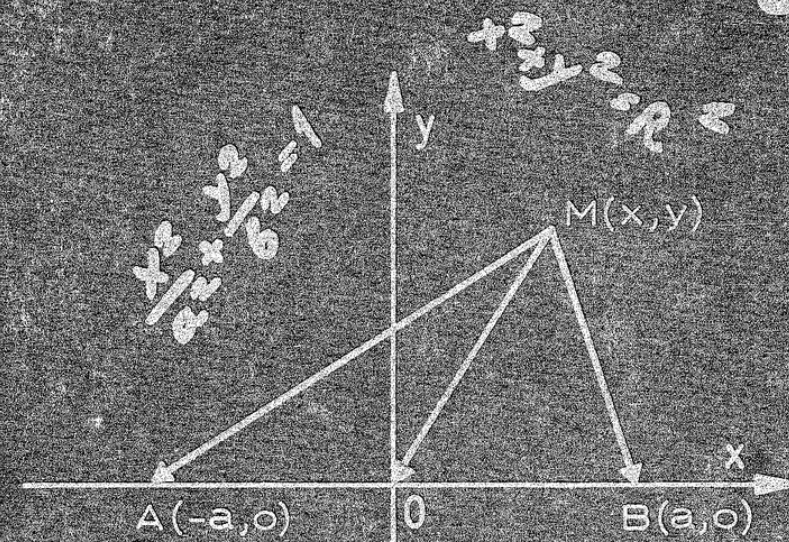


16,00

Mr VENE T. BOGOSLAVOV

ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE

3



K. B. 23128

ISBN 86-17-04159-5



ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA • BEOGRAD

Mr VENE T. BOGOSLAVOV

**ZBIRKA
REŠENIH ZADATAKA
IZ MATEMATIKE 3**

DVADESETO IZDANJE



ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA • BEOGRAD

1995.

Recenzent
SVETOZAR BRANKOVIĆ,
profesor Pete beogradske gimnazije, Beograd

Urednik
GLIŠA NEŠKOVIĆ

Glavni i odgovorni urednik
dr PETAR PIJANOVIĆ

Za izdavača
dr DOBROSAV BJELETIĆ, direktor

PREDGOVOR SEDAMNAESTOM IZDANJU

Prvo izdanje ove zbirke je izašlo iz štampe septembra 1972. godine. Napisana je prema nastavnom planu i programu matematike za III razred gimnazije prirodno-matematičkog smera.

Sedamnaesto prerađeno izdanje ove zbirke prilagođeno je novom nastavnom planu i programu matematike za III razred gimnazije prirodno-matematičkog smera, koji je 1990. godine usvojio Prosvetni savet Srbije, a objavljen u Službenom glasniku R.S. od 31. maja 1991. godine.

U ovom, izdanju I poglavlje Trigonometrijske funkcije i VI poglavlje Funkcije, zamenjena su poglavljima Poliedri, Obrtna tela, Kompleksni brojevi, Polinomi nad poljem realnih brojeva i Sistemi algebarskih jednačina višeg reda.

Recenzentu ovog izdanja Svetozaru Brankoviću, profesoru Pete beogradske gimnazije u Beogradu, zahvaljujem na pažljivom čitanju rukopisa i sugestijama za njegovo poboljšanje.

Po težini zadaci ove Zbirke se mogu podeliti na tri grupe: lakši (20%), srednji (60%) i teži (20%). Teži zadaci su označeni zvezdicama.

Zahvaljujem svojoj supruzi Nadeždi, koja mi je pomogla u pripremi i sređivanju rukopisa.

Beograd, oktobra 1991. godine

mr VENE BOGOSLAVOV, *prof.*

1. POVRŠINA (KVADRATURA) POLIGONA

1° Površina trougla:

- a) $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2}$ (a, b, c stranice, h_a, h_b, h_c , odgovarajuće visine trougla).
- b) $P = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$ (a stranica jednakokrakog trougla).
- c) $P = \frac{a}{4} \sqrt{4b^2 - a^2}$ (a osnovica; b krak jednakokrakog trougla).
- d) $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ (Herenov obrazac – s poluobim, a, b i c stranice trougla).
- e) $P = \frac{ab \sin \gamma}{2} = \frac{ac \sin \beta}{2} = \frac{bc \sin \alpha}{2}$ (a, b, c stranice, α, β i γ uglovi trougla).
- f) $P = rs$ (r poluprečnik upisane kružnice, s poluobim trougla).
- g) $P = \frac{abc}{4R}$ (a, b, c stranice trougla, R poluprečnik opisane kružnice oko trougla).

2° Površina paralelograma:

- a) $P = ah_a = bh_b$ (a i b stranice, h_a i h_b odgovarajuće visine paralelograma).
- b) Kvadrat: $P = a^2 = \frac{d^2}{2}$ (a stranica, d dijagonala kvadrata).
- c) Pravougaonik: $P = ab$ (a i b stranice pravougaonika).
- d) Romb: $P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$ (a stranica, h visina, d_1 i d_2 dijagonale romba).

3° Trapez: $P = \frac{a+b}{2}h$ (a i b osnove, h visina trapeza).

4° Pravi poligon: $P = \frac{Sr}{2}$ (S obim, r poluprečnik upisane kružnice).

1. Izračunati površinu pravougaonika čiji je obim 14 dm, a dijagonala 5 dm.
2. Izračunati površinu pravougaonika, ako se njegove stranice odnose kao 3 : 4, a poluprečnik opisane kružnice je 1 dm.
3. U oštrogom trouglu osnovice 10 cm i visine koja odgovara osnovici 8 cm, upisan je pravougaonik čija dva temena leže na osnovici trougla, a druga dva na drugim dvema stranicama. Ako je površina pravougaonika 15 cm^2 , izračunati njegove stranice.
4. Stranice pravougaonika su 3 cm i 1 cm. Konstruisane su sve četiri simetrale njegovih uglova do uzajamnih preseka. Izračunati površinu dobijenog četvorougla čija su temena presečne tačke simetrale.
5. U jednokrakom pravouglo trouglu ABC konstruisana je simetrala oštrog ugla B , koja seče katetu AC u tački M . Nad dužima AM i MC , kao nad stranama, konstruisani su kvadrati. Dokazati da je površina jednog kvadrata dva puta veća od površine drugog.
6. Izračunati površinu paralelograma čije su visine 3 cm i $2\sqrt{3} \text{ cm}$, a ugao između njih je 60° .
7. Visine paralelograma odnose se kao 2 : 3; njegov obim iznosi 40 cm, a oštar ugao 30° . Izračunati površinu paralelograma.
8. Površina paralelograma je 36 m^2 , a odstojanje presečne tačke dijagonala do stranica su 3 m i 2 m. Odrediti obim paralelograma.
9. Jednokraki trapez osnovice 8 cm i 2 cm, opisan je oko kružnice. Izračunati površinu trapeza.
10. Površina jednokrakog trapeza, opisanog oko kružnice iznosi 50 cm^2 , a oštar ugao na osnovici 30° . Odrediti krak trapeza.
11. Izračunati površinu paralelograma čije su dijagonale 26 cm, 30 cm, a stranica 14 cm.
12. Osnovice trapeza su 142 cm i 89 cm, a dijagonale su 120 cm i 153 cm. Odrediti površinu trapeza.
13. Osnovice trapeza su 24 cm i 10 cm, a kraci 13 cm i 15 cm. Izračunati površinu trapeza.
14. Stranice trougla su 13 cm, 14 cm, i 15 cm. Prava paralelna najvećoj stranici trougla odseca trapez obima 39 cm. Izračunati površinu trapeza.

15. Izračunati površinu jednakokrakog trougla osnovice 12 cm, ako je visina koja odgovara osnovici jednaka odsečku koji spaja sredine osnovice i kraka.
16. Dve stranice trougla su 10 cm i 14 cm, a ugao naspram prve je 45° . Izračunati površinu trougla.
17. Zbir dve stranice trougla je 15 cm, a visine koje njima odgovaraju su 4 cm i 6 cm. Izračunati površinu trougla.
18. Izračunati površinu jednakokrakog trougla ako je visina koja odgovara osnovici 20 cm, a visina kraka 24 cm.
19. Jednakokraki trapez osnovice 40 cm i 10 cm opisan je oko kružnice. Izračunati površinu trougla čija su temena dodirne tačke kraka i manje osnove.
20. Izračunati površinu i katete pravouglog trougla u kome dodirne tačke upisane kružnice na hipotenuzi deli hipotenuzu na odsečke od 3 cm i 10 cm.
21. Stranice trougla su 26 cm, 30 cm, i 28 cm. Izračunati površinu trougla, ograničenog visinom i medijanom koje odgovaraju srednjoj po veličini, stranici.
22. Površina trougla čija je osnovica bilo koja stranica datog trougla, a treće teme težište jednaka je trećini površine datog trougla. Dokazati.
23. Dokazati da težišne linije trougla dele trougao na šest trouglova jednakih površina.
24. Izračunati površinu jednakokrakog trougla osnovice 30 cm i poluprečnika upisane kružnice $r = 10 \text{ cm}$.
25. U trouglu upisan je krug poluprečnika $r = 4 \text{ cm}$. Jedna stranica dodirnom tačkom podeljena je na odsečke dužine 6 cm i 8 cm. Izračunati druge dve stranice i površinu trougla.
26. Katete pravouglog trougla su 3 cm i 4 cm. U trouglu tačka O je na odstojanju 1 cm od obe katete. Odrediti odstojanje tačke O od hipotenuze. Koju značajnu tačku predstavlja tačka O ?
27. Stranice trougla su 25 cm, 24 cm i 7 cm. Izračunati poluprečnike opisane i upisane kružnice u trouglu.
28. Izračunati površinu trougla stranica 27 cm i 29 cm i medijanom prema trećoj stranici 26 cm.
29. Odrediti stranice i uglove pravouglog trougla ako je njegov obim 24 cm, a poluprečnik upisane kružnice 2 cm.

30. Iz temena tupog ugla romba spuštene su normale na njegove stranice. Dužina svake od ovih normala je a , dok je rastojanje njihovih podnožja b . Izračunati površinu romba.
31. Izračunati stranice trougla ako su one uzastopni prirodni brojevi i ako je njegova površina $6\sqrt{6} \text{ cm}^2$.
32. U paralelogramu $ABCD$ uzeta je proizvoljna tačka O . Dokazati da je zbir površina trouglova AOB i COD jednak zbiru površina trouglova BOC i AOD .
33. U jednakokrakom trapezu dijagonala $d = 16 \text{ cm}$ i krak $c = 12 \text{ cm}$ zaklapaju prav ugao. Odrediti paralelne stranice i površinu trapeza.
34. Visina CD pravouglog trougla ABC gradi na hipotenuzi odsečak $AD = 12 \text{ cm}$. Odrediti površinu trougla ako je $\angle ACD = 30^\circ$.
35. Obim romba iznosi $2p \text{ cm}$, a zbir njegovih dijagonala $m \text{ cm}$. Izračunati njegovu površinu.
36. Nad tetivom kružnice poluprečnika r kao osnovice konstruisane su sa iste strane tetive dva jednakokraka trougla, jedan sa vrhom u centru, a drugi sa vrhom na kružnici. Odnos njihovih površina je $P_1 : P_2 = (2\sqrt{3} + 3) : 3$. Bez upotrebe tablice odrediti ugao α pri vrhu manjeg trougla.
37. U polukružnici datog prečnika $2r$ upisan je trapez, tako da mu dva temena leže na krajevima prečnika. Izraziti površinu trapeza kao funkciju ugla α na osnovici i datog poluprečnika r .
38. Izračunati uglove romba stranice a , ako je jedna dijagonala $a\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.
39. U jednokrakom trouglu osnove $b = 18 \text{ cm}$ i krakova $a = 15 \text{ cm}$, upisan je pravougaonik tako da osnova pravougaonika pripada osnovici trougla. Ako je površina upisanog pravougaonika 48 cm^2 , izračunati visinu pravougaonika.

Dokazati da za svaki trougao važi relacija (456 – 459)

$$40. \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

$$41. P = \frac{1}{2} \sqrt{abch_a h_b h_c}.$$

$$42. P = \sqrt{\frac{1}{2} h_a h_b h_c R}.$$

$$43. P = \frac{4}{3} \sqrt{m(m - m_a)(m - m_b)(m - m_c)}, m = \frac{m_a + m_b + m_c}{2}.$$

44. Izračunati površinu trougla čije su medijane 9 cm , 12 cm i 15 cm .
45. Odrediti površinu četvorougla čije su dijagonale 15 cm i $20\sqrt{3}$ i ugao između njih je 60° .
46. Visina romba je 24 cm , jedna dijagonala 30 cm . Odrediti površinu romba.
47. Površina romba je 1 dm^2 , a oštar ugao 30° . Izračunati dijagonale romba.
48. U četvorouglu $ABCD$ tačka E je središte stranice AB i spojena je sa temenom D , a tačka F je sredina stranice CD i spojena s temom B . Dokazati da je površina četvorougla $ABCD$ dva puta veća od površine četvorougla $BFDE$.
49. Duži koje spajaju sredine suprotnih stranica ma kog četvorougla su 6 cm i 8 cm , a jedna dijagonala je 10 cm . Izračunati površinu četvorougla.
50. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsečaka koje obrazuje na hipotenuzi dodirna tačka upisane kružnice.
51. Nad stranicama pravouglog trougla, čije su katete a i b , konstruisani su kvadrati, a slobodna temena tih kvadrata spojena su dužima. Izračunati površinu dobijenog šestougla.
52. Dokazati da je prečnik kruga upisanog u jednakokrakom trapezu jednak geometrijskoj sredini osnovica.
53. U kvadratu strane a spojene su sredine susednih stranica sa suprotnim temenom kvadrata. Izračunati površinu dobijenog trougla.
54. Nad dvema suprotnim stranicama kvadrata čije su dužine a , konstruisani su u unutrašnjosti kvadrata jednakostranični trouglovi, čije stranice obrazuju jedan četvorougao. Ispitati kakav je taj četvorougao i odrediti njegove uglove i površinu.
55. Dimenzije pravougaonika su a i b ($a > b$). Simetrale njegovih uglova obrazuju četvorougao $MNPQ$. Izračunati površinu tog četvorougla u funkciji od a i b .
56. Odrediti razmeru stranica pravougaonika ako njegova površina iznosi $\frac{3}{4}$ površine kvadrata, čiji je obim jednak obimu datog pravougaonika.

57. Površina tetivnog četvorougla $P = \frac{1}{2} (ab + cd) \sin \alpha$, gde su a, b, c i d stranice četvorougla, a α ugao koga obrazuju stranice a i b . Dokazati.
58. Površina paralelograma $P = \frac{1}{2} (a^2 - b^2) \operatorname{tg} \varphi$, gde su a i b stranice, a φ ugao između dijagonala. Dokazati.
59. U jednakokrakom trapezu srednja linija jednaka je m , dijagonale trapeza se seku pod pravim uglom. Izračunati površinu trapeza.
60. Površine trouglova koje čine odsečki dijagonala sa osnovicama trapeza jednake su P_1 i P_2 . Izračunati površinu trapeza.
61. Kroz tačku O u trouglu ABC , konstruisane su tri prave paralelne sa odgovarajućim stranicama trougla. Ove prave dele površinu trougla na šest delova, od kojih tri trougla imaju površine P_1, P_2, P_3 . Izračunati površinu datog trougla.
62. U trouglu čije su stranice, a, b i c upisana je polukružnica sa prečnikom na stranici c . Izračunati prečnik.
63. Odrediti površinu trougla ako su odsečki koje određuje dodirna tačka upisane kružnice na jednoj stranici trougla, m i n , a ugao naspram ove stranice 60° .
64. Prava paralelna osnovici trougla površine P odseca od njega trougao P_1 . Dokazati da je površina četvorougla čija su tri temena, temena manjeg trougla, a četvrto pripada osnovici većeg trougla, geometrijska sredina površine većeg i manjeg trougla.
65. Manja osnovica trapeza $DC = b$, veća osnovica $AB = a$. Na produženoj manjoj osnovici odrediti tačku M iz uslova, da prava AM deli trapez na dva jednaka dela.
66. Medijane m_a i m_c trougla ABC obrazuju sa stranicom AC uglove, čiji je zbir 60° a proizvod $m_a \cdot m_c = \sqrt{3}$. Izračunati površinu trougla ABC .
67. Dat je romb sa uglom od 30° i većom dijagonalom a . U rombu je upisan pravougaonik, tako da je jedna njegova dijagonala manja dijagonala romba. Odrediti površinu pravougaonika.
68. Date su dve stranice b i c trougla i njegova površina $P = \frac{2}{5} bc$. Izračunati treću stranicu a trougla.
69. Dat je trougao ABC i tačka O . Ako su T_1, T_2, T_3 težišta trouglova AOB, BOC, COA , dokazati da je
- $$P_{T_1 T_2 T_3} = \frac{1}{9} P_{ABC}$$

70. Svaka dijagonala konveksnog četvorougla deli ga na dva dela jednakih površina. Dokazati da je četvorougao paralelogram.
71. Na produžecima stranica AB, BC, CD, AD konveksnog četvorougla $ABCD$ preneseni su, u istom smeru, odgovarajući odseci $BM = AB, CN = BC, DR = CD, AQ = DA$. Dokazati da je $P_{MNRQ} = 5 P_{ABCD}$.
72. Dat je konveksni četvorougao $ABCD$. Tačke M i N dele stranicu BC na tri jednaka dela, a tačke R i Q stranicu AD , takođe na tri jednaka dela. Dokazati da je površina četvorougla $ABCD$ tri puta veća od površine četvorougla $MNRQ$.

II. GLAVA

2. POLIEDRI

2.1. PRIZMA I PIRAMIDA, RAVNI PRESECI PRIZME I PIRAMIDE

73. Konstruisati kosi presek prave petostrane prizme ako su date tri tačke preseka sa bočnim ivicama.
74. Data je kocka ivice 1 m. Konstruisati presek kocke sa ravni koja sadrži dijagonalu osnove i središte bilo koje ivice gornje osnove, a zatim izračunati površinu preseka.
75. Zbir kvadrata dijagonala paralelepipeda jednak je zbiru kvadrata njegovih ivica. Dokazati.
- 76.*Osnove ivice a i b pravog paralelepipeda obrazuju ugao od 60° . Izračunati dijagonale paralelepipeda ako je bočna ivica geometrijska sredina osnovnih ivica.
77. Data je kocka ivice b . Izračunati odstojanje jednog temena od dijagonale koja ne prolazi kroz to teme.
78. Na kom je rastojanju od vrha date piramide konstruisan paralelan presek ako je visina piramide 15 cm, površina osnove 18 dm², a površina preseka 8 dm²?
79. Površina osnove piramide je 1,5 dm², površina jednog njenog paralelnog preseka 54 cm² i rastojanje između osnove i preseka je 14 cm. Izračunati visinu piramide.
80. Odrediti površine paralelnih preseka piramide, koji dele visinu na četiri jednaka dela ako je površina osnove 144 cm².
81. Pravilna četvorostrana piramida ima osnovnu ivicu a i visinu H . Izračunati ivicu kocke koja je upisana u piramidu tako da donja osnova leži na osnovi piramide, a gornja osnova je paralelan presek piramide.
- 82.*Pravilna osmostrana piramida osnovne ivice a presečena je paralelno osnovi jednom ravni koja deli visinu u razmeri $m : n$ računajući od vrha. Izračunati površinu preseka.

2.2. POVRŠINA I ZAPREMINA PRIZME

Obrasci

1. Prizma

$P = 2B + M$ (P površina, B površina osnove i M površina omotača).
 $V = BH$ (V zapremina i H visina prizme).

2. Kocka

$P = 6a^2$, $V = a^3$, $D = a\sqrt{3}$ (a ivica kocke, P površina, V zapremina i D dijagonala kocke).

3. Paralelepiped

$P = 2(ab + ac + bc)$, $V = abc$, $D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$, (a , b , c ivice, P površina, V zapremina i D dijagonala paralelepipeda).

83. Odrediti površinu i zapreminu kocke u funkciji površine dijagonalnog preseka.
84. Bazen oblika pravouglog paralelepipeda ima dimenzije 4 m, 4,5 m i 2,5 m. Za koje će se vreme napuniti ako se u njega svake sekunde uliva 5 litara vode?
85. Pravilna četvorostrana prizma ima omotač 8 m² i dijagonalu 3 m. Izračunati njenu zapreminu.
86. Osnova prizme je romb, a njen omotač iznosi 360 dm². Dijagonala bočne strane je 20,5 dm, a rastojanje naspramnih strana jednako je visini prizme. Izračunati zapreminu prizme.
87. Osnova prave prizme je jednakokraki trougao osnovice 10 dm, a visina tog trougla jednaka je visini prizme. Ako je zapremina prizme 720 dm³, izračunati površinu prizme.
88. Osnovna ivica pravilne šestostrane prizme iznosi 3 m, a dijagonala bočne strane 6 m. Izračunati zapreminu prizme.
89. Dijagonale strana pravouglog paralelopipeda su d_1 , d_2 i d_3 . Izračunati zapreminu paralelopipeda.
90. Površina prave trostrane prizme jednaka je 1440 cm², a njena visina 16 cm. Izračunati osnovne ivice prizme, ako se one odnose kao 17 : 10 : 9.
91. Osnovne ivice pravog paralelepipeda su 10 cm i 17 cm, veća dijagonala osnove iznosi 21 cm, a veća dijagonala paralelepipeda je 29 cm. Izračunati površinu paralelepipeda.
92. Površina pravilne jednakoivične prizme je P . Izračunati ivicu ako je osnova prizme pravilan šestougao.

93. Ivice pravouglog paralelepipeda a, b, c , koje polaze iz jednakog temena, odnose se kao $m:n:p$, a dijagonala osnove (a, b) je d . Izračunati površinu i zapreminu paralelepipeda.
- 94.*Osnova pravog paralelepipeda je romb, a površine dijagonalnih preseka su P i Q . Izračunati površinu omotača.
95. Osnova pravog paralelepipeda je romb, čija je površina 1 m^2 , a površine dijagonalnih preseka su 3 m^2 i 6 m^2 . Izračunati zapreminu paralelepipeda.
96. Osnova kose prizme je jednakokrani trougao stranice a , jedna bočna strana je normalna na ravan osnove i ima oblik romba sa manjom dijagonalom c . Izračunati zapreminu prizme.
97. Osnova prave prizme je jednakokraki trapez $ABCD$ sa stranicama $BC = AD = 13 \text{ cm}$, $CD = 11 \text{ cm}$ i $AB = 21 \text{ cm}$, a površina dijagonalnog preseka iznosi 180 cm^2 . Izračunati površinu prizme i površinu preseka ABC_1D_1 .
98. Kosa trostrana prizma ima osnove ivice 5 m , 6 m i 9 m i bočnu ivicu 10 m , koja zaklapa sa ravni osnove ugao od 45° . Izračunati zapreminu prizme.
99. Osnova pravog paralelepipeda je romboid sa stranicama $a = 3 \text{ cm}$ i $b = 8 \text{ cm}$ i uglom između njih $\gamma = 30^\circ$. Odrediti površinu i zapreminu paralelepipeda ako je površina njegovog omotača $M = 220 \text{ cm}^2$.
- 100.*Osnova kosog paralelepipeda je romb $ABCD$ sa stranicom a i ostrim uglom 60° . Ivice AA_1 takode je jednaka a i sa ivicama AB i BD gradi uglove od 45° . Odrediti zapreminu paralelepipeda.
101. Osnova prave prizme je romb čije su dijagonale $d_1 = 18 \text{ cm}$, $d_2 = 24 \text{ cm}$, dok je dijagonala bočne strane prizme $d = 39 \text{ cm}$. Izračunati površinu prizme.
102. Ivice paralelepipeda su a, b i c . Ivice a i b su uzajamno normalne, a ivica c obrazuje sa svakom od njih ugao od 60° . Odrediti zapreminu paralelepipeda.
- 103.*Osnova pravog paralelepipeda je romb površine Q . Površine dijagonalnih preseka jednake su S_1 i S_2 . Izračunati zapreminu paralelepipeda.
- 104.*Osnova prave prizme je trapez. Izračunati zapreminu prizme u funkciji površina P_1 i P_2 paralelnih bočnih strana i njihovog rastojanja d .

105. Površina osnove prave trostrane prizme jednaka je 4 cm^2 ; površine bočnih strana su 9 cm^2 , 10 cm^2 i 17 cm^2 . Izračunati zapreminu prizme.
106. Zapremina prave pravilne osmostrane prizme jednaka je 8 m^3 , a njena visina je $(\sqrt{2} + 1) \text{ m}$. Izračunati površinu omotača.
107. Osnova prave trostrane prizme je trougao ABC , čije su stranice $a = 34,84 \text{ cm}$, $b = 38,03 \text{ cm}$ i ugao $\gamma = 58^\circ 22'$. Bočna ivica prizme jednaka je visini h_c trougla ABC . Izračunati zapreminu prizme.
- 108.*Dijagonale pravog paralelepipeda su 9 cm i $\sqrt{33} \text{ cm}$. Obim njegove osnove jednak je 18 cm . Bočna ivica je 4 cm . Odrediti površinu i zapreminu paralelepipeda.
- 109.*Osnova pravog paralelepipeda je paralelogram sa stranicama a i b i ostrim uglom α . Ako je manja dijagonala paralelepipeda jednaka većoj dijagonali osnove, izračunati zapreminu paralelepipeda.
- 110.*Neka je m dužina dijagonale pravilne četverostrane prizme koja sa bočnom stranom prizme zaklapa ugao α . Izračunati površinu omotača te prizme.
111. Splav je načinjen od 16 greda čiji je presek u obliku pravougaonika, od kojih svaka ima dužinu $3,6 \text{ m}$, širinu $0,20 \text{ m}$ i debljinu $0,25 \text{ m}$. Koliki je najveći teret koji ovaj splav može da nosi a da se ne potopi? (Specifična težina drveta je $0,84$.)
112. Osnova prizme je jednakokraki trougao osnovice 30 cm i poluprečnika upisane kružnice 10 cm . Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trougla koja odgovara osnovici.
113. Osnova prizme je trougao poluprečnika upisane kružnice $r = 4 \text{ cm}$. Jedna stranica trougla dodirnom tačkom podeljena je na odsečke dužine 6 cm i 8 cm . Izračunati zapreminu prizme ako je njena visina jednaka srednjoj po veličini stranici trougla.
114. Prava trostrana prizma, čija je osnova jednakokrani trougao stranica a , presečana je sa ravni neparalelno osnovama. Bočne ivice tako dobijene presečene prizme imaju merne brojeve m, n, p . Odrediti površinu njenog omotača.
115. Površina većeg dijagonalnog preseka pravilne šestostrane prizme iznosi 24 cm^2 i obim 22 cm . Izračunati površinu i zapreminu date šestostrane prizme.
116. Osnova prizme je pravougli trougao sa površinom $9\sqrt{3} \text{ cm}^2$ i jednim uglom od 30° . Površina najveće bočne strane jednaka je 8 cm^2 . Izračunati zapreminu prizme.

117. Osnova prizme je paralelogram čije su stranice $a = 13$ cm, $b = 14$ cm a dijagonala $d = 15$ cm. Izračunati zapreminu te prizme ako njena površina iznosi 876 cm².
118. Osnova prizme je trapez čije su osnovice 24 cm i 10 cm, a kraći 13 cm i 15 cm. Izračunati površinu i zapreminu prizme ako je njena visina jednaka visini trapeza.

2.3. POVRŠINA I ZAPREMINA PIRAMIDE I ZARUBLJENE PIRAMIDE

Obrasci

1. Piramida

$P = B + M$ (P površina piramide, B površina osnove i M bočna površina piramide).

$$V = \frac{1}{3} BH \text{ (} V \text{ zapremina i } H \text{ visina piramide).}$$

2. Zarubljena piramida

$P = B_1 + B_2 + M$ (P površina, B_1 i B_2 površine osnova i M bočna površina zarubljene piramide).

$$V = \frac{H}{3} (B_1 + \sqrt{B_1 B_2} + B_2) \text{ (} V \text{ zapremina i } H \text{ visina zarubljene piramide).}$$

119. Date su osnovna ivica $a = 10$ cm i visina $H = 12$ cm pravilne četverostrane piramide. Odrediti njenu površinu i zapreminu.
120. Izračunati zapreminu pravilne četverostrane piramide čija je visina $H = 15$ m i površina dijagonalnog preseka $P = 120$ m².
121. Osnova prave piramide je pravougaonik, sa stranicama 12 cm i 9 cm. Odrediti zapreminu piramide, ako je njena bočna ivica $12,5$ cm.
122. Izračunati površinu osnove i visinu trostrane piramide čije su bočne ivice jednake a i normalne su jedna na drugu.
123. Naći zapreminu prave četverostrane piramide čija je osnova pravougaonik, date dijagonale d , datog ugla α između dijagonala i datog ugla β , koji bočna ivica zaklapa sa osnovom piramide.
124. Od kocke ivice a odsečeno je osam rogljeva, tako da je od svake strane kocke nastao pravilan osmougao. Izračunati zapreminu preostalog dela kocke.
125. Osnova piramide je trougao čije su stranice 13 cm, 14 cm i 15 cm. Bočna ivica naspram srednje po veličini osnovne ivice normalna je na ravan osnove i jednaka je 16 cm. Izračunati površinu i zapreminu piramide.

126. Izračunati zapreminu pravilnog tetraedra u funkciji ivice a .
127. Izraziti zapreminu pravilnog oktaedra u funkciji ivice a .
128. Trostrana piramida ima visinu 6 cm, a njeno podnožje leži u centru kruga opisanog oko osnove. Ako je obim osnove piramide 120 cm i ako se osnove ivice odnose kao $5 : 12 : 13$, izračunati zapreminu i površinu piramide.
129. Površina dijagonalnog preseka pravilne četverostrane piramide iznosi 12 dm², a obim osnove 8 dm. Izračunati površinu piramide.
130. Osnova piramide je romb stranice 15 cm; bočne strane nagnute su prema osnovi pod uglom od 45° ; površina omotača je 4 dm². Izračunati zapreminu piramide.
131. Izračunati površinu pravilne šestostrane piramide ako je apotema piramide h i apotema osnove r .
132. Centri strana pravilnog oktaedra su temena kocke. Odrediti razmeru zapremina oba tela.
133. Izraziti visinu pravilnog tetraedra u funkciji zapremine V .
134. Svake dve bočne strane trostrane piramide međusobno su normalne i njihove površine iznose 3 cm², 4 cm² i 6 cm². Izračunati zapreminu piramide.
135. Piramida je podeljena na dva dela paralelnim presekom koji sadrži središte visine. Odrediti razmeru zapremina oba dela.
136. Izračunati zapreminu pravilne četverostrane zarubljene piramide ako su osnovne ivice 7 m i 5 m i dijagonala 9 m.
137. Izračunati zapreminu pravilne četverostrane zarubljene piramide ako su površine osnova 50 cm² i 8 cm² i površina dijagonalnog preseka 28 cm².
138. Izračunati zapreminu pravilne šestostrane zarubljene piramide ako su osnovne ivice 2 m i 1 m i bočna ivica 2 m.
139. Osnovne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide su 2 m i 6 m. Bočna strana nagnuta je prema većoj osnovi pod uglom od 60° . Izračunati zapreminu te piramide.
140. Strane pravouglog roglja (tj. roglja čije su strane uzajamno normalne) prosečene su dvema paralelnim ravnima, tako da su preseki jednakostanični trouglovi sa stranicama a i b ($a > b$). Izračunati površinu omotača zarubljene piramide.

141. Nagib bočne strane pravilne trostrane zarubljene piramide prema ravni osnove iznosi 60° . Ivