=0 \text{ u } x = 3(2 \cos t - \cos 2t) \text{ daje:}$$

$$x = 3(2 \cdot \cos 0 - \cos 0) = 3(2 - 1) = 3 \neq -9$$

$$x = 3(2 \cos \pi - \cos 2\pi) = 3(-2 - 1) = -9, \text{ dok je za } t_2, y=0.$$

$t_2 = (2k+1)\pi$ je tražena vrijednost parametra.

218. $x = t^2 + 2t$ u $T(3,2)$
 $y = t^3 + t$

Slijedi: $t^2 + 2t = 3$

$$t^3 + t = 2.$$

Iz prve jednadžbe računamo t :

$$t^2 + 2t - 3 = 0; \quad t_{1,2} = -1 \pm 2; \quad t_1 = 1 \quad \text{ i } \quad t_2 = -3.$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$\text{za } t_1 = 1 \quad y = 1 + 1 = 2$$

$$\text{za } t_2 = -3 \quad y = -27 - 3 = -30 \neq 2$$

$t_1 = 1$ je tražena vrijednost parametra.

219. $x = 2 \operatorname{tg} t$ u $T(2,2)$
 $y = 2 \sin^2 t + \sin 2t$

$$\left[t = \frac{\pi}{4} + k\pi \right].$$

220. $x = t^2 - 1$ u $T(0,0)$
 $y = t^3 - t$

$$[t_{1,2} = \pm 1].$$

H. Inverzne funkcije

a. POJAM. GRAFIČKI PRIKAZ

Zadaci

U zadacima 221 do 223 uklj. odredi funkcije koje su inverzne s obzirom na zadane.

221. $y = x^2 - 2x$.

Da se dobije inverzna funkcija s obzirom na zadanu $y=f(x)$, treba riješiti po x tu jednadžbu da se dobije $x=\varphi(y)$.

Nadopunimo li desnu stranu zadane funkcije na potpun kvadrat, dobivamo:

$$y = (x-1)^2 - 1,$$

pa je:

$$(x-1)^2 = y+1,$$

a odakle:

$$x = 1 \pm \sqrt{y+1}, \quad (a)$$

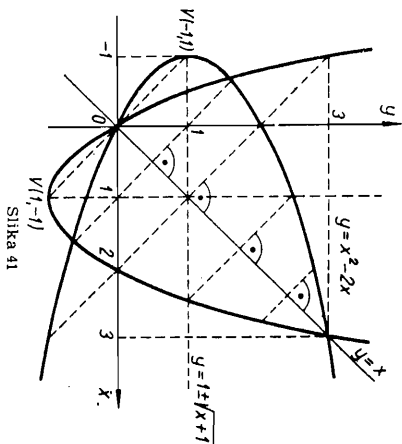
ili, ako označimo kao obično funkciju sa y , a argument sa x , dobivamo traženu inverznu funkciju u obliku:

$$y = 1 \pm \sqrt{x+1}. \quad (b)$$

Dobivena funkcija inverzna je s obzirom na zadanu, jer uvrštenje (a) u zadanu funkciju daje:

$$(1 \pm \sqrt{y+1})^2 - 2(1 \pm \sqrt{y+1}) \equiv y.$$

Dok je zadana funkcija jednoznačna i definirana za sve x , inverzna je funkcija dvoznačna i definirana pre-ma (b) za $x+1 \geq 0$, tj. u intervalu $-1 \leq x < +\infty$. Vidi sliku 41, na kojoj je graf inverzne funkcije dobiven zrcačenjem grafa zadane funkcije na pravcu $y=x$.



Slika 41

$$222. y = \sqrt[3]{x^3+1}.$$

Odate: $y^3 = x^3 + 1$ pa je:

$$x = \pm \sqrt[3]{y^3-1} \quad \text{ili} \quad y = \pm \sqrt[3]{x^3-1}.$$

Dok je zadana funkcija jednoznačna i definirana za sve x , inverzna je funkcija dvoznačna i definirana za $x^3-1 \geq 0$, tj. za $1 \leq x < +\infty$.

$$223. y = \frac{1}{1-x} \text{ uz grafički prikaz zadane i inverzne funkcije}$$

$$\left[y = \frac{x-1}{x} \right]$$

$$224. \text{ Pokaži analitički i grafički da se funkcija } y = \frac{1-x}{1+x} \text{ podudara sa svojom inverznom funkcijom.}$$

$$y = \frac{1-x}{1+x} \cdot (1+x)$$

$$y(1+x) = 1-x,$$

ili

$$y+xy-1+x=0,$$

odate:

$$x(y+1) = 1-y,$$

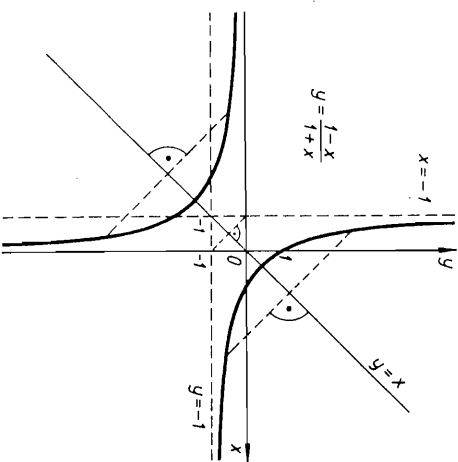
pa je:

$$\frac{1-y}{1+y} \quad \text{ili} \quad y = \frac{1-x}{1+x}.$$

Vidi sl. 42.

$$225. \text{ Pokaži isto analitički i grafički za}$$

$$\text{funkciju } y = \frac{2x-3}{4x-2}.$$



Slika 42

b. POJEDINE INVERZNE FUNKCIJE

1. Ciklometrijske ili arkus-funkcije

U zadacima 226 do 229 uklj. zadane funkcije prikaži u inverznom obliku i odredi područje definicije tih inverznih funkcija.

$$226. y = 1 + 2 \sin \frac{x-1}{x+1}.$$

$$\text{Odate: } \sin \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{2},$$

$$\text{inveržno: } \frac{x-1}{x+1} = \arcsin \frac{y-1}{2} \cdot (x+1)$$

$$x-1 = x \arcsin \frac{y-1}{2} + \arcsin \frac{y-1}{2}.$$

Odate:

$$x = \frac{1 + \arcsin \frac{y-1}{2}}{1 - \arcsin \frac{y-1}{2}},$$

ili, ako kao obično argument označimo sa x , a funkcija sa y :

$$y = \frac{1 + \arcsin \frac{x-1}{2}}{1 - \arcsin \frac{x-1}{2}}.$$

Dok je zadana funkcija definirana za sve x , inverzna funkcija definirana je za:

$$-1 \leq \frac{x-1}{2} \leq +1,$$

jer je $\frac{x-1}{2}$ vrijednost sinusa.

Odate:

$$-2 \leq x-1 \leq 2 \quad +$$

$$+1 \quad +1 \quad +1$$

pa je:

$$-1 \leq x \leq 3 \text{ područje definicije inverzne funkcije.}$$

$$227. y = 4 \arcsin \sqrt{1-x^2} : 4$$

$$\frac{y}{4} = \arcsin \sqrt{1-x^2}.$$

Inveržno:

$$\sin \frac{y}{4} = \sqrt{1-x^2} \quad \text{odate} \quad 1-x^2 = \sin^2 \frac{y}{4}$$

$$\text{ili} \quad x^2 = 1 - \sin^2 \frac{y}{4}$$

$$x^2 = \cos^2 \frac{y}{4}$$

$$x = \cos \frac{y}{4} \quad \text{ili} \quad y = \cos \frac{x}{4}.$$

Inverzna funkcija definirana je zapravo za sve x , ali s obzirom na to da je zadana funkcija definirana za $-1 \leq x \leq 1$, inverzna funkcija definirana je za $0 \leq x \leq 2\pi$. (Nariši graf zadane funkcije, pa zrcaleći ga na pravcu $y=x$ konstruiraj graf inverzne funkcije.

$$228. y = 2 \sin 3x. \quad \left[y = \frac{1}{3} \arcsin \frac{x}{2}; -2 \leq x \leq +2 \right].$$

$$229. y = \arcsin \frac{x}{4}. \quad \left[y = 4 \sin x; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq +\frac{\pi}{2} \right].$$

U zadacima 230 do 233 uklj. odredi područje definicije zadanih inverznih funkcija.

$$230. y = \arcsin \frac{x}{4}.$$

U direktnom obliku zadana funkcija glasi: $\cos y = \frac{x}{4}$, a kako $\cos y$ prima vrijednosti od -1 do $+1$ uključivši granice, zadana je funkcija definirana za $-1 \leq \frac{x}{4} \leq +1$, odnosno za $-4 \leq x \leq +4$.

$$231. y = \arcsin \frac{x-3}{4x}.$$

U direktnom obliku funkcija glasi: $\sin y = \frac{x-3}{4x}$, a kako je $-1 \leq \sin y \leq +1$, zadana inverzna funkcija definirana je za:

$$-1 \leq \frac{x-3}{4x} \leq +1 \quad | \cdot 4x.$$

$$\text{Dobivamo:} \quad \begin{array}{ll} \text{za } 4x > 0 & -4x \leq x-3 \leq 4x \end{array} \quad (a)$$

$$\text{za } 4x < 0 \quad -4x \geq x-3 \geq 4x. \quad (b)$$

Nejednadžbu (a) rastavimo u dva dijela:

$$-4x \leq x-3, \text{ odatle } -5x \leq -3 \quad | : (-5), \text{ pa je } x \geq \frac{3}{5}$$

$$x-3 \leq 4x, \text{ odatle } -3x \leq 3 \quad | : (-3), \text{ pa je } x \geq -1.$$

Iz nejednadžbe (b) slijedi:

$$-4x \geq x-3, \text{ odatle } -5x \geq -3 \quad | : (-5), \text{ pa je } x \leq -\frac{3}{5}$$

$$x-3 \geq 4x, \text{ odatle } -3x \geq 3 \quad | : (-3), \text{ pa je } x \leq -1.$$

Slijedi: zadana funkcija definirana je za:

$$\frac{3}{5} \leq x < +\infty \quad \text{ i } \quad -\infty < x \leq -1.$$

$$232. y = \arcsin \frac{x}{2}. \quad [-2 \leq x \leq 2].$$

$$233. y = \arcsin \cos \frac{x-2}{2x}. \quad \left[\frac{2}{3} \leq x < +\infty \quad \text{ i } \quad -\infty < x \leq -2 \right].$$

U zadacima 234 do 238 uklj. konstruiraj grafove zadanih funkcija.

$$234. y = \arcsin (\sin x).$$

Treba konstruirati graf funkcije y koja predoduje luk kome je sinus jednak sinus luka x . Očito da je

$$y = \arcsin (\sin x) = x \text{ za interval } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}.$$

Da dobijemo graf funkcije za interval $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}\pi$ stavimo:

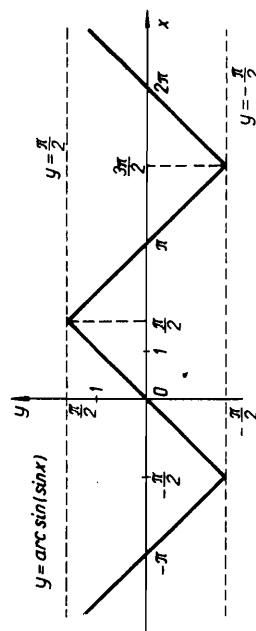
$$z = x - \pi, \text{ tada je } x = \pi + z, \text{ pa je:}$$

$$y = \arcsin (\sin x) = \arcsin [\sin (z + \pi)] = \arcsin [-\sin z] =$$

$$= \arcsin [-\sin (x - \pi)] = \arcsin [\sin (\pi - x)]$$

pa je $y = \pi - x$.

Za $x = \frac{\pi}{2}$ imamo $y = \frac{\pi}{2}$, za $x = \pi$ dobivamo $y = 0$, dok je za $x = \frac{3}{2}\pi$ $y = -\frac{\pi}{2}$ itd.



Slika 43

Kako je $y(-x) = -y(x)$, funkcija je neparna, pa je graf simetričan s obzirom na ishodište O . Rišemo graf. Vidi sl. 43.

235. $y = \arcsin \frac{1}{x}$.

Uz pretpostavku da se traži graf glavne vrijednosti arkus-sinusa (vidi sl. 67 u I dijelu Repertorija), dobivamo:

$$1) \quad y(-x) = \arcsin \left(-\frac{1}{x} \right) = -\arcsin \frac{1}{x}.$$

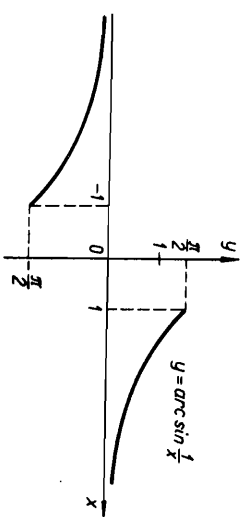
Funkcija je neparna, graf je simetričan na ishodište O .

$$2) \quad \text{Kako je } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arcsin \frac{1}{x} = 0.$$

$$3) \quad \text{Za } |x| < 1, \quad \frac{1}{|x|} > 1, \text{ pa za } |x| < 1 \text{ zadana funkcija nije definirana.}$$

$$4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \arcsin \frac{1}{x} = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

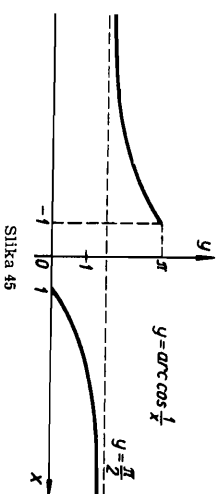
Rišemo graf. Vidi sl. 44.



Slika 44

236. $y = \arccos \frac{1}{x}$.

Prema slici 67 zaključujemo da je za $x=1$ $y=\arccos 1=0$, za $x=-1$ $y=\arccos(-1)=\pi$ i da funkcija nije definirana za $|\frac{1}{x}| > 1$, tj. za $|x| < 1$. Osim toga je $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \arccos \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$.
 Rišemo graf. Vidi sl. 45.



Slika 45

237. $y = \arctg \frac{1}{x}$

$$\left[\begin{array}{l} \text{neparna; } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm 0; \quad \lim_{x \rightarrow \pm 0} y = \pm \frac{\pi}{2} \end{array} \right].$$

238. $y = \arccos \frac{1}{x+1}$ [Graf na sl. 45 pomaknut je uzduž osi X za 1 nalijevo!].

239. Izvedi teoreme adicije za arkus-funkcije:

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin (x_1 \sqrt{1-x_2^2} + x_2 \sqrt{1-x_1^2}) \quad (72)$$

$$\arcsin x_1 + \arcsin x_2 = \arcsin [x_1 x_2 + \sqrt{(1-x_1^2)(1-x_2^2)}] \quad (73)$$

Označimo: $\arcsin x_1 = y_1$ i $\arcsin x_2 = y_2$. (a)

Znamo: $\sin(y_1 + y_2) = \sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2$. (b)

Iz (a) slijedi:

$$\sin y_1 = x_1, \quad \text{pa je } \cos y_1 = \sqrt{1 - \sin^2 y_1} = \sqrt{1 - x_1^2}$$

$$\sin y_2 = x_2, \quad \text{pa je } \cos y_2 = \sqrt{1 - \sin^2 y_2} = \sqrt{1 - x_2^2}.$$

Odatle prema (b) $\sin(y_1 + y_2) = x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + \sqrt{1 - x_1^2} x_2$.

pa je $y_1 + y_2 = \arcsin [x_1 \sqrt{1 - x_2^2} + \sqrt{1 - x_1^2} x_2]$.

Na isti način izvedi formulu (73)!

2. Logaritamske funkcije

Zadaci

U zadacima 240 do 242 uki. odredi područje definicije zadanih funkcija.

240. $y = \sqrt{\log \frac{5x-x^2}{4}}$.

Zadana funkcija ima realne vrijednosti, pa je definirana za one x za koje je radikand:

$$\log \frac{5x-x^2}{4} \geq 0.$$

Znamo da je logaritamska funkcija pozitivna, odnosno jednaka nuli, ako je argument, u našem slučaju:

$$\frac{5x-x^2}{4} \geq 1 \quad | \cdot 4$$

$$5x-x^2 \geq 4 \quad \text{ili} \quad 5x-x^2-4 \geq 0.$$

Kako su rješenja te kvadratne jednačbe $x_1=1$ i $x_2=4$, mora biti

$$-(x-1)(x-4) \geq 0 \quad | \cdot (-1) \quad \text{ili} \quad (x-1)(x-4) \leq 0.$$

Produkt je negativan kad su faktori različitog predznaka, pa ima dvije mogućnosti:

$$\text{I } \left. \begin{array}{l} x-1 \leq 0 \quad \text{pa je } x \leq 1 \\ x-4 \geq 0 \quad \text{pa je } x \geq 4 \end{array} \right\} \text{ nespojiv sistem nejednačbi.}$$

$$\text{II } \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \quad \text{pa je } x \geq 1 \\ x-4 \leq 0 \quad \text{pa je } x \leq 4. \end{array} \right\}$$

Slijedi: Zadana funkcija y definirana je za: $1 \leq x \leq 4$.

$$241. y = \arcsin \frac{x-3}{2} - \log(4-x).$$

Određimo područje definicije svakog člana posebno. Zajednički dio tih područja bit će traženo područje definicije zadane funkcije.

Prvi član $y_1 = \arcsin \frac{x-3}{2}$ definiran je za: $-1 \leq \frac{x-3}{2} \leq 1$, odnosno za $-2 \leq x-3 \leq 2$.

Odatle slijedi:

$$-2 \leq x-3 \quad \text{ili} \quad 1 \leq x \quad \text{i} \quad x-3 \leq 2 \quad \text{ili} \quad x \leq 5.$$

Član y_1 definiran je za $1 \leq x \leq 5$.

Drugi član $y_2 = \log(4-x)$ definiran je za: $0 < 4-x < +\infty$.

Odatle: $0 < 4-x$ ili $x < 4$ i $4-x < +\infty$ ili $x-4 > -\infty$ pa je $x > -\infty$.

Član y_2 definiran je za

$$-\infty < x < 4.$$

Iz (a) i (b) slijedi:

Zadana funkcija y definirana je za $1 \leq x < 4$.

$$242. y = \sqrt{x} + \sqrt{\frac{1}{x-2} - \log(2x-3)}.$$

Područje definicije za:

I član $0 \leq x < +\infty$

II član $x-2 \neq 0$, pa je

$$x \neq 2; \quad -\infty < x < 2 \quad \text{i} \quad 2 < x < +\infty$$

III član $0 < 2x-3 < +\infty$ ili $3 < 2x < +\infty$

$$\text{pa je} \quad \frac{3}{2} < x < +\infty.$$

Nanesemo li ta tri intervala na brojevni pravac (vidi sl. 46), vidjet ćemo da je zadana funkcija definirana za:

$$\frac{3}{2} < x < 2 \quad \text{i} \quad 2 < x < +\infty.$$

U zadacima 243 do 247 uklj. odredi funkcije koje su inverzne s obzirom na zadane i naznači područje definicije tih inverznih funkcija.

$$243. y = \log \frac{x}{2}.$$

Po definiciji logaritma:

$$10^y = \frac{x}{2},$$

$$\text{ili} \quad x = 2 \cdot 10^y$$

Označimo li sa y funkciju, a sa x argument, inverzna funkcija će glasiti:

$$y = 2 \cdot 10^x.$$

Dok je zadana funkcija definirana za $0 < x < +\infty$, inverzna funkcija definirana je za $-\infty < x < +\infty$.

$$244. y = 1 + \log(x+2).$$

Odatle:

$$\log(x+2) = y-1,$$

pa je:

$$10^{y-1} = x+2,$$

ili

$$x = 10^{y-1} - 2,$$

ili

$$y = 10^{x-1} - 2.$$

Dok je zadana funkcija definirana za $x+2 > 0$, odnosno za $-2 < x < +\infty$, inverzna funkcija definirana je za

$$-\infty < x < +\infty.$$

$$245. y = \frac{10^x - 10^{-x}}{10^x + 10^{-x}} + 1.$$

Odatle:

$$y = \frac{2 \cdot 10^x}{10^x + 10^{-x}} + 1 \quad | \cdot 10^x$$

$$y = \frac{2 \cdot 10^{2x}}{10^{2x} + 1}.$$

Odatle:

$$10^{2x}(y-2) = -y.$$

pa je:

$$10^{2x} = \frac{y}{2-y}.$$

Po definiciji logaritma ili logaritmirajući tu jednadžbu dobivamo:

$$2x = \log \frac{y}{2-y},$$

ili:

$$x = \frac{1}{2} \log \frac{y}{2-y},$$

pa je:

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{x}{2-x} \quad \text{tražena inverzna funkcija.}$$

Funkcija je definirana za $\frac{x}{2-x} > 0$.

Razlomak je pozitivan, kad su brojnik i nazivnik istog predznaka, slijedi:

- 1 $x > 0$ pa je $0 < x < 2$
 $2 - x > 0$ pa je $x < 2$
 II $x < 0$
 $2 - x < 0$, pa je $x > 2$ } Nespojiv sustav nejednadžbi.
 $0 < x < 2$ interval definicije inverzne funkcije.

246. $y = \sqrt{\ln \sin x}$.

Funkcija y definirana je za $\ln \sin x \geq 0$, dok je radikand $\ln \sin x$ definiran za $\sin x > 0$, a kako je $|\sin x| \leq 1$, zadana je funkcija definirana samo u pojedinim tačkama, u kojim je radikand pozitivan i ima vrijednost 1, tj. za:

$$x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k=0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots),$$

dok y ima u tim tačkama vrijednost $\sqrt{\ln 1} = 0$.

Inverzna funkcija:

iz $y^2 = \ln \sin x$ slijedi:
 $e^{y^2} = \sin x$ i $x = \arcsin e^{y^2}$ ili $y = \arcsin e^{x^2}$

a definirana je samo za $x=0$, pa je $y = \frac{\pi}{2}$.

247. $y = \sqrt{1 - \log_2(x-1)}$.

$$[y = 1 + 2^{1-x^2}; \quad -\infty < x < +\infty]$$

U zadacima 248 do 252 uklj. nariši grafove zadanih funkcija, prethodno određivši područja definicije tih funkcija.

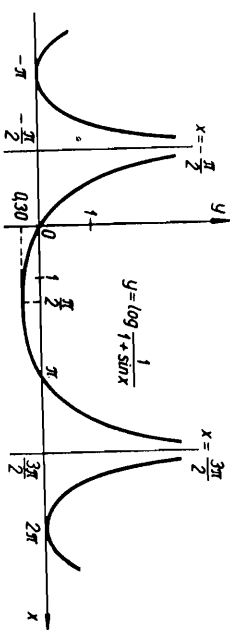
248. $y = \log \frac{1}{1 + \sin x}$.

Zadana funkcija definirana je samo za one x za koje je numerus $\frac{1}{1 + \sin x} > 0$, odnosno za $1 + \sin x > 0$ ili za $\sin x > -1$, dakle za sve x , osim za $x = -\frac{3}{2}\pi + 2k\pi$, gdje je

$k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$. U tim je tačkama $\sin x = -1$, pa $y \rightarrow +\infty$, jer $\frac{1}{1 + \sin x} \rightarrow +\infty$.

Nul-tačke funkcije: $y=0$, kad je numerus $\frac{1}{1 + \sin x} = 1$, tj. za $x = k\pi$.

Minimum dobiva funkcija y za $\sin x = 1$, tj. za $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, pa je $y_{\min} = \log \frac{1}{2} = \log 0,5 = 0,69897 \dots \approx -0,30$. Vidi sl. 47.



Slika 47

249. $y = \log |\sin x|$.

Uputa: Budući da je $|\sin x| \geq 0$, funkcija y definirana je za sve x , osim nul-tačaka $\sin x$, tj. za $k\pi$, gdje $y \rightarrow -\infty$. Maksimum ima y za $|\sin x| = 1$, tj. za $x = \frac{\pi}{2}(2k+1)$, iznosi 0.

250. $y = \ln x^2$.

251. $y = \log(x-2) + 1$.

252. $y = \frac{1}{\log(x-2)}$.

3. Area - funkcije

Zadaci

U zadacima 253 i 254 odredi područja definicije zadanih funkcija.

253. $y = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} \sqrt{5-x^2}$.

Kako je funkcija $\operatorname{Ar} \operatorname{ch} x$ definirana za $x \geq 1$, u našem primjeru mora biti:

$$\sqrt{5-x^2} \geq 1$$

$$5-x^2 \geq 1,$$

$$-x^2 \geq -4 \quad (-1)$$

$$x^2 \leq 4 \quad \text{i} \quad x \leq \pm 2.$$

Traženo područje definicije: $-2 \leq x \leq +2$.

254. $y = \operatorname{Ar} \operatorname{th} (2x-3)$.

$$[1z \quad |2x-3| < 1 \text{ slijedi } 1 < x < 2].$$

255. Izvedi formule za zbroj i razliku area-funkcija.

Označivši $\operatorname{sh} y_1 = x_1$ i $\operatorname{sh} x_2 = x_2$ dobivamo prema (61) $\operatorname{ch}^2 y_1 - \operatorname{sh}^2 y_1 = 1$, odnosno prema (62):

$$\operatorname{ch} y_1 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y_1} = \sqrt{1 + x_1^2} \quad \text{(a)}$$

$$\operatorname{ch} y_2 = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y_2} = \sqrt{1 + x_2^2}.$$

Prema (64) $\operatorname{sh}(y_1 \pm y_2) = \operatorname{sh} y_1 \operatorname{ch} y_2 \pm \operatorname{ch} y_1 \operatorname{sh} y_2$ i (a) dobivamo:

$$y_1 \pm y_2 = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \left(x_1 \sqrt{1 + x_2^2} \pm x_2 \sqrt{1 + x_1^2} \right).$$

ili

$$\operatorname{Ar} \operatorname{sh} x_1 \pm \operatorname{Ar} \operatorname{sh} x_2 = \operatorname{Ar} \operatorname{sh} \left(x_1 \sqrt{1 + x_2^2} \pm x_2 \sqrt{1 + x_1^2} \right).$$

Prema (64) $\operatorname{ch}(y_1 \pm y_2) = \operatorname{ch} y_1 \operatorname{ch} y_2 \pm \operatorname{sh} y_1 \operatorname{sh} y_2$ i (a) dobivamo uz oznaku $\operatorname{ch} y_1 = x_1$ i $\operatorname{ch} y_2 = x_2$ i uzeti u obzir da je prema (61) $\operatorname{sh} y_1 = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y_1 - 1} = \sqrt{x_1^2 - 1}$ i $\operatorname{sh} y_2 = \sqrt{x_2^2 - 1}$:

$$y_1 \pm y_2 = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x_1 \pm \operatorname{Ar} \operatorname{ch} x_2 = \operatorname{Ar} \operatorname{ch} [x_1 x_2 \pm \sqrt{(x_1^2 - 1)(x_2^2 - 1)}].$$

Uz oznaku $\operatorname{th} y_1 = x_1$ i $\operatorname{th} y_2 = x_2$ dobivamo prema (64)' [vidi zadatak 209] $\operatorname{th}(y_1 \pm y_2) = \frac{\operatorname{th} y_1 \pm \operatorname{th} y_2}{1 \pm \operatorname{th} y_1 \operatorname{th} y_2}$:

$$y_1 + y_2 = \operatorname{Ar th} x_1 + \operatorname{Ar th} x_2 = \operatorname{Ar th} \frac{x_1 \pm x_2}{1 \pm x_1 x_2}.$$

256. Izrazi sve area-funkcije sa $\operatorname{Ar sh} x$.

Stavimo li $\operatorname{sh} y = x$, tada prema (62):

$$\operatorname{ch} y = + \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} = + \sqrt{1 + x^2},$$

pa je:

$$y = \pm \operatorname{Ar ch} \sqrt{1 + x^2}.$$

Prema drugoj formuli (63): $\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} = \frac{1}{\operatorname{th}^2 y} - 1 = \frac{1 - \operatorname{th}^2 y}{\operatorname{th}^2 y}$,

pa odatle dobivamo:

$$\operatorname{th} y = \pm \frac{\operatorname{sh} y}{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}}.$$

Slijedi:

$$y = \pm \operatorname{Ar th} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

Iz navedene formule (63) imamo:

$$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 y} = \operatorname{cth}^2 y - 1, \text{ pa je } \operatorname{cth} y = \pm \frac{\sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}}{\operatorname{sh} y}.$$

Slijedi:

$$y = \pm \operatorname{Ar cth} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

Kako je $y = \operatorname{Ar sh} x$, dobivamo prema (a), (b) i (c):

$$\operatorname{Ar sh} x = \pm \operatorname{Ar ch} \sqrt{1 + x^2} = \pm \operatorname{Ar th} \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} = \pm \operatorname{Ar cth} \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}.$$

257. Izrazi sve area-funkcije s $\operatorname{Ar ch} x$.

$$\left[\operatorname{Ar ch} x = \pm \operatorname{Ar sh} \sqrt{x^2 - 1} = \pm \operatorname{Ar th} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} = \pm \operatorname{Ar cth} \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right].$$

V. ASIMPTOTE KRIVULJA $y = f(x)$, ODNOSNO $F(x, y) = 0$

Formule

Kosa asimptota

$$y = kx + l,$$

gdje su:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} \frac{y}{x} = k_1,$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} [f(x) - k_1 x]$$

(88b)

(Ako je $k = 0$, asimptota $y = l$ paralelna je s osi X).

Asimptote paralelne

$$\text{s osi } X: y = a, \text{ gdje je } a = \lim_{x \rightarrow \pm \infty} f(x)$$

(88)

$$\text{s osi } Y: x = b, \text{ gdje je } b = \lim_{y \rightarrow \pm \infty} \varphi(y)$$

(88a)

Za funkcije oblika razlomka asimptote paralelne s osi Y , tj. asimptote oblika $x = b$, dobivamo kao nul-tačke nazivnika, ukoliko nisu istodobno i nul-tačke brojnika (polovi).

Zadaci

U zadacima 258 do 270 uklj. odredi jednadžbe asimptota zadanih krivulja i prikaži grafički asimptote i krivulje.

$$258. y = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}.$$

Odredimo kosu asimptotu prema (88b): $y = kx + l$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1 = k_1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x + 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{3}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3.$$

Kosa asimptota:

$$y = x - 3.$$

Asimptotu paralelnu s osi Y dobivamo kao nulti-tačku nazivnika:

$$x - 3 = 0 \quad x = 3.$$

Asimptota paralelnih s osi X nema, jer je prema (88) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{3}{x^2}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

Određivši nulti-tačke funkcije y , tj. određivši korijene jednačbe $x^2 - 6x + 3 = 0$ za $x = 0$ $y = -1$, rišemo graf funkcije. Vidi sl. 48.

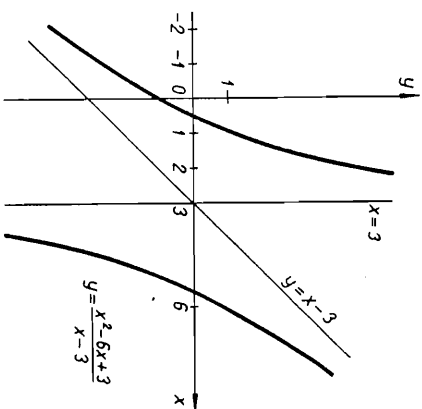
$$259. \quad y = \frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Prema (88b):

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x}}{\pm \sqrt{x^2 - 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\pm \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = \pm 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{\sqrt{x^2 - 1}} \pm 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 1 \pm x\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2} \pm \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}} = 0.$$



Slika 48

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje dvije kose asimptote:

$$y = x \quad \text{i} \quad y = -x.$$

$y \rightarrow \infty$ kad nazivnik $\sqrt{x^2 - 1} \rightarrow 0$, tj. kad $x \rightarrow \pm 1$ pa su $x = 1$ i $x = -1$ asimptote paralelne s osi Y .

Asimptota paralelnih s osi X nema, jer je prema (88) $a = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4}}} = \infty$.

Rišemo približnu sliku funkcije uzvešći u obzir da funkcija nema nulti-tačka ($x^2 + 1 \neq 0$) i da je parna, pa je simetrična s obzirom na os Y , i da nije definirana za $|x| \leq 1$. Vidi sl. 49.

$$260. \quad y = \frac{x^3 + 1}{x^2}.$$

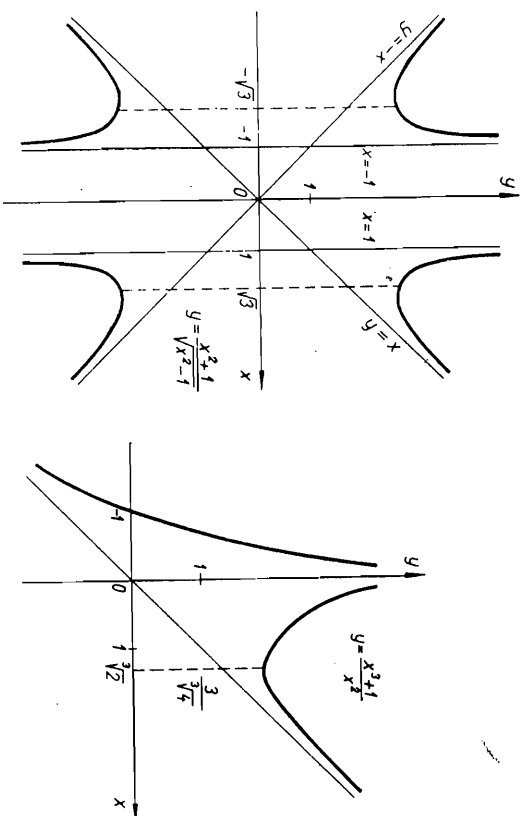
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 1}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) = 1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 1}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$y = x$ kosa asimptota krivulje.

Za $x = 0$ ima y pol II reda, dakle os Y je asimptota.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x + \frac{1}{x^2} \right) = \infty \text{ asimptota paralelnih s osi } X \text{ nema.}$$



Slika 49

Slika 50

Napišemo li y u obliku: $y = \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{x^2} = (x+1) \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)$ vidimo da je $y = 0$ za $x = -1$. Kasnije, u zadatku 516, pokazat ćemo da zadana funkcija ima minimum $\frac{3}{4} \approx 1,89$ za $x = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$. Rišemo graf. Vidi sl. 50.

261. $y = \frac{2x^2-9}{x+2}$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2-9}{x^2+2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{9}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = 2 = k_1$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2-9}{x+2} - 2x \right) = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x+9}{x+2} = - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4+\frac{9}{x}}{1+\frac{2}{x}} = -4.$$

$y = 2x - 4$ kosa asimptota.

Za $x+2=0$ ima funkcija pol I reda, pa je $x = -2$ asimptota paralelna s osi Y .

Asimptota paralelnih s osi X nema, jer je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{9}{x^2}}{1+\frac{2}{x}} = \frac{2}{1} = 2 \neq 0.$$

Uzevši u obzir da je $y=0$, kad je $2x^2-9=0$, tj. za $x_{1,2} = \pm\sqrt{4,5} = \pm 2,12$ i da je za $x=0$ $y = -\frac{9}{2} = -4,5$ rišemo graf funkcije. Vidi sl. 51.

262. $y = x + \frac{\sin x}{x}$.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 1 = k_1$$

jer je $|\sin x| \leq 1$ za sve x .

$$l = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + \frac{\sin x}{x} - x \right) = 0.$$

Za $x \rightarrow -\infty$ dobivamo iste vrijednosti za k_1 i l , pa je $y=x$ jednadžba asimptote.

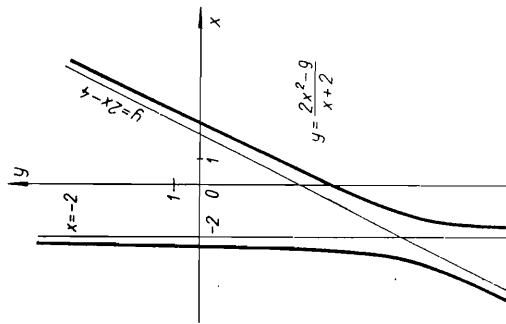
Kako je $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, asimptota paralelnih s osi X nema, a nema ni asimptota paralelnih s osi Y , jer funkcija nema polova.

Određimo razliku između ordinata y_k krivulje i ordinata y_a asimptote, tj. razliku:

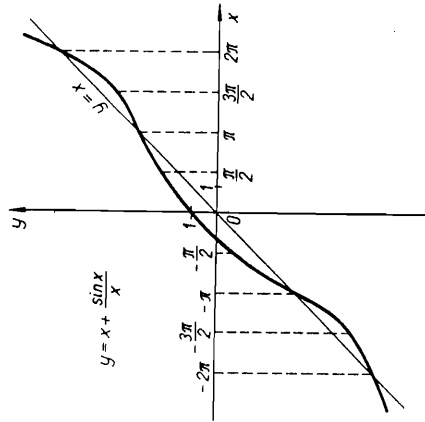
$$r = y_k - y_a = x + \frac{\sin x}{x} - x = \frac{\sin x}{x}.$$

Znamo da je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pa je za $x=0$ razlika $r=1$, ali za $x \neq 0$ i $\frac{\sin x}{x} \neq 0$ osim u tač-

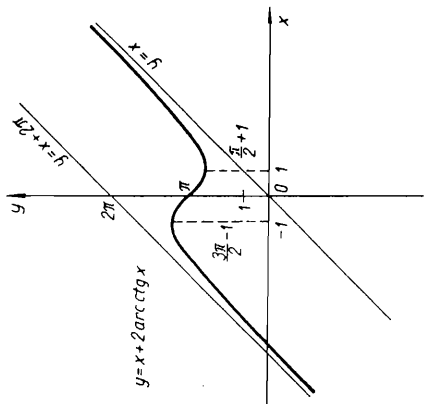
Slika 51



kama u kojima je $\sin x = 0$, tj. za $x = k\pi$, gdje je $k = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots (k \neq 0)$.
Kako je $\sin x$ za x od 0 do π pozitivan, od π do 2π negativan itd., razlika r nepre-



Slika 52



Slika 53

263. $y = x + 2 \arctg x$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = 1 + 2 \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\arctg x}{x} = 1,$$

jer kad x raste od $-\infty$ do $+\infty$, $\arctg x$ prima vrijednosti od π do 0 .

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 2 \arctg x - x) = 2 \cdot 0 = 0$$

$$l_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 \arctg x = 2\pi.$$

Funkcija ima dvije kose asimptote $y=x$ i $y=x+2\pi$.

Asimptota paralelnih s osi Y , odnosno s osi X , funkcija nema.

Kasnije, u zadatku 587, pokazat ćemo da zadana funkcija ima u tački $x_1 = 1$ minimum $y_{\min} = 1 + \frac{\pi}{2}$, za $x_2 = -1$ ima maksimum $y_{\max} = \frac{\pi}{2} - 1$, a za $x=0$ tačku infleksije $I(0, \pi)$. Vidi sl. 53.

264. $x^5 - x^4 y - 8 = 0$

Podijelimo li funkciju zadanu u implicitnom obliku sa x^5 , dobivamo:

$$1 - \frac{y}{x} - \frac{8}{x^5} = 0$$

a odatle je

$$\frac{y}{x} = 1 - \frac{8}{x^5} \quad (a)$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = l = k_1$$

$$y = x + l : x$$

$$\frac{y}{x} = 1 + \frac{l}{x}$$

$$1 + \frac{l}{x} = 1 - \frac{8}{x^5},$$

Uvrštenje u (a) daje:

pa je

$$l = -\frac{8}{x^4}$$

$$l = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{8}{x^4} \right) = 0$$

$y = x$ - kosa asimptota.

Iz eksplicitnog oblika funkcije

$$y = \frac{x^5 - 8}{x^4}$$

(b)

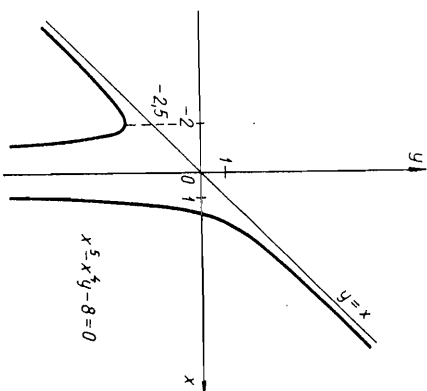
slijedi: 1) kako je $y = \infty$, kad $x^4 = 0$, bit će $x_{1,2,3,4} = 0$ pol IV reda, pa je os Y asimptota.

2) $y = 0$ kad je $x^5 - 8 = 0$, tj.

$$x = \sqrt[5]{8} = 1,52 \text{ nul-tačka funkcije.}$$

Napišemo li (b) u obliku

$$y = x - \frac{8}{x^4}$$



Slika 54

vidjet ćemo da će graf funkcije ležati i s p o d asimptote $y = x$, jer je $-\frac{8}{x^4} < 0$ za sve x .

Kasnije, u zadatku 517, pokazat ćemo da zadana funkcija ima maksimum $-2,5$ za $x = -2$. Vidi sl. 54.

$$265. \quad x^3 + y^3 - 6xy = 0.$$

Funkcija je zadana u implicitnom obliku. Da dobijemo jednadžbu u $\frac{y}{x}$ dijelimo je sa x^3 , gdje je n zbroj eksponenata od x i y u najvišem članu, u našem primjeru dijelimo sa x^3 :

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 - \frac{6}{x} \left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

Odate:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^3 = \frac{6}{x} \left(\frac{y}{x}\right) - 1.$$

(a)

Kad $x \rightarrow \infty$ $\frac{y}{x} \rightarrow 0$, pa je

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{y}{x}\right)^3 = \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}\right)^3 = k_1^3 = -1,$$

pa je

$$k_1 = -1.$$

Uvrštenje u $y = kx + l$ daje:

$$y = -1 \cdot x + l : x$$

$$\frac{y}{x} = -1 + \frac{l}{x}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$\left(-1 + \frac{l}{x}\right)^3 = \frac{6}{x} \left(-1 + \frac{l}{x}\right) - 1.$$

Nakon kubiranja i uređenja dobivamo:

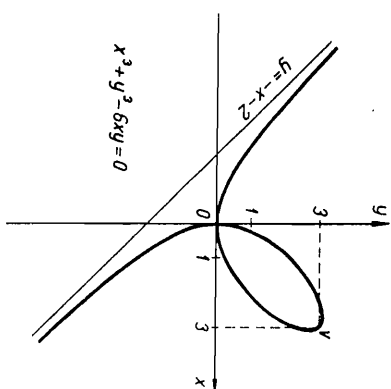
$$3 \frac{l}{x} - 3 \frac{l^2}{x^2} + \frac{l^3}{x^3} + \frac{6}{x} - \frac{6l}{x^2} = 0 \mid \cdot x$$

$$3l - 3 \frac{l^2}{x} + \frac{l^3}{x^2} + 6 - \frac{6l}{x} = 0.$$

Kad $x \rightarrow \infty$, ostaje: $3l + 6 = 0$

pa je $l = -2$

$y = -x - 2$ kosa asimptota.



Slika 55

Uvrštenje $y = 0$ u jednadžbu krivulje, koju smo prethodno podijelili sa x , daje $x^2 = 0$, pa je $x_{1,2} = 0$ dvostruka nul-tačka funkcije u kojoj graf funkcije dira os X . Na sličan način dobivamo $y_{1,2} = 0$ pa graf dira i os Y u ishodištu 0. Graf zadane funkcije poznat je pod imenom Descartesov list. Vidi sl. 55.

$$266. \quad (x + y + 1)^2 = x^2 + 1.$$

Asimptote ove funkcije odredit ćemo na drugi način: jednadžbu tražene asimptote $y = kx + l$ uvrstimo u zadanu funkciju. Dobivamo:

$$(x + kx + l + 1)^2 = x^2 + 1.$$

Nakon kvadriranja:

$$x^2 + k^2 x^2 + l^2 + 1 + 2kx^2 + 2lx + 2klx + 2kx + 2l = x^2 + 1,$$

uredimo dobiveni izraz po padajućim potencijama x :

$$(k^2 + 2k)x^2 + (2l + 2 + 2kl + 2k)x + (l^2 + 2l) = 0.$$

Stavimo:

$$k^2 + 2k = 0$$

$$i \quad 2kl + 2k + 2l + 2 = 0.$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$k_1 = 0 \quad i \quad k_2 = -2.$$

Uvrštenje u drugu jednadžbu daje:

$$l_1 = 0 \quad \text{i} \quad l_2 = -1.$$

Funkcija ima jednu kosu asimptotu:

$$y = -2x - 1$$

i jednu paralelnu s osi X:

$$y = -1.$$

Uvrštenje $x=0$ u zadanu funkciju daje $(y+1)^2=1$ pa je $y=-1 \pm 1$, a odatle dobivamo dva presjeka krivulje s osi Y:

$$y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_2 = -2.$$

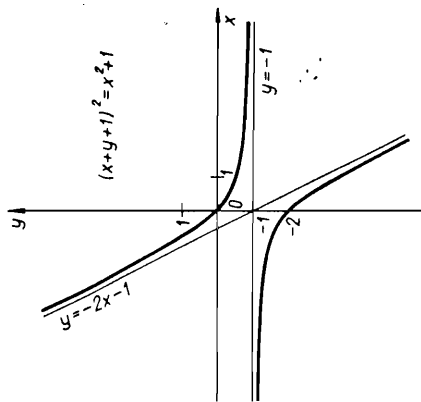
Vidi sl. 56.

$$267. \quad y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

$$268. \quad y = 1 + e^x.$$

$$269. \quad 16x^2 - 64x - 9y^2 - 54y - 161 = 0.$$

$$270. \quad 6x^2 + x^3 - y^3 = 0. \quad \left[\text{Hiperbola } S(2, -3); a=3; b=4; y = \frac{4}{3}x - \frac{17}{3}; y = -\frac{4}{3}x - \frac{1}{2} \right]. \quad [y=x+2].$$



Slika 56

$$\left[y = \frac{x}{2} - 1; x = -1 \right]. \quad [y=1].$$

VI. DERIVACIJE

A. Definicija. derivacije. Geometrijsko značenje derivacije. Jednadžbe tangente i normale

Formule

Derivacija funkcije $y=f(x)$:

1) u bilo kojoj tački apscise x funkcije:

$$f'(x) = y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}; \quad (89)$$

2) u određenoj tački apscise x_1 funkcije:

$$f'(x_1) = y'_1.$$

$y'_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$ = koeficijent smjera tangente povučene na graf funkcije $y=f(x)$ i to u tački apscise x_1 te funkcije.

Jednadžbe tangente i normale u tački $T_1(x_1, y_1)$ krivulje $y=f(x)$:

$$t \equiv y - y_1 = y'_1(x - x_1) \quad (90)$$

$$n \equiv y - y_1 = -\frac{1}{y'_1}(x - x_1). \quad (91)$$

Zadaci

271. Za funkciju $y=x^2$ izvedi derivaciju y' u tački apscise x i odredi vrijednosti derivacije te funkcije u tačkama $T_1(x_1=2)$, $T_2(x_2=-3)$ i $T_3(x_3=0)$.

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - \frac{y}{x^2}$$

$$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x^2$$

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 : \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + \Delta x$$

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x + 0 = 2x.$$

- U $T_1(x_1=2)$: uvrštenje $x_1=2$ i y' daje: $y'_1=4$.
 u $T_2(x_2=-3)$: $y'_2=2 \cdot (-3) = -6$.
 u $T_3(x_3=0)$: $y'_3=2 \cdot 0 = 0$.

272. Izračunaj isto za funkciju $y=x^3$.

$$[y' = 3x^2; \quad y'_1 = 12; \quad y'_2 = 27; \quad y'_3 = 0].$$

273. Odredi koeficijente smjera i priklone kutove tangenata povučenih na parabolu $y=x^2$ u zadanim tačkama i sve prikaži grafički:

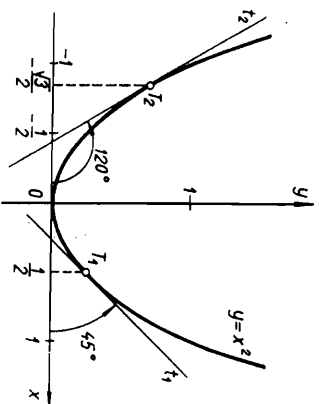
a) u ishodištu koordinatnog sustava $O(0,0)$:

Kako je $y' = 2x$, $\operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} 0 = 0$, kut $\alpha_0 = 0$

b) u tački $T_1\left(x_1 = \frac{1}{2}\right)$: $\operatorname{tg} \alpha_1 = y'_1 = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$; $\alpha_1 = 45^\circ$.

c) u tački $T_2\left(x_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$: $\operatorname{tg} \alpha_2 = y'_2 = 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\sqrt{3}$; $\alpha_2 = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

Vidi sl. 57.



Slika 57

274. U kojim je tačkama kubne parabole $y=x^3$ koeficijent smjera tangente jednak 3?

Kako je $y' = 3x^2$, dobivamo jednađbu:

$$3x^2 = 3,$$

a odatle je

$$x_1 = 1 \quad \text{i} \quad x_2 = -1.$$

Uvrštenje u $y = x^3$ daje tražene tačke na kubnoj paraboli:

$$\underline{T_1(1, 1)} \quad \text{i} \quad \underline{T_2(-1, -1)}.$$

Prikaži sve grafički!

275. Zadana je parabola $y=x^2-x-6$. Odredi uz grafički prikaz:

a) Derivaciju y' u tački apscise x . Računamo prema (89):

$$y + \Delta y = (x + \Delta x)^2 - (x + \Delta x) - 6 \quad \Big| -$$

$$y = x^2 - x - 6$$

ili

$$\Delta y = x^2 + 2x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x - \Delta x - 6 - x^2 + x + 6,$$

$$\Delta y = 2x \cdot \Delta x - \Delta x + \Delta x^2 \quad | : \Delta x$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 1 + \Delta x, \quad \text{pa je } y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 2x - 1.$$

Da narišemo parabolu, odredimo njen vrh $V(x_v, y_v)$ i nul-tačke. U vrhu tangenta je paralelna s osi X , pa je

$$y' = \operatorname{tg} \alpha = 2x - 1 = 0.$$

Odatle slijedi: $x_v = \frac{1}{2}$, a uvrštenje $x_v = \frac{1}{2}$ u y daje $y_v = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} - 6 = -6\frac{1}{4}$, pa je

$$V\left(\frac{1}{2}, -6\frac{1}{4}\right).$$

Za $y=0$ dobivamo $x^2-x-6=0$, a odatle $x_1=-2$ i $x_2=3$, dok za $x=0$ dobivamo $y=-6$. Narišemo graf. Vidi sl. 58.

b) jednađbe tangente i normale u tački $T_1(x_1=-1)$ parabole. Računamo prema (90):

$$y - y_1 = y'_1(x - x_1).$$

Uvrštenje $x_1 = -1$ u jednađbu parabole daje:

$$y_1 = 1 + 1 - 6 = -4, \quad T_1(-1, -4).$$

Uvrštenje $x_1 = -1$ u $y' = 2x - 1$ daje:

$$y'_1 = -3, \quad \text{pa je} \quad t \equiv y + 4 = -3(x + 1),$$

a prema (91) $n \equiv y + 4 = \frac{1}{3}(x + 1),$

pa je:

$$t \equiv y = -3x - 7, \quad n \equiv y = \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}.$$

c) Odredi jednađbu tangente koja je paralelna s pravcem $p \equiv y = x - 5$.

Prema (90):

$$t \equiv y - y_1 = y'_1(x - x_1).$$

Kako je $t \parallel p$, tangenta i pravac imaju isti koeficijent smjera, $\hat{y}_1$:

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = y'_1 = 1,$$

pa je:

$$t \equiv y - y_1 = 1(x - x_1). \quad (a)$$

Treba još odrediti x_1 i y_1 , $\hat{y}_1$, koordinate dirališta D .

Imali smo: $y' = 2x - 1$, a u $D(x_D, y_D)$:

$$y'_1 = 2x_1 - 1 = 1, \quad \text{pa je:} \quad x_1 = 1.$$

B. Računanje derivacija

2. DERIVIRANJE SUME, PRODUKTA I KVOCIJENTA ALGEBARSKIH FUNKCIJA

Formule

$$D_x x^n = n \cdot x^{n-1} \quad (92) \text{ vrijedi za sve realne eksponente (126)}$$

$$D_x x = 1 \quad (92a) \quad D_x C = 0 \quad (93)$$

$$D_x \frac{1}{x} = -\frac{1}{x^2} \quad (105) \quad D_x \sqrt[n]{x} = \frac{1}{2\sqrt[n]{x}} = \frac{1}{2\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad \text{dva ista korijena} \quad (127)$$

$$D_x \sqrt[n]{x} = \frac{1}{3\sqrt[n]{x^2}} \quad (128) \quad D_x \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}} \quad (129)$$

$$D_x [u(x) \pm v(x)] = u'(x) \pm v'(x) = u' \pm v' \quad (94) \quad D_x (u \cdot v) = u \cdot v' + v \cdot u' \quad (97)$$

$$D_x (C \cdot v) = C v' \quad (98) \quad D_x (u \cdot v \cdot w) = u v w' + u w v' + v w u' \quad (97a)$$

$$D_x \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{v u' - u v'}{v^2} \quad (99) \quad D_x \left(\frac{u}{c} \right) = \frac{1}{c} u' \quad (102)$$

$$D_x \left(\frac{c}{v} \right) = -\frac{c v'}{v^2} \quad (103)$$

(Na poseban arak prepisi te formule uz oznaku njihovih brojeva.)

Zadaci

U zadacima 280–290 izračunaj derivacije zadanih funkcija.

$$280. y = 2\sqrt{x} - \frac{1}{x} + \sqrt[4]{3}.$$

$$\text{Prema (98), (127), (105) i (93) dobivamo: } y' = 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

$$281. y = \sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^2} - \frac{1}{3x^3} + \pi.$$

Da možemo neposredno upotrijebiti formulu (92) $D_x x^n = n \cdot x^{n-1}$ prikazimo prije deriviranja članove zadane funkcije y u obliku potencija s razlomljenim, odnosno negativnim eksponentima.

$$y = x^{\frac{1}{3}} + 5x^{-2} + \frac{1}{3}x^{-3} + \pi.$$

$$y' = \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - \frac{5}{3}x^{-\frac{4}{3}} + 2x^{-2} - \frac{1}{3} \cdot 3x^{-4} = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \frac{5}{3\sqrt[3]{x^4}} + \frac{2}{x^3} - \frac{1}{x^4}.$$

$$282. y = 3\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x^3} + 2\sqrt[3]{x} + \frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \log 2. \quad \left[\frac{2}{\sqrt{x}} - 5\sqrt{x^3} + \frac{2}{3\sqrt[3]{x^2}} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4} \right]$$

$$283. y = \frac{mx^2 + nx + 4p}{p + q}.$$

$$y' = \frac{1}{p+q} (2mx + n) = \frac{2mx + n}{p+q}.$$

$$284. y = \frac{mx^2}{\sqrt{x}} + \frac{nx\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} - \frac{p\sqrt{x}}{x}.$$

Da pojednostavnimo deriviranje, prikazimo zadanu funkciju u drugom obliku:

$$y = mx^{\frac{2}{2}-\frac{1}{2}} + nx \cdot x^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} - p x^{\frac{1}{2}-1} \quad \text{ili} \quad y = mx^{\frac{1}{2}} + nx^{\frac{1}{6}} - p x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Sada derivirajmo: } y' = \frac{1}{2}mx^{\frac{1}{2}-1} + \frac{1}{6}nx^{\frac{1}{6}-1} - \frac{1}{2}p x^{-\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}mx^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{6}nx^{-\frac{5}{6}} - \frac{1}{2}p x^{-\frac{3}{2}}$$

i konačno:

$$y' = \frac{3}{2}m\sqrt{x} + \frac{1}{6}n\sqrt[6]{x} - \frac{1}{2}p\sqrt{\frac{1}{x^3}}.$$

$$285. f(x) = \sqrt{x(x^3 - \sqrt{x} + 1)}.$$

$$\text{Odredi također } f' \text{ za } x=4, \text{ tj. } f'(4), \text{ i za } x_2 = \frac{1}{9}, \text{ tj. } f'\left(\frac{1}{9}\right).$$

$$f(x) = x^3\sqrt{x} - x + \sqrt{x}. \quad \text{ili: } f(x) = x^{\frac{7}{2}} - x + \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}-1} - 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2}x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1.$$

$$f'(4) = \frac{7}{2} \cdot 16\sqrt{4} + \frac{1}{2 \cdot 2} - 1 = 111\frac{1}{4}.$$

$$f'\left(\frac{1}{9}\right) = \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{81} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{3}} - 1 = \frac{125}{243}.$$

286. $y = \sqrt[4]{x^3 \sqrt{x^2} \sqrt{x}}$.

Pojednostavnimo:

$$y = \sqrt[4]{\frac{x^{11}}{x^3}} = \sqrt[4]{x^8} = \sqrt[4]{x^{23} \cdot x^{24}} = \sqrt[4]{x^{23}} \sqrt[4]{x^{24}} = \sqrt[4]{x^{23}} \cdot \sqrt[4]{x^{24}} = \sqrt[4]{x^{23}} \cdot x^6 = x^6 \sqrt[4]{x^{23}}.$$

$$287. \quad y = \sqrt[3]{x^2/x} \quad y' = \frac{5}{6\sqrt{x}}$$

288. $y = x^3 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right)$.
 $[y' = x^4(10 - 2x + 21x^2)]$.

289. $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3x^3}$.

Izračunaj i $f'(1)$.

$$290. \quad s = \frac{t^2 - 5t - 1}{t^8}.$$

Izračunaj s' na dva načina, a zatim odredi s'_1 za $t_1 = \frac{1}{a}$.

1) Podijelimo svaki član brojnika s nazivnikom:

$$S = 2^{-6} - 5 \cdot 2^{-7} + 1^{-8}$$

iii $s' = -6t^{-7} + 35t^{-8} + 8t^{-9}$ $s' = -\frac{6}{t^7} + \frac{35}{t^8} + \frac{8}{t^9}$.

2) s' računamo po pravilu kvocijenta, tj. prema (99):

$$s' = \frac{t^8(2t-5) - (t^2-5t-1) \cdot 8t^7}{t^{16}} = \frac{2t^9-5t^8-8t^8+40t^8+8t^7}{t^{16}} = \frac{-6t^9+35t^8+8t^7}{t^{16}} = -\frac{6}{t^7} + \frac{35}{t^8} + \frac{8}{t^9}.$$

Uvrštenje $t_1 = \frac{1}{a}$ daje

$$s_1' = -6a^7 + 35a^8 + 8a^9.$$

U zadacima 291 do 293 ukij. izračunaj na dva načina derivacije zadanih funkcija.

291. $y = (\sqrt{x} + 1) \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right)$.

1) Računamo prema (97), tj. prema pravilu: prvi faktor prepisemo, drugi deriviramo + drugi prepisemo, prvi deriviramo:

$$y = (\sqrt{x} + 1) \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} + \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - 1 \right) \cdot \frac{2}{2\sqrt{x}} \right) = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^3}} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{x^3}} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} - \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} + 1 \right).$$

2) Prije deriviranja izvršimo množenje:

$$y = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} - 1 = \frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

$$y' = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^3}} - \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{1}{x} + 1 \right).$$

292. $y = (x^2 - 3x + 3)(x^2 + 2x - 1)$.

$[4x^3 - 3x^2 - 8x + 9].$

293. $y = x^5 \left(2 - \frac{x}{3} + 3x^2 \right).$

$$[21x^6 - 2x^5 + 10x^4].$$

U zadacima 294 do 296 uklj. izračunaj prema (97a) derivacije produkta triju faktora.

294. $y = (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})$

$$\begin{aligned} \nu' &= (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{2x}) \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + (1 + \sqrt{x})(1 + \sqrt{3x})\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + (1 + \sqrt{2x})(1 + \sqrt{3x})\frac{1}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} [(1 + \sqrt{x} + \sqrt{2x} + x)\sqrt{2} + (1 + \sqrt{x} + \sqrt{3x} + x)\sqrt{3}] \sqrt{2} + (1 + \sqrt{2x} + \sqrt{3x} + x)\sqrt{6}] = \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + 2\sqrt{2x} + 2\sqrt{3x} + 2\sqrt{6x} + 3x\sqrt{6}). \end{aligned}$$

295. $y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$.

$[2x(3x^4 - 28x^2 + 49)]$

296. $F(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Odredivši $F'(x)$, izračunaj $F'(0)$, $F'(1)$, $F'(2)$.

[11; 2; -1].

U zadacima 297 do 308 uklj. izračunaj derivacije zadanih razlomljenih racionalnih funkcija.

297. $y = \frac{3x^2 + 1}{x - 1}$.

Deriviramo prema (99), pamteći pravilo za deriviranje razlomka ovako:

Razlomkova crta; dolje: nazivnik na kvadrat, gore; nazivnik puta derivacija brojnika minus brojnik puta derivacija nazivnika:

$$y' = \frac{(x-1) \cdot 6x - (3x^2+1) \cdot 1}{(x-1)^2} = \frac{6x^2 - 6x - 3x^2 - 1}{(x-1)^2} = \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x-1)^2}.$$

$$298. y = \frac{ax + b^2}{cx + d^2}.$$

Pazi: a, b, c i d su konstante, a $D_x C = 0$ (93).

$$y' = \frac{(cx + d^2)a - (ax + b^2)c}{(cx + d^2)^2} = \frac{ad^2 - b^2c}{(cx + d^2)^2}.$$

$$299. s = \frac{t^2 + 1}{3(t^2 - 1)} + (t^2 - 1)(1 - t).$$

$$s' = \frac{1}{3} \frac{(t^2 - 1)2t - (t^2 + 1)2t}{(t^2 - 1)^2} + (t^2 - 1)(-1) + (1 - t)2t = \\ = \frac{1}{3} \frac{2t(t^2 - 1 - t^2 - 1)}{(t^2 - 1)^2} - t^2 + 1 + 2t - 2t^2 = -\frac{4}{3} \frac{t}{(t^2 - 1)^2} - 3t^2 + 2t + 1.$$

$$300. y = \frac{1 - x^3}{\sqrt{\pi}}.$$

Prema (102): $y' = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot (-3x^2) = -\frac{3x^2}{\sqrt{\pi}}.$

$$301. y = \frac{a+b}{x^3-1} \quad (a \text{ i } b \text{ su konstante}).$$

Prema (103): $y' = -\frac{(a+b)3x^2}{(x^3-1)^2} = -\frac{3(a+b)x^2}{(x^3-1)^2}.$

$$302. s(t) = \frac{3}{5-t} + \frac{t^2}{5}. \text{ Odredi } s'(0) \text{ i } s'(2).$$

$$s'(t) = -\frac{3 \cdot (-1)}{(5-t)^2} + \frac{2t}{5} = \frac{3}{(5-t)^2} + \frac{2}{5}t, \\ s'(0) = \frac{3}{25}; \quad s'(2) = \frac{3}{9} + \frac{4}{5} = \frac{51}{45} = \frac{17}{15}.$$

$$303. y = \frac{x}{x^2+1}. \text{ Odredi } y'(x), y'(2) \text{ i } y'(-1).$$

$$\left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}; -\frac{3}{25}; 0 \right].$$

$$304. u = \frac{v^3 - 2v}{v^2 + v + 1}.$$

$$\left[\frac{v^4 + 2v^2 + 5v^2 - 2}{(v^2 + v + 1)^2} \right].$$

$$305. u = \frac{v^2 - v + 1}{a^2 - 3}.$$

$$\left[\frac{2v-1}{a^2-3} \right]$$

$$306. z = \frac{1}{t^2 + t + 1}.$$

$$\left[-\frac{2t+1}{(t^2+t+1)^2} \right].$$

$$307. y = \frac{ax + bx^2}{am + bm^2}.$$

$$308. y = \frac{3}{(1-x^2)(1-2x^3)}.$$

$$\left[\frac{a+2bx}{m(a+bm)} \right]; \left[\frac{6x(1+3x-5x^3)}{(1-x^2)^2(1-2x^3)^2} \right].$$

b. SLOŽENE FUNKCIJE. DERIVIRANJE SLOŽENIH FUNKCIJA

Formule

Složena funkcija je funkcija od funkcije.

Ako je $y=f(u)$, a $u=\varphi(x)$, uvrštenje daje $y=f[\varphi(x)]$, a to znači da je y složena funkcija od x .

Derivacija složene funkcije $y=y(u)$, gde je $u=u(x)$, glasi:

$$y'(x) = y'(u) \cdot u'(x),$$

ili:

$$(124)$$

$$D_x y(x) = D_u y(u) \cdot D_x u(x).$$

Slično se derivira složena funkcija: $y=y(u)$, gdje je $u=u(v)$, dok je $v=v(x)$:

$$D_x y(x) = D_u y(u) \cdot D_v u(v) \cdot D_x v(x).$$

$$(124a)$$

Zadaci

U zadacima **309** do **316** uklj. izračunaj derivacije zadanih složenih funkcija.

309. I primjer:

$$y = (1-x^2)^3.$$

Zadanu složenu funkciju rastavimo u dvije proste funkcije: $y=u^3$, gdje je $u=1-x^2$.

Prema (124):

$$y' = 3u^2 \cdot (-2x) = -6xu^2 = -6x(1-x^2)^2.$$

II primjer:

$$y = \sqrt{(x^2 - x + 1)^5}.$$

y rastavimo u tri proste funkcije: $y=\sqrt{u}$, $u=v^5$, $v=x^2-x+1$.

$$\text{Prema (124a): } y' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 5v^4 \cdot (2x-1) = \frac{1}{2\sqrt{v^5}} \cdot 5(x^2-x+1)^4(2x-1) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x^2-x+1)^5}} \cdot 5(x^2-x+1)^4 \cdot (2x-1) = \frac{5}{2} \frac{(2x-1)\sqrt{(x^2-x+1)^3}}{(x^2-x+1)^5}.$$

Praktički se postupa mnogo jednostavnije, i to prema pravilu:

Deriviraj pojedine funkcije onim redom kako dolaze, pri čemu nakon svakog deriviranja prepisi sve ostalo do kraja, a svakom slijedom derivacijom množi predašnjim.

Riješimo na taj kraći način oba gore riješena primjera.

I primjer:

$$y' = (1 - x^2)^3, \\ y' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (1 - x^2)' = 3(1 - x^2)^2 \cdot (-2x) = -6x(1 - x^2)^2$$

II primjer:

Prema (127), (92) i (94):

$$y = \sqrt{x^2 - x + 1}^5 \\ y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x + 1}^5} \cdot 5(x^2 - x + 1)^4 \cdot (2x - 1) = \frac{5}{2} \frac{(2x - 1) \sqrt{x^2 - x + 1}^3}{\sqrt{x^2 - x + 1}^5}$$

310. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + a^2}}$.

Prema (99) i (127):

$$\frac{\sqrt{x^2 + a^2} \cdot 2x - x^2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + a^2}}}{x^2 + a^2} = \frac{2x^3 + 2a^2x - x^3}{(x^2 + a^2)\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{x(x^2 + 2a^2)}{\sqrt{x^2 + a^2}^3}$$

311. $y = \frac{1 - \sqrt[3]{2x}}{1 + \sqrt[3]{2x}}$.

Prema (99) i (128):

$$-\frac{(1 + \sqrt[3]{2x})^2}{3\sqrt[3]{4x^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} - \frac{(1 - \sqrt[3]{2x})^2}{3\sqrt[3]{4x^2}} - \frac{2}{3\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{4}{(1 + \sqrt[3]{2x})^2} - \frac{4}{(1 + \sqrt[3]{2x})^2 \cdot 3\sqrt[3]{4x^2}} = \frac{4}{3(1 + \sqrt[3]{2x})^2 \cdot \sqrt[3]{4x^2}}$$

312. $y = \frac{1}{\sqrt[3]{2x-1}} + \frac{5}{\sqrt[3]{(x^2+2)^3}}$.

Prikažimo y u drugom obliku: $y = (2x - 1)^{-\frac{1}{3}} + 5(x^2 + 2)^{-\frac{2}{3}}$.

Prema (92):

$$y' = -\frac{1}{3}(2x - 1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2 - \frac{15}{4}(x^2 + 2)^{-\frac{7}{3}} \cdot 2x \\ y' = -\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x - 1)^4}} - \frac{15x}{2\sqrt[3]{(x^2 + 2)^7}}$$

313. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + x^2}}$.

U drugom obliku:

$$y = \frac{1}{\sqrt[3]{1 + x^2}} = (1 + x^2)^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = -\frac{1}{3}(1 + x^2)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = -\frac{2x}{3\sqrt[3]{(1 + x^2)^4}}$$

314. $u(v) = \sqrt{(v^2 + v + 2)^3}$; odredi $u'(1)$.

$$u'(v) = \frac{1}{2\sqrt{(v^2 + v + 2)^3}} \cdot 3(v^2 + v + 2)^2 \cdot (2v + 1) = \\ = \frac{3}{2}(v^2 + v + 2)^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot (2v + 1) = \frac{3}{2}(2v + 1)\sqrt{(v^2 + v + 2)^3}$$

$$u'(1) = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot \sqrt[3]{4} = 9$$

315. $y(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; odredi $y'(2)$.

$$\left[-\frac{\sqrt[3]{3}}{3} \right]$$

316. $y(x) = (1 - 2\sqrt{x})^4$; odredi $y'(1)$.

[4].

U zadacima 317 do 320 uklj. izvedi formule analitičke geometrije za jednadžbe tangenata krivulja II reda.

317. Jednadžba tangente na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ u tački $D(x_1, y_1)$ krivulje.

Računamo prema (90):

$$t \equiv y - y_1 = y_1'(x - x_1).$$

Jednadžbu elipse pišemo u eksplicitnom obliku:

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

(a)

Odatle: $y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{2x}{2\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$

a kako je prema (a):

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{a}{b} y$$

$$y' = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\frac{a}{b} y} = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x}{y},$$

a u diralištu $D(x_1, y_1)$: $y_1' = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1}.$

Uvrštenje u (90) daje: $y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1}{y_1} (x - x_1).$

Množimo li sa $a^2 y_1$ i uredimo, dobit ćemo:

$$b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2.$$

(b).

Diralište $D(x_1, y_1)$ leži na elipsi, pa koordinate te tačke moraju jednadžbu elipse zadovoljiti, tj.:

$$b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2 = a^2 b^2.$$

Uvrštenje u (b) daje:

$$t \equiv b^2 x x_1 + a^2 y y_1 = a^2 b^2.$$

$$333. y = \sin(\sin x).$$

$$334. y = \sqrt{\frac{x}{\lg 2}}.$$

$$335. y = \cos \frac{x}{a} + \cos \frac{a}{x}; \text{ odredi } y'(a).$$

$$[\cos(\sin x) \cdot \cos x].$$

$$\left[\frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sqrt{2 \sin x}} \right].$$

$$[0].$$

d. DERIVIRANJE LOGARITAMSKIH FUNKCIJA

Formule

$$D_x \log_a x = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \quad (106)$$

$$D_x \ln x = \frac{1}{x} \quad (107) \quad D_x \log x = \frac{M}{x} \quad (108)$$

Tu je prema (74) $M = \log e = 0.434294 \dots$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a} \quad (78)$$

$$\log_a x \cdot \ln a = \ln x.$$

Dokaz za (78a): Označi: $\log_a x = y_1 \mid a^{y_1} = x$ Slijedi $a^{y_1} = e^{y_1 \ln a}$ odatle: $y_1 \ln a = y_2 \ln e$

$$\ln x = y_2 \mid e^{y_2} = x \quad \text{pa je } \log_a x \cdot \ln a = \ln x.$$

Zadaci

U zadacima 336 do 345 uklj. izračunaj derivacije zadanih funkcija.

$$336. y = x^2 \log_3 x.$$

Prema (97) i (106):

$$y' = x^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \log_3 e + \log_3 x \cdot 2x = x \cdot \frac{1}{\log_3 3} + 2x \cdot \log_3 x = \frac{x}{\ln 3} + 2x \cdot \log_3 x.$$

$$337. y = \frac{x-1}{\log_2 x}.$$

Prema (99), (106) i (78):

$$\begin{aligned} \log_2 x - (x-1) \frac{1}{x} \log_2 e &= \frac{\log_2 x}{x} - \frac{x \log_2 x - (x-1)}{x} \cdot \frac{1}{\ln 2} = \frac{x \log_2 x - \ln 2 - x + 1}{x \log_2 x} \cdot \ln 2 = \\ &= \frac{x \log_2 x \cdot \ln 2 - x + 1}{x (\log_2 x \cdot \ln 2)^2} \ln 2 = \text{prema (78a)} = \frac{x \ln x - x + 1}{x \ln^2 x} \ln 2. \end{aligned}$$

e. DERIVIRANJE CIKLOMETRIJSKIH (ARKUS) FUNKCIJA.

Formule

$$D_x \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (110) \quad D_x \arctg x = \frac{1}{1+x^2} \quad (112)$$

$$D_x \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (111) \quad D_x \operatorname{arccotg} x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (113)$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (70) \quad \arctg x + \operatorname{arccotg} x = \frac{\pi}{2} \quad (71)$$

Zadaci

U zadacima 346 do 354 uklj. izračunaj derivacije zadanih arkus-funkcija.

$$346. y = \frac{\arcsin x}{\arccos x}.$$

Prema (99), (110) i (111):

$$y' = \frac{\arcsin x}{\arccos^2 x} + \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\arcsin x + \arccos x}{\arccos^2 x \cdot \sqrt{1-x^2}} = \text{prema (70)} = \frac{\pi}{2 \arccos^2 x \sqrt{1-x^2}}.$$

$$347. y = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

$$y' = x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \arcsin x - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x.$$

$$348. y = \arcsin \frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x} \quad (\alpha \text{ je konstanta}).$$

$$\begin{aligned} y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\sin \alpha \sin x}{1 - \cos \alpha \cos x} \right)^2}} \cdot \frac{(1 - \cos \alpha \cos x) \sin \alpha \cos x - \sin \alpha \sin^2 x \cos \alpha}{(1 - \cos \alpha \cos x)^2} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos x - \sin \alpha \cos \alpha \cos^2 x - \sin \alpha \sin^2 x \cos \alpha}{\sqrt{(1 - \cos \alpha \cos x)^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 x (1 - \cos \alpha \cos x)}} = \\ &= \frac{\sin \alpha \cos x - \sin \alpha \cos \alpha (\cos^2 x + \sin^2 x)}{\sqrt{(1 - \cos \alpha \cos x)^2 - \sin^2 \alpha \cos^2 x (1 - \cos \alpha \cos x)}} = \\ &= \frac{\sin \alpha (\cos x - \cos \alpha)}{\sin \alpha (\cos x - \cos \alpha)} = 1. \end{aligned}$$

$$349. y = \arcsin \frac{1}{x^2}.$$

$$y' = -2 \arcsin \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{x^2} = -\frac{2 \arcsin \frac{1}{x^2}}{x^2}.$$

$$350. y = \arcsin(\cos x)$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 x}} \cdot \sin x = -\frac{\sin x}{|\sin x|}.$$

$y' = -1$ u tačkama u kojima je $\sin x > 0$, $y' = 1$ u tačkama u kojima je $\sin x < 0$,

y' ne postoji u tačkama u kojima je $\sin x = 0$, tj. za $x = k\pi$, gdje je $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Nariši graf zadane funkcije y . Dobit ćeš graf funkcije $y = \arcsin(\sin x)$ pomaknut za $\frac{\pi}{2}$ nalivo. Vidi sl. 43, uz zadatak 234.

$$351. y = \arcsin(x-1). \quad \left[\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} \right]$$

$$352. y = \arcsin x^2. \quad \left[\frac{2x}{1+x^4} \right]$$

$$353. y = \arcsin \cos \frac{2x-1}{\sqrt{3}}. \quad \left[-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{1+2x-2x^2}} \right]$$

$$354. y = \arcsin \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}. \quad \left[-\frac{1}{(1+x)\sqrt{2x(1-x^2)}} \right]$$

f. DERIVIRANJE EKSPONENCIJALNIH FUNKCIJA

Formule

$$D_x a^x = a^x \ln a \quad (114) \quad D_x e^x = e^x \quad (115)$$

Zadaci

U zadacima 355 do 366 uklj. izračunaj derivacije zadanih eksponencijalnih funkcija.

$$355. y = 2^x$$

$$y' = 2^x \cdot \ln 2.$$

$$356. y = \frac{x}{4^x}.$$

$$y' = \frac{4^x \cdot 1 - x \cdot 4^x \cdot \ln 4}{4^{2x}} = \frac{4^x(1-x \ln 4)}{4^{2x}} = \frac{1-x \ln 4}{4^x} = \frac{1-x \ln 4}{4^{x-1}}.$$

$$357. y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$$

$$y' = 2^{\frac{x}{\ln x}} \cdot \ln 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{2^{\frac{x}{\ln x}}}{x} \cdot \frac{1}{\ln^2 x} = \frac{2^{\frac{x}{\ln x}}}{\ln^2 x}.$$

$$358. y = (2^x)^x.$$

$$y' = 2^{2x} \cdot \ln 2 \cdot 3^x \cdot \ln 3 = 2^{2x} \cdot 3^x \ln 2 \cdot \ln 3.$$

$$359. y = e^{\arcsin 2x}.$$

$$y' = e^{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}} \cdot 2 = \frac{2 e^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1-4x^2}}.$$

$$360. y = \ln \sin \sqrt{\arctg e^{3x}}.$$

$$y' = \frac{\cos \sqrt{\arctg e^{3x}}}{\sin \sqrt{\arctg e^{3x}}} \cdot \frac{1}{3 \sqrt{\arctg e^{3x}}} \cdot \frac{1}{1+e^{6x}} \cdot e^{3x} \cdot 3 = \frac{e^{3x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{\arctg e^{3x}}}{(1+e^{6x})^3 \sqrt{\arctg e^{3x}}}$$

$$361. y = x^2 e^{-\frac{x^2}{a^2}}.$$

$$y' = -x^2 \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot \frac{-2x}{a^2} + e^{-\frac{x^2}{a^2}} \cdot 2x = \frac{2x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{a^2}} (a^2 - x^2).$$

$$362. y = \sin(2^x).$$

$$[2^x \ln 2 \cos(2^x)].$$

$$363. y = a^{\sin^3 x}.$$

$$[3 \ln a \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \cdot a^{\sin^3 x}]$$

$$364. y = \frac{x^3 + 2x}{e^x}.$$

$$\left[\frac{2x(\ln 2 - 1) + 3x^2 - x^3}{e^x} \right].$$

$$365. y = \frac{1+e^x}{1-e^x}.$$

$$\left[\frac{2e^x}{(1-e^x)^2} \right].$$

$$366. y = 10^{1-\sin^4 3x}$$

$$[-12 \cdot 10^{1-\sin^4 3x} \cdot \ln 10 \cdot \sin^3 3x \cdot \cos 3x]$$

g. DERIVIRANJE HIPERBOLNIH FUNKCIJA

Formule

$$D_x \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x \quad (116)$$

$$D_x \operatorname{th} x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad (118)$$

$$D_x \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x \quad (117)$$

$$D_x \operatorname{cth} x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (119)$$

Zadaci

U zadacima 367 do 374 izračunaj derivacije zadanih hiperbolnih funkcija.

$$367. y = \ln \operatorname{ch} x$$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{ch} x} \cdot \operatorname{sh} x = \operatorname{th} x.$$

$$368. y = \operatorname{arctg}(\operatorname{th} x).$$

$$y' = \frac{1}{1+\operatorname{th}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{1+\frac{\operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\frac{\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x}} = \frac{1}{\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}} = \operatorname{ch}^2 x.$$

$$369. y = \operatorname{ch}(\operatorname{sh} x)$$

$$y' = \operatorname{sh}(\operatorname{sh} x) \cdot \operatorname{ch} x.$$

$$370. y = e^{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$y' = e^{\operatorname{ch}^2 x} \cdot 2 \operatorname{ch} x \operatorname{sh} x = e^{\operatorname{ch}^2 x} \cdot \operatorname{sh} 2x.$$

$$371. y = \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{x}{2} - \frac{1}{6} \operatorname{th}^3 \frac{x}{2}.$$

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \cdot 3 \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{4} \operatorname{th}^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{4} \frac{1 - \operatorname{th}^2 \frac{x}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} =$$

$$= \text{prema (63)} = \frac{1}{4} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \frac{x}{2}}.$$

$$372. y = \operatorname{th}(\log x).$$

$$\left[\frac{M}{x \operatorname{ch}^2(\log x)} \right].$$

$$373. y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x.$$

$$[2 \operatorname{sh} 2x].$$

$$374. y = \operatorname{th}(1-x^2).$$

$$\left[\frac{-2x}{\operatorname{ch}^2(1-x^2)} \right].$$

h. DERIVIRANJE AREA-FUNKCIJA

Formule

$$D_x \operatorname{Arsh} x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (120)$$

$$D_x \operatorname{Arch} x = \frac{1}{\pm \sqrt{x^2-1}} \quad (121)$$

$$D_x \operatorname{Arth} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (122)$$

$$D_x \operatorname{Arcth} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (123)$$

$$\text{za } |x| < 1$$

$$\text{za } |x| > 1.$$

Zadaci

U zadacima 375 do 382 uklj. izračunaj derivacije zadanih area-funkcija.

$$375. y = \operatorname{arctg} x - \operatorname{Arth} x.$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1-x^2} = -\frac{2x^2}{1-x^4}.$$

$$376. y = \frac{\operatorname{Arch} x}{x}.$$

$$y' = \frac{1}{x^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} - \operatorname{Arch} x \right) = \frac{x - \sqrt{x^2-1} \cdot \operatorname{Arch} x}{x^2 \sqrt{x^2-1}}.$$

$$377. y = \operatorname{Arsh} \frac{x-1}{x+1}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2}} \cdot \frac{(x+1) - (x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2}{\sqrt{1 + \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2} \cdot (x+1)^2} = \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2 + (x-1)^2}} \cdot \frac{2}{x+1} = \frac{2}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}.$$

$$378. y = \frac{\operatorname{Arcth} x}{1-x^2}.$$

$$\left[\frac{1+2x \operatorname{Arcth} x}{(1-x^2)^2} \right].$$

$$379. y = \arcsin x \cdot \operatorname{Arsh} x.$$

$$\left[\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\operatorname{Arsh} x}{\sqrt{1-x^2}} \right].$$

$$380. y = x + \frac{1}{2} (x^2 - 1) \operatorname{Arth} x.$$

$$\left[x \operatorname{Arth} x + \frac{1}{2} \right].$$

$$381. y = \operatorname{Arch} \sqrt{1-x^2}.$$

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \right].$$

$$382. y = \operatorname{Arth} \sqrt{1+x^2}.$$

$$\left[-\frac{1}{x \sqrt{1+x^2}} \right].$$

i. POSEBNA VRSTA DERIVACIJE (LOGARITAMSKO DERIVIRANJE)

Uputa

Ima li funkcija koju treba derivirati oblik $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$, tj. nalazi li se x u bazi i u eksponentu zadane funkcije, treba prije deriviranja funkciju logaritmirati po bazi e :

$$\ln y = \varphi(x) \cdot \ln f(x).$$

Sada se derivira panteći da će na lijevoj strani uvijek biti $\frac{1}{y} \cdot y'$, dok je na desnoj strani derivacija produkta:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \varphi(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \cdot f'(x) + \ln f(x) \cdot \varphi'(x).$$

Množeći lijevu i desnu stranu te jednakosti sa $y = [f(x)]^{\varphi(x)}$ dobivamo traženu derivaciju y' .

Zadaci

U zadacima 383 do 389 uklj. izračunaj derivacije zadanih funkcija.

$$383. y = (\sin x)^{\cos x}.$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln \sin x$$

$$384. y = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$$

$$\ln y = x \ln \frac{x}{1+x} = x [\ln x - \ln(1+x)]$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1+x} \right) + \ln \frac{x}{1+x} \cdot y$$

$$y' = \left(\frac{x}{1+x} \right)^x \left(\frac{1}{1+x} + \ln \frac{x}{1+x} \right).$$

$$385. y = \sqrt[3]{(x+1)^2}.$$

$$\ln y = \frac{1}{3} 2 \ln(x+1).$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \left[\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right] \cdot y$$

$$y' = 2 \sqrt[3]{(x+1)^2} \left[\frac{1}{x(x+1)} - \frac{\ln(x+1)}{x^2} \right].$$

$$386. y = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x.$$

$$\ln y = x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = -x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2} + \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \cdot y$$

$$y' = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left[\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right].$$

$$387. y = x^{\lg x}.$$

$$\ln y = \lg x \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \lg x \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot y$$

$$y' = x^{\lg x} \left(\frac{\lg x}{x} + \frac{\ln x}{\cos^2 x} \right).$$

i. DERIVIRANJE RAZLIČITIH SLOŽENIH FUNKCIJA

Zadaci

U zadacima 394 do 413 uklj. izračunaj derivacije zadanih funkcija.

$$394. y = \log(x - \cos x).$$

$$y' = \frac{M}{x - \cos x} (1 + \sin x) = \frac{1 + \sin x}{(x - \cos x) \ln 10}.$$

[Vidi (77a)]

$$395. y = 5 \lg \frac{x}{5} + \lg \frac{\pi}{8}.$$

$$y' = 5 \cdot \frac{1}{\frac{x}{5}} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{5}} = \sec^2 \frac{x}{5}.$$

$$396. y = e^{2x+3} \cdot \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right).$$

$$y' = e^{2x+3} \cdot (2x - 1) + \left(x^2 - x + \frac{1}{2} \right) e^{2x+3} \cdot 2 = e^{2x+3} (2x - 1 + 2x^2 - 2x + 1) = 2x^2 e^{2x+3}.$$

$$397. y = \frac{1}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x}{1-x^2}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{x^2}{(1-x^2)^2}} \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{(1-x^2) + 2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} \cdot \frac{1+x^2}{1+x^2+x^4}.$$

$$398. y = \arcsin \sqrt{\sin x}.$$

$$y' = \frac{1}{\sqrt{1-\sin x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x - \sin^2 x}}.$$

$$399. y = \log_3(x^2 - \sin x).$$

$$y' = \frac{1}{x^2 - \sin x} \cdot \log_3 e \cdot (2x - \cos x) = \frac{2x - \cos x}{(x^2 - \sin x) \cdot \ln 3}.$$

$$400. y = \ln \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$y' = \frac{x + \sqrt{1-x^2}}{x^2} \cdot \frac{x \cdot \left(1 - \frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right) - (x + \sqrt{1-x^2})}{x^2} = \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{x(\sqrt{1-x^2} - x) - x\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{x + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{-x\sqrt{1-x^2} - 1 + x^2}{x\sqrt{1-x^2}}.$$

$$y' = \frac{x^{\lg x} \sin x}{x \cos x} + \frac{x^{\lg x} x \ln x}{x \cos^2 x}$$

$$y' = \frac{x^{\lg x}}{x} \left(\frac{2 \sin x \cos x}{2 \cos^2 x} + \frac{\ln x^x}{\cos^2 x} \right)$$

$$y' = \frac{x^{\lg x - 1} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \ln x^x \right)}{\cos^2 x}.$$

$$388. y = x^{\ln x}.$$

$$[2x^{\ln x - 1} \ln x].$$

$$389. y = x^{\frac{1}{x}}.$$

$$\left[x^{\frac{1}{x} - 2} (1 - \ln x) \right].$$

Upita

Ako zadana funkcija ima oblik produkta od više faktora, računanje derivacije te funkcije možemo kadšto pojednostavniti tako, da funkciju prije deriviranja logaritmiramo po bazi e .

Zadaci

U zadacima 390 do 393 uklj. izračunaj derivacije zadanih funkcija, prethodno izvršivši logaritmiranje tih funkcija.

390. Riješimo na taj način zadatak 295.

$$y = (x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)$$

$$\ln y = \ln(x^2 - 1) + \ln(x^2 - 4) + \ln(x^2 - 9).$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{2x}{x^2 - 1} + \frac{2x}{x^2 - 4} + \frac{2x}{x^2 - 9}.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 9) + (x^2 - 1)(x^2 - 4)}{(x^2 - 1)(x^2 - 4)(x^2 - 9)}.$$

$$y' = 2x(3x^4 - 28x^2 - 49).$$

$$391. y = \sqrt[3]{\frac{x(1+x^2)}{(1-x)^2}}.$$

$$\left[\frac{-x^3 + 3x^2 - x - 1}{3\sqrt[3]{x^2(1+x^2)^2(1-x)^5}} \right].$$

$$392. y = \frac{x(x^2 + 1)}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

$$\left[\frac{1 + 3x^2 - 2x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} \right].$$

$$393. y = \frac{(1+x)^2}{(2+x)^3(3+x)^4}.$$

$$\left[-\frac{(x+1)(5x^2+14x+5)}{(x+2)^4(x+3)^5} \right].$$

401. $y = 10^x \lg x$.

$$y' = 10^x \lg x \cdot \ln 10 \left(\frac{x}{\cos^2 x} + \lg x \right).$$

402. $y = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$.

$$\begin{aligned} y' &= e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-(1+x)-(1-x)}{(1+x)^2} = e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{-2}{(1+x)^2} = \\ &= -e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} \cdot \frac{1}{(1+x)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{e^{\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

403. $y = e^x \sin x \cos^3 x$.

$$\ln y = x \ln e + \ln \sin x + 3 \ln \cos x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} - 3 \frac{\sin x}{\cos x} = 1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x \mid \cdot y$$

$$y' = e^x \sin x \cos^3 x (1 + \operatorname{ctg} x - 3 \operatorname{tg} x).$$

Riješi isti zadatak a da ne logaritmiraš y .

404. $y = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}}$.

$$\ln y = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot \ln \operatorname{tg} 2x.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} 2x} \cdot \frac{2}{\cos^2 2x} - \ln \operatorname{tg} 2x \cdot \frac{1}{2 \sin^2 x}.$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = 2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot \frac{\cos 2x}{\sin 2x} \cdot \frac{1}{\cos^2 2x} - \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2 \sin^2 x}$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\sin 4x} - \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2 \sin^2 x} \mid \cdot y$$

$$y' = (\operatorname{tg} 2x)^{\operatorname{ctg} \frac{x}{2}} \left(\frac{4 \operatorname{ctg} \frac{x}{2}}{\sin 4x} - \frac{\ln \operatorname{tg} 2x}{2 \sin^2 x} \right).$$

405. $y = \arccos \sqrt{1-3x}$.

$$\left[\frac{3}{2\sqrt{3x-9x^2}} \right].$$

406. $y = \sqrt{x^2+1} - \ln \left(\frac{1}{x} + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} \right).$

$$\left[\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \right].$$

407. $y = \cos x \cdot \sqrt{1+\sin^2 x}$

$$\left[-\frac{2 \sin^3 x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} \right].$$

408. $y = x^2 \arccos \operatorname{tg} x^3$.

$$\left[3x^2 \arccos \operatorname{tg} x^3 + \frac{3x^5}{1+x^6} \right].$$

409. $y = \frac{1}{4} \ln \frac{1+x}{1-x} - \frac{1}{2} \arccos \operatorname{tg} x$.

$$\left[\frac{x^2}{1-x^4} \right].$$

410. $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

$$\left[\frac{x}{2 \ln x} \cdot \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \ln 2 \right].$$

411. $y = \ln(x \sin x \sqrt{1-x^2})$.

$$\left[\frac{1}{x} - \frac{x}{1-x^2} + \operatorname{ctg} x \right].$$

412. Pokaži da funkcija $y = \ln \frac{1}{1+x}$ zadovoljava jednačbu:

$$xy' + 1 = e^y.$$

Računamo y' : $y' = -(1+x) \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{1+x}.$

Uvrštenje y' i y u zadanu jednačbu daje:

$$-\frac{x}{1+x} + 1 = e^{\ln \frac{1}{1+x}}.$$

Uzevši u obzir da je: $\frac{\ln \frac{1}{1+x}}{e^{\frac{1}{1+x}}} = \frac{1}{1+x},$

jer logaritmirajući tu jednakost dobivamo identitet $\ln \frac{1}{1+x} \equiv \ln \frac{1}{1+x},$

slijedi

$$\frac{1}{1+x} \equiv \frac{1}{1+x}.$$

413. Pokaži da funkcija:

$$y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$$

zadovoljava jednačbu $(1-x^2)y' - xy = 1$.

k. RAČUNANJE DERIVACIJA FUNKCIJA INVERZNIH
S OBLIROM NA ZADANE

Formule

$$\begin{aligned} D_y x(y) &= \frac{1}{D_x y(x)} \\ D_x y(x) &= \frac{1}{D_y x(y)} \end{aligned} \quad (109)$$

To znači: derivacija inverzne funkcije jednaka je recipročnoj vrijednosti derivacije zadane funkcije.

Zadaci

414. Zadana je funkcija $x(y) = e^{\arcsin y}$.
Izračunaj derivaciju inverzne funkcije, tj. $D_x y(x)$ izrazivši je sa y , a zatim sa x .
Zadanu funkciju deriviramo po y , tj. računamo

$$D_y x(y) = \frac{e^{\arcsin y}}{\sqrt{1-y^2}}.$$

Prema (109):

$$D_x y(x) = \frac{\sqrt{1-y^2}}{e^{\arcsin y}}.$$

Iz $x = e^{\arcsin y}$ slijedi:

$$\ln x = \arcsin y, \text{ jer je } \ln e = 1,$$

a odatle je:

$$y = \sin(\ln x).$$

$$\text{Uvrštenje u (a) daje: } D_x y(x) = \frac{\sqrt{1-\sin^2(\ln x)}}{e^{\arcsin(\sin \ln x)}} = \frac{\cos(\ln x)}{x},$$

jer je prema (73a) $\arcsin(\sin \ln x) = \ln x$, a $e^{\ln x} = x$. Načini pokus!

415. $t = \arcsin 2^s$. Izračunaj $D_t s(t)$, izrazivši je sa s , a zatim sa t .

$$D_s t(s) = \frac{2^s \cdot \ln 2}{\sqrt{1-2^{2s}}}.$$

$$D_t s(t) = \frac{\sqrt{1-2^{2s}}}{2^s \cdot \ln 2}.$$

Prema (109):

$$\text{Iz } t = \arcsin 2^s \text{ slijedi } \sin t = 2^s.$$

$$\text{Uvrštenje u (a) daje: } D_t s(t) = \frac{\sqrt{1-\sin^2 t} \operatorname{ctg} t}{\sin t \cdot \ln 2} = \frac{\cos t}{\ln 2}. \text{ Načini pokus!}$$

416. $s = t \cdot e^{-t}$. Izrazi $D_s t(s)$ sa t .

$$D_t s(t) = -t e^{-t} + e^{-t} = e^{-t}(1-t).$$

Prema (109): $D_s t(s) = \frac{1}{e^{-t}(1-t)} = \frac{e^t}{1-t}.$

417. Pokaži da za funkciju $y = \ln(x^2 - 1)$ vrijedi jednakost $D_x y \cdot D_y x = 1$.

418. $t = 1 - 2s + s^2$. Odradi $D_t s(t)$, izrazivši je sa t .

$$\left[\text{Iz } t = (s-1)^2 \text{ slijedi } s-1 = \pm \sqrt{t}; \pm \frac{1}{2\sqrt{t}} \right].$$

419. $y = \frac{1-x^4}{1+x^4}$. Izrazi $D_y x(y)$ sa x .

$$\left[\frac{-8x^3}{(1+x^4)^2} \right].$$

1. RAČUNANJE DERIVACIJA VIŠIH REDOVA

Uputa

Derivacija drugog reda ili druga derivacija y'' funkcije y jest derivacija prve derivacije y' te funkcije, treća derivacija y''' jest derivacija druge derivacije y'' te funkcije itd.

Zadaci

U zadacima 420 do 427 uklj. izračunaj za zadane funkcije derivacije viših redova u zadanim tačkama.

420. $f(x) = (x+10)^6$; $f'''(2) = ?$

$$f'(x) = 6(x+10)^5; \quad f''(x) = 30(x+10)^4$$

$$f'''(x) = 120(x+10)^3$$

$$f'''(2) = 120 \cdot 12^3 = 12^4 \cdot 10 = 207360.$$

421. $y = x^6 - 4x^3 + 4$; $y^{(IV)}(1) = ?$

$$y' = 6x^5 - 12x^2; \quad y'' = 30x^4 - 24x; \quad y''' = 120x^3 - 24; \quad y^{(IV)} = 360x^2;$$

$$y^{(IV)}(1) = 360.$$

422. $\rho(\varphi) = a \sin 2\varphi$; $\rho^{(IV)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = ?$

$$\rho' = 2a \cos 2\varphi; \quad \rho'' = -4a \sin 2\varphi$$

$$\rho''' = -8a \cos 2\varphi; \quad \rho^{(IV)} = 16a \sin 2\varphi.$$

$$\rho^{(IV)}\left(\frac{\pi}{12}\right) = 16a \sin \frac{\pi}{6} = 8a.$$

423. $y = x^3 \ln x$; $y^{(IV)} = ?$

$$y' = \frac{x^3}{x} + 3x^2 \ln x; \quad y'' = 2x + 3(x + 2x \ln x) = 5x + 6x \ln x;$$

$$y''' = 5 + 6(1 + \ln x) = 11 + 6 \ln x$$

$$y^{(IV)} = \frac{6}{x}.$$

424. $y = x^x$; $y'' = ?$

$$\ln y = x \cdot \ln x$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x \mid \cdot y$$

$$y' = x^x (1 + \ln x) \quad (a)$$

$$y'' = x^x \cdot \frac{1}{x} + (1 + \ln x) \cdot y' = \text{prema (a)} = x^x \cdot \frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 x^x = x^x \left[\frac{1}{x} + (1 + \ln x)^2 \right].$$

425. $f(x) = \arctg x$; $f''(1) = ?$

$$\left[-\frac{1}{2} \right].$$

426. $y = e^{2x-1}$; $y''(0) = ?$

$$\left[\frac{4}{e} \right].$$

427. $y = \frac{1}{1-x}$; $y^{(V)} = ?$

$$\left[\frac{5!}{(1-x)^6} \right].$$

428. Prema formuli (130) $P_n^{(n)}(x) = a_n \cdot n!$ sedma derivacija polinoma $P_7(x) = 3x^7 - 5x^6 - 10x^3 + x - 1$ glasi $P_7^{(7)} = 3 \cdot 7!$. Pokaži to!

429. Pokaži da funkcija:

$$y = \cos e^x + \sin e^x$$

zadovoljava jednačbu

$$y'' - y' + y e^{2x} = 0.$$

Računamo:

$$y' = -e^x \sin e^x + e^x \cos e^x$$

$$y'' = -e^{2x} \sin e^x - e^x \sin e^x - e^{2x} \cos e^x + e^x \cos e^x.$$

Uvrštenje vrijednosti dobivenih za y' i y'' a također zadane vrijednosti y u jednačbu daje nulu.

430. Pokaži da funkcija:

$$s = A \sin(mt + n) + B \cos(mt + n),$$

gdje su A, B, m i n konstante, zadovoljava jednačbu:

$$s''(t) + m^2 \cdot s(t) = 0.$$

m. DERIVIRANJE FUNKCIJA ZADANIH IMPLICITNO, TJ. U OBLIKU $F(x, y) = 0$.

Uputa

Tražimo li derivaciju y' funkcije y zadane implicitno, tj. u obliku

$$F(x, y) = 0, \quad (a)$$

1) deriviramo po x lijevu stranu jednačbu (a) pamteći da je y funkcija od x , a rezultat deriviranja izjednačujemo s nulom,

2) tako dobivenu jednačbu rješavamo po y' , da dobijemo traženu derivaciju u obliku

$$y' = f(x, y). \quad (b)$$

Tražimo li i drugu derivaciju y'' , deriviramo jednačbu (b), opet uzimajući u obzir da je y funkcija od x , a u dobiveni rezultat uvrštavamo vrijednost y' iz (b). Slično se postupa pri računanju derivacija trećeg i viših redova funkcije $F(x, y) = 0$.

Zadaci

U zadacima 431 do 436 uklj. izračunaj derivacije zadanih implicitnih funkcija.

431. $x^3 y - 3x^2 y^2 + 5y^3 - 3x + 4 = 0$; $y' = ?$

Kako vidimo, prva dva člana predložuju produkt pa ih deriviramo po pravilu produkta (97), pamteći da je y funkcija od x ; to znači: treba primijeniti pravilo (124) za deriviranje složenih funkcija.

$$x^3 \cdot y' + y \cdot 3x^2 - 3(x^2 \cdot 2y y' + y^2 \cdot 2x) + 15y^2 \cdot y' - 3 = 0,$$

ili

$$x^3 y' + 3x^2 y - 6x^2 y y' - 6xy^2 + 15y^2 y' - 3 = 0.$$

Odatle:

$$y'(x^3 - 6x^2 y + 15y^2) = 3 - 3x^2 y + 6xy^2$$

$$y' = \frac{3 - 3x^2 y + 6xy^2}{x^3 - 6x^2 y + 15y^2}.$$

Kako vidimo, y' dobivamo u obliku $f(x, y)$.

432. $e^{x+y} = xy$; odredi y'' u tački $T_1(2, 3)$.

$$e^{x+y}(1+y') - (xy' + y) = 0.$$

Uvrštenje $e^{x+y} = xy$ daje:

$$xy(1+y') - xy' - y = 0, \quad \text{ili} \quad xy + xy y' - xy' - y = 0.$$

Odatle:

$$y' = \frac{y - xy}{xy - x} = \frac{y(x-1)}{x(y-1)}. \quad (a)$$

Sada računamo y'' :

$$y'' = \frac{(xy - x)(y' - xy' - y) - (y - xy)(xy' + y - 1)}{(xy - x)^2}.$$

Nakon uredjenja dobivamo:

$$y'' = \frac{x y' (x-1) - y (y-1)}{x^2 (y-1)^2}.$$

Uvrštenje (a) daje

$$y'' = -\frac{y [(x-1)^2 + (y-1)^2]}{x^2 (y-1)^3},$$

a u $T_1(2, 3)$: $y''(2, 3) = -\frac{3(1+4)}{8 \cdot 8} = -\frac{15}{64}.$

433. $y = \lg(x+y)$; $y''' = ?$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x+y)} \cdot (1+y').$$

Kako je: $\frac{1}{\cos^2(x+y)} = 1 + \tan^2(x+y) = 1 + y'^2$, dobivamo:

$$y' = (1 + y'^2)(1 + y') \quad \text{ili} \quad y' = 1 + y'^2 + y' \cdot y',$$

pa je:

$$y' = -\frac{1+y'^2}{y'^2} = -\left(\frac{1}{y'^2} + 1\right). \quad (a)$$

Odatle: $y'' = +\frac{2y'}{y^3}.$

Uvrštenje (a) daje:

$$y'' = -\frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{y'^2} + 1\right) = -\frac{2}{y^3} - \frac{2}{y^5} = -\frac{2}{y^5} (1 + y'^2). \quad (b)$$

Odatle:

$$y''' = \frac{10}{y^6} y' + \frac{6}{y^4} y' = \frac{2}{y^6} y' (5 + 3y'^2).$$

Uvrštenje (a) daje:

$$y''' = -\frac{2}{y^6} \left[\frac{1}{y'^2} + 1 \right] (5 + 3y'^2) \quad \text{ili} \quad y''' = -\frac{2}{y^6} (5 + 8y'^2 + 3y'^4).$$

434. $7x^3y^2 + 2xy^3 - 5xy - x + 2y - 10 = 0$; $y' = ?$

$$\left[\frac{21x^2y^2 + 2y^3 - 5y - 1}{-14x^2y - 6xy^2 + 5x - 2} \right].$$

435. $y^3 + x^3 - 3axy = 0$; $y'' = ?$

$$\left[-\frac{2a^2xy}{(y^2 - ax)^3} \right].$$

436. $y = \sin(x+y)$; $y'' = ?$

$$\left[-\frac{y}{[1 - \cos(x+y)]^2} \right].$$

437. U zadatku 317 odredili smo jednadžbu tangente na elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ u tački $T_1(x_1, y_1)$ krivulje, određivši y' iz eksplicitnog oblika jednadžbe elipse. Sad možemo isti zadatak riješiti jednostavnije, računajući y' neposredno iz zadanog implicitnog oblika jednadžbe:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

$$2b^2x + 2a^2yy' = 0.$$

Odatle: $y' = -\frac{b^2x}{a^2y},$

a u $T_1(x_1, y_1)$;

$$y'_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Riješi na taj način zadatke 318, 319 i 320.

438. Odredi jednadžbu tangente na krivulju:

$$x^3 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0$$

u tački $T_1(1; 1)$.

$$[4x - 3y - 1 = 0].$$

C. Teoremi diferencijalnog računa

a. ROLLEOV TEOREM

Ako je funkcija $f(x)$

1) jednoznačna i neprekinuta u zatvorenom intervalu $[a, b]$,

2) ima u svakoj tački tog intervalu konačnu derivaciju $f'(x)$,

3) poništava se na početku i na kraju intervala $[a, b]$, tj. $f(a) = f(b) = 0$, ili ima na krajevima intervala istu vrijednost, tj. $f(a) = f(b)$, tada postoji u nutrinu intervala $[a, b]$ bar jedna tačka apscise $x=c$ u kojoj se poništava prva derivacija funkcije, tj.

$$f'(c) = 0, \text{ gdje je } a < c < b.$$

Zadaci

U zadacima 439 do 442 uklj. pokazi da zadane funkcije zadovoljavaju sva tri uvjeta Rolleova teorema u zadanim intervalima i odredi tačke u kojima se poništavaju derivacije tih funkcija.

439. $y = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ u intervalu $[-1, 2]$.

1) Zadana funkcija je polinom, koji je jednoznačan i neprekinut za sve x , pa dakle i u zadanom intervalu $[-1, 2]$.

2) $y' = 3x^2 + 8x - 7$ također je polinom, koji je konačan u svim tačkama, pa dakle i u zadanom intervalu.

3) Zadana funkcija se poništava na krajevima zadanog intervalu, jer je:

$$y(-1) = -1 + 4 - 7 - 10 = 0$$

$$y(2) = 8 + 16 - 14 - 10 = 0.$$

Zadana funkcija u zadanom intervalu odgovara svim uvjetima Rolleova teorema.

U intervalu $[-1, 2]$ odredimo tačku u kojoj je $y' = 0$:

iz $3x^2 + 8x - 7 = 0$ slijedi: $x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{148}}{6} = \frac{1}{3}(-4 \pm 6,1)$

$$x_1 \approx 0,7; \quad x_2 \approx -3,4.$$

Druge tačka leži izvan zadanog intervala.

440. $y = \ln \sin x$ u intervalu $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

1) Zadana funkcija je definirana samo za $\sin x > 0$, jednoznačna je i neprekidna, osim nultačka $\sin x$, tj. za $x = k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$), a te tačke leže izvan zadanog intervala.

2) $y' = \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x = \cot x$ postoji u svakoj tački zadanog intervala i konačna je.

3) Zadana funkcija ima na krajevima intervala istu vrijednost:

$$y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \ln \sin \frac{\pi}{6} = \ln \frac{1}{2},$$

$$y\left(\frac{5\pi}{6}\right) = \ln \sin 150^\circ = \ln \cos 60^\circ = \ln \frac{1}{2}.$$

Funkcija zadovoljava uvjete Rolleova teorema.

$y' = 0$ kad je $\cot x = 0$, tj. u tački $x = \frac{\pi}{2}$ zadanog intervala.

441. $y = 4^{\sin x}$ u intervalu $[0, \pi]$.

$$[D_a, u \ x = \frac{\pi}{2}].$$

442. $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ u intervalu $[1, 2]$.

$$[D_a, u \ x = \frac{3}{2}].$$

443. Zašto za funkciju $y = \frac{2-x^2}{x^4}$ u intervalu $[-1, 1]$ ne vrijedi Rolleov teorem, premda je $y(-1) = y(1) = 1$?

Nije ispunjena već prva pretpostavka Rolleova teorema, jer u zatvorenom intervalu $[-1, 1]$ i to za $x=0$, ima funkcija pol četvrtog reda, pa je prekinuta u toj tački.

444. Ne računajući derivaciju funkcije:

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

odredi koliko realnih korijena ima jednačba $f'(x) = 0$ i navedi intervale u kojim leže ti korijeni?

Zadana funkcija predložuje polinom četvrtog stupnja, koji ima 4 nultačke: $x_1=1, x_2=2, x_3=3$ i $x_4=4$, pa u intervalima $[1, 2]$, $[2, 3]$ i $[3, 4]$ odgovara svim uvjetima Rolleova teorema. U svakom od tih triju intervala leži po jedna tačka u kojoj je $f'(x) = 0$.

b. LAGRANGEOV TEOREM SREDNJE VRIJEDNOSTI

Ako je funkcija $f(x)$:

1) jednoznačna i neprekidna u zatvorenom intervalu $[a, b]$,

2) ima u svakoj tački u nutrinu tog intervala određenu konačnu derivaciju, tada vrijedi za tu funkciju bar u jednoj tački apscise c , koja leži u nutrinu intervala $[a, b]$, jednakost:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \quad (133)$$

gdje je $a < c < b$, dok tačnije ta tačka apscise c nije određena.

U drugom obliku ta jednakost glasi:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(\xi), \quad (133a)$$

gdje je: $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

Zadaci

U zadacima 445 do 447 uklj. napiši teorem srednje vrijednosti za zadane funkcije u zadanim intervalima, uz pretpostavku da te funkcije odgovaraju uvjetima Lagrangeova teorema.

445. $y = x(1 - \ln x)$ u intervalu $[a, b]$.

Uzevi u obzir da je $y' = -x \cdot \frac{1}{x} + 1 - \ln x = -\ln x$ dobivamo prema (133):

$$\frac{b(1 - \ln b) - a(1 - \ln a)}{b - a} = -\ln c, \quad \text{ili} \quad \frac{a(1 - \ln a) - b(1 - \ln b)}{a - b} = (b - a) \ln c,$$

gdje je $a < c < b$.

446. $y = \sin 3x$ u intervalu $[x_1, x_2]$.

Kako je $y' = 3 \cos 3x$, dobivamo:

$$\frac{\sin 3x_2 - \sin 3x_1}{x_2 - x_1} = 3 \cos 3c, \quad \text{ili} \quad \frac{\sin 3x_2 - \sin 3x_1 - 3(x_2 - x_1) \cos 3c}{x_2 - x_1} = 0,$$

gdje je $x_1 < c < x_2$.

447. $y = \arcsin 2x$ u intervalu $[x_0, x_0 + \Delta x]$.

$y' = \frac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$ pa prema (133a) dobivamo:

$$\frac{\arcsin [2(x_0 + \Delta x)] - \arcsin 2x_0}{\Delta x} = \frac{2}{\sqrt{1-4\xi^2}},$$

$$\arcsin [2(x_0 + \Delta x)] - \arcsin 2x_0 = \frac{2\Delta x}{\sqrt{1-4\xi^2}},$$

gdje je $x_0 < \xi < x_0 + \Delta x$.

U zadacima 448 do 451 uklj. ispitaj da li zadane funkcije u zadanim intervalima odgovaraju uvjetima Lagrangeova teorema i odredi vrijednosti c , odnosno ξ , za koje je teorem ispunjen.

448. $f(x) = \arcsin x$ u intervalu $[-1, 1]$.

Zadana funkcija u zadanom intervalu odgovara uvjetima Lagrangeova teorema, jer je jednoznačna i neprekidna, a njena je derivacija $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ određena i konačna u

nutrini intervala $[-1, 1]$, dok na krajevima intervala, tj. za $x = \pm 1$, ne postoji, a to nije uvjet za teorem.

Određimo tačku apscise c .

Prema (133)

$$\frac{\arcsin 1 - \arcsin(-1)}{1 - (-1)} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}}.$$

ili

$$\frac{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-c^2}},$$

a odatle je:

$$\sqrt{1-c^2} = \frac{2}{\pi} \quad \text{i} \quad c_{1,2} = \pm \sqrt{1 - \frac{4}{\pi^2}} \approx \pm 0,77,$$

dok je $f(\pm c) \approx \pm 0,88$.

Geometrijski to znači da su tangente povučene u tačkama $c_{1,2} (0,77; \pm 0,88)$ krivulje paralelne sa sekantom AB . Vidi sl. 60.

449. $f(x) = x^3$ u intervalu $[-1, 1]$ uz grafički prikaz funkcije, tangenata i sekante.

$$\left[c_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{3} \right]$$

$$[c = 1].$$

450. $f(x) = x + \frac{1}{x}$ u intervalu $\left[\frac{1}{2}, 2 \right]$ uz grafični prikaz.

451. Pomoću teorema srednje vrijednosti odredi za funkciju $y = x^2 - 4x + 3$ u intervalu $[1; 4]$ diralište i jednadžbu tangente koja je paralelna sa sekantom, i sve prikaži grafički.

$$\left[D \left[\frac{5}{2}; -\frac{3}{4} \right]; y = x - \frac{13}{4} \right]$$

U zadacima 452 i 453 ocijeni pomoću Lagrangeova teorema vrijednosti zadanih veličina, tj. odredi interval u kojem leži dotična vrijednost.

452. $\ln(1+e)$.

Funkcija $f(x) = \ln x$ zadovoljava za $x > 0$ uvjete Lagrangeova teorema.

Kako je $f'(x) = \frac{1}{x}$, za interval $[e, e+1]$ dobivamo prema (133): $\frac{\ln(e+1) - \ln e}{(e+1) - e} = \frac{1}{c}$,

ili $\ln(e+1) = 1 + \frac{1}{c}$, gdje je $e < c < e+1$

ili $\ln(e+1) = 1 + \frac{1}{c} < 1 + \frac{1}{e}$, jer je $c > e$,

ali $\ln(e+1) = 1 + \frac{1}{c} > 1 + \frac{1}{e+1}$, jer je $c < e+1$,

pa je: $1 + \frac{1}{e+1} < \ln(e+1) < 1 + \frac{1}{e}$.

Uvrštenje $e \approx 2,7$ daje:

$$1 + \frac{1}{3,7} < \ln(e+1) < 1 + \frac{1}{2,7}, \quad \text{ili} \quad \frac{1,27 < \ln(e+1) < 1,37}{1,27 < \ln(e+1) < 1,37}.$$

453. $\arctg 1,5$. Uzmi interval $[1; 1,5]$.

$$[0,947 < \arctg 1,5 < 1,025].$$

D. Određivanje vrijednosti neodređenih oblika. L' Hospitalovo pravilo.

Znamo već da određivanje limesa funkcije uvrštenjem granične vrijednosti argumenta u zadanu funkciju daje kadšto neodređenosti oblika $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, 0^0 , 1^∞ i ∞^0 .

U zadacima 45 do 133 uklj. pokazali smo elementarne načine određivanja limesa funkcija u tim slučajevima. Mnogo brže i jednostavnije rješava se taj problem pomoću L' Hospitalova pravila.

a. NEODREĐENI OBLICI $\frac{0}{0}$ i $\frac{\infty}{\infty}$.

Formule

Ako je $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$,

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \text{itd.} \quad (134)$$

dok ne dobijemo konačnu ili beskonačnu vrijednost nakon uvrštenja $x = a$.

Zadaci

U zadacima 454 do 467 uklj. izračunaj prema (134) granične vrijednosti zadanih funkcija.

454. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$.

Uvrštenje $x = 0$ daje $\frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$.

Prema (134):

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{\cos x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$455. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x}.$$

Uvrštenje daje $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \text{uvrštenje daje opet } \frac{\infty}{\infty}, \text{ deriviramo drugi put} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

$$456. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)}.$$

Uzevši u obzir da $2 \arctg x \rightarrow \pi$ kad $x \rightarrow +\infty$ i da je $\ln 1 = 0$, tj. da imamo oblik $\frac{0}{0}$, računamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\ln \left(1 + \frac{1}{x}\right)} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \text{uredimo} = \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x}{1 + x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 1}{2x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right) = 2. \end{aligned}$$

$$457. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - b^x}{x \sqrt{1-x^2}}.$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{-2x + \sqrt{1-x^2}} = \text{uredimo} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a^x \ln a - b^x \ln b) \sqrt{1-x^2}}{-x + 1 - x^2} = \frac{\ln a - \ln b}{1} = \ln \frac{a}{b}. \end{aligned}$$

$$458. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 x} - \cos x}{1 - \cos x} = \text{uredimo} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{\cos^2 x - \cos^3 x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x \sin x}{-2 \cos x \sin x + 3 \cos^2 x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \cos^2 x}{-2 \cos x + 3 \cos^2 x} = 3. \end{aligned}$$

$$459. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin \frac{\pi x}{2}} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{-\cos \frac{\pi x}{2}} = \infty. \end{aligned}$$

$$460. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\arcsin 5x} =$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{1+4x^2}}{\frac{5}{5x+0}} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-25x^2}}{1+4x^2} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

$$461. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \text{prema poznatoj goniometrijskoj formuli} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}, \text{ a taj}$$

limes ne postoji. Odredimo traženi limes elementarnim putem:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} &= \text{brojnik i nazivnik podijelimo sa } x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = 1, \text{ jer je } |\sin x| \leq 1. \end{aligned}$$

Taj slučaj nije u proturječnosti s L' Hospitalovim pravilom, jer to pravilo kaže da ako omjer derivacija teži k nekom limesu, tom limesu teži i omjer funkcija, ali obratno ne vrijedi.

$$462. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \cos x}{x + \sin x}.$$

Pokaži da L' Hospitalovo pravilo ne možemo primijeniti na zadani primjer (omjer derivacija nema limesa), pa izračunaj limes na drugi način.

$$463. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^5} \quad [\infty].$$

$$464. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x} \quad [1].$$

$$465. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{\pi \operatorname{tg} 5x} \quad [5].$$

$$466. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\cos x \ln(x-a)}{\ln(e^x - e^a)} \quad [\cos a].$$

$$467. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3} \quad \left[\frac{1}{3}\right].$$

Riješi po L' Hospitalovu pravilu i primjere navedene u zadacima 45 do 96 uklj.

b. NEODREĐENI OBLICI $0 \cdot \infty$ i $\infty - \infty$

Uputa

Zadanu funkciju prikaži u obliku razlomka, da svedeš neodređenost na pređašnja dva oblika $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$, pa možeš primijeniti L' Hospitalovo pravilo. Kod oblika $\infty - \infty$ svodi-mo funkciju na zajednički nazivnik ili izlučimo jedan član funkcije.

Zadaci

U zadacima 468 do 481 uklj. odredi granične vrijednosti zadanih funkcija.

$$\begin{aligned}
 468. \lim_{x \rightarrow \infty} [(\pi - 2 \arctg x) \ln x] &= \\
 &= \text{imamo oblik } 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\frac{1}{\ln x}} = \text{sad imamo oblik } \frac{0}{0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{1+x^2}}{\frac{-2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2} + 1}} = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x} + 1} = 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = 4 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1} = 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 469. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x &= \\
 &= 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{x - \frac{\pi}{2}}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{1}{\sin^2 x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin^2 x = 1.
 \end{aligned}$$

Da smo zadanu funkciju prikazali u obliku $\frac{\operatorname{tg} x}{\frac{1}{x - \frac{\pi}{2}}}$, dobili bismo isti limes, ali uz znatno duže računanje.

$$\begin{aligned}
 470. \lim_{x \rightarrow 1} [\ln x \ln(x-1)] &= \\
 &= 0 \cdot (-\infty) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x-1}}{\frac{-1}{x \ln^2 x}} = \\
 &= -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln^2 x}{1-x} = -\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 1} (x \ln x) = -2 \cdot 0 = 0.
 \end{aligned}$$

$$471. \lim_{x \rightarrow 1} \left[(1-x) \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \right] = \left[\frac{2}{\pi} \right].$$

$$472. \lim_{x \rightarrow 0} (\arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x) = [1].$$

$$473. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \cdot \sin \frac{a}{x} \right) = [a].$$

$$474. \lim_{x \rightarrow +0} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}} \right) = [+ \infty].$$

$$475. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) =$$

= imamo oblik $\infty - \infty$, pa zadanu funkciju svedimo na zajednički nazivnik =

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{(x-1) \frac{1}{x} + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x-1 + x \ln x} = \frac{0}{0} = \\
 &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{1 + x + \ln x} = \frac{1}{2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 476. \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - x^2) &= \\
 &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x^2}{e^x} \right) = \\
 &= \text{prema zadatku 455} = +\infty \cdot (1-0) = +\infty.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 477. \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{\ln x} \right) &= \\
 &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-1}{1} = -1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 478. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - \sqrt{x}) &= \\
 &= \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\sqrt{x} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \right) = -\infty, \\
 \text{jer je} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} &= +\infty, \text{ a } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} - 1 = \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = -1.
 \end{aligned}$$

$$479. \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{x}{x-1} \right].$$

$$\left[-\frac{1}{2} \right].$$

$$480. \lim_{t \rightarrow 0} \left[\frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \right].$$

$$[0].$$

$$481. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{5}{x^5-1} - \frac{7}{x^7-1} \right].$$

$$[1].$$

Riješi pomoću L' Hospitalova pravila i zadatke 97 do 109 uklj.

c. NEODREĐENI OBLICI 0^0 , 1^∞ i ∞^0

Uputa

Označivši zadanu funkciju sa y logaritmiramo je po bazi e . Na lijevoj strani jednakosti dobit ćemo pri prijelazu na limes izraz $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y)$, koji kasnije pišemo u obliku $\ln (\lim y)$, uz pretpostavku da je funkcija y neprekidna [vidi (87b)], dok desnu stranu svodimo na oblik $\frac{0}{0}$ ili $\frac{\infty}{\infty}$.

Zadaci

U zadacima 482 do 490 uklj. odredi granične vrijednosti zadanah funkcija.

$$482. \lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x}.$$

Kad $x \rightarrow 0$ dobivamo neodređeni oblika 0^0 . Stavimo: $y = x^{\sin x}$ i logaritmiramo:

$$\ln y = \sin x \cdot \ln x.$$

$$\text{Imamo oblik } 0 \cdot (-\infty), \text{ kad } x \rightarrow 0, \text{ ili: } \ln y = \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \frac{-\infty}{\infty} \text{ kad } x \rightarrow 0.$$

Prelazimo na limes:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{0}{0} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{-x \sin x + \cos x} = 0.$$

Dobili smo $\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = 0$ ili $\ln (\lim y) = 0$, jer je $\ln y = \sin x \ln x$ neprekidna funkcija.

Po definiciji logaritma: $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$ ili $\lim_{x \rightarrow 0} x^{\sin x} = 1$.

$$483. \lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}.$$

Kada $x \rightarrow 0$ dobivamo oblik 1^∞ . Logaritmiramo $y = (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$:

$$\ln y = \frac{1}{x} \ln (1+x^2) = \frac{\ln (1+x^2)}{x} = \frac{0}{0} \text{ kad } x \rightarrow 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{1+x^2} = 0. \quad \ln (\lim y) = 0, \text{ pa je } \lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x^2)^x = 1.$$

$$484. \lim_{x \rightarrow a} \left[2 - \frac{x}{a} \right]^{\frac{\pi x}{2a}}.$$

Kad $x \rightarrow a$ dobiva se oblik 1^∞ .

$$y = \left[2 - \frac{x}{a} \right]^{\frac{\pi x}{2a}}; \ln y = \frac{\pi x}{2a} \cdot \ln \left[2 - \frac{x}{a} \right], \text{ ili } \ln y = \frac{\ln \left[2 - \frac{x}{a} \right]}{\frac{2a}{\pi x}} = \frac{0}{0} \text{ kad } x \rightarrow a.$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{1}{2-a} \cdot \frac{1}{x}}{\frac{2a}{\pi x}} = \frac{1}{2-a} \cdot \frac{1}{2a} = \frac{1}{2(2-a)} = \frac{1}{4-2a}.$$

$$\ln (\lim y) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{4-2a} = \frac{2}{\pi(4-2a)} = \frac{1}{\pi(2-a)} = e^{\frac{1}{\pi(2-a)}}.$$

$$485. \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{a}{x} \right]^x.$$

Kad $x \rightarrow \infty$ dobivamo neodređenost oblika 1^∞ .

$$y = \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x; \ln y = x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x \ln \left(1 + \frac{a}{x} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{a}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{a}{x}}{1 - \frac{a}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a}{x-a} = a.$$

$$\ln (\lim y) = a; \lim_{x \rightarrow \infty} y = e^a; \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a.$$

$$486. \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x.$$

Tražimo limes zdesna, jer funkcija $\ln \frac{1}{x}$ nije definirana za $x \leq 0$.

Imamo oblik ∞^0 kad $x \rightarrow +0$.

$$y = \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x; \ln y = x \cdot \ln \left(\ln \frac{1}{x} \right) = \frac{\ln \left(\ln \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{-\infty} \text{ kad } x \rightarrow +0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\ln y) = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +0} \frac{x}{x} = 1.$$

Stavimo $x = \frac{1}{u}$ i uzmemo u obzir da $u \rightarrow +\infty$, kad $x \rightarrow +0$.

$$\lim_{x \rightarrow +0} (\ln y) = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u}{\ln u} = \lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln u} = 0.$$

$$\text{Odatle: } \lim_{x \rightarrow +0} (\ln y) = 0, \text{ pa je: } \lim_{x \rightarrow +0} y = \lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln \frac{1}{x} \right)^x = e^0 = 1.$$

$$487. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{3}{4+\ln x}}.$$

$$488. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\lg x)^{\lg 2x}.$$

$$489. \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

$$490. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}.$$

Riješi pomoću L' Hospitalova pravila i zadatke 110 do 133.

E. Značenje predznaka prve derivacije funkcije. Rast i pad funkcije

Upute

Pri promatranju vladanja funkcije $y=f(x)$ u zavisnosti od promjene nezavisne promjenljive x obično se pretpostavlja da u čitavom području definicije funkcije nezavisna promjenljiva x uvijek raste, tj. svaka sljedeća vrijednost x veća je od prethodne.

Ako pri tome rastu i pripadne vrijednosti funkcije y , kažemo da je funkcija rastuća, a ako vrijednosti funkcije opadaju, kažemo da je funkcija padajuća. Funkcija je monotona u nekom intervalu $[a, b]$, ako u njemu uvijek raste ili uvijek opada.

Ako je prva derivacija funkcije $y=f(x)$ u nekom intervalu pozitivna, tj. $y' > 0$, funkcija u tom intervalu raste, a ako je negativna, tj. $y' < 0$, ona u tom intervalu opada.

Zadaci

U zadacima 491 do 504 uklj. odredi intervale u kojim zadane funkcije rastu, odnosno opadaju.

$$491. y = x^2 - 2x - 8$$

Računamo:

$$y' = 2x - 2 = 2(x - 1). \quad (a)$$

$$y' = 0 \text{ za } x = 1.$$

Imamo dakle dva intervala u kojima je funkcija monotona $(-\infty, 1)$ i $(1, +\infty)$. Iz (a) slijedi da je za $-\infty < x < 1$ $y' < 0$, pa funkcija u tom intervalu monotono pada, dok za $1 < x < +\infty$ je $y' > 0$, pa funkcija u tom drugom intervalu raste. Nariši tu funkciju, da vidiš pravilnost naših zaključaka.

$$492. y = x^4 - 2x^2 - 5.$$

Računamo:

$$y' = 4x^3 - 4x.$$

Stavimo: $y' = 4x(x^2 - 1) = 0$, pa je: $y' = 0$ za $x_1 = 0$ i za $x_2 = -1$ i $x_3 = 1$.

Imamo četiri područja u kojim zadana funkcija ili monotono raste ili monotono pada: $(-\infty, -1)$; $(-1, 0)$; $(0, 1)$ i $(1, +\infty)$,

jer derivacija može mijenjati predznak samo kod prijelaza preko tačaka u kojim se poništava i u tačkama u kojima je prekinuta, tj. u polovima, kojih cijela racionalna funkcija nema.

Da odredimo da li zadana funkcija u svakom od navedenih intervala raste ili opada, trebamo odrediti predznak derivacije y' u bilo kojoj tački svakog intervala. Za interval $-\infty < x < -1$ uzmimo npr. $x_1 = -2$, pa je $y'_1 = -2.4 < 0$. Zaključak: u tom intervalu funkcija y opada.

$$\text{Za } -1 < x < 0 \quad y'_2 \left(-\frac{1}{2} \right) > 0 \text{ pa y raste.}$$

$$\text{Za } 0 < x < 1 \quad y'_3 \left(\frac{1}{2} \right) < 0 \text{ pa y opada.}$$

$$\text{Za } 1 < x < +\infty \quad y'_4(2) > 0 \text{ pa y raste.}$$

$$493. y = x(1 + 2\sqrt{x}).$$

$$y' = x \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} + 1 + 2\sqrt{x} = 1 + 3\sqrt{x}.$$

Funkcija je definirana za $0 \leq x < +\infty$, a u tom intervalu $y' > 0$. Slijedi: zadana funkcija monotono raste u čitavom području u kojem je definirana.

$$494. y = \cos x - x.$$

$$y' = -\sin x - 1 < 0, \text{ jer je } |\sin x| \leq 1.$$

Funkcija y monotono opada u čitavom području, tj. za $-\infty < x < +\infty$. Nariši graf funkcije!

$$495. y = \sqrt[3]{(x^2 - 9)^3}.$$

$$y' = \frac{3}{2} (x^2 - 9)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x = 3x\sqrt{x^2 - 9}.$$

Vidimo da zadana funkcija i njena derivacija nisu definirane za $x^2 - 9 < 0$, tj. za $-3 < x < +3$.

Iz $y' = 0$ slijedi $x^2 - 9 = 0$, odnosno $x_1, 2 = \pm 3$.

Kako je $y' < 0$ za $x < -3$, odnosno $y' > 0$ za $x > 3$, slijedi:

Zadana funkcija opada u intervalu $(-\infty, -3)$ i raste u intervalu $(3, +\infty)$.

$$496. \quad y = \frac{x^2 + 2}{(x-2)^2}.$$

Funkcija a , dakle, i njena derivacija definirane su u otvorenim intervalima $(-\infty, 2)$ i $(2, +\infty)$, jer za $x=2$ ima funkciju pol II reda.

$$y' = -\frac{4(x+1)}{(x-2)^3},$$

pa je $y' < 0$ u intervalu $(-\infty, -1)$, jer je u tom intervalu $x+1 < 0$ i $(x-2)^3 < 0$, pa y opada za $-\infty < x < -1$.

U intervalu $(-1, 2)$ $y' > 0$, jer je u tom intervalu $x+1 > 0$, a $(x-2)^3 < 0$, pa y raste za $-1 < x < 2$, a $y' = 0$ za $x = -1$.

Konačno u intervalu $(2, +\infty)$ $y' < 0$, jer su $x+1 > 0$ i $(x-2)^3 > 0$, pa funkcija opada za $2 < x < +\infty$. Nariši graf funkcije!

$$497. \quad y = x \ln x.$$

Funkcija je definirana samo za $x > 0$.

$$y' = 1 + \ln x.$$

Iz $y' = 1 + \ln x = 0$ slijedi $\ln x = -1$, a odatle po definiciji logaritma dobivamo:

$$x = e^{-1} = \frac{1}{e}.$$

U intervalu $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ $y' < 0$, pa y opada za $0 < x < \frac{1}{e}$.

U intervalu $\left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$ $y' > 0$, pa y raste za $\frac{1}{e} < x < +\infty$.

Vidi dalje sl. 61, kod zadatka 505.

$$498. \quad y = 1 - 4x - x^2.$$

[Dobivene rezultate kontroliraj prema grafu funkcije, koji nariši!]

$$499. \quad y = x^3 - 3x^2 + 4.$$

[Rezultate kontroliraj prema sl. 23, uz zadatak 166.]

$$500. \quad y = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1. \quad [y \text{ raste za } -\infty < x < -2 \text{ i } 1 < x < +\infty, \text{ a opada za } -2 < x < 1.]$$

$$501. \quad y = x - e^x.$$

[Raste za $-\infty < x < 0$ i opada za $0 < x < +\infty$.]

$$502. \quad y = x + \cos x.$$

[Raste za $-\infty < x < +\infty$.]

$$503. \quad y = \ln(x + \sqrt{1+x^2}).$$

[Vidi prema (79) funkciju $y = \operatorname{Arsh} x$.]

$$504. \quad y = \frac{x}{3} - \sqrt[3]{x}.$$

[Raste za $-\infty < x < -1$ i $1 < x < +\infty$, a opada za $-1 < x < 1$.]

F. Geometrijska primjena derivacija

Formule

Jednadžbe tangente i normale na krivulju $y = y(x)$ u tački $T_1(x_1; y_1)$ krivulje:

$$t \equiv y - y_1 = y'(x_1)(x - x_1) \quad (90)$$

$$n \equiv y - y_1 = -\frac{1}{y'(x_1)}(x - x_1). \quad (91)$$

U tački $T(x, y)$ krivulje $y = y(x)$:

$$\text{duljina tangente} \quad T = \left| \frac{y}{y'} \right| \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{duljina normale} \quad N = |y| \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\text{duljina subtangente} \quad S_T = \left| \frac{y}{y'} \right| \quad (134a)$$

$$\text{duljina subnormale} \quad S_N = |y y'|.$$

Zadaci

505. Odredi jednadžbu normale na krivulju

$$y = x \ln x$$

koja je okomita na pravcu $p \equiv 2x - 2y - 3 = 0$ i sve prikaži grafički.

Računamo prema (91):

$$y' = x \cdot \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x. \quad (a)$$

Iz jednadžbe zadanog pravca $y = x - \frac{3}{2}$ slijedi: $y' = 1$, pa je $-\frac{1}{y'(x_1)} = -1$.

Da odredimo $T_1(x_1, y_1)$, uvrstimo u (a) $y' = 1$:

$$1 = 1 + \ln x_1,$$

a iz $\ln x_1 = 0$ slijedi da je $x_1 = 1$, jer je $e^0 = 1$.

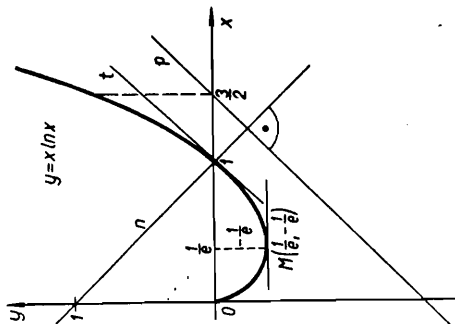
Uvrštenje $x_1 = 1$ u jednadžbu krivulje daje $y_1 = 0$, pa je $T_1(1, 0)$ i prema (91):

$$n \equiv y = -x + 1.$$

Vidi sl. 61. Pri konstrukciji grafa bio je izračunat lim $(x \ln x) = 0$ (načini to!) i određen

$$\text{minimum } M\left(\frac{1}{e}, -\frac{1}{e}\right). \quad (\text{Vidi dalje zadatak 532.})$$

506. Napiši jednađbe tangente i normale u tački A apscise $x_1 = -\frac{1}{2}$ hiperbole $y = \frac{1}{x}$ i odredi duljine subtangente, subnormala, tangente i normale u navedenoj tački krivulje uz grafički prikaz.



Slika 61

Računamo prema (90) i (91):

$$\text{Za } x_1 = -\frac{1}{2} \quad y_1 = -2 \quad \text{pa je } A\left(-\frac{1}{2}, -2\right).$$

$$y' = -\frac{1}{x^2} \quad \text{a u } A: y'(x_1) = -4.$$

$$t \equiv y + 2 = -4 \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad \text{ili} \quad y = -4x - 4$$

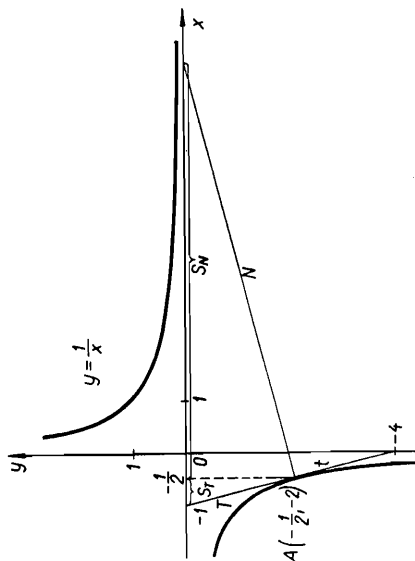
$$n \equiv y + 2 = \frac{1}{4} \left[x + \frac{1}{2} \right] \quad \text{ili} \quad y = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}.$$

Prema (134a)

$$S_T = \left| \frac{-2}{-4} \right| = \frac{1}{2}; \quad S_N = |-2 \cdot (-4)| = 8$$

$$T = \frac{1}{2} \sqrt{1+16} = 2,06; \quad N = |-2| \sqrt{1+16} = 8,26.$$

Vidi sl. 62.



Slika 62

507. Pokaži

- 1) da krivulja $y = a e^{bx}$, gdje su a i b konstante, ima u svim tačkama subtangentu konstantne duljine,
- 2) da je subnormala krivulje $y = x \ln(cx)$, gdje je c konstanta, u svakoj tački krivulje četvrtina proporcionala s obzirom na apscisu, ordinatu i zbroj apscise i ordinate te tačke.

- Ad 1) Prema (134a):

$$S_T = \frac{a e^{bx}}{a b e^{bx}} = \frac{1}{b} = \text{const.}$$

- ad 2) Računamo prema (134a):

$$S_N = x \ln(cx) \left(x \cdot \frac{c}{cx} + \ln(cx) \right) = x \ln(cx) \frac{x + x \ln(cx)}{x}.$$

Odatle dobivamo, uzevši u obzir da je $x \ln(cx) = y$:

$$x : y = (x+y) : S_N.$$

508. Odredi duljine subtangente i subnormala krivulja $y = x^3$; $y^2 = x^3$ i $x y^2 = 1$ uz grafički prikaz.

$$\left[S_T = \frac{x}{3}; \frac{2x}{3} \text{ i } -2x; S_N = 3x^2; \frac{3x^2}{2} \text{ i } -\frac{1}{2x^2} \right].$$

U zadacima 509 do 513 uklj. odredi kutove pod kojim se sijeku zadane krivulje i prikaži sve grafički.

509. $x^2 + y^2 - 4x = 1$ i $x^2 + y^2 + 2y = 9$.

Napišemo li jednađbe zadanih krivulja u obliku

$$(x-2)^2 + y^2 = 5 \quad \text{i} \quad x^2 + (y+1)^2 = 10$$

opazit ćemo da su zadane funkcije kružnice

$$\text{I sa središtem } S_1(2, 0) \text{ i polumjerom } r_1 = \sqrt{5} \approx 2,24$$

$$\text{i II sa središtem } S_2(0, -1) \text{ i polumjerom } r_2 = \sqrt{10} \approx 3,16$$

Vidi sl. 63.

Odredimo sječišta tih kružnica:

$$\begin{array}{r} x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0 \\ x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0 \\ \hline 2y + 4x - 8 = 0. \end{array}$$

Odatle

$$y = -2x + 4 \quad (a)$$

Uvrštenje u drugu jednađbu daje nakon rješenja kvadratne jednađbe

$$x^2 - 4x + 3 = 0.$$

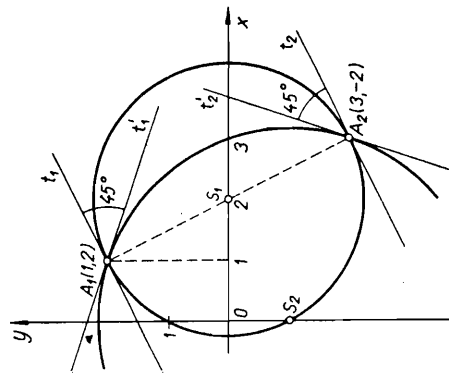
$$x_1 = 1; \quad x_2 = 3,$$

pa iz (a) slijedi:

$$y_1 = 2; \quad y_2 = -2.$$

Kako je kut krivulja kut tangente povučeneh na krivulje u njihovom sječištu, izračunajmo koeficijente smjera tangenata, tj. derivacije u sječištima $A_1(1, 2)$ i $A_2(3, -2)$.

Slika 63



Kako je to pokazano u zadacima 431 do 438 računamo:

$$x^2 + y^2 - 4x - 1 = 0$$

$$2x + 2y' - 4 = 0$$

$$y' = \frac{-x+2}{y}$$

$$x^2 + y^2 + 2y - 9 = 0$$

$$2x + 2y' + 2y = 0$$

$$y' = -\frac{x}{y+1}$$

$$U A_1(1, 2): y'_1 = \frac{1}{2}; u A_2(3, -2): y'_1 = \frac{1}{2} \quad \left| \quad U A_1(1, 2): y'_2 = -\frac{1}{3}; u A_2(3, -2): y'_2 = 3. \right.$$

Prema $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1}$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{2} \cdot \left[-\frac{1}{3}\right]} = 1; \quad \operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{3 - \frac{1}{2}}{1 + 3 \cdot \frac{1}{2}} = 1.$$

$$\varphi_1 = 45^\circ$$

$$\varphi_2 = 45^\circ$$

510. $x^2 + y^2 = 8ax$ i $y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$. Odredimo sjecišta tih krivulja.

Iz jednadžbe $x^2 - 8ax = -\frac{x^3}{2a-x}$ slijedi: $x_1 = 0$ i $x_2 = \frac{8a}{5}$,

pa je:

$$y_1 = 0 \quad \text{i} \quad y_2 = \frac{16a}{5},$$

Sjecišta su:

$$S_1(0, 0) \quad \text{i} \quad S_2\left(\frac{8a}{5}, \frac{16a}{5}\right).$$

Sada računamo koeficijente smjera tangenata u sjecištima S_1 i S_2 krivulja:

$$x^2 + y^2 - 8ax = 0$$

$$y^2 = \frac{x^3}{2a-x}$$

$$2x + 2y' - 8a = 0$$

$$2yy' = \frac{6ax^2 - 2x^3}{(2a-x)^2}$$

$$y' = \frac{4a-x}{y}$$

$$y' = \frac{x^2(3a-x)}{y(2a-x)^2}$$

$$u S_1(0, 0): y'_1 = \infty$$

$$u S_1: y'_2 = 0$$

$$u S_2\left[\frac{8a}{5}, \frac{16a}{5}\right]: y'_1 = \frac{3}{4}$$

$$u S_2: y'_2 = 7.$$

Prema $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a_2 - a_1}{1 + a_2 a_1}$ dobivamo:

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \infty;$$

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = 1$$

$$\varphi_1 = 90^\circ;$$

$$\varphi_2 = 45^\circ$$

511. $x^2 - y^2 = 5$ i $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$ uz grafički prikaz.

$$[\varphi = 90^\circ].$$

512: $y = x^2 - 2x + 4$ i $y = -x^2 + 4x + 4$ uz grafički prikaz.

$$\left[\varphi = \arctg \frac{8}{15}\right].$$

513. $y = \sin x$ i $y = \cos x$ ($0 \leq x \leq \pi$) uz grafički prikaz.

$$[\varphi = \arctg(2\sqrt{2})].$$

G. Određivanje ekstremnih vrijednosti funkcije $y=f(x)$

a. OPĆI SLUČAJEVI

Formule i upute

Nužni uvjet za ekstrem:

$$y' = 0.$$

Rješenja ove jednadžbe daju one vrijednosti x samo za koje funkcija y može imati ekstrem.

Dovoljni uvjet za ekstrem:

Ako je prva po redu derivacija funkcije y koja se nije poništila u tački apscise $x=x_1$ u kojoj je $y'=0$, parnoga reda, funkcija u toj tački ima ekstrem i to maksimum, ako je parna derivacija negativna, odnosno minimum, ako je pozitivna. Ne poništi li se u tački apscise $x=x_1$, u kojoj je $y'=0$, derivacija neparnog reda funkcija u $x=x_1$ nema ekstrema, već ima tačku infleksije s tangentom paralelnom s osi X .

Zadaci

U zadacima 514 do 533 uklj. odredi ekstremne vrijednosti zadanih funkcija.

514. $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

1. korak. Računamo y' i uredimo rezultat:

$$y' = 6x^2 - 6x.$$

2. korak. Stavimo $y'=0$ i riješimo tako dobivenu kvadratnu jednadžbu:

$$6x^2 - 6x = 0$$

$$6x(x-1) = 0$$

$$\left. \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{matrix} \right\} \text{ Samo u tim tačkama može } y \text{ imati ekstrem, jer je samo u tim tačkama tangenta paralelna s osi } X;$$

3. korak. Računamo y'' i uvrštavamo $x_1=0$ i $x_2=1$:

$$y'' = 12x - 6.$$

Za $x_1=0$ $y'_1 = -6 < 0$ funkcija y ima za $x_1=0$ maksimum.

Za $x_2=1$ $y'_2 = 6 > 0$ funkcija y ima za $x_2=1$ minimum;

4. korak. Da odredimo vrijednosti maksimuma i minimuma, uvrstimo $x_1=0$ i $x_2=1$ u zadanu funkciju $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$.

Dobivamo:

$$\text{Za } x_1 = 0 \quad y_{\max} = 1.$$

$$\text{Za } x_2 = 1 \quad y_{\min} = 0.$$

Vidi sl. 64.

Za konstrukciju grafa određena je i treća nultačka funkcije. Budući da u minimumu, tj. za $x_2 = 1$, graf funkcije tangira os X , pa je $x_{1,2} = 1$ dvostruka nultačka, podijelivši jednadžbu $2x^3 - 3x^2 + 1$ sa $(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$, dobivamo $2x + 1$, a iz $2x + 1 = 0$ slijedi $x_3 = -\frac{1}{2}$.

$$515. \quad y = \frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x}.$$

$$1. \quad y' = \frac{(5x^2 - 4x)2x - (x^2 - 1)(10x + 4)}{(5x^2 + 4x)^2},$$

ili nakon uredjenja:

$$y' = \frac{4x^2 + 10x - 4}{(5x^2 + 4x)^2}.$$

$$2. \quad y' = 0.$$

Razlomak jednak je nuli kad je brojnik jednak nuli, ukoliko je nazivnik istodobno različit od nule!

$$4x^2 + 10x - 4 = 0.$$

Odatle:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2} \\ x_2 &= -2 \end{aligned} \right\} \text{ Samo u tim tačkama može } y \text{ imati ekstrem} \\ \text{(nazivnik je različit od nule u tim tačkama).}$$

$$3. \text{ Računamo } y''.$$

Kako y' ima oblik razlomka, a $y' = 0$ računamo y'' po skraćenoj formuli:

$$y'' = \frac{\text{derivacija brojnika od } y'}{\text{nazivnik od } y'}$$

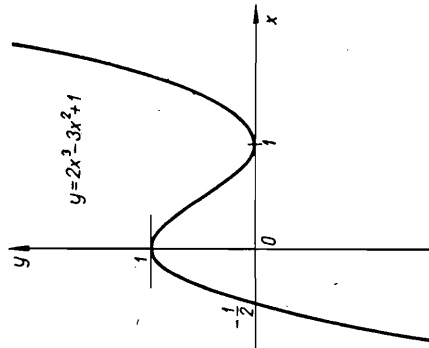
[(vidi: I dio Repetitorija više matematike § 17, 3.2)]

$$y'' = \frac{8x + 10}{(5x^2 + 4x)^2}.$$

$$\text{Za } x_1 = -\frac{1}{2}: \quad y'' = \frac{+}{+} > 0 \quad \text{funkciju ima minimum za } x_1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Za } x_2 = -2: \quad y'' = \frac{-}{+} < 0 \quad \text{funkciju ima maksimum za } x_2 = -2.$$

$$4. \text{ Uvrštenje } x_1 = -\frac{1}{2} \text{ i } x_2 = -2 \text{ u zadanu funkciju daje:}$$



Slika 64

$$y_{\min} = 1 \quad y_{\max} = \frac{1}{4}$$

$$M_1 \left[-\frac{1}{2}, 1 \right] \quad M_2 \left[-2, \frac{1}{4} \right]$$

Pada u oči da je minimum funkcije veći od maksimuma, a to je znak da je funkcija između M_1 i M_2 prekinuta!

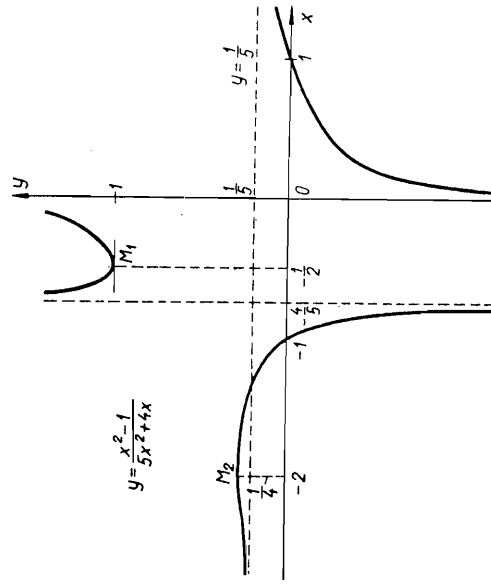
Za konstrukciju grafa funkcije računamo:

1) nultačke funkcije, tako da stavimo brojnik

$$x^2 - 1 = 0, \quad \text{pa je } x_{1,2} = \pm 1.$$

2) polove, stavivši nazivnik $5x^2 + 4x = 0$, pa su

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_2 = -\frac{4}{5} \quad \text{polovi I reda.}$$



Slika 65

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 1}{5x^2 + 4x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{5 + \frac{4}{x}} = \frac{1}{5}. \quad \text{Vidi sl. 65.}$$

516. $y = \frac{x^3 + 1}{x^2}$.

$$y' = \frac{x^2 \cdot 3x^2 - (x^3 + 1)2x}{x^4} = \frac{x^4 - 2x}{x^4}.$$

Iz $y' = \frac{x(x^3 - 2)}{x^4} = 0$ slijedi $x_1 = 0$ i $x_2 = \sqrt[3]{2} \approx 1,59$.

Za $x_1 = 0$ funkcija neme ekstrema, već ima pol II reda, jer je $x_1 = 0$ dvostruka nultačka nazivnika.

$$y'' = \frac{4x^3 - 2}{x^4}.$$

$y''(\sqrt[3]{2}) > 0$ pa funkcija za $x_2 = \sqrt[3]{2}$ ima minimum.

$$y_{\min} = \frac{2+1}{\sqrt[3]{4}} \approx 1,89.$$

Vidi sl. 50, uz zadatak 260.

517. $x^5 - x^4 y - 8 = 0$.

Odatle: $y = x - \frac{8}{x^4}$

$$y' = 1 + \frac{32}{x^5},$$

a iz $y' = 0$ slijedi: $x^5 = -32$, pa je $x_1 = -2$

$$y'' = -\frac{160}{x^6}; \quad y''(-2) < 0 \quad y \text{ ima maksimum za } x_1 = -2$$

$$y_{\max} = -2,5. \text{ Vidi sl. 54 uz zadatak 264.}$$

518. $y = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 - 4}}$.

Računamo y' , pa nakon uređenja dobivamo:

$$y' = \frac{x^2 - 12}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}.$$

Iz $y' \stackrel{!}{=} 0$ slijedi $x^2 - 12 = 0$, pa je $x_{1,2} = \pm 2\sqrt{3}$

$$y'' = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2 - 4)^2}}; \quad y''_1 > 0 \text{ za } x_1 = 2\sqrt{3}, \text{ odnosno: } y'' < 0 \text{ za } x_2 = -2\sqrt{3}.$$

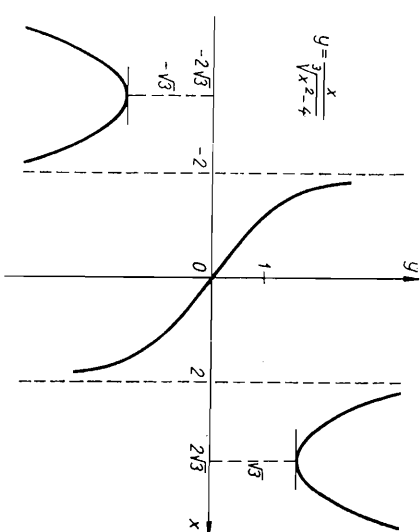
Slijedi: $y_{\min} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt[3]{12-4}} = \sqrt[3]{3}; \quad y_{\max} = -\sqrt[3]{3}.$ Vidi sl. 66.

519. $y = 3x + \lg x$.

$$y' = 3 + \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y' = 0; \quad \frac{1}{\cos^2 x} = -3, \quad \cos^2 x = -\frac{1}{3}, \quad \cos x = \sqrt{-\frac{1}{3}}.$$

$y' \neq 0$ u svim tačkama zadane funkcije, pa zadana funkcija ekstrema nema (raste za sve x)! Nariši graf funkcije!



Slika 66

520. $y = \ln \sqrt{1+x^2} + \arctg x$.

Računamo y' i y'' pa nakon uređenja dobivamo:

$$y' = \frac{x+1}{1+x^2} \quad \text{i} \quad y'' = \frac{1-2x-x^2}{(1+x^2)^2}.$$

Iz $y' = 0$ slijedi $x_1 = -1$ dok je $y''(-1) > 0$ pa funkcija ima minimum za $x_1 = -1$.

$$y_{\min} = \ln \sqrt{2} + \frac{\pi}{4}.$$

521. $y = \frac{\ln^2 x}{x}$.

$$y' = \frac{x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{2 \ln x - \ln^2 x}{x^2}.$$

$$y'' = \text{nakon uređenja} = \frac{2-6 \ln x + 2 \ln^2 x}{x^3}.$$

Iz $y' = 0$ slijedi: $\ln x (2 - \ln x) = 0$, pa je:

$$\ln x = 0; \quad x_1 = 1$$

$$2 - \ln x = 0; \quad \ln x = 2, \quad x_2 = e^2.$$

Uvrštenje u y'' daje:

$$y''(1) = 2 > 0 \quad \text{za } x_1 = 1 \text{ ima } y \text{ minimum.}$$

$$y'(e^2) = \frac{2-12+8}{e^6} = -\frac{2}{e^6} < 0 \text{ za } x_2 = e^2 \text{ ima } y \text{ maksimum.}$$

$$y_{\min} = 0; \quad y_{\max} = \frac{4}{e^2} = 4e^{-2}.$$

Nariši graf funkcije, uzevši u obzir da je funkcija definirana samo za $x > 0$ i pokaži da je $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = 0$.

$$522. y = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \arctg x - \frac{\pi}{8} x^2 - \frac{x-1}{2}.$$

$$y' = \frac{1}{2} (x^2 + 1) \frac{1}{1+x^2} + x \arctg x - \frac{\pi}{4} x - \frac{\pi}{4} x, \quad \text{ili} \quad y' = x \arctg x - \frac{\pi}{4} x$$

$$y'' = \frac{x}{1+x^2} + \arctg x - \frac{\pi}{4}; \quad y' = 0: \quad x \left[\arctg x - \frac{\pi}{4} \right] = 0; \quad x_1 = 0$$

$$\arctg x = \frac{\pi}{4}; \quad x_2 = 1.$$

$$y'' = (0) = -\frac{\pi}{4} < 0, \text{ za } x_1 = 0 \text{ ima } y \text{ maksimum.}$$

$$y''(1) = \frac{1}{2} > 0, \text{ za } x_2 = 1 \text{ ima } y \text{ minimum.}$$

$$y'_{\max} = \frac{1}{2}; \quad y'_{\min} = -\frac{\pi}{8}$$

$$523. y = 2x^3 - 3x^2 \text{ uz grafički prikaz.} \quad [y'_{\max} = 0 \text{ za } x_1 = 0; y'_{\min} = -1 \text{ za } x_2 = 1]$$

$$524. y = x^3 - 3x^2 + 3x. \quad [\text{Nema ekstrema}]$$

$$525. y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2} \text{ uz grafički prikaz.} \quad [y'_{\min} = 0 \text{ za } x_1 = 2; y'_{\max} = -1 \text{ za } x_2 = 1].$$

$$526. y = \frac{x^2 - 1}{5x^3 - 12x + 8} \text{ uz grafički prikaz.} \quad [y'_{\max} = 1 \text{ za } x_1 = \frac{3}{2}; y'_{\min} = -\frac{1}{4} \text{ za } x_2 = \frac{2}{3}].$$

$$527. y = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 2} \text{ uz grafička prikaz.} \quad [y'_{\max} = -1 \text{ za } x_1 = 1; y'_{\min} = 2 \text{ za } x_2 = 0].$$

$$528. y = \frac{2}{3} x^2 \sqrt{6x-7}. \quad [y'_{\max} = 0 \text{ za } x_1 = 0; y'_{\min} = -\frac{2}{3} \text{ za } x_2 = 1]$$

$$529. y = (1-x^2)^3 \text{ uz grafički prikaz.} \quad [y'_{\max} = 1 \text{ za } x_1 = 0; I_1(-1; 0) \text{ i } I_2(1; 0) \text{ su tačke infleksije}]$$

$$530. y = 2 \sin 2x + \sin 4x \text{ uz grafički prikaz.}$$

$$\left[y'_{\min} = -\frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ za } x_1 = \pi \left(k - \frac{1}{6} \right); y'_{\max} = \frac{3}{2} \sqrt{3} \text{ za } x_2 = \pi \left(k + \frac{1}{6} \right) \text{ gdje } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots \right]$$

$$531. y = x \ln^2 x \text{ uz grafički prikaz.} \quad \left[y'_{\max} = \frac{4}{e^2} \text{ za } x_1 = \frac{1}{e^2}; y'_{\min} = 0 \text{ za } x_2 = 1 \right]$$

$$532. y = x \ln x. \quad \left[y'_{\min} = -\frac{1}{e} \approx -0,37 \text{ za } x = \frac{1}{e}; \text{ vidi sl. 61 uz zadatak 505} \right]$$

$$533. y = x^2 e^{-x}. \quad \left[y'_{\min} = 0 \text{ za } x_1 = 0; y'_{\max} = \frac{4}{e^2} \text{ za } x_2 = 2 \right]$$

b. POSEBNI SLUČAJEVI ODREĐIVANJA EKSTREMNIH VRIJEDNOSTI FUNKCIJE $y=f(x)$

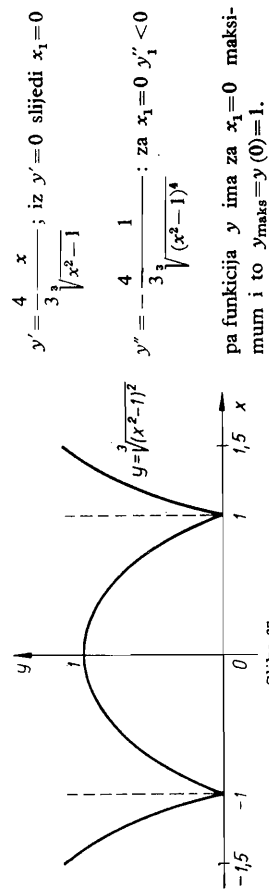
Upute

U pređašnjim zadacima određivali smo ekstreme funkcije $y=f(x)$ pomoću prve i druge derivacije tih funkcija. Do posebnih slučajeva dolazimo, ako $f'(x_1)$ ne postoji, dok je funkcija za $x=x_1$ definirana, ili ako $f'(x_1)$ postoji, ali funkcija za $x=x_1$ nije definirana ili tačka $x=x_1$ leži baš na granici područja definicije funkcije. U tom slučaju moramo držati na pameti osnovni kriterij za ekstrem: funkcija $f(x)$ ima maksimum za $x=x_1$ ako funkcija raste nalijevo od $x=x_1$ i opada nadesno od te tačke, odnosno ima minimum u $x=x_1$ ako opada nalijevo od te tačke i raste na desnoj strani, naravno uz pretpostavku da je funkcija za $x=x_1$ neprekinuta. Da se uvjerimo u tačnost naših zaključaka riješimo graf funkcije. Spomenimo još da se tačka $x=x_1$ zove **kritična**, ako funkcija u toj tački ima ekstrem.

Zadaci

U zadacima 534 do 538 uklj. odredi ekstremne vrijednosti zadanih funkcija i prikaži ih grafički.

$$534. y = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}.$$



Međutim, uzmemo li u obzir da je zadana funkcija definirana za sve x , da je parna, nije negativna i da je $y=0$ za $x=\pm 1$ zaključujemo da zadana funkcija ima još dvije kritične tačke apsisa $x_2=-1$ i $x_3=1$ u kojima funkcija ima dva minimuma vrijednosti nula, jer nalijevo od tih tačaka funkcija opada, a nadesno raste, dok y' ne postoji u tim tačkama ($y'=\infty$). Vidi sl. 67.

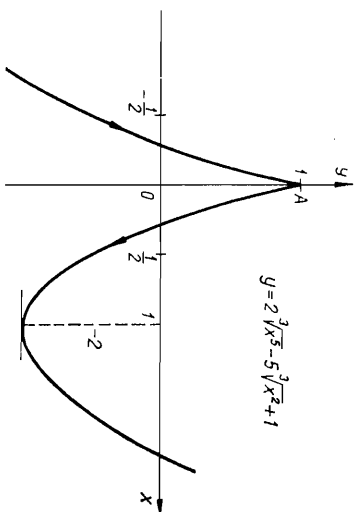
535. $y = 2\sqrt[3]{x^3 - 5\sqrt{x^2 + 1}}$.

$$y' = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt{x}}; \text{ iz } y' = 0 \text{ slijedi } x_1 = 1.$$

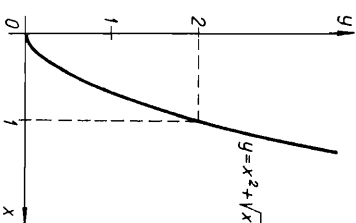
$$y'' = \frac{10}{9} \cdot \frac{2x+3}{\sqrt{x^3}}, \text{ za } x_1 = 1 \quad y'' > 0$$

pa funkcija y ima za $x_1 = 1$ minimum i to $y_{\min} = y(1) = -2$.

Međutim, za $x=0$ $y' = \infty$, pa ne postoji u toj tački, dok je $y=1$ za $x=0$. Kako je funkcija y neprekidna i određena za sve x , $x_2=0$ druga je kritična tačka zadane funkcije. Da odredimo kakav ekstrem ima y za $x_2=0$ računamo predznak y' naljevo i nadesno od te tačke, npr. za $x = -\frac{1}{2}$ i za $x = +\frac{1}{2}$. Dobivamo $y' \left[-\frac{1}{2} \right] > 0$, funkcija raste, $y' \left[\frac{1}{2} \right] < 0$, funkcija opada. Zaključak: zadana funkcija ima za $x_2=0$ maksimum i to $y_{\max} = y(0) = 1$. Vidi sl. 68.



Slika 68



Slika 69

536. $y = x^2 + \sqrt[5]{x^3}$.

$$y' = 2x + \frac{5}{2}\sqrt[5]{x^3}, \text{ Stavimo } y' = 0, \text{ slijedi } x_1 = 0 \text{ dok je } y'' = 2 + \frac{15}{4}\sqrt{x} \text{ i } y''(0) = 2 > 0.$$

Za $x_1 = 0$ dobivamo $y_1 = 0$.

Zadana funkcija definirana je za $0 \leq x < +\infty$, ona monotonno raste, jer je $y' > 0$, a kako tačka apsise $x_1 = 0$ ne leži u unutrašnjosti područja definicije funkcije, već na granici toga područja, funkcija nema ekstremni za $x_1 = 0$. Vidi sl. 69.

537. $y = x\sqrt{1-x^2}$.

$y' = 0$ za $x_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ i $x_{3,4} = \pm 1$. Samo su prve dvije tačke kritične, jer leže u unutrašnjosti intervala definicije funkcije $[-1; 1]$, dok druge dvije leže na granicama. Nariši graf funkcije.

538. $y = x\sqrt[3]{x-1}$. $\left[y_{\min} = y \left[\frac{3}{4} \right] = -\frac{3}{8}\sqrt[3]{2} \approx -0,46, \text{ za } x=1 \text{ ekstrema nema, nariši graf.} \right]$

Uputa

Pokažimo još kako se može pojednostaviti određivanje ekstrema funkcija oblika $y = \frac{c^2}{f(x)}$, gdje je c konstanta, i oblika $y = \sqrt[n]{\varphi(x)}$ uz n prirodan broj.

U prvom slučaju računamo ekstreme nazivnika $f(x)$, pri čemu uzimamo u obzir da tačkama u kojima nazivnik ima minimum odgovaraju apscise tačaka u kojima funkcija y ima maksimum, dok maksimumu nazivnika odgovara minimum funkcije.

U drugom slučaju podaraju se kritične tačke radikanda $\varphi(x)$ s kritičnim tačkama funkcije y , ukoliko leže u području definicije funkcije y .

U zadacima 539 do 545 uki. odredi ekstreme vrijednosti zadanih funkcija na gore navedene jednostavne načine.

539. $y = \frac{10}{4x^3 - 9x^2 + 6x}$.

Odredimo ekstreme vrijednosti nazivnika $u = 4x^3 - 9x^2 + 6x$:

$$u' = 12x^2 - 18x + 6, \text{ iz } u' = 0 \text{ slijedi } u_1 = 1 \text{ i } u_2 = \frac{1}{2}.$$

Funkcija u određena je i neprekidna za sve x kao i u' , dakle nema drugih kritičnih tačaka.

$$u'' = 24x - 18.$$

Za $u_1 = 1$ $u'' > 0$, pa je $u(1) = \min$, dok je $y(1) = \max$.

$$\text{Za } u_2 = \frac{1}{2} \quad u'' < 0 \text{ pa je } u \left[\frac{1}{2} \right] = \max, \text{ dok je } y \left[\frac{1}{2} \right] = \min.$$

$$y_{\max} = \frac{10}{1} = 10; \quad y_{\min} = \frac{10}{\frac{5}{4}} = 8.$$

540. $y = \sqrt[3]{e^{x^3} - 1}$.

Odredimo ekstreme vrijednosti radikanda $u = e^{x^3} - 1$.

$$u' = e^{x^3} \cdot 2x; \text{ iz } u' = 0 \text{ slijedi } x_1 = 0.$$

To je jedina kritična tačka radikanda, jer su u i u' određene i neprekinute funkcije za sve x .

$$u'' = 2e^{x^3}(1 + 2x^2).$$

Kako je $u''(0) > 0$, funkcija u , pa dakle i y ima minimum u $x_1 = 0$, jer ta tačka leži u unutrašnjosti područja definicije zadane funkcije y .

$$y_{\min} = y(0) = 0$$

Da nismo riješili taj zadatak na jednostavniji način, već da smo neposredno tražili ekstrem funkcije y , morali bismo primijeniti za $x_1=0$ osnovni kriterij za ekstrem, jer u toj tački y ne postoji (graf ima šiljak). Vidi sl. 70.

$$541. y = \frac{6}{2x^3 + 3x^2 - 12x + 6}.$$

$$\left[y_{\max} = y(1) = -6; y_{\min} = y(-2) = \frac{3}{13} \right].$$

$$542. y = \frac{30}{12 - 36x^2 + 20x^3 - 3x^4}.$$

$$\left[y_{\min} = y(0) = \frac{5}{2}; y_{\max} = y(2) = -\frac{3}{2} \right].$$

$$y_{\min} = y(3) = -2.$$

$$543. y = \sqrt[3]{(x^3 - a^3)^2}.$$

$$[y_{\max} = y(0) = \sqrt[3]{a^4}; y_{\min} = y(\pm a) = 0].$$

$$544. y = \sqrt[3]{(2x-3)(3-x)^2}.$$

$$[y_{\max} = y(2) = 1; y_{\min} = y(0) = 0].$$

$$545. y = \frac{8}{\sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 12x + 5}}.$$

$$\left[y_{\max} = y(1) = -\sqrt[3]{4}; y_{\min} = y(-2) = \sqrt[3]{\frac{2}{25}} \right].$$

c. ZADACÉ ZA MAKSIMUM I MINIMUM FUNKCIJA

Uputa

Pri rješavanju tih problema izaberi prema uvjetima zadatka nezavisnu promjenljivu pomoću koje izrazi veličinu za koju se traži ekstremna vrijednost. Daljnji postupak poznat je.

Zadaci

546. Na pravcu između dva izvora svjetla jakosti F i $8F$ odredi najmanje rasvijetljenu tačku C , ako međusobna udaljenost izvora svjetla iznosi 24 m (vidi sl. 71).
Kako je rasvjeta u tački obratno razmjerna s kvadratom udaljenosti te tačke od izvora svjetla, dobivamo prema slici da rasvjeta O tačke C od oba izvora svjetla A i B iznosi:

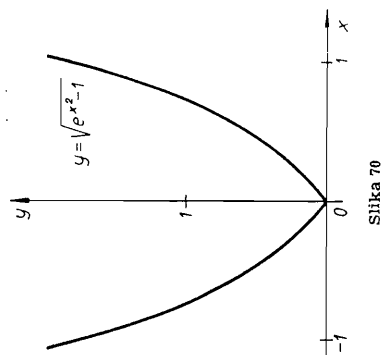
$$O = \frac{F}{x^2} + \frac{8F}{(24-x)^2}.$$

Odatle:

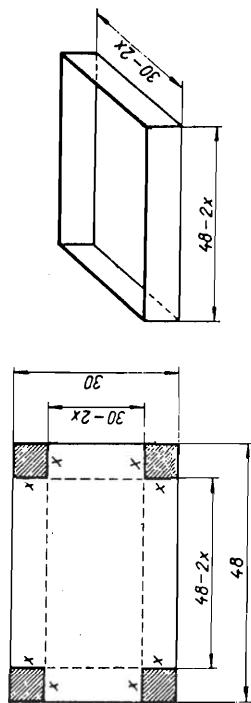
$$O' = 2 \left(-\frac{F}{x^3} + \frac{8F}{(24-x)^3} \right).$$

Iz $O' = 0$ slijedi: $F(24-x)^3 - 8Fx^3 = 0$, ili nakon rastavljanja u faktore dobivamo:

$$F[(24-x) - 2x][(24-x)^2 + (24-x)2x + 4x^2] = 0.$$



Slika 70



Slika 72

Na slici 72 vidimo da je volumen kutije: $V = (48 - 2x)(30 - 2x)x$.

Za V' dobivamo nakon uredjenja:

$$V' = 12(x^2 - 26x + 120), \text{ a iz } V' = 0 \text{ slijedi: } x_1 = 20 \text{ i } x_2 = 6.$$

Prvo rješenje $x_1 = 20$ moramo odbaciti, jer se iz slike vidi da x možemo promatrati samo u intervalu $0 < x < \frac{30}{2}$ cm.

Za drugo rješenje $x_2 = 6$ $V'' = 12(2x - 26) < 0$, pa je $V_{\max}$ za $x_2 = 6$.

Obujam kutije bit će najveći ako izrežemo kvadratne stranice 6 cm, pa su dimenzije kutije $36 \times 18 \times 6$ cm, a njen volumen $V = 3888$ cm³.

548. Riješi isti problem kad papir ima oblik kvadratne stranice 18 cm. [$x = 3$ cm].

549. Odredi najveću površinu četverokuta upisanog u krug polumjera r (vidi sl. 73).

Zadatak svedimo na određivanje oblika onog trokuta najveće površine kojemu su dva vrha na kružnici, a treći je u središtu kruga, npr. trokuta ABS .

Prema poznatoj formuli za površinu trokuta:

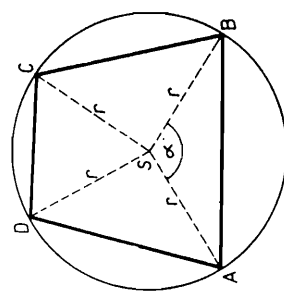
$$P_{\Delta} = \frac{1}{2} r^2 \sin \alpha$$

računamo:

$$P'_{\Delta} = \frac{1}{2} r^2 \cos \alpha,$$

a iz $P'_{\Delta} = 0$ slijedi $\cos \alpha = 0$, pa je:

$$\alpha_1 = 90^\circ.$$



Slika 73

Uvrštenje $\alpha_1 = 90^\circ$ u $P'_\Delta = -\frac{1}{2}r^2 \sin \alpha$ daje $P''_\Delta < 0$, pa je $P_\Delta = \frac{1}{2}r^2 = \text{maks.}$ Tu maksimalnu površinu ima ΔABC , ako je α u S pravi. Očito je da od svih upisanih četverokuta maksimalnu površinu ima kvadrat kome je

$$P_{\text{maks}} = 4 \cdot \frac{1}{2}r^2 = 2r^2.$$

550. Zadan je volumen V cisterne koja ima oblik kružnog valjka. Odredi njene dimenzije uz uvjet da vanjska površina cisterne bude što manja. Označimo li sa h visinu valjka, a sa r polumjer baze, dobit ćemo da je potpuna površina valjaka

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2. \quad (a)$$

h i r nisu nezavisne primjenjive, već su međusobno vezana jednakošću

$$V = \pi r^2 h, \quad (b)$$

jer prema uvjetu valjak mora imati zadani volumen V .

Iz (b) slijedi: $h = \frac{V}{\pi r^2}, \quad (c)$

a uvrštenje u (a) daje: $S = 2 \left[\frac{V}{r} + \pi r^2 \right].$

Sad možemo odrediti S_{min} , jer smo S prikazali kao funkciju od r .

$$S' = 4\pi r - \frac{2V}{r^2}.$$

Iz $S' = 0$ slijedi:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}. \quad (d)$$

Računamo $S'' = 4 \left(\pi + \frac{V}{r^3} \right)$, dok je $S''(r_1) = 12\pi > 0$, pa je S_{min} za $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$.

Iz (d) slijedi da je $V = 2\pi r^3$, a uvrštenje u (c) daje:

$$h = 2r.$$

Ta jednakost kazuje da cisterna oblika kružnog valjka i bilo kojeg zadanog volumena ima najmanju površinu ako je njen osni presjek kvadrat.

551. Iz okrugla debla promjera d ispiši gredu pravokutnog presjeka osnovice b i visine h . Čvrstoća grede razmijerna je sa bh^2 . Uz kakve će vrijednosti b i h imati čvrstoća grede najveću vrijednost? Vidi sl. 74.

Označivši čvrstoću grede sa $W = cbh^2$, gdje je c faktor razmjernosti, i uzevši u obzir da je prema slici $h^2 = d^2 - b^2$, dobivamo:

$$W = cb(d^2 - b^2),$$

a derivacija W po b glasi:

$$W' = c(d^2 - 3b^2).$$

Iz $W' = 0$ slijedi:

$$b_1 = \sqrt{\frac{d^2}{3}}.$$

Uvrštenje $b_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$ u $W'' = -6cb$ daje $W''_1 = -\frac{6cd}{\sqrt{3}} < 0$, pa za $b_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$ postizava čvrstoća grede svoj maksimum.

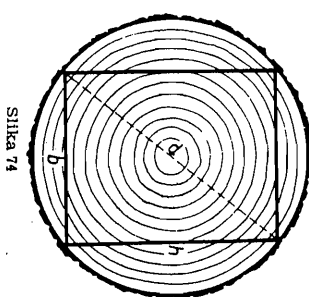
Uvrstimo li $b_1 = \frac{d}{\sqrt{3}}$ u $h = \sqrt{d^2 - b_1^2}$ dobivamo

$$h_1 = d \sqrt{\frac{2}{3}},$$

pa je $W_{\text{maks}} = c \cdot \frac{d}{\sqrt{3}} \cdot d^2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9} \sqrt{3} cd^3$.

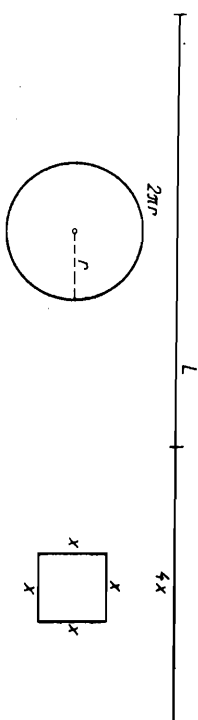
Iz toga slijedi najpovoljniji omjer osnovice i visine grede:

$$b : h = \frac{\frac{d}{\sqrt{3}}}{d \sqrt{\frac{2}{3}}} = 1 : \sqrt{2}.$$



Slika 74

552. Žicu zadane dužine L presjeci na dva dijela; od jednog napravi kružnicu, a od drugog kvadrat. Odredi polumjer r kružnice i stranicu x kvadrata, da zbroj površina tih likova bude što veći (vidi sl. 75).



Slika 75

Prema slici:

$$L = 2\pi r + 4x \quad (a)$$

$$P = \pi r^2 + x^2 \quad (b)$$

Derivirajmo P po r , pamteći da je prema (a) $x = x(r)$:

$$P'(r) = 2\pi r + 2x \cdot x'(r) \quad (c)$$

Prema (a) $x = \frac{L}{4} - \frac{\pi}{2}r$, pa je $x'(r) = -\frac{\pi}{2}$. (d)

Uvrštenje u (c) daje: $P'(r) = 2\pi r - 2x \cdot \frac{\pi}{2} = \pi(2r - x)$. (e)

Iz $P'(r) = 0$ slijedi $x = 2r$, a uvrštenje u (a) daje: $L = 2\pi r + 8r = 2(\pi + 4)r$.

Odatle je

$$r = \frac{L}{2(\pi + 4)}, \quad \text{dok je} \quad x = 2r = \frac{L}{\pi + 4}. \quad (f)$$

Računamo: $P''(r) = \text{prema (e)} = \pi[2 - x'(r)] = \text{prema (d)} = \pi \left[2 + \frac{\pi}{2} \right] > 0$.

Slijedi: za izračunate vrijednosti r i x dobivamo najmanju vrijednost zbroja površina kruga i kvadrata, koja iznosi prema (b) i (f):

$$P_{\min} = \pi \frac{L^2}{4(\pi+4)^2} + \frac{L^2}{(\pi+4)^2} = \frac{L^2}{4(\pi+4)}.$$

Kako je naš zadatak određivanje $P_{\max}$ zbroja površina kruga i kvadrata napravljenih od žice duljine L , izračunajmo vrijednosti površine P za $x=0$, za $r=0$ i za $r=\frac{L}{2\pi}$.

Prema (a) i (b) dobivamo:

$$\text{Za } x=0: r = \frac{L}{2\pi} \quad \text{i} \quad P = \frac{L^2}{4\pi} = P_{\text{kruga}}$$

$$\text{za } r=0: x = \frac{L}{4} \quad \text{i} \quad P = \frac{L^2}{16} = P_{\text{kvadrata}}$$

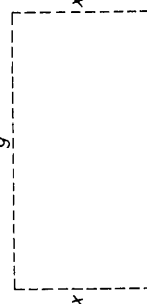
$$\text{za } r = \frac{L}{2\pi}: x=0 \quad \text{i} \quad P = \frac{L^2}{4\pi} = P_{\text{kruga}}$$

Usporedimo li navedene vrijednosti za P , vidjet ćemo da se $P_{\max} = \frac{L^2}{4\pi} = P_{\text{kruga}}$ dobije za $x=0$, tj. kad se žica ne reže, već se čitava savije u kružnicu. Ako se traži da se žica siječe, problem nema rješenja.

553. Zemljište ima oblik pravokutnika površine 800 m^2 . Jedna strana omeđena je kanalom, a tri ostale treba zatvoriti plotom. Odredi dimenzije zemljišta, da duljina plotu bude što kraća.

Prema slici 76: duljina plotu $d = 2x + y$,
dok je prema zadatku $xy = 800$, pa je:

$$y = \frac{800}{x}.$$



Slika 76

Uvrštenje u (a) daje:

$$d = 2x + \frac{800}{x}.$$

Odatle:

$$d' = 2 - \frac{800}{x^2},$$

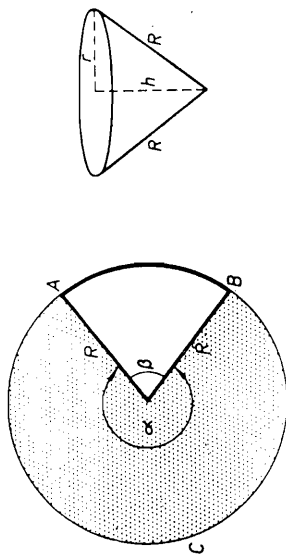
a iz $d' = 0$ slijedi: $x_1 = 20$. $d' = \frac{1600}{x^3} > 0$ za sve $x > 0$, pa je $d_{\min}$ za $x_1 = 20$.

Prema (b): $y = \frac{800}{20} = 40$.

Dimenzije zemljišta: $40 \text{ m} \times 20 \text{ m}$.

554. Iz zadanog kruga polumjera R izreži isječak tako da od ostatka kruga napraviš lijevak što većeg volumena. Vidi sl. 77.

Prema slici: volumen lijevka $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. (a)



Slika 77

Označimo li sa arc $\alpha = x$ lučnu mjeru kuta preostalog dijela zadanog kruga, bit će prema prvoj slici:

$$2\pi r = \widehat{ACB} = R x,$$

a odatle je $r = \frac{R x}{2\pi}$, dok je prema drugoj slici

$$h = \sqrt{R^2 - r^2} = \sqrt{R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2}}.$$

Uvrštenje u (a) daje nakon uredjenja:

$$V = \frac{R^2 x^2}{12\pi} \sqrt{R^2 - \frac{R^2 x^2}{4\pi^2}}.$$

Da pojednostavnimo računanje V' , kvadriramo izraz za V :

$$V^2 = \left[\frac{R^2}{12\pi} \right]^2 \cdot R^2 \left[x^4 - \frac{x^6}{4\pi^2} \right], \quad \text{a odatle je: } x^4 - \frac{x^6}{4\pi^2} = \left[\frac{12\pi V^2}{R^3} \right] = f(x).$$

$$\text{Računamo } f'(x): \quad f'(x) = 4x^3 - \frac{6x^5}{4\pi^2} = x^3 \left[4 - \frac{3}{2\pi^2} x^2 \right].$$

Iz $f'(x) = 0$ slijedi: $x_1 = 0$, pa je $V = 0$ i $x_2 = 2\sqrt{\frac{2}{3}\pi}$, a kako je funkcija V neprekidna

i pozitivna, bit će $V_{\max}$ za $x_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}} = \text{arc } 294^\circ$.

Da se dobije lijevak što većeg volumena treba iz kruga izrezati sektor sa središnjim kutom $\beta = 360^\circ - 294^\circ = 66^\circ$.

555. Odredi diralište tangente povučene na elipsu $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{18} = 1$, koja zatvara s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi trokut najmanje površine. Vidi sl. 78. Označivši sa m i n odsječke što ih čini tangenta na koordinatnim osima, dobivamo prema slici:

$$P_D = \frac{m \cdot n}{2}. \quad (a)$$

Znamo jednadžbu tangente na elipsu u diralištu $D(x_1, y_1)$ elipse: $18x_1 + 8y_1 = 144$.

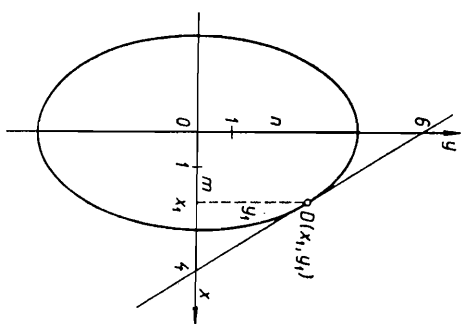
ili u segmentnom obliku: $\frac{x}{8} + \frac{y}{18} = 1$, pa je:

$$m = \frac{8}{x_1} \text{ i } n = \frac{18}{y_1}. \quad (b)$$

Tačka $D(x_1, y_1)$ leži na elipsi, dakle:

$$\frac{x_1^2}{8} + \frac{y_1^2}{18} = 1,$$

a odatle je: $y_1 = \frac{3}{2} \sqrt{8 - x_1^2}$ (c)



Slika 78

Uvrštenje u (b), a zatim u (a) daje:

$$n = \frac{12}{\sqrt{8 - x_1^2}} \text{ i } P = \frac{48}{x_1 \sqrt{8 - x_1^2}}.$$

U drugom dijelu predašnjeg poglavlja b. pokazali smo kako se jednostavno određuju ekstremi funkcija oblika $\frac{f(x)}{g(x)}$ (vidi npr. zadatak 539 i sl.). Prema tom načinu odredimo kritične tačke nazivnika $f(x)$, u našem slučaju funkcije $u = x \sqrt{8 - x^2}$.

$$\text{Dobivamo: } u' = \frac{-2x^2 + 8}{\sqrt{8 - x^2}}.$$

Iz $u' = 0$ slijedi $x_1 = 2$, a uvrštenje $x_1 = 2$ u $u' = \frac{2x^2 - 32x + 8}{\sqrt{8 - x^2}}$ daje $u'(2) < 0$, pa funkcija u ima za $x_1 = 2$ maksimum, a $P = \frac{48}{x_1 \sqrt{8 - x_1^2}}$ minimum. Uvrštenje $x_1 = 2$ u (c) daje $y_1 = 3$, pa je $D(2, 3)$ traženo diralište tangente, dok je $P_{\min} = 12$.

556. Odredi visinu uspravnog kružnog stošca najmanjeg volumena koji je opisan oko polukugle polunijera R (središte baze stošca leži u središtu kugle). Vidi sl. 79.

$$\text{Prema slici: } V = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \quad (a)$$

Izrazimo promjenljive veličine r i h sa φ .

$$\text{Prema slici: } h = \frac{R}{\sin \varphi} \text{ i } r = \frac{R}{\cos \varphi}.$$

Uvrštenje u (a) daje:

$$V = \frac{1}{3} \pi \frac{R^3}{\sin \varphi \cos^3 \varphi}.$$

Opet moramo odrediti ekstrem funkcije oblika $\frac{c^2}{f(x)}$ (vidi zadatak 555); pri čemu je $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.

Označivši $u = \sin \varphi \cos^3 \varphi$, računamo:

Iz $u' = 0$ slijedi:

$$1) \cos^3 \varphi = 0, \text{ pa je } \varphi_1 = \frac{\pi}{2} \text{ i } \varphi_2 = \frac{3}{2} \pi.$$

Obje vrijednosti leže izvan intervala $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$2) 1 - 2 \operatorname{tg}^2 \varphi = 0, \text{ pa je } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Kako je } h = R \cdot \frac{1}{\sin \varphi}, \text{ računamo } \frac{1}{\sin \varphi} = \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$$

$$h = R\sqrt{3}.$$

557. Greda dužine l , oslonjena na dva ležaja, opterećena je kontinuirano sa q kg na jedinicu dužine. Odredi najveću vrijednost momenta savijanja grede. Vidi sl. 80.

Uzevši u obzir da je moment sile s obzirom na tačku jednak umnošku sile i kraka i da je pozitivan pri okretanju u smislu kazaljke na satu, dobivamo prema slici za tačku C grede udaljene za x od lijevog ležaja:

$$M_x = -q \cdot x \cdot \frac{x}{2} + \frac{q l}{2} \cdot x. \quad (a)$$

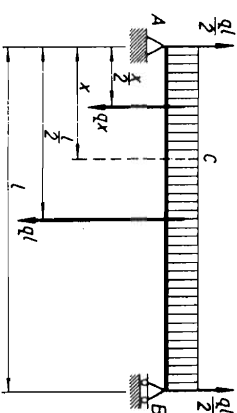
Deriviramo, pa iz $M'_x = -qx + \frac{ql}{2} = 0$

$$\text{slijedi: } x_1 = \frac{l}{2}.$$

Kako je $M'_x = -q < 0$, dobivamo prema (a)

$$M_{\max} = \frac{q l^2}{8}.$$

Slika 80



Kako se i očekivalo, taj se maksimalni moment savijanja nalazi u sredini grede.

558. Od komada žice dužine d napravi pravokutnik najveće površine.

$$\left[\text{Kvadrat stranice } \frac{d}{4} \right].$$

H. Određivanje najmanjih i najvećih vrijednosti funkcija u zadanom zatvorenom intervalu (ukoliko interval nije zadan, zadatak se odnosi na čitavo područje definicije funkcije)

Upute

Ako je funkcija neprekidna u nekom zatvorenom intervalu $[a, b]$, ona uvijek ima u tom intervalu najveću i najmanju vrijednost. Te vrijednosti funkcija postizava ili u tačkama ekstrema, koje leže u zadanom intervalu, ili na granicama tog intervala.

Odatle slijedi pravilo za određivanje tih vrijednosti zadane funkcije u zadanom intervalu $[a, b]$, u kojem je funkcija neprekidna.

1. korak. Određivši kritične tačke funkcije koje leže u intervalu $[a, b]$ računamo vrijednosti funkcije u tim tačkama, izostavivši ispitivanje da li su to tačke maksimuma ili minimuma.
2. korak. Računamo vrijednosti funkcije na krajevima zadanog intervala.
3. korak. Usporedimo li sve tako dobivene vrijednosti funkcije, lako ćemo odrediti koja je vrijednost funkcije u zadanom intervalu najveća, a koja je najmanja.

Zadaci

U zadacima 570 do 579 uklj. odredi najveću i najmanju vrijednost zadane funkcije u zadanom zatvorenom intervalu.

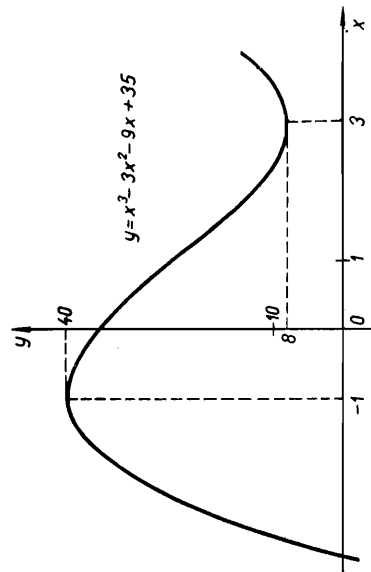
570. $y = x^2 - 3x^2 - 9x + 35$ u intervalu $[-4; 4]$.

1. korak. $y' = 3x^2 - 6x - 9$.

Iz $y' = 0$ slijedi: $x_1 = -1$ i $x_2 = 3$, pri čemu obje kritične tačke leže u zadanom intervalu, dok drugih kritičnih tačaka nema, jer y' postoji za sve x .

Računamo: $y(-1) = 40$; $y(3) = 8$.

2. korak. Računamo: $y(-4) = -41$; $y(4) = 15$.



Slika 81

559. Broj 36 rastavi tako u dva množitelja da zbroj njihovih kvadrata bude što manji.

[6 i 6].

560. Prozor ima oblik pravokutnika s polukrugom na gornjem dijelu. Odredi dimenzije prozora, kojemu je zadan opseg l , da bi propustao što više svjetla.

$$[P = \frac{1}{2}(l - 2x - \pi x), \text{ gdje je } x \text{ polumjer polukruga. } P_{\max} \text{ za } x = \frac{l}{4 + \pi}, \text{ kad je visina pravokutnika jednaka } x].$$

561. Otvorena posuda oblika valjka mora imati volumena V . Uz kakvu će se visinu i polumjer baze valjka utrošiti najmanje materijala na izradbu te posude?

$$\left[r = h = \sqrt[3]{\frac{V}{\pi}} \right].$$

562. Treba napraviti lijevak sa stranom $s = 20$ cm. Kolika mora biti visina lijevka, da njegov volumen bude što veći?

$$\left[\frac{20\sqrt{3}}{3} \right].$$

563. Komad lima širine 60 cm treba saviti u žlijeb oblika istokračnog trapeza $ACDB$, u kojem su kraci AC i BD jednaki širini dna CD . Odredi širinu AB žlijeba tako da njegov volumen bude što veći.

564. Odredi visinu valjka najvećeg volumena koji je upisan u kuglu polumjera R .

$$\left[\frac{2R\sqrt{3}}{3} \right].$$

565. U tački A kružnice polumjera r povučena je tangenta. Povuci tetivu BC paralelno s tom tangentom tako, da površina $P_{\Delta ABC}$ bude što veća.

$$\left\{ \text{Uputa: } P = \frac{1}{2} x^2 \sin \alpha, \text{ gdje je } x = AB = AC, \text{ dok je } \alpha = \angle BAC. [\alpha = 60^\circ; x = R\sqrt{3}] \right\}.$$

566. Tačkom $T(1, 4)$ položi pravac tako da zbroj pozitivnih odsječaka na koordinatnim osima bude što manji.

$$\left[\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1 \right].$$

567. Odredi stranice pravokutnika najveće površine upisanog u elipsu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$$[a\sqrt{2} \text{ i } b\sqrt{2}].$$

568. Na elipsi $2x^2 + y^2 = 18$ zadane su tačke $A(1; 4)$ i $B(3; 0)$. Odredi na toj elipsi treću tačku C tako da površina ΔABC bude što veća.

$$[C(-\sqrt{6}; -\sqrt{6})].$$

569. Komad lima širine a treba saviti u oblik otvorena valjkasta žlijeba (presjek žlijeba ima oblik luka kružnog segmenta). Odredi onu vrijednost središnjeg kuta α toga luka za koji žlijeb ima najveći volumen.

[Presjek žlijeba ima oblik polukruga].

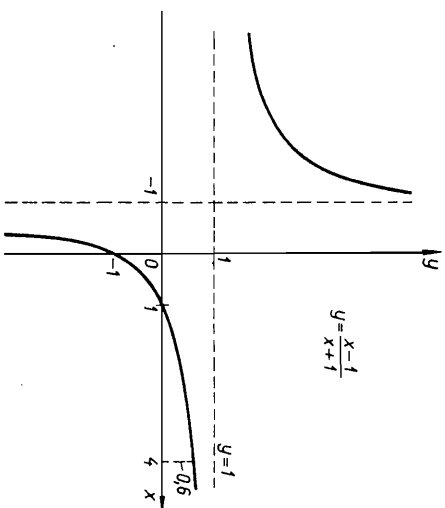
3. korak. Usporedivši izračunate vrijednosti funkcije zaključujemo: najveću vrijednost u intervalu $[-4; 4]$ ima funkcija u kritičnoj tački $x_1 = -1$ i iznosi 40, dok najmanju vrijednost -41 postizava funkcija na lijevom kraju intervala $x = -4$. Vidi sl. 81.

571. $y = \frac{x-1}{x+1}$ u intervalu $0 \leq x \leq 4$.

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2} \neq 0 - \text{funkcija nema ekstremnih vrijednosti,}$$

$$y(0) = -1, \quad y(4) = \frac{3}{5} = 0,6.$$

Funkcija ima najmanju vrijednost -1 na lijevom kraju zadanog intervala i najveću $0,6$ na desnom kraju. Vidi sl. 82.



Slika 82

572. $y = 2 \sin x + \cos 2x$ u intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Iz $y' = 2 \cos x (1 - 2 \sin x) = 0$ slijedi:

$\cos x = 0$, pa je $x_1 = \frac{\pi}{2}$. To nije kritična tačka, jer leži na kraju intervala.
 $1 - 2 \sin x = 0$, pa je $x_2 = \frac{\pi}{6}$. To je kritična tačka, u kojoj je $y = \frac{3}{2}$.

Na krajevima intervala: $y(0) = 1$ i $y\left[\frac{\pi}{2}\right] = 1$.

Najveću vrijednost $\frac{3}{2}$ ima funkcija u kritičnoj tački $x_2 = \frac{\pi}{6}$, a dvije najmanje vrijednosti i to 1 ima na krajevima intervala. Vidi sl. 83.

573. $y = e^{-x^2}$.

$$y' = -e^{-x^2} \cdot 2x.$$

Iz $y' = 0$ slijedi: $x_1 = 0$, pa je

$$y(x_1) = e^0 = 1.$$

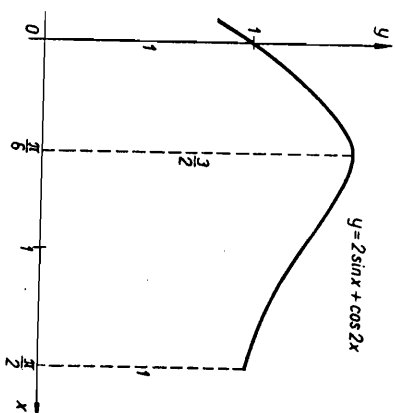
Drugi kritičnih tačaka nema, jer su y i y' određene i neprekinute za sve x .

Budući da interval nije zadan pa iznosi čitavo područje definicije funkcije, tj. $-\infty < x < +\infty$, odredimo kakav ekstrem ima funkcija za $x_1 = 0$:

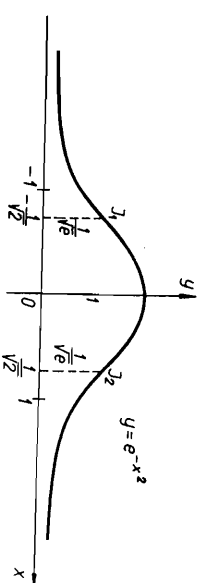
$$y'' = -2e^{-x^2}(1 - 2x^2).$$

Kako je $y''(0) < 0$, $y(0) = 1$ maksimum je zadane funkcije. Kako je $y(-x) = y(x)$ funkcija je parna, pa je njen graf simetričan s obzirom na os Y , dok je $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} e^{-x^2} = 0$.

Zaključujemo: funkcija ima samo najveću vrijednost 1 za $x = 0$, dok najmanje vrijednosti nema. Vidi sl. 84.



Slika 83



Slika 84

574. $y = x^4 - 2x^3 + 3$ u intervalu $[-2, 1]$, uz grafički prikaz.

[Najmanja vrijednost $y = 2$ za $x_{1,2} = \pm 1$, najveća 11 za $x = -2$.]

575. $y = x - 2 \ln x$ u intervalu $[1, e]$.

[Najveća vrijednost $y(1) = 1$, najmanja $y(2) = 2(1 - \ln 2)$.]

576. $y = \sqrt{x(10-x)}$

[Najmanja vrijednost $y(0) = y(10) = 0$; najveća $y(5) = 5$.]

577. $y = \sin 2x - x$ u intervalu $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$, uz grafički prikaz.

$$\left[y\left[-\frac{\pi}{2}\right] = +\frac{\pi}{2}; \quad y\left[\frac{\pi}{2}\right] = -\frac{\pi}{2} \right].$$

$$578. y = \frac{4-x^2}{4+x^2} \text{ u intervalu } [-1; 3], \text{ uz grafički prikaz. } \left[y(3) = -\frac{5}{13}; y(0) = 1 \right].$$

$$579. y = x^x \text{ u intervalu } 0,1 \leq x < \infty.$$

$$\left[\text{najmanja vrijednost } \left(\frac{1}{e} \right)^{\frac{1}{e}} \text{ za } x_1 = \frac{1}{e}, \text{ najveće vrijednosti nema. Nariši graf.} \right]$$

U zadacima 580 do 583 uklj. riješi zadane probleme tako da ih svedeš na određivanje najveće, odnosno najmanje vrijednosti funkcije u određenom intervalu.

Uputa

Označi nekim slovom onu nepoznanicu o kojoj ovisi veličina za koju se traži najveća ili najmanja vrijednost, dok su granične vrijednosti te nepoznanice određene uvjetima zadatka. Zatim odredi na prije navedeni način onu vrijednost nepoznanice za koju tražena veličina ima najveću, odnosno najmanju vrijednost.

Zadaci

580. Napravi od tri tanke daske jednake duljine a žlijeb najvećeg poprečnog presjeka. Vidi sl. 85.

Očito je da će žlijeb imati oblik istokračnog trapeza i da će njegov poprečni presjek ovisiti jedino o kutu nagiba bočnih dasaka, tj. o kutu α .

Izrazimo površinu P presjeka žlijeba pomoću α i a :



Slika 85

$$P = (a + a + 2x) \frac{h}{2}, \text{ gdje je } x = a \sin \alpha \text{ i } h = a \cos \alpha.$$

Slijedi:

$$P = (a + a \sin \alpha) a \cos \alpha = a^2 (1 + \sin \alpha) \cos \alpha, \quad (a)$$

$$\text{pri čemu je: } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \text{ (vidi sliku!).}$$

$$\text{Računamo: } P' = a^2 (1 - \sin \alpha - 2 \sin^2 \alpha).$$

$$\text{Iz } P' = 0 \text{ slijedi: } 2 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 1 = 0, \text{ pa je:}$$

$$(\sin \alpha)_1 = \frac{1}{2}; \quad \alpha_1 = \frac{\pi}{6}; \quad (\sin \alpha)_2 = -1, \quad \alpha_2 = \frac{3}{2} \pi \rightarrow \text{otpada, jer ne leži u intervalu } \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

Računamo prema (a) vrijednosti P :

$$\text{u kritičnoj tački: } P \left(\frac{\pi}{6} \right) = a^2 \left[1 + \frac{1}{2} \right] \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \sqrt{3} a^2 = 1,28 a^2,$$

$$\text{na krajevima intervala: } P(0) = a^2 \text{ i } P \left(\frac{\pi}{2} \right) = 0.$$

Zaključak: najveću vrijednost postizava P , pa dakle i protoka za $\alpha = \frac{\pi}{6}$. U tom slučaju

gornja baza $a + 2x = a + 2a \sin \frac{\pi}{6} = 2a$ dvaput je duža od donje.

581. Prema shemi prikazanoj na slici 86 odredi položaj tačke C , gdje bi se gradió most preko rijeke, uz uvjet da put između tačaka A i B budu što kraći.

Duljina s puta od A do B iznosi prema slici:

$$s = AC + CD + DB. \quad (a)$$

Za nezavisnu promjenljivu x uzmimo dužinu $A'C = x$ pa s izrazimo sa x .

Prema slici i (a):

$$s = \sqrt{a^2 + x^2} + d + \sqrt{b^2 + (c-x)^2},$$

pri čemu vrijednosti x leže u intervalu $[0, c]$.

U tom intervalu $[0, c]$ odredimo tačku u kojoj s prima najmanju vrijednost.

$$\text{Računamo: } s' = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{c-x}{\sqrt{b^2 + (c-x)^2}} = \frac{x \sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c) \sqrt{a^2 + x^2}}{\sqrt{(a^2 + x^2)(b^2 + (c-x)^2)}}.$$

Iz $s' = 0$ slijedi:

$$x \sqrt{b^2 + (c-x)^2} + (x-c) \sqrt{a^2 + x^2} = 0.$$

Odatle slijedi nakon kvadriranja i uredjenja:

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (x-c)^2 \text{ ili } \left[\frac{x}{x-c} \right]^2 = \frac{a^2}{b^2}, \text{ pa je: } \frac{x}{x-c} = \frac{a}{b} \text{ i } \frac{x}{x-c} = -\frac{a}{b}.$$

Odatle:

$$x_1 = \frac{ac}{a-b} \text{ i } x_2 = \frac{ac}{a+b}.$$

Iz (b) slijedi:

Tačka x_1 leži izvan intervala $[0, c]$, jer za $a > b$ je $x_1 > c$, a za $a < b$ je $x_1 < 0$.

Tačka x_2 leži u intervalu $[0, c]$ za sve pozitivne vrijednosti a, b i c , jer je u tom slučaju $x_2 > 0$ i $\frac{a}{a+b} < 1$ pa je $x_2 < c$.

Budući da je $s' < 0$ nalijevo od x_2 (s opada), dok je nadesno od x_2 (s raste), zaključujemo da je $x_2 = \frac{ac}{a+b}$ tačka minimuma funkcije s .

Da put između tačaka A i B bude što kraći, treba most sagraditi u mjestu C udaljenom od mjesta A' za $\frac{ac}{a+b}$.

582. Odredi najveću površinu istokračnog trokuta upisanog u krug polumjera r .

{Površinu P trokuta izrazi sa x , gdje je x dio visine trokuta od središta S do baze, a leži u $[0, r]$. Odredi vrijednosti P na krajevima intervala i $P_{\max} \left[\frac{3}{4} \sqrt{3} r^2 \text{ za } x = \frac{r}{2} \right]$.

583. Odredi najveću površinu istokračnog trokuta kojem je krak k .

$$\left\{ P_A(x) = x \sqrt{\frac{k^2}{2} - x^2}, \text{ gdje je } x \text{ visina trokuta } \left[\frac{k^2}{2} \text{ za } x = \frac{k}{\sqrt{2}} \right] \right\}.$$

I. Konveksnost i konkavnost krivulja. Tačke infleksije.

Uputa

Krivulja je konveksna spram gore, ako se nalazi ispod bilo koje svoje tangente; krivulja je konkavna spram gore, ako se nalazi pored bilo koje svoje tangente. Tačka infleksije (obrtišta) jest tačka u kojoj krivulja prelazi iz konveksnog dijela u konkavni ili obratno. Krivulja je konveksna u tački x_1 krivulje, ako je $y''(x_1) > 0$, odnosno konkavna, ako je $y''(x_1) < 0$.

Tačka infleksije određuje se tako, da se izračuna druga derivacija y'' funkcije y , pa se izjednači s nulom. Rješenja jednadžbe $y'' = 0$ daju one vrijednosti x samo za koje funkcija $y = f(x)$ može imati tačke infleksije. To je samo nužni uvjet za tačke infleksije. Dovoljni uvjet: ako je derivacija funkcije, koja se prva nije poništila u tački $x = x_1$ u kojoj je $f''(x_1) = 0$ neparnog reda, pri čemu ako je ta derivacija neparnog reda pozitivna, krivulja u tački infleksije prelazi iz konveksnog dijela u konkavni, ako je negativna, krivulja prelazi iz konkavnog dijela u konveksni.

Primedba. Ako je $f''(x_1) = \infty$ ili $f''(x_1)$ ne postoji, dok je sama funkcija određena u tački $x = x_1$, računamo vrijednost $f''(x)$ naljevo i nadesno od tačke $x = x_1$. Ako su te vrijednosti $f''(x)$ različitog predznaka, tačka $x = x_1$ je tačka infleksije zadane funkcije.

Zadaci

U zadacima 584 do 592 uklj. odredi tačke infleksije i intervale konveksnosti, odnosno konkavnosti zadanih funkcija.

584. $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$.

Računamo: $y' = 5x^3(3x - 4)$
 $y'' = 60x^2(x - 1)$.

Stavimo: $y'' = 0$ Slijedi: $x_{1,2} = 0$ i $x_3 = 1$.
 Samo u tim tačkama može funkcija imati tačke infleksije.

Računamo dalje: $y''' = 180x^2 - 120x$.

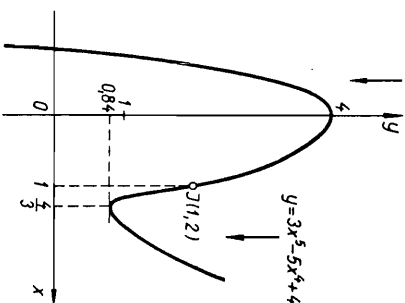
Uvrštenje $x_{1,2} = 0$ daje $y'''(0) = 0$.

Računamo dalje: $y'''(1) = 360 - 120 = 240$.

$y^{(4)}(0) = -120$.

Nije se poništila u tački $x_{1,2} = 0$ derivacija četvrtog, tj. parnog reda, pa funkcija y u $x_{1,2} = 0$ nema tačke infleksije, već ima ekstrem i to maksimum, jer je $y' = 0$ za $x_{1,2} = 0$, a $y^{(4)}(0) < 0$. Krivulja je dakle konveksna u okolini $x_{1,2} = 0$.

Uvrštenje $x_3 = 1$ u y''' daje $y'''(1) = 240$. Nije se poništila derivacija neparnog reda, pa funkcija za $x_3 = 1$ ima tačku infleksije, a kako je $y'''(1) > 0$, krivulja u $x_3 = 1$ prelazi iz konveksnog dijela u konkavni.



Slika 87

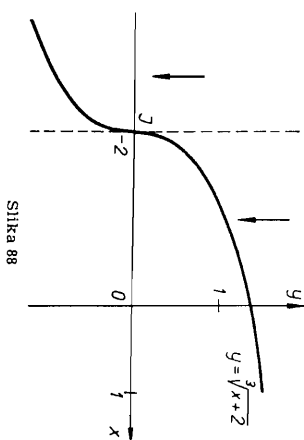
Izračunavši ordinatu $y(1) = 2$ tačke infleksije I i uzevši u obzir da iz $y' = 0$ slijedi još $x_4 = \frac{4}{3}$, dok je $y''\left(\frac{4}{3}\right) > 0$, pa funkcija y ima minimum u $x_4 = \frac{4}{3}$; rišemo graf funkcije, prethodno izračunavši još vrijednosti maksimuma $y(0) = 4$ i minimuma $y\left(\frac{4}{3}\right) \approx 0,84$.
 Vidi sl. 87.

585. $y = \sqrt[3]{x+2}$.

Računamo:

$$y' = \frac{1}{3}(x+2)^{-2/3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{(x+2)^5}}$$



Slika 88

Kako je brojnik u izrazu za y'' konstantan, y'' se nigdje ne poništava, a za $x_1 = -2$ teži u beskonačnost, kao i y' , dok je funkcija y za $x_1 = -2$ određena i ima vrijednost 0. Zaključak: u tački $x_1 = -2$ tangenta je na krivulju paralelna s osi Y , a funkcija ima u $y(-2, 0)$ tačku infleksije, jer je $y'' > 0$ za $x < -2$ i $y'' < 0$ za $x > -2$, pri čemu graf funkcije prelazi iz konkavnog dijela u konveksni. Vidi sl. 88.

586. $y = \frac{1}{(x+1)^5}$.

Računamo: $y' = -\frac{5}{(x+1)^6}$ i $y'' = \frac{30}{(x+1)^7}$.

Kako vidimo, $y'' \neq 0$ za sve x , a za $x = -1$ ne postoji, pri čemu $x = -1$ ne može biti apsisa tačke infleksije, jer je za $x = -1$ $y = \infty$, tj. $x = -1$ pol prvog reda zadane funkcije.

Međutim, za $x < -1$, npr. za $x = -2$, $y'' < 0$, pa je graf funkcije konveksan, a za $x > -1$, npr. za $x = 0$, $y'' > 0$, pa je graf konkavan.

Zaključak: funkcija u $x = -1$ prelazi iz konveksnog dijela u konkavni iako nema tačke infleksije. Vidi sl. 89.

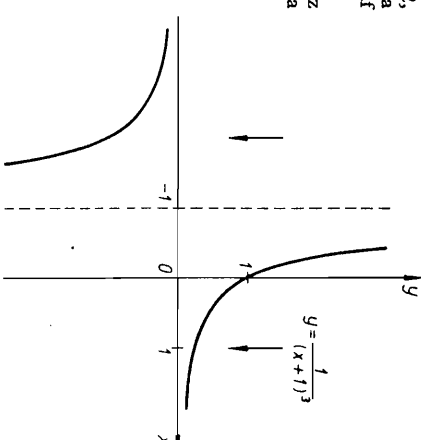
587. $y = x + 2 \arctg x$.

Računamo:

$$y' = 1 - \frac{2}{1+x^2}$$

$$y'' = \frac{4x}{(1+x^2)^2}$$

Iz $y' = 0$ slijedi $x_1 = -1$ i $x_2 = 1$.



Slika 89

Kako je $y''(-1) < 0$, a $y''(1) > 0$ funkcija ima maksimum u $\left[-1; -1 + \frac{3}{2}\pi\right]$, odnosno minimum u $\left[1; 1 + \frac{\pi}{2}\right]$.

Iz $y'' = 0$ slijedi $x = 0$, pa je $y(0) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$, pa je $I(0, \pi)$. Računanje y''' otpada, jer funkcija ima nalijevo od I jedini maksimum, pa je konveksna za $-\infty < x < 0$, a nadesno minimum, pa je konkavna za $0 < x < \infty$. Vidi sl. 53, uz zadatak 263.

$$588. y = x^6 - 6x^5 + \frac{15}{2}x^4 + 3x. \quad [I_1 \text{ za } x_1 = 1 \text{ i } I_2 \text{ za } x_2 = 3; \text{ konkavna za } -\infty < x < 1 \text{ i za } 3 < x < \infty, \text{ konveksna za } 1 < x < 3].$$

$$589. y = 3x^5 - 5x^4 + 3x - 2 \text{ i prikaži grafički} \quad [I(1; -1); \text{ konveksna za } -\infty < x < 1, \text{ konkavna za } 1 < x < \infty].$$

$$590. x = \frac{1}{x^2 - 4}.$$

[I nema; konkavna za $-\infty < x < -2$ i $2 < x < \infty$, konveksna za $-2 < x < 2$, nariši graf].

591. $y = e^{-x^2}$. Vidi tu Gaussovu krivulju na sl. 84 uz zad. 573.

$$\left[I_{1,2} \left[\pm \frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{e}} \right]; y_{\max}(0, 1); \text{ konkavna za } -\infty < x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ i } \frac{1}{\sqrt{2}} < x < +\infty, \text{ konveksna za } -\frac{1}{\sqrt{2}} < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \right].$$

$$592. y = \ln(1 + x^2). \quad [I_{1,2}(\pm 1, \ln 2), \text{ konveksna za } -\infty < x < -1 \text{ i za } 1 < x < \infty, \text{ a konkavna za } -1 < x < 1; \text{ nariši graf}].$$

K. Mehaničko, odnosno kinematičko zračenje prve i druge derivacije funkcija

Upute

Ako se neka veličina y mijenja u toku vremena t , tada derivacija y po vremenu t , tj. $D_t y = y'_t$, određuje brzinu te promjene. Ako je poznata veza između dviju promjenljivih x i y , tada možemo odrediti zavisnost između brzina i njihovih promjena i to po pravilu deriviranja složenih funkcija: Smatramo li da je $y = f(x)$ nezavisna promjenljiva x funkcija vremena t , tj. $x = \varphi(t)$, tada prema (124).

$$D_t y = D_x y \cdot D_t x, \quad (124)$$

ili

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t$$

a kako je:

$$y'_t = v_y = \text{brzina promjene } y \\ x'_t = v_x = \text{brzina promjene } x,$$

$$\text{slijedi: } y'_x = \frac{v_y}{v_x} = \frac{y'_t}{x'_t}. \quad (124b)$$

a to znači: derivacija y' funkcije $y = f(x)$ po x daje omjer brzina promjene funkcije y i argumenta x .

Napose, ako je zadana jednadžba gibanja tačke, tj. put s kao funkcija vremena t , tj.: $s = s(t)$

tada je uz pretpostavku pravocrtnog gibanja tačke brzina v a gibanja tačke u moment t $v(t) = s'(t)$. (135)

dok je akceleracija (ubrzanje) u moment t $a(t) = v'(t) = s''(t)$. (136)

Zadaci

593. Na krivulji $y = x^2 - 4x - 5$ odredi tačku T_1 u kojoj je rast ordinate 4 puta brži od rasta apscise.

Smatramo li da je $y = f(x)$, a $x = \varphi(t)$, dobivamo prema (124):

$$y'_t = y'_x \cdot x'_t = (2x - 4) \cdot x'_t, \text{ pa je } \frac{y'_t}{x'_t} = 2x - 4.$$

Odatle prema (124b) $\frac{v_y}{v_x} = 2x - 4 = \frac{4}{1}$ prema zadatku, pa je: $x_1 = 4$.

Uvrštenje u y daje $y_1 = -5$, pa je: $T_1(4, -5)$ tražena tačka.

Odredi koordinate tačka T_2 , T_3 i T_4 , ako je u T_2 $v_y = 0$, u T_3 v_y 6 puta veća od v_x , a u T_4 brzina pada y je 4 puta veća od v_x i sve prikaži grafički

$$[T_2(2; -9), T_3(5; 0), T_4(0, -5)].$$

594. Odredi onu vrijednost x za koju ordinata krivulje $y = \frac{x^2}{2}$ raste 4 puta brže nego ordinata krivulje $y = \ln x$.

$$\text{Prema (124b):} \quad \text{za } y = \frac{x^2}{2}: \quad v_1 = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2x}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{v_x}$$

$$\text{za } y = \ln x: \quad v_2 = \frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{x}{v_x}$$

Kako je prema zadatku $v_1 : v_2 = 4 : 1$, dobivamo $\frac{x}{v_x} : \frac{x}{v_x} = 4 : 1$, a odatle je $x = 2$.

595. Ordinata tačke koja opisuje kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ opada s brzinom 1,5 cm/s. Kojom brzinom se mijenja apscisa tačke, kad ordinata postane 4 cm druga?

Iz $y = \sqrt{25 - x^2}$ slijedi prema (124):

$$v_y = y'_x \cdot x'_t = -\frac{x}{\sqrt{25 - x^2}} \cdot x'_t = -\frac{x}{y} \cdot v_x. \quad (a)$$

Prema zadatku: $v_y = -\frac{3}{2}$, kad je $y=4$, a $x = \pm \sqrt{25-16} = \pm 3$.

Prema (a): $-\frac{3}{2} = -\frac{3}{4} v_x$, pa je $v_x = 2 \text{ cm/s}$ u $T_1(3, 4)$ i -2 cm/s u $T_2(-3, 4)$.

596. Tačka se giba po kubnoj paraboli $y = \frac{x^3}{12}$. Koja se od njenih koordinata mijenja brže?

Prema (124 b): $\frac{v_y}{v_x} = y'_x \frac{x^2}{4}$ dobivamo: $\frac{v_y}{v_x} = \frac{x^2}{4}$.

Za $|x| < 2$, taj je omjer < 1 , pa se ordinata mijenja sporije od apsisc za $-2 < x < 2$.

Za $|x| = 2$, taj je omjer $= 1$, pa su za $x = \pm 2$ brzine promjena ordinata i apsisa jednake.

Za $|x| > 2$ taj je omjer > 1 , pa se za $x < -2$ i $x > 2$ ordinate mijenjaju brže od apsisa. Nariši graf funkcije!

597. Polumjer r kugle raste jednoliko s brzinom $v_r = 2 \text{ m/s}$. Kakvim brzinama rastu oplošje i volumen kugle? Kakve su te brzine u momentu kad r postane 10 cm dug?

Uzevši u obzir da je za kuglu oplošje $O = 4\pi r^2$, a volumen $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, računamo prema (124):

$$v_O = O'_r = 8\pi r \cdot r'_r = 8\pi r \cdot 2 = 16\pi r \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$v_V = V'_r = 4\pi r^2 \cdot r'_r = 4\pi r^2 \cdot 2 = 8\pi r^2 \text{ cm}^3/\text{s}.$$

U momentu kad je $r = 10 \text{ cm}$:

$$v_O = 16\pi \cdot 10 = 160\pi \text{ cm}^2/\text{s}$$

$$v_V = 8\pi \cdot 100 = 800\pi \text{ cm}^3/\text{s}.$$

598. Tačka se giba po pravcu, pri čemu je udaljenost tačke od starta izražena u metrima određena jednačbom $s = t^3 - 2t^2 + 3t - 1$, gdje je t vrijeme izraženo u sekundama. Odredi brzinu i ubrzanje tačke na kraju pete sekunde.

Prema (135) i (136):

Brzina u momentu t : $v(t) = s'(t) = 3t^2 - 4t + 3$.

Ubrzanje u momentu t : $a(t) = v'(t) = s''(t) = 6t - 4$,

a na kraju pete sekunde: $v(5) = 58 \text{ m/s}$; $a(5) = 26 \text{ m/s}^2$.

599. Brzina pravocrtnog gibanja tijela razmjerna je s kvadratom iz prevajenog puta (npr. pri slobodnom padu $v = \sqrt{2gs}$). Dokaži da takvo gibanje nastaje pod djelovanjem stalne sile.

Po Newtonovu zakonu sila koja uzrokuje gibanje razmjerna je s ubrzanjem, tj.:

$$F = k \cdot s''(t). \quad (a)$$

Kako je prema uvjetu $v = s'(t) = \lambda \sqrt{s}$, gde je λ faktor razmjernosti, dobivamo:

$$v'(t) = s''(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot s'(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{s}} \cdot \lambda \sqrt{s} = \frac{\lambda^2}{2} = \text{const.}$$

Uvrštenje u (a) daje: $\text{sila } F = k \cdot \frac{\lambda^2}{2} = \text{const.}$

600. Tačka mase m titra uzduž osi X tako da je u momentu t njena udaljenost od položaja ravnoteže određena jednačbom:

$$x = A e^{-at} \cos(at + b).$$

Odredi brzinu gibanja tačke i silu koja na nj djeluje.

$$\text{Brzina } v = x'(t) = -aA e^{-at} [\sin(at + b) + \cos(at + b)].$$

$$\text{Ubrzanje } v' = x''(t) = 2a^2 A e^{-at} \sin(at + b).$$

$$\text{Sila } F = m \cdot x''(t) = 2ma^2 A e^{-at} \sin(at + b).$$

601. Točak se okreće tako da je kut zaokreta α razmjernan s kvadratom vremena. Prvi zaokret napravio je točak za 8 s . Odredi kutnu brzinu ω nakon 32 s poslije početka gibanja.

Prema zadatku:

$$\alpha = \lambda \cdot t^2, \quad (a)$$

gde je λ faktor razmjernosti. Uvrštenje $t = 8$ i $\alpha = 2\pi$ daje:

$$2\pi = \lambda \cdot 64, \text{ a odatle je } \lambda = \frac{\pi}{32}.$$

Uvrštenje u (a) daje

$$\alpha = \frac{\pi}{32} t^2,$$

pa je kutna brzina: $\omega = \alpha'(t) = \frac{\pi}{16} t$,

$$\text{a za } t = 32 \text{ s: } \omega = \frac{\pi}{16} \cdot 32 = 2\pi \frac{1}{s^2}.$$

602. Zadana je veza u obliku $y^2 = 12x$ između x i y . x raste jednoliko s brzinom $2 \frac{\text{jedinice}}{\text{sekunda}}$. Odredi brzinu rasta y za $x = 3$.

$$\left[2 \frac{\text{jedinice}}{\text{sekunda}} \text{ u (3); } 6 \right] \text{ i } \left[-2 \frac{\text{jedinice}}{\text{sekunda}} \text{ u (3); } -6 \right].$$

603. Stranica kvadrata raste s brzinom v . Odredi brzinu rasta opsega i površine kvadrata u momentu kad je stranica kvadrata jednaka a .

$$\left[4v \frac{\text{cm}}{\text{s}}; 2av \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \right].$$

604. Ovisnost množine Q produkta reakcije o vremenu t određena je formulom:

$$Q = a(1 + b e^{-mt}).$$

Odredi brzinu reakcije.

$$[m(a - Q)].$$

605. Tijelo mase $m = 3 \text{ kg}$ giba se pravocrtno po zakonu:

$$s = 1 + t + t^2,$$

pri čemu je put s izražen u cm, a vrijeme t u s. Odredi kinetičku energiju $\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$ tijela nakon 5 sekundi od početka gibanja. [181,5 · 10⁸ erga].

606. Kut θ , za koji se zaokreće točak nakon t s, iznosi

$$\theta = at^2 - b t + c,$$

gdje su a , b i c pozitivne konstante.

Odredi kutnu brzinu gibanja točka. Nakon koliko će vremena kutna brzina točka biti jednaka nuli?

$$\left[\omega = (2at - b) \frac{1}{s^2}; \omega = 0 \text{ za } t = \frac{b}{2a} \right]$$

607. Polumjer kugle raste jednoliko s brzinom 10 cm/s. Kojom brzinom raste volumen kugle u momentu kod polumjer kugle postane 100 cm dug? [10 cm/s].

608. Dva automobila se kreću stalnim brzinama $v_1 = 20$ km/h i $v_2 = 30$ km/h po ulicama koje se sijeku pod pravim kutom. Odredi nakon koliko će vremena razmak između automobila postati najkraći, ako su prva kola udaljena od raskršća 10 km, a druga 15 km?

$$\left[t = \frac{1}{2} \text{ sata} \right]$$

L. Ispitivanje toka funkcija i konstrukcija njihovih grafova

Postupak

Odredi:

- 1) područje definicije zadane funkcije,
- 2) tačke prekida funkcije i jednostrane limese funkcije u tim tačkama,
- 3) da li je funkcija parna, neparna, periodska,
- 4) nul-tačke funkcije i sjecišta s osi Y ,
- 5) asimptote grafa funkcije i to paralelne s osi Y , paralelne s osi X i kose,
- 6) tačke ekstrema funkcije,
- 7) tačke infleksije.

Na temelju tako dobivenih podataka konstruiraj graf funkcije iz kojeg se vide intervali rasta i opadanja funkcije kao i intervali konveksnosti i konkavnosti grafa. Ako tih podataka ne bi bilo dovoljno, izračunaj nekoliko tačaka grafa iz jednadžbe funkcije.

Zadaci

U zadacima 609 do 616 uklj. ispitaj tok zadanih funkcija i nariši njihove grafove.

609. $y = \frac{6x^2 - x^4}{9}$.

- 1) Funkcija je definirana za $-\infty < x < +\infty$.
- 2) Funkcija je neprekidna za sve x .
- 3) $y(-x) = y(x)$ - parna funkcija, graf je simetričan s obzirom na os Y .
- 4) $y = 0$ kad je $6x^2 - x^4 = x^2(6 - x^2) = 0$, tj. za:

$$x_{1,2} = 0 \text{ — dvostruka nul-tačka u kojoj graf dira os } X.$$

$$x_{3,4} = \pm \sqrt{6} \approx \pm 2,45 \text{ — dva sjecišta s osi } X.$$

Za $x=0$ $y=0$ — sjecište s osi Y .

5) Asimptota paralelnih s osi Y funkcija nema, jer je funkcija neprekidna.

Prema (88) računamo: $a = \lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, pa ni asimptota paralelnih s osi X nema.

Nema ni kosih asimptota $y = kx + l$, jer je:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \frac{1}{9} \lim_{x \rightarrow \infty} x(1-x)^2 = \infty.$$

6) Iz $y' = \frac{1}{9}(12x - 4x^3) = 0$ slijedi:

$$x_1 = 0 \quad \text{i} \quad x_{2,3} = \pm \sqrt{3}$$

$$y'' = \frac{4}{3}(1 - x^2)$$

za $x_1 = 0$ $y'' = \frac{4}{3} > 0$, pa za $x_1 = 0$ ima y minimum.

Za $x_{2,3} = \pm \sqrt{3}$ $y''_{2,3} < 0$, pa y ima maksimum u $x_{2,3} = \pm \sqrt{3} \approx \pm 1,73$.

Uvrštenje u y daje:

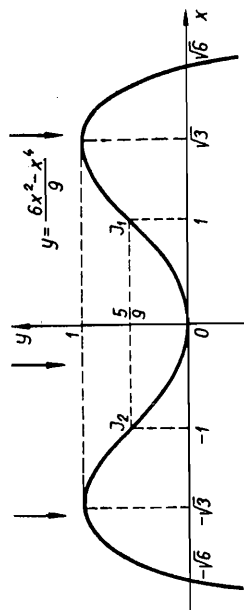
$$y_{\min} = 0; \quad y_{\max} = 1.$$

$$O(0; 0); \quad M_{1,2}(\pm \sqrt{3}, 1).$$

7) $y'' = \frac{4}{3}(1 - x^2)$.

Iz $y'' = 0$ slijedi $x_{1,2} = \pm 1$, pa je $y'_{1,2} = \frac{5}{9}$. $I_{1,2} \left(\pm 1; \frac{5}{9} \right)$.

Rišemo graf funkcije. Vidi sl. 90.



Slika 90

610. $y = x^2 \sqrt{e^x}$.

- 1) Funkcija $y = x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x}$ definirana je za sve x , osim za $x=0$.
- 2) U tački $x=0$ funkcija je prekinuta: ona je određena u blizini te tačke ali nije određena u samoj tački. Da to pokažemo, računajmo lim y slijeva i zdesna od $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow -0} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{2}x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{1}{2}x} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +0} \left(x^2 \cdot e^{\frac{1}{x}} \right) = 0; \infty = \text{pomocu } L' \text{ Hospitalava pravila} =$$

$$= (\text{vidi zadatak 474}) = +\infty.$$

Dakle, u tački $x=0$ limes slijeva jednak je nuli, a zdesna $+\infty$.

- 3) Funkcija nije parna, nije neparna i nije periodska.
- 4) Funkcija nigdje nije negativna, pa ne siječe os X , a ni os Y .
- 5) Kako je $\lim_{x \rightarrow +0} y = +\infty$, os Y je asimptota zadane krivulje.

Drugi asimptota nema, jer je $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^{\left(\frac{1}{x}\right)} = +\infty$.

$$6) y' = e^x(2x-1).$$

$$\text{Iz } y' = 0 \text{ slijedi: } x_1 = \frac{1}{2}.$$

$$y'' = \frac{1}{e^x(2x^2-2x+1)}; y'' \left[\frac{1}{2} \right] > 0,$$

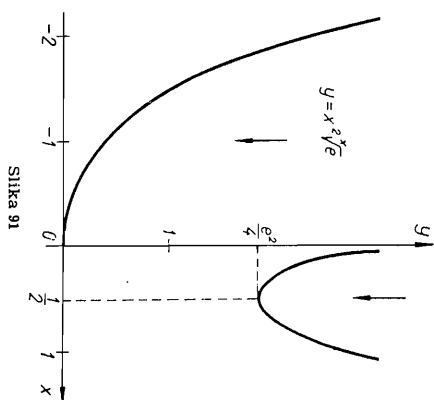
pa je:

$$y_1 = y \left[\frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} e^2 = \text{minimum funkcije } y.$$

- 7) $y' \neq 0$ za sve x , pa funkcija nema tačka infleksije.

Da narišemo graf funkcije izračunajmo još nekoliko tačaka: $y(-2) = \frac{4}{\sqrt{e}} \approx 2,42$;

$$y(-1) = \frac{1}{e} \approx 0,37 \text{ i } y(1) = e \approx 2,72. \text{ Vidi sl. 91.}$$



Slika 91

$$611. y = \frac{1}{2} \sin 2x + \cos x.$$

- 1) Funkcija je definirana za $-\infty < x < +\infty$.
- 2) Funkcija je neprekidna za sve x .
- 3) Periodska funkcije najmanjeg perioda $P=2\pi$, pa ćemo u daljnjem uzeti u obzir period od $-\pi$ do $+\pi$. U tim graničnim tačkama funkcija prima vrijednost $y(-\pi)=y(\pi)=-1$.
- 4) Za $x=0$ $y=1$ — presjek s osi Y : $(0,1)$.

$$\text{Za } y=0: \frac{1}{2} \cdot 2 \sin x \cos x + \cos x = 0 \quad \cos x (\sin x + 1) = 0.$$

$$\text{Slijedi: } \cos x = 0: x = \frac{\pi}{2} (2k+1), \text{ gdje je } k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\sin x = -1: x = -\frac{3}{2} \pi + 2k\pi.$$

U intervalu $[-\pi, +\pi]$ leže samo dvije nultačka: $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ i $x_2 = \frac{\pi}{2}$.

- 5) Asimptota paralelnih s osi Y nema, jer je funkcija neprekidna i određena za sve x ; nema ni kosih asimptota, jer je $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = 0$, a $l = \lim_{x \rightarrow \infty} (y-0)$ ne postoji.

- 6) Iz $y' = \cos 2x - \sin x = 0$, odnosno $2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$ slijedi $(\sin x)_1 = -1$ i $(\sin x)_2 = \frac{1}{2}$.

$$\text{U intervalu } [-\pi, \pi] \text{ leže riješenja } x_1 = -\frac{\pi}{2}, x_2 = \frac{\pi}{6} \text{ i } x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5}{6}\pi.$$

$$y'' = -2 \sin 2x - \cos x$$

$$y'' \left[-\frac{\pi}{2} \right] = 0; y'' \left[\frac{\pi}{6} \right] = -\frac{3}{2} \sqrt{3} < 0; y'' \left[\frac{5}{6}\pi \right] = \frac{3}{2} \sqrt{3} > 0.$$

Slijedi:

$$y_{\max} = y \left[\frac{\pi}{6} \right] = \frac{3}{4} \sqrt{3} \approx 1,3; y_{\min} = y \left[\frac{5}{6}\pi \right] = -\frac{3}{4} \sqrt{3} \approx -1,3.$$

$$\text{Za } x_1 = -\frac{\pi}{2} \text{ računamo } y''' = -4 \cos 2x + \sin x \text{ i } y''' \left[-\frac{\pi}{2} \right] = 3 \neq 0.$$

Za $x_1 = -\frac{\pi}{2}$ ima y tačku infleksije.

- 7) $y \left[-\frac{\pi}{2} \right] = 0$, pa je tačka infleksije $I_1 \left[-\frac{\pi}{2}, 0 \right]$.

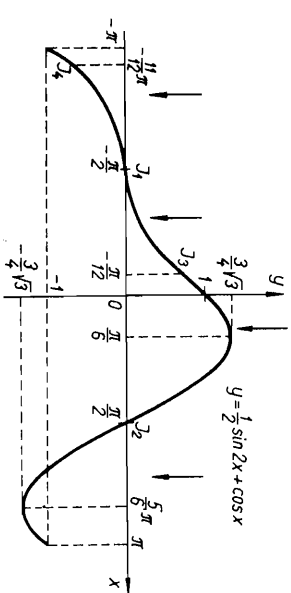
$$\text{Iz } y'' = \cos x (4 \sin x + 1) = 0 \text{ slijedi } \cos x = 0 \text{ i } \sin x = -\frac{1}{4}.$$

U intervalu $[-\pi, \pi]$ leže samo ova rješenja tih jednačini:

$$x_1 = -\frac{\pi}{2}, \text{ koje daje već određenu tačku } I_1. \quad x_2 = \frac{\pi}{2} \text{ daje } I_2 \left[\frac{\pi}{2}, 0 \right];$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{12} \text{ daje } I_3 \left[-\frac{\pi}{12}; 0,72 \right] \text{ i } x_4 = -\frac{11}{12}\pi \text{ daje } I_4 \left[-\frac{11}{12}\pi; -0,72 \right].$$

Rišemo graf. Vidi sl. 92.



Slika 92

612. $y = \frac{1}{2}(x+2)^2(x-1)^3$.

$[y_{\max} = y(-2) = 0; y_{\min} = y(-0,8) = -4,2; I_1(1,0); I_2(-1,5; -2,0) \text{ i } I_3(-0,07; -2,3)]$.

613. $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$. $[y_{\max} = y(0) = -2; y_{\min} = y(2) = 2; \text{asimptote } y = 1 \text{ i } y = x - 1]$.

614. $y = \sqrt[3]{1 - x^3}$. [Ekstrema nema; $I_1(0,1); I_2(1,0)$; asimptota $y = -x$].

615. $y = \frac{x}{\ln x}$. $\left[y_{\min} = y(e) = e; I\left[e^2; \frac{e^2}{2}\right]; \text{asimptota } x = 1; \lim_{x \rightarrow 0} y = 0 \right]$.

616. Na gore nevedeni način, tj. po tačkama 1) do 7) uklj., ispitaj funkcije navedene u zadacima 258 do 260 uklj. i nariši njihove tačnije grafove.

VII. REDOVI

A. Redovi brojeva

a. OSNOVNI POJMOVI KONVERGENCIJE I DIVERGENCIJE REDOVA

Upute

Red brojeva

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

konvergira, ako niz parcijalnih suma toga reda, tj. niz kome je n -ti član:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

ima konačan određen limes S , tj. ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S.$$

Ako taj $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ ne postoji, tj. beskonačan je, ili ako članovi toga niza osciliraju između konačnih ili beskonačnih meda, red brojeve divergira.

Razlika $S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + u_{n+3} + \dots$ zove se ostatak reda.

Da red konvergira nužno je, ali nije dovoljno, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0,$$

tj. da članovi reda po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže k nuli.

Da red konvergira nužno je i dovoljno da svaki isječak reda:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+r}|,$$

gdje je n dovoljno velik, a broj članova r bilo koji, možemo načiniti po apsolutnoj vrijednosti po volji malenim, tj. ako je:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_{n+1} + u_{n+2} + \dots + u_{n+r}| = 0.$$

Zadaci

U zadacima 617 do 623 uki, napiši n -ti član zadanog reda i ispitaj da li je ispunjen nužni uvjet konvergencije reda.

$$617. \frac{2}{3} + \frac{4}{5} + \frac{6}{7} + \dots$$

Opažamo da su u brojnicima članova reda parni brojevi, a u nazivnicima neparni, a kako je $2n$ opći oblik parnog broja, a $(2n-1)$, odnosno $(2n+1)$ neparnog broja, pišemo:

$$u_n = \frac{2n}{2n-1}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1.$$

Računamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n-1} = 1.$$

Nužni uvjet konvergencije reda nije ispunjen, pa zadani red divergira.

$$618. 1 + \frac{3}{4} + \frac{5}{9} + \frac{7}{16} + \frac{9}{25} + \dots$$

Budući da su u brojnicima neparni brojevi, a u nazivnicima kvadrati prirodnih brojeva, pišemo

$$u_n = \frac{2n-1}{n^2}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0.$$

Nužni uvjet konvergencije ispunjen je, red može, ali ne mora konvergirati. Kako je pokazano u zadatku 639, zadani red divergira.

$$619. \frac{1}{2^3} + \frac{2}{3^3} + \frac{3}{4^3} + \dots$$

$$u_n = \frac{n}{(n+1)^3}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(n+1)^3} = \text{brojnik i nazivnik dijelimo sa } n^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = 0.$$

Red može konvergirati. (Red konvergira, vidi zadatak 640.)

$$620. \sum_{n=1}^{\infty} n \arctg \frac{1}{n} = 1 \cdot \arctg \frac{1}{2} + 2 \arctg \frac{1}{3} + 3 \arctg \frac{1}{4} + \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \cdot \arctg \frac{1}{n} \right] = \infty \cdot 0 = \text{po L'Hospitalu} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{0}{0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{-1}{n^2}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = 1.$$

Red divergira.

$$621. \cos 1 + \cos \frac{1}{2} + \cos \frac{1}{3} + \dots$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{1}{n} = 1, \text{ red divergira} \right].$$

$$622. \frac{2}{1} + \frac{5}{8} + \frac{10}{27} + \frac{17}{64} + \dots$$

$$\left[\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 1}{n^3} = 0 \right].$$

$$623. \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} + \frac{7}{8} + \dots$$

[divergira].

U zadacima 624 do 628 uki, odredi: 1) n -ti član reda (u_n), 2) sumu prvih n članova reda (S_n), 3) dokazi konvergenciju, odnosno divergenciju reda i 4) odredi sumu reda (S).

$$624. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$$

1) Uzevši u obzir da su $(2n-1)$ i $(2n+1)$, gde je $n=1,2,3,\dots$ dva uzastopna neparna broja, dobivamo:

$$u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$$

Rastavljanje u_n u parcijalne razlomke (vidi tip I neodređenih integrala u dijelu II Repetitorija) daje

$$u_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right].$$

2) Prikažemo li u tom obliku svaki član zadanog reda, dobivamo S_n u obliku:

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{5} - \frac{1}{7} \right] + \dots + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right].$$

Vidimo da se članovi u zagradama međusobno ukidaju, osim prvog i posljednjeg člana, tako da ostaje:

$$S_n = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{2n+1} \right].$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{1}{2n+1} \right] = \frac{1}{2}.$$

4) $S = \frac{1}{2}$ = konačni određeni broj, pa zadani red konvergira i suma mu je $\frac{1}{2}$, tj.

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots = \frac{1}{2}.$$

$$625. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 13} + \dots$$

1) Opažamo da je drugi faktor svakog nazivnika veći za 3 od prvog faktora i da je prvi faktor nazivnika svakog člana za 3 veći od prvog faktora prethodnog člana, pa je:

$$u_n = \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}.$$

$$628. \frac{1}{1.7} + \frac{1}{3.9} + \frac{1}{5.11} + \dots,$$

$$\left[u_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+5)} = \frac{1}{6} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+5} \right) \right];$$

$$S_n = \frac{1}{6} \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+3} - \frac{1}{2n+5} \right); S = \frac{23}{90}.$$

b. REDOVI S POZITIVNIM ČLANOVIMA. KRITERIJI KONVERGENCIJE

Pomoću tih kriterija možemo odrediti da li zadani red konvergira ili divergira, ali kriteriji ne daju sumu reda!

1. Kriterij uspoređivanja

Upute

Ako red s pozitivnim članovima

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \quad (a)$$

usporedimo s drugim redom s pozitivnim članovima

$$v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} v_n \quad (b)$$

za koji znamo da konvergira, odnosno divergira, i ako od početka reda ili počevši od nekog rednog broja n vrijedi:

1) $u_n \leq v_n$ a red (b) konvergira, tada konvergira i red (a);

2) $u_n \geq v_n$ a red (b) divergira, tada divergira i red (a).

Obično se red, čija se konvergencija ispituje, uspoređuje s beskonačnim geometrijskim redom:

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_1 q^n,$$

koji konvergira za $|q| < 1$ i suma mu je:

$$S = \frac{a_1}{1-q}, \quad (140)$$

dok za $|q| \geq 1$ divergira

ili s harmoničkim redom:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \quad \text{koji divergira.}$$

Primijetimo da je harmonički red poseban slučaj reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}, \quad \text{koji za } \alpha > 1 \text{ konvergira, a za } \alpha \leq 1 \text{ divergira.} \quad (140a)$$

$$2) \text{ Uzevši u obzir da } u_n \text{ možemo napisati u obliku: } u_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right)$$

(pokaži to!), pišemo na taj način pojedine članove reda, pa dobivamo:

$$S_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{10} \right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1} \right).$$

Opet će preostati samo prvi i posljednji član, pa je: $S_n = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{3n+1} \right).$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

$$4) S = \frac{1}{3} = \text{konačni određeni broj. Zadani red konvergira, a suma mu je } \frac{1}{3}.$$

$$626. \frac{5}{6} + \frac{13}{36} + \dots + \frac{3^n + 2^n}{6^n} + \dots$$

Prema zadanom $u_n = \frac{3^n + 2^n}{6^n}$ pišimo nekoliko članova zadanog reda:

$$\frac{3+2}{6} + \frac{3^2+2^2}{6^2} + \frac{3^3+2^3}{6^3} + \dots + \frac{3^n+2^n}{6^n} + \dots,$$

ili

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{3} \right)^n + \dots,$$

ili

$$\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} \right)^2 + \left(\frac{1}{2} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2} \right)^n + \left(\frac{1}{3} \right)^2 + \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{3} \right)^n + \dots$$

Vidimo da je zadani red zbroj dvaju geometrijskih redova, kojem su prvi članovi $a_1 = \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{1}{3}$, dok su kvocijenti $q = \frac{1}{2}$, odnosno $\frac{1}{3}$. Kako su $|q| < 1$ oba rede konvergiraju, pa prema formuli

$$S = \frac{a_1}{1-q} \quad (140)$$

dobivamo:

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Zadani red konvergira i suma mu je $\frac{3}{2}$.

$$627. \frac{1}{1.4} + \frac{1}{2.5} + \frac{1}{3.6} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{5.8} + \dots$$

$$\left[u_n = \frac{1}{n(n+3)} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3} \right) \right]; S_n = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right); S = \frac{11}{18}.$$

Zadaci

U zadacima 629 do 638 uklj. ispitaj konvergenciju zadanih redova pomoću kriterija uspoređivanja.

$$629. \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}} + \dots$$

Usporedimo zadani red s geometrijskim redom: $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \dots$

koji konvergira, jer je $q = \frac{1}{2} < 1$.

Vidimo da su svi članovi zadanog reda, počevši od drugoga, manji od pripadnih članova konvergentnog geometrijskog reda, pa zadani red konvergira.

$$630. \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{8} + \dots + \sin \frac{\pi}{2^n} + \dots$$

Usporedimo zadani red s geometrijskim redom: $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} + \dots + \frac{\pi}{2^n} + \dots$,

koji konvergira, jer je $q = \frac{1}{2} < 1$, a kako je $|\sin x| < |x|$ zaključujemo da zadani red konvergira.

$$631. 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \dots$$

Usporedimo zadani red s divergentnim harmoničkim redom:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

Svaki član $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ zadanog reda, počevši od drugoga, veći je od pripadnog člana harmoničkog reda, pa zadani red divergira.

$$632. \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{3 \cdot 6} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+4)} + \dots$$

Članovi zadanog reda počevši od drugog člana manji su od pripadnih članova konvergentnog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots, \text{ pa zadani red konvergira.}$$

[Vidi (140a)].

$$633. \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 1}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 2}} + \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3}} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}} > \frac{1}{\sqrt{n^2}}, \text{ tj. } u_n > \frac{1}{n}, \text{ pa zadani red divergira.}$$

$$634. \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{n^2+1} + \dots \quad \left[\text{Usporedi sa } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}; \text{ konvergira.} \right]$$

$$635. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots \quad [\text{Usporedi s harm. redom; divergira.}]$$

$$636. 1 + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 3^2} + \frac{1}{4 \cdot 3^4} + \dots + \frac{1}{n \cdot 3^{n-1}} + \dots \quad \left[\text{Usporedi sa } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}; \text{ konvergira.} \right]$$

$$637. \frac{|\sin \alpha|}{1^2} + \frac{|\sin 2\alpha|}{2^2} + \frac{|\sin 3\alpha|}{3^2} + \dots + \frac{|\sin n\alpha|}{n^2} + \dots \quad [\text{Konvergira.}]$$

$$638. \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)} + \dots \quad \left[\text{Usporedi sa } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}; \text{ konvergira.} \right]$$

Uputa

Spomenimo još granični oblik kriterija uspoređivanja. Ako su $\sum u_n$ i $\sum v_n$ redovi s pozitivnim članovima i postoji

$$\text{konačni } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = L > 0,$$

tada oba reda ili istodobno konvergiraju ili istodobno divergiraju.

Npr. imamo li ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$, odredimo poznati:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 > 0.$$

Kako harmonički red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, divergira i zadani red $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$.

Ima li red oblik $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P_r(n)}{Q_s(n)}$, gdje su $P_r(n)$ i $Q_s(n)$ polinomi stepena r i s , tada se

određivanje konvergencije, odnosno divergencije reda tog oblika svodi na uspoređivanje

zadanog reda s redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, gdje je $\alpha = s - r$, a taj red, kako znamo, konvergira za

$\alpha > 1$, a divergira za $\alpha \leq 1$.

To uspoređivanje provodimo najjednostavnije tako da računamo limes kvocijenta n -tih članova tih redova, pri čemu ako je taj limes konačan i >0 , oba reda istodobno konvergiraju ili divergiraju.

Zadaci

U zadacima 639 do 645 uklj. ispitaj konvergenciju zadanih redova pomoću graničnog kriterija uspoređivanja.

$$639. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2}.$$

Kako je $\alpha = 2 - 1 = 1$, usporedimo zadani red s harmoničkim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ koji divergira.

$$\text{Računamo: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 - \frac{1}{n} \right] = 2 > 0.$$

Zadani red divergira kao i harmonički red.

$$640. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^3}.$$

$\alpha = s - r = 3 - 1 = 2$ pa usporedimo s konvergentnim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{n+1} \right]^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^3 = 1 > 0. \text{ Zadani red također konvergira.}$$

$$641. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 1}.$$

$$\alpha = 2 - 0 = 2.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n^2 - 4n + 1} : \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2 - 4n + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}} = 1 > 0. \text{ Red konvergira.}$$

$$642. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1+n^2}{1+n^3} \right]^2.$$

$$\alpha = s - r = 6 - 4 = 2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1+n^2}{1+n^3} \right)^2 : \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+n^2)^2}{(1+n^3)^2} \cdot \frac{1}{n^2} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{1}{n^3} + 1} \right)^2 = 1 > 0. \text{ Zadani red konvergira.}$$

$$643. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(n-1)^2}.$$

[Divergira.]

$$644. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{(n^3-1)^2}.$$

[$\alpha = 5$; red konvergira.]

$$645. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^3}{n^4 + 3n^2 + 2}.$$

[Divergira.]

2. D' Alembertov kriterij

Uputa

Za red s pozitivnim članovima:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + u_{n+1} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

računamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = L.$$

(141)

Ako je: $L < 1$ red konvergira,

$L > 1$ red divergira,

$L = 1$ neodlučno.

Zadaci

U zadacima 646 do 653 uklj. ispitaj konvergenciju zadanih redova pomoću D' Alembertova kriterija.

$$646. \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \dots + \frac{1}{(2n+1)!} + \dots$$

Kako je $u_n = \frac{1}{(2n+1)!}$ a $u_{n+1} = \frac{1}{(2n+3)!}$, računamo prema (141):

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1)(2n+1)(2n+3)} = \frac{1}{2n+3}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+3} = 0$$

$L = 0 < 1$ red konvergira.

$$647. \frac{2}{1^2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{3^2} + \dots$$

$$u_n = \frac{n}{(n-1)^2}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{n^2}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n-1)^2}{n^2 \cdot n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 \right] = 1,$$

ti, neodlučno, ali pomoću graničnog kriterija uspoređivanja može se lako pokazati da taj red divergira (vidi zadatak 643).

$$648. \lg \frac{\pi}{4} + 2 \lg \frac{\pi}{8} + 3 \lg \frac{\pi}{16} + 4 \lg \frac{\pi}{32} + \dots$$

$$u_n = n \lg \frac{\pi}{2^{n+1}}; \quad u_{n+1} = (n+1) \lg \frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1) \lg \frac{\pi}{2^{n+2}}}{n \lg \frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n} \right] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg \frac{\pi}{2^{n+2}}}{\lg \frac{\pi}{2^{n+1}}} =$$

$$= 1 \cdot \frac{0}{0} = \text{po L' Hospitalu dobivamo nakon prvog poteza i uređenja} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+4}}{2^{3n+5}} = \frac{1}{2} < 1 \text{ red konvergira.}$$

$$649. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}.$$

$$u_n = \frac{3^n \cdot n!}{n^n}; \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{3^{n+1} \cdot (n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{3^n \cdot n!} = \frac{3(n+1)n^n}{(n+1)^n(n+1)} = 3 \left[\frac{n}{n+1} \right]^n = 3 \left[1 + \frac{1}{n} \right]^{-n}$$

$$L = 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n} \right]^n} = 3 \cdot \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{3}{e} = \frac{3}{2,718} > 1 \text{ red divergira.}$$

$$650. \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} + \dots \quad \left[L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2^{n+1}}; \frac{n}{2^n} \right) = \frac{1}{2}, \text{ red konvergira} \right].$$

$$651. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}. \quad \left[L = \frac{9}{8}, \text{ red divergira} \right].$$

$$652. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{5^n}. \quad [L = +\infty, \text{ red divergira}].$$

$$653. \sum_{n=3}^{\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}.$$

$$\left[u_{n+1} = \frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}; \quad L = 0, \text{ red konvergira} \right].$$

3. Cauchyev kriterij

Uputa

Taj se kriterij obično primjenjuje kad u_n ima oblik n -te potencije funkcije od n .
Za red s pozitivnim članovima:

$$u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

računamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = L.$$

(142)

$L < 1$ red konvergira,

$L > 1$ red divergira,

$L = 1$ neodlučno.

Zadaci

U zadacima 654 do 660 uki. ispitaj konvergenciju zadanih redova pomoću Cauchyeva kriterija.

$$654. \frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln^2 3} + \frac{1}{\ln^3 4} + \frac{1}{\ln^4 5} + \dots$$

$$u_n = \frac{1}{\ln^n(n+1)}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln^n(n+1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = 0 < 1 \text{ red konvergira.}$$

$$655. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}} = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n}{1+n} \right]^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^n =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left[1 + \frac{1}{n} \right]^n} = \frac{1}{3e} < 1 \text{ red konvergira.}$$

$$656. \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2 \left[\frac{n+1}{n} \right]^{n^2}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2}{2^n} \left[\frac{n+1}{n} \right]^{n^2}} = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sqrt[n]{2} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right] =$$

$$657. \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2^{n^2} + 1}{3^{n^2} - 1} \right]^n.$$

$$\left[L = \frac{2}{3} < 1; \text{red konverira} \right].$$

$$658. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$$

$[L=0, \text{red konvergi}r]$.

$$659. \quad \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \frac{4}{9} + \dots + \left[u_n = \frac{n}{2n+1} \right]^2; \quad L = \frac{1}{2}.$$

660. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$

$[L=7]$

4. Raabeov kriterij

Uputa

Za red s pozitivnim članovima

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n + u_{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

računamo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 \right] = L$$

Ako je

 $L < -1$ red konvergira
$$L \geq -1 \text{ red divergira.}$$

Raabeov kriterij ima prednost prema d'Alembertovu, jer kadšto odlučuje tamo gdje d'Alembertov kriterij zataji.

Zadaci

U zadacima 661 do 665 uklj. ispitaj konvergenciju zadanih redova pomoću Raabeova kriterija.

661. Harmonički red $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots \right)$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n+1} \cdot \frac{n-1}{1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{n-n-1}{n+1} \right) = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = -1.$$

Harmonički red divergira.

D'Alembertov kriterij daje neodlučan rezultat $L=1$! Pokaži to!

$$662. \quad 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots = \frac{8}{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n^2}{(n+1)^2} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \infty \cdot 0 \stackrel{0 \cdot \infty}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$$

$$\frac{0}{0} = \frac{0}{0} \text{ po L'Hospitalu} = -2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} = -2 < -1 \text{ red konvergira.}$$

Pokaži da je i u ovom primjeru zatajio d'Alembertov kriterij!

$$663. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}.$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1) \cdot 2^n}{2^{n+1} \cdot n} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{n+1}{2n} - 1 \right] = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} (-n+1) = -\infty < -1 \text{ red konvergra.}$$

$$664. \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} = \frac{1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \dots + \frac{n^n}{n!} + \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1)^{n-1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot n^n} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{(n+1)^{n-1} \cdot n!}{n!(n+1)n^n} - 1 \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} n \left[\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - 1}{\frac{n+1}{n}} \right] = \underbrace{\infty(e-1) = \infty > -1}_{\text{red divergira.}}$$

665. Ispitaj po Raabeu konvergenciju redova navedenih u zadacima 643 i 651 do 653 uklj.

c. ALTERNIRANI REDOVI. LEIBNIZOV KRITERIJ

Uputa

To su redovi s naizmjenice pozitivnim i negativnim članovima:

$$8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} u_n = u_1 - u_2 + u_3 - \dots + (-1)^{n-1} u_n + (-1)^n u_{n+1} + \dots$$

Faktor $(-1)^{n-1}$ daje za $n=1, 2, 3, \dots$ naizmjenice $+1$ i -1 , pa je značajan za alternirani red.

Alternirani red konvergira, ako njegovi članovi po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže k nuli. To je Leibnizov kriterij.

Svojstvo alterniranih redova

Apoksimiramo li sumu alterniranog reda pomoću parcijalne sume toga reda, vršimo grešku koja je po apsolutnoj vrijednosti manja od prvog zanemarenog člana i ima s njim isti predznak.

To znači:

$$|S - S_n| = |S - (u_1 - u_2 + u_3 + \dots + (-1)^{n-1} u_n)| = |R_n| < u_{n+1}.$$

Zadaci

U zadacima 666 do 670 uklj. ispitaj konvergenciju zadanih redova i odredi s tačnošću 0,01 sume tih redova.

$$666. \quad 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \frac{1}{8^3} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^3}.$$

Zadani red konvergira, jer je alternirani red, čiji članovi po apsolutnoj vrijednosti padaju i teže k nuli:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

Da odredimo sumu S reda s tačnošću 0,01, moramo pronaći prvi po redu član koji je po apsolutnoj vrijednosti manji od 0,01, a to je:

$$|u_4| = \frac{1}{6^3} = \frac{1}{216} \approx 0,0045 < 0,01.$$

$$S \approx S_3 = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} = \frac{57}{64} = 0,89 \pm 0,01 \text{ i to na više, jer je } u_4 < 0.$$

$$667. \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n)^2} = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} - \frac{1}{12^2} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n)^2} + \dots$$

Zadani red konvergira po Leibnizu. Odredimo sumu S reda s tačnošću 0,01. Vidimo da je

$$|u_4| = \left| -\frac{1}{144} \right| \approx 0,007 < 0,01, \text{ pa je}$$

$$S \approx S_3 = \frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} = 0,31 \pm 0,01.$$

$$668. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}. \quad [S \approx 0,63].$$

$$669. \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(n+1)(n+2)}. \quad [0,04].$$

$$670. \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 + 1}.$$

[-0,410].

d. REDOVI S POZITIVNIM I NEGATIVNIM ČLANOVIMA POREDANIM BILLO KAKO. APSOLUTNO KONVERGENTNI REDOVI. BEZUVJETNO I UVJETNO KONVERGENTNI REDOVI

Uputa

Zadani red konvergira apsolutno, ako konvergira red apsolutnih vrijednosti njegovih članova. Ako red konvergira apsolutno, on konvergira kako je napisan.

Red konvergira bezuvjetno, ako njegova suma ne ovisi o poretku članova reda.

U vjetno konvergentni red je onaj red kojemu suma ovisi o poretku članova reda.

Da red konvergira bezuvjetno nužno je i dovoljno da konvergira apsolutno.

Zadaci

671. U zadacima 666 i 667 dokazali smo da zadani alternirani redovi konvergiraju. Pokaži da oba reda konvergiraju i bezuvjetno!

$$\text{Napišimo red apsolutnih vrijednosti članova reda iz zadatka 666: } 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{6^3} + \dots$$

Dobivamo

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{6^3} + \dots \quad (a)$$

i usporedimo taj red s konvergentnim redom:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots \quad (b)$$

(vidi zadatak 662).

Budući da su članovi reda (a) počevši od drugog člana manji od pripadnih članova konvergentnog reda (b), zadani red (a) također konvergira, pa alternirani red konvergira apsolutno, dakle i bezuvjetno.

Za alternirani red iz zadatka 667 $\frac{1}{3^2} - \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} - \dots$ red apsolutnih vrijednosti članova toga reda glasi:

$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \dots$$

Uspoređenje toga reda s konvergentnim redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ vodi do zaključka da red apsolutnih članova konvergira, pa alternirani red $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{(3n)^2}$ konvergira apsolutno, dakle i bezuvjetno.

U zadacima 672 do 675 uklj. ispitaj da li zadani alternirani redovi konvergiraju bezuvjetno ili uvjetno.

$$672. \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

Zadani alternirani red konvergira po Leibnizu, jer je $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{\ln(n+1)} \right| = 0$. Međutim, red apsolutnih vrijednosti članova toga reda, tj. red:

$$\frac{1}{\ln 2} + \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} + \dots + \frac{1}{\ln(n+1)} + \dots$$

divergira, jer su članovi toga reda veći od pripadnih članova divergentnog harmoničkog

reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, pa zadani alternirani red ne konvergira apsolutno, već samo uvjetno:

$$673. \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \sqrt[n]{n}} = -\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1/3}} + \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)^{1/3}} + \dots$$

Zadani alternirani red konvergira po Leibnizovu kriteriju. Red apsolutnih vrijednosti članova toga reda, tj. red:

$$\frac{1}{2\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{3}} + \dots + \frac{1}{n^{1/3}} + \dots$$

također konvergira, jer red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha = \frac{4}{3} > 1$. (Pokaži to pomoću Ra-

abcova kriterija!)

Zaključak: zadani alternirani red konvergira ne samo kako je zadan, već i apsolutno, pa dakle i bezuvjetno.

$$674. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n} = -\operatorname{tg} 1 + \operatorname{tg} \frac{1}{2} - \dots + (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{n} + \dots \quad [\text{Konvergira uvjetno.}]$$

$$675. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n+1}} \quad [\text{Konvergira uvjetno.}]$$

B. Redovi funkcija

a. OPĆENITI REDOVI FUNKCIJA

1. Područje konvergencije reda funkcija

Uputa

Red funkcija $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots + u_n(x) + \dots$ prelazi za različite vrijednosti x u različite redove brojeva koji mogu biti konvergentni ili divergentni.

Pod područjem konvergencije reda funkcija razumije se interval u kojem leže one vrijednosti x , za koje red funkcija konvergira. Taj interval može biti zatvoren, otvoren ili poluotvoren.

Područje konvergencije reda funkcija često možemo odrediti pomoću poznatih nam kriterija konvergencije.

Zadaci

U zadacima 676 do 681 uklj. odredi područja konvergencije zadanih redova funkcija.

$$676. \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} = e^{-x} + e^{-2x} + e^{-3x} + \dots + e^{-nx} + \dots$$

Kako su članovi reda pozitivni za sve x , možemo primijeniti Cauchyev kriterij:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{e^{-nx}} = e^{-x}.$$

Kako je za $x > 0$ limes $L < 1$, dok je $L > 1$ za $x < 0$, zaključujemo da zadani red konvergira za pozitivne x i divergira za negativne x .

Za $x = 0$ zadani red prelazi u red brojeva: $1 + 1 + 1 + \dots$ koji očito divergira, pa je: $0 < x < +\infty$ područje konvergencije zadanog reda.

$$677. \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x = \ln x + \ln^2 x + \ln^3 x + \dots$$

Prelazimo na red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\ln x|^n = |\ln x| + |\ln x|^2 + |\ln x|^3 + \dots,$$

da možemo primijeniti Cauchyev kriterij:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\ln x|^n} = |\ln x|.$$

Red apsolutnih vrijednosti konvergira za $L = |\ln x| < 1$, tj. u intervalu $\frac{1}{e} < x < e$, jer su

$$\left| \ln \frac{1}{e} \right| = |-\ln e| = 1, \text{ a } \ln e = 1.$$

Znamo: ako red konvergira apsolutno, on konvergira kako je zadan, pa je isti otvoreni interval:

$$\frac{1}{e} < x < e$$

područje konvergencije i zadanog reda.

$$678. \sum_{n=1}^{\infty} (2-x^2)^n = (2-x^2) + (2-x^2)^2 + (2-x^2)^3 + \dots$$

Zadani red možemo smatrati geometrijskim redom kvocijenta $q = 2 - x^2$, a taj red, kako znamo, konvergira za $|q| = |2 - x^2| < 1$

Odate slijedi:

$$\begin{aligned} -1 < 2 - x^2 < +1 \\ -2 - 2 & \quad -2 \\ -3 < -x^2 < -1 & \cdot (-1) \\ 3 > x^2 > 1 \end{aligned}$$

odate:

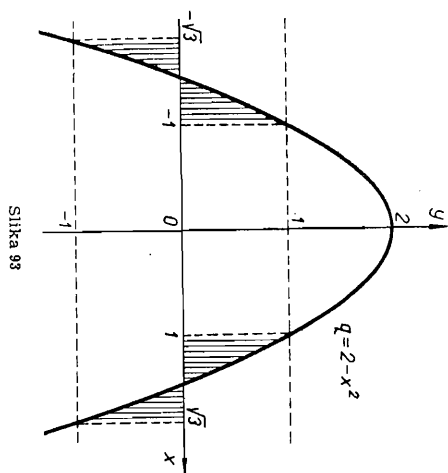
$$\sqrt{3} > x > 1$$

$$-\sqrt{3} < x < -1$$

pa dva otvorena intervala:

$$-\sqrt{3} < x < -1 \quad \text{i} \quad 1 < x < \sqrt{3}$$

čine područje konvergencije zadanog reda. Slika 93 daje grafički prikaz kvocijenta $q = 2 - x^2$ i obaju područja konvergencije zadanog reda.



Slika 93

$$679. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$$

Po d'Alembertovu kriteriju dobivamo:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n|x+2|^{-n}}{(n+1)|x+2|^{-(n+1)}} = \frac{1}{|x+2|} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right) = \frac{1}{|x+2|}$$

Red apsolutnih vrijednosti zadanog reda konvergira za $L = \frac{1}{|x+2|} < 1$, odnosno za $|x+2| > 1$.

Odate slijedi:

$$\begin{aligned} x+2 < -1 & \quad \text{i} \quad x+2 > 1 \\ -2 & \quad -2 \end{aligned}$$

$$x < -3 \quad \text{i} \quad x > -1,$$

pa su intervali:

$$-\infty < x < -3 \quad \text{i} \quad -1 < x < +\infty.$$

Promotrimo posebno granice dobivenih intervala s obzirom na zadani red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(x+2)^n}$.

Za $x = -3$ dobivamo red:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(-1)^n} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots,$$

a taj red konvergira po Leibnizu.

Za $x = -1$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 1^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

a to je harmonički red koji divergira.

Slijedi: područje konvergencije zadanog reda čine dva intervala:

$$(-\infty, -3] \quad \text{i} \quad (-1, +\infty).$$

$$680. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x^n}$$

$$[-\infty < x < -1; 1 < x < +\infty].$$

$$681. \sum_{n=1}^{\infty} (3-x^2)^n \text{ uz grafički prikaz.}$$

$$[-2 < x < -\sqrt{2}; \sqrt{2} < x < 2].$$

2. Uniformna konvergencija reda funkcija. Weierstrassov kriterij

Uputa

Red funkcija konvergira uniformno (jednolično) u zatvorenom intervalu $[a; b]$, ako apsolutnu vrijednost ostatka reda $|R_n(x)|$ možemo načiniti po volji malenom, ako idemo u redu dovoljno daleko, i to za sve x iz tog intervala $[a; b]$.

Weierstrassov kriterij za uniformnu konvergenciju redova funkcija glasi: Red kome su članovi neprekidne funkcije od x u intervalu $[a; b]$ konvergira uniformno u tom intervalu $[a; b]$, ako su za sve x iz toga intervala $[a; b]$ članovi tako dobivenih redova konstanta manji od pripadnih članova jednog drugog reda konstanta, za koji znamo da konvergira.

Svojstva uniformno konvergentnih redova funkcija:

- 1) Suma reda koji konvergira uniformno u intervalu $[a; b]$ neprekidna je funkcija u tom intervalu $[a; b]$.
- 2) Red funkcija smijemo derivirati član po član i suma tako dobivenog reda derivacija jednaka je derivaciji sume zadanog reda, ako zadani red funkcija i dobiveni red derivacija tih funkcija konvergiraju uniformno.

Zadaci

U zadacima 682 do 686 uklj. odredi područja uniformne konvergencije zadanih redova funkcija.

$$682. \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \dots + \frac{\sin nx}{n^2} + \dots$$

Kako je $|\sin x| \leq x$, očito je da za sve x vrijedi nejednažba:

$$\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2},$$

pa su po apsolutnoj vrijednosti svi članovi zadanog reda neprekidnih funkcija manji od pripadnih članova reda konstanta:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} + \dots$$

a taj red derivacija divergira za sve x , jer je $u_n = \pi \cos 2^n \pi x > 1$.

Zadani red ne smijemo derivirati član po član, jer nije dovoljno da konvergira uniformno zadani red, već je potrebno da i red derivacija konvergira uniformno.

688. Pokaži da je suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^3}$ neprekinuta funkcija i da taj red smijemo derivirati član po član.

[Usporedi zadani red s redom $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$]

b. REDOVI POTENCIJA

1. Općeniti redovi potencija

Upute

Opći oblik reda potencija

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n,$$

gdje su a_n koeficijenti reda potencija.

Za $a=0$ red potencija poprima oblik:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Svojstva redova potencija:

1) Ako red potencija konvergira za neki $x \neq 0$, tada postoji broj $R > 0$ takav da za sve $|x| < R$ red potencije konvergira, a za sve $|x| > R$ red divergira. Broj R zove se radij konvergencije reda, a interval $(-R, R)$ — interval konvergencije, koji može biti zatvoren, otvoren i poluotvoren.

2) Na krajevima intervala konvergencije red ne mora daleko konvergirati, ali u nutrima tog intervala red potencija uvijek konvergira apsolutno, dok na bilo kojem odsječku koji leži u intervalu konvergencije red potencija konvergira i uniformno.

Radij konvergencije određujemo pomoću poznatih nam kriterija konvergencije.

Zadaci

U zadacima 689 do 693 uklj. odredi radij konvergencije zadanih redova potencija.

$$689. \frac{3x}{\sqrt{2}} + \frac{3^2 x^2}{\sqrt{2^2}} + \dots + \frac{3^n x^n}{\sqrt{2^n}} + \dots$$

Radij konvergencije određimo pomoću Cauchyeva kriterija, uzimajući red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n |x|^n}{\sqrt{2^n}}} = \frac{3|x|}{\sqrt{2}}.$$

kojemu područje konvergencije možemo lako odrediti pomoću Cauchyeva kriterija:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 < 1 \text{ za sve } x.$$

Prema Weierstrassovu kriteriju zaključujemo: zadani red funkcija konvergira uniformno za $-\infty < x < +\infty$.

$$683. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n\sqrt{1+nx}}.$$

$$\text{Za } 0 \leq x < +\infty \quad \frac{1}{2n\sqrt{1+nx}} < \frac{1}{n\sqrt{n}},$$

pa su svi članovi zadanog reda neprekinutih funkcija u tom intervalu manji od pripad-

nih članova reda konstanta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ koji konvergira, jer je $\frac{1}{n\sqrt{n}} = \frac{1}{n^{3/2}}$, pa je

$$\alpha = \frac{4}{3} > 1. \text{ (Vidi zadatak 673.)}$$

Slijedi: Zadani red funkcija konvergira uniformno za $0 \leq x < +\infty$.

$$684. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 + x^2}.$$

$$\left[\text{Za sve } x \quad \frac{1}{n^3 + x^2} \leq \frac{1}{n^3}; -\infty < x < +\infty. \right]$$

$$685. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}.$$

$$[-\infty < x < +\infty].$$

$$686. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + \cos^2 x}.$$

$$[-\infty < x < +\infty].$$

687. Pokaži

1) da je suma reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2^n \pi x}{2^n}$ neprekinuta funkcija;

2) da taj red ne smijemo derivirati član po član.

Ad 1) Budući da zadani red funkcija konvergira uniformno, jer su njegovi članovi neprekinute funkcije od x , a manji su po apsolutnoj vrijednosti od pripadnih članova kon-

vergentnog reda konstanta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ i to za sve x , suma zadanog reda neprekinuta je

funkcija za $-\infty < x < +\infty$.

Ad 2) Izračunajmo derivaciju po x zadanog reda funkcija:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin 2^n \pi x}{2^n} \right]' = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2^n \pi x,$$

Znamo da će red apsolutnih vrijednosti, pa dakle i zadani red, konvergirati apsolutno za:

$$L = \frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1, \text{ a divergirati za } L = \frac{3|x|}{\sqrt{2}} > 1.$$

Iz $\frac{3|x|}{\sqrt{2}} < 1$ slijedi $|x| < \frac{\sqrt{2}}{3}$, pa je $R = \frac{\sqrt{2}}{3}$ traženi radij konvergencije zadanog reda.

$$690. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n} x^{2n}.$$

Za red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda prema d'Alembertovu kriteriju dobivamo:

$$\begin{aligned} L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|u_{n+1}(x)|}{|u_n(x)|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)! |x|^{2(n+1)} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot 2^n n! |x|^{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[2 \cdot \frac{(n+1)!}{n!} \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \cdot |x|^2 \right] = \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{n! (n+1)}{n!} \cdot \frac{n^n \cdot |x|^2}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \right] = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|^2}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{2|x|^2}{e}. \end{aligned}$$

Prema tome, red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda, a dakle i sam red, konvergira apsolutno za $L = \frac{2|x|^2}{e} < 1$, a divergira za $L = \frac{2|x|^2}{e} > 1$.

Iz $\frac{2|x|^2}{e} < 1$ slijedi $|x| < \sqrt{\frac{e}{2}}$, pa je radij konvergencije $R = \sqrt{\frac{e}{2}}$.

$$691. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}. \quad [R = \infty].$$

$$692. 10x + 100x^2 + \dots + 10^n x^n + \dots \quad \left[R = \frac{1}{10} \right].$$

$$693. 1 + 2x^2 + 2^2x^4 + \dots + 2^{n-1}x^{2(n-1)} + \dots \quad \left[\text{Cauchy! } R = \sqrt{\frac{2}{2}} \right].$$

U zadacima 694 do 700 uki, odredi interval konvergencije zadanih redova potencija.

$$694. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-x)^n}{3^{n-1}\sqrt{n}}.$$

Primijenimo d'Alembertov kriterij za red apsolutnih vrijednosti članova zadanog reda:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|-x|^{n+1}}{3^n \sqrt{n+1}} \cdot \frac{3^{n-1} \sqrt{n}}{|x|^n} \right] = \frac{|x|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{1}{n}}} = \frac{|x|}{3}.$$

Slijedi: red apsolutnih vrijednosti, pa dakle i zadani red, konvergira za $L = \frac{|x|}{3} < 1$, tj. za $|x| < 3$, a divergira za $|x| > 3$. Radij konvergencije $R = 3$.

Ispitajmo konvergenciju reda za $x = -3$ i $x = 3$.

Uvrštenje $x = -3$ u zadani red daje red pozitivnih brojeva $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{3^{n-1}\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{\sqrt{n}}$ koji divergira, jer su članovi toga reda veći od pripadnih članova harmoničkog reda $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, koji, kako znamo, divergira.

Uvrštenje $x = 3$ u zadani red daje $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3^n}{\sqrt{n}}$, a to je alternirani red koji konvergira po Leibnizovu kriteriju.

Slijedi: interval konvergencije zadanog reda jest poluotvoren $-3 < x \leq 3$.

$$695. \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^{n^2}.$$

Poslužimo se opet d'Alembertovim kriterijem:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|3x|^{(n+1)^2}}{|3x|^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3x|^{(n+1)^2 - n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} |3x|^{2n+1}$$

Za $|3x| > 1$ $L = \infty$, a za $|3x| < 1$ $L = 0$.

Slijedi: zadani red potencija konvergira za $|x| < \frac{1}{3}$, tj. za $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$, a divergira za

$|x| > \frac{1}{3}$, pa je $R = \frac{1}{3}$.

Određimo još šta je na krajevima intervala. Uvrštenje $x = -\frac{1}{3}$ u zadani red daje:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n^2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots,$$

a taj red divergira, jer članovi niza parcijalnih suma osciliraju između 1 i -1.

Uvrštenje $x = \frac{1}{3}$ daje $\sum_{n=0}^{\infty} 1^{n^2} = 1 + 1 + 1 + \dots$,

i taj red divergira, jer suma reda $S \rightarrow \infty$.

Zaključak: zadani red potencija konvergira u otvorenom intervalu $-\frac{1}{3} < x < \frac{1}{3}$.

$$696. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2}.$$

Prema d'Alembertovu kriteriju:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(x+8)^{3(n+1)}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{(x+8)^{3n}} \right] = |x+8|^3 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \right)^2 = |x+8|^3.$$

Slijedi: red konvergira za $|x+8|^3 < 1$, tj. za:

$$\begin{aligned} -1 < x+8 < +1 \\ -8 & -8 & -8 \\ \text{ili za } -9 < x < -7. & R = \frac{-7+9}{2} = 1. \end{aligned}$$

Uvrštenje granica tog intervala u zadani red daje:

$$\text{Za } x = -9: \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{3n}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \text{ a taj red konvergira po Leibnizu.}$$

Za $x = -7$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ koji, kako znamo, konvergira. Zadani red potencija konvergira u zatvorenom intervalu:

$$-9 \leq x \leq -7.$$

$$697. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} x^{n-1}}{(2n-1)^2 \sqrt{3^{n-1}}}.$$

$$698. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n)!} x^{2n}.$$

$$699. \sum_{n=0}^{\infty} 10^{2n} (2x-3)^{2n-1}.$$

$$700. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^n (n+1) (n+2)}.$$

3. Taylorovi i Mac Laurinovi redovi

Formule i upute

Ako funkcija $f(x)$ ima u nekom intervalu koji sadrži i tačku $x = x_0$ derivacije svih redova, tada možemo tu funkciju razviti po Taylorovoj formuli:

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(x_0) + R_n$$

gdje je ostatak

$$R_n = \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(\xi), \text{ dok je } x_0 < \xi < x. \quad (143)$$

Ako za neke vrijednosti x $R_n \rightarrow 0$ kad $n \rightarrow \infty$, tada za taj x Taylorova formula prelazi u Taylorov red:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x-x_0)f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0). \end{aligned} \quad (146a)$$

U posebnom slučaju, i to kad je $x_0 = 0$, dobivamo Mac Laurinov red:

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0). \quad (145)$$

Da zadanu funkciju $f(x)$ razvijemo u Taylorov, odnosno Mac Laurinov red, potrebno je:

1) izračunati vrijednosti funkcije i njenih derivacija za $x = x_0$, odnosno $x = 0$, pa te vrijednosti uvrstiti u (146a), odnosno (145);

2) napisati ostatak R_n i provesti diskusiju ostatka, tj. odrediti one vrijednosti x za koje red konvergira prema zadanoj funkciji $f(x)$, drugim riječima, za koji je $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$.

Međutim, za mnoge funkcije interval konvergenције Taylorova, odnosno Mac Laurinova reda, podudara se s onim vrijednostima x za koje ostatak reda $R_n(x) \rightarrow 0$ kod $n \rightarrow \infty$. Zato možemo pri razvijanju mnogih funkcija u Taylorov, odnosno Mac Laurinov red, izostaviti diskusiju ostatka, koja u mnogim slučajevima nije jednostavna, pa ispitati konvergenције tih redova kao običnih redova potencija.

U drugu ruku, uzmemo li u obzir da bilo kojim putem izvršen razvoj zadane funkcije u red potencija daje uvijek Taylorov, odnosno Mac Laurinov red, možemo pojednostavniti taj razvoj, iskoristivši gotove redove potencija elementarnih funkcija $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$ itd., a također i pravila za operacije s redovima, koja kazuju da možemo dva reda potencija zbrojiti, odnosno izmnožiti, pri čemu interval konvergenције tog novog reda čine one vrijednosti x za koje istodobno konvergiraju oba reda.

Zadaci

U zadacima 701 do 703 uklj. razvij neposredno zadanu funkciju u Mac Laurinov red izračunavši prva tri člana toga reda.

701. $f(x) = \ln(e^x + x)$.

Prema (145):

$$f(0) = \ln e^0 = \ln 1 = 0.$$

$$f'(x) = \frac{e^x + 1}{e^x + x}; \quad f'(0) = 2.$$

$$f''(x) = \frac{(e^x + x)e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + x)^2} = \frac{x e^x - 2 e^x - 1}{(e^x + x)^2}; \quad f''(0) = -\frac{3}{2}$$

$$f'''(x) = \text{nakon uredjenja} = \frac{e^x (e^x + x)(x-1) - 2(x e^{2x} - 2 e^{2x} + x e^x - 3 e^x - 1)}{(e^x + x)^3} \\ f'''(0) = \frac{11}{2}.$$

Uvrštenje izračunatih vrijednosti funkcije i derivacija za $x = 0$ u (145) daje prva tri člana Mac Laurinova reda za $\ln(e^x + x)$:

$$2x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{11}{3!}x^3 - \dots$$

$$702. f(x) = \frac{1}{\cos x}. \quad \left[1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \dots \right]$$

$$703. f(x) = \sin^2 x. \quad [\text{Uputa: } f'(x) = 2 \sin x \cos x = \sin 2x \text{ itd.; } x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots \text{ konvergira za sve } x \text{ kao red za } \sin x].$$

U zadacima 704 do 709 uklj. razvij neposredno zadane funkcije u Taylorov red, izračunaj prva tri člana toga reda.

$$704. f(x) = x^3 \ln x \text{ u okolišu tačke } x_0 = 1. \\ \text{Računamo prema (146a) i to za } x_0 = 1:$$

$$f(1) = 1 \cdot \ln 1 = \underline{0}$$

$$f'(x) = x^3 \cdot \frac{1}{x} + \ln x \cdot 3x^2 = x^2(1 + 3 \ln x); \quad f'(1) = \underline{1}$$

$$f''(x) = x(5 + 6 \ln x); \quad f''(1) = \underline{5}$$

$$f'''(x) = 11 + 6 \ln x; \quad f'''(1) = \underline{11}.$$

$$\text{Uvrštenje u (146a) daje: } (x-1) + \frac{5}{2}(x-1)^2 + \frac{11}{6}(x-1)^3 + \dots$$

$$705. f(x) = \frac{1}{1-x} \text{ u okolišu tačke } x_0 = 2. \quad [-1 + (x-2) - (x-2)^2 + \dots]$$

$$706. f(x) = x^3 + 3x + 1 \text{ po potencijama } (x-2).$$

[Uputa: razvij zadanu funkciju u Taylorov red prema (146a), uzevši $x_0 = 2$; $15 + 15(x-2) + 6(x-2)^2 + \dots$].

$$707. f(x) = \ln(x+2) \text{ po potencijama } (x-1).$$

$$\left[\ln 3 + \frac{1}{3}(x-1) - \frac{1}{3^2} \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{1}{3^3} \frac{(x-1)^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{3^n} \frac{(x-1)^n}{n} + \dots \right]$$

$$708. f(x) = e^{3x} \text{ po potencijama } (x-1) \text{ i odredi interval konvergencije.}$$

$$\left[e^3 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n (x-1)^n}{n!}; \quad -\infty < x < +\infty \right]$$

$$709. f(x) = \frac{1}{x-4} \text{ po potencijama } (x+2) \text{ i odredi interval konvergencije.}$$

$$\left[-\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{6^n}; \quad -\infty < x < 4 \right]$$

U zadacima 710 do 719 uklj. razvij zadane funkcije u redove potencija, tj. u Taylorov, odnosno Mac Laurinov red i to neposredno, odnosno pomoću poznatih redova elemenarnih funkcija, i odredi intervale konvergencije tih redova.

$$710. f(x) = \frac{1}{x} \text{ po potencijama } (x+2).$$

$$\text{Računamo prema (146a): } f(x) = \frac{1}{x}; \quad f(-2) = -\frac{1}{2}$$

$$f'(x) = -1 \cdot \frac{1}{x^2}; \quad f'(-2) = -\frac{1!}{2^2}$$

$$f''(x) = 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{x^3}; \quad f''(-2) = -\frac{2!}{2^3}$$

$$f'''(x) = -1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{x^4}; \quad f'''(-2) = -\frac{3!}{2^4}$$

$$\text{analogno: } f^{(n)}(x) = -n! \cdot \frac{1}{x^{n+1}}; \quad f^{(n)}(-2) = -\frac{n!}{2^{n+1}}.$$

Taylorov red glasi:

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} - \frac{1!}{1! \cdot 2^2}(x+2) - \frac{2!}{2! \cdot 2^3}(x+2)^2 - \dots - \frac{n!}{n! \cdot 2^{n+1}}(x+2)^n - \dots$$

ili

$$\frac{1}{x} = -\frac{1}{2} \left[1 + \frac{x+2}{2} + \frac{(x+2)^2}{2^2} + \dots + \frac{(x+2)^n}{2^n} + \dots \right].$$

Interval konvergencije toga reda odredimo pomoću d'Alembertova kriterija:

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{|x+2|^{n+1}}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{|x+2|^n} \right] = \frac{|x+2|}{2}.$$

$$\text{Red konvergira za } L = \frac{|x+2|}{2} < 1 \text{ ili za } |x+2| < 2,$$

tj. za

$$-2 < x+2 < +2$$

$$\underline{-2} \quad \underline{-2} \quad \underline{-2}$$

$$\underline{-4} < x < 0$$

Posebno ispitajmo red na granicama tog intervala.

Uvrštenje $x = -4$ i $x = 0$ u Taylorov red daje dva brojeva:

$$-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \dots \right) \quad \text{ i } \quad -\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \right),$$

koji divergiraju, jer članovi niza parcijalnih suma prvog reda osciliraju, a za drugi red je $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$.

Stiže: Taylorov red za $f(x) = \frac{1}{x}$ razvijen po potencijama $(x+2)$ konvergira u otvorenom intervalu: $\underline{-4} < x < 0$.

Da smo se potrudili ispitati ostatak R_n Taylorove formule zadane funkcije, opazili bismo da u gore određenom intervalu Taylorov red konvergira baš prema zadanoj funkciji

$$f(x) = \frac{1}{x}.$$

$$711. f(x) = \frac{e^x - 1}{x} \text{ po potencijama } x.$$

Uzevši u obzir da prema (147) Mac Laurinov red za e^x glasi:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

i konvergira za $-\infty < x < \infty$, brojnik zadane funkcije možemo napisati u obliku reda:

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

i tako dobivamo traženi red:

$$\frac{e^x - 1}{x} = 1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n!} + \dots \text{ koji konvergira za } -\infty < x < +\infty.$$

$$712. f(x) = x \ln(1 + x^2) \text{ po potencijama } x.$$

Postupamo na sličan način:

$$\text{U red } \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots \text{ koji konvergira za } -1 < x \leq +1 \text{ uvrstimo } x^2 \text{ umjesto } x: \quad (153)$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n}}{n} + \dots$$

Traženi red

$$x \ln(1+x^2) = x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n+1}}{n} + \dots, \text{ koji konvergira za } |x| < 1.$$

$$713. f(x) = \ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}} \text{ po potencijama od } x.$$

Pišemo zadanu funkciju u obliku:

$$f(x) = \frac{1}{2} [\ln(1+2x) - \ln(1-x)],$$

pa u redu (153) x zamijenimo sa $2x$, odnosno $s-x$ (vidi zadatak 712). Dobivamo:

$$\ln(1+2x) = 2x - \frac{4x^2}{2} + \frac{8x^3}{3} - \frac{16x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n} + \dots,$$

$$\text{koji konvergira u intervalu } -1 < 2x \leq 1, \text{ tj. za } -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots - \frac{x^n}{n} - \dots \text{ koji konvergira za } -1 \leq x < 1.$$

Uvrštenje u $f(x)$ daje nakon uređenja:

$$\ln \sqrt{\frac{1+2x}{1-x}} = \frac{1}{2} \left(3x - \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{3}x^3 - \frac{15}{4}x^4 + \dots \right) \\ = x - \frac{x^2}{2} + x^3 - \frac{5}{4}x^4 + \dots \text{ konvergira za } -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}.$$

$$714. f(x) = (1+x)e^x.$$

Promatramo li binom $(1+x)$ kao red potencija kojemu su koeficijenti svih članova, osim prva dva, jednaki nuli, pa taj „red“ pomnožimo s redom za e^x [vidi (147)] i uzmemo li u obzir da oba reda konvergiraju za sve x , dobit ćemo:

$$(1+x)e^x = (1+x) \left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right) = \text{nakon uređenja} =$$

$$= 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots \text{ Taj red konvergira za } -\infty < x < +\infty.$$

$$715. f(x) = \frac{3}{(1-x)(1+2x)} \text{ po potencijama od } x.$$

Zadanu funkciju rastavimo u parcijalne razlomke (vidi dio II Repetitorija, § 5, 7):

$$\frac{3}{(1-x)(1+2x)} = \frac{A}{1-x} + \frac{B}{1+2x} \quad | \cdot (1-x)(1+2x)$$

$$3 = A(1+2x) + B(1-x) \quad \text{ili} \quad 3 = (A+B) + (2A-B)x.$$

$$\text{Odatle:} \quad A+B=3 \quad \text{i} \quad 2A-B=0,$$

$$\text{pa su:} \quad A=1 \quad \text{i} \quad B=2.$$

$$f(x) \text{ prima oblik:} \quad f(x) = \frac{1}{1-x} + \frac{2}{1+2x}$$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} = \text{prema binomnom redu (155) stavimo } m=-1, \text{ a } x \text{ zamijenimo sa } -x]$$

$$-x] = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \text{ koji konvergira za } -1 < x < +1.$$

$$\frac{1}{1+2x} = (1+2x)^{-1} = [\text{uz } m=-1 \text{ i ako } x \text{ zamijenimo sa } 2x] =$$

$$= 1 - 2x + (2x)^2 - (2x)^3 + (2x)^4 - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n \text{ a taj red}$$

$$\text{konvergira za } -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}, \text{ pa dobivamo red}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} [1 + (-1)^n 2^{n+1}] x^n, \text{ koji konvergira za } -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}.$$

716. $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}$ po potencijama od x .

Prema (153): $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$ konvergira za $-1 < x \leq +1$.

$$\frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} = \text{prema (155) uz } m = -1 = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$$

konvergira za $-1 < x < +1$.

Uvrštenje u $f(x)$ daje:

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right) (1 - x + x^2 - x^3 + \dots) = \text{nakon množenja}$$

tih redova i uređenja $= x - \left(1 + \frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)x^3 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)x^4 + \dots$
konvergira za $-1 < x < +1$.

717. $f(x) = e^x \ln(1+x)$ po potencijama od x .

$$\text{Izmnoži redove za } e^x \text{ i } \ln(1+x); \quad x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots, \text{ konvergira za } |x| < 1.$$

718. $f(x) = e^{-x} \sin x$ po potencijama od x .

$$\left[\text{Red za } e^{-x} \text{ dobiti ćeš iz (147) zamenivši } x \text{ s } -x; \quad x - x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{40} + \frac{7}{360}x^5 + \dots; \right. \\ \left. -\infty < x < +\infty \right].$$

719. $f(x) = \ln(1+3x+2x^2)$ po potencijama od x .

$$[f(x) = \ln\{(1+x)(1+2x)\} = \ln(1+x) + \ln(1+2x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (1+2^n) \frac{x^n}{n}; \quad -\frac{1}{2} < x < +\frac{1}{2}].$$

4. Približno računanje pomoću redova potencija

Zadaci

720. Izračunaj $\cos 10^\circ$ s tačnošću 0,0001.

$$\text{Uvrštenje } x = \arccos 10^\circ = \frac{2\pi}{360^\circ} \cdot 10^\circ = \frac{\pi}{18} \approx 0,1745.$$

Uvrštenje u Mac Laurinov red za $\cos x$ (152) daje:

$$\cos 10^\circ = 1 - \frac{1}{2!} 0,1745^2 + \frac{1}{4!} 0,1745^4 - \dots$$

Znamo da je pogreška, koju činimo kad sumu konvergentnog alterniranog reda aproksimiramo pomoću parcijalne sume, po apsolutnoj vrijednosti manja od prvog zanemarenog člana i ima s njim isti predznak.

Izračunajmo približnu vrijednost trećeg člana reda:

$$u_3 = \frac{0,2^4}{4!} = \frac{0,0016}{24} = 0,00007 < 0,0001.$$

$$\text{Stijedi: } \cos 10^\circ \approx 1 - \frac{1}{2!} \cdot 0,1745^2 = 1 - 0,0152 = \underline{0,9848}.$$

To je tražena približna vrijednost $\cos 10^\circ$ na 0,0001 = $\frac{1}{10^4}$ tačno i to na manje ($u_3 > 0$).

721. Izračunaj $\sin 10^\circ$ na 10^{-5} tačno.

[0,17365].

722. Koliko članova reda: $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$ treba uzeti da se

$\cos 18^\circ$ izračuna na $\frac{1}{10^8}$ tačno? [Samo prva dva člana, jer je $u_3 < \frac{1}{10^8}$].

723. Izračunaj $\sqrt[3]{130}$ na 10^{-4} tačno.

Da možemo primijeniti binomni red (155):

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \dots, \quad (a)$$

koji konvergira za $-1 < x < +1$, napišemo zadani korijen u obliku:

$$\sqrt[3]{130} = \sqrt[3]{5^3 + 5} = 5 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{25}} = 5 \left(1 + \frac{1}{25} \right)^{\frac{1}{3}} = 5 \left(1 + \frac{1}{5^2} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

$$x = \frac{1}{25} < 1 \text{ red konvergira, pa je prema (a) i } m = \frac{1}{3}:$$

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{130} &= 5 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^2} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5^4} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5^6} + \dots \right] = \\ &= 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{3^2 \cdot 5^3} + \frac{1}{3^4 \cdot 5^5} + \dots \end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{3^4 \cdot 5^4} = 0,00002 < 10^{-4}$ prema poznatom svojstvu konvergentnog alterniranog reda imamo:

$$\sqrt[3]{130} \approx 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} - \frac{1}{3^2 \cdot 5^3} = 5 + 0,0667 - 0,0009 = \underline{5,0658}.$$

To je tražena približna vrijednost $\sqrt[3]{130}$ na 10^{-4} tačno i to na manje, jer je $u_4 > 0$

724. Izračunaj $\sqrt[4]{17}$ na 10^{-4} tačno:

$$\left[\sqrt[4]{17} = \sqrt[4]{2^4 + 1} = 2 \left(1 + \frac{1}{16} \right)^{\frac{1}{4}}; \quad 2a \approx 0,00002; \quad \sqrt[4]{17} \approx 2,0305 \text{ na manje} \right].$$

725. Izračunaj $\sqrt[3]{500}$ na $\frac{1}{10^3}$ tačno.

$$\left[\sqrt[3]{500} = \sqrt[3]{8^3 - 12} = 8 \left(1 - \frac{3}{27} \right)^{\frac{1}{3}} \doteq 7,937 \right].$$

726. Izračunaj $\sqrt[10]{1027}$ na 0,001 tačno.

$$\left[\sqrt[10]{1027} = \sqrt[10]{2^{10} + 3} \doteq 2,001 \right].$$

727. $\sqrt[3]{1,015}$ na 10^{-3} tačno.

$$[1,005].$$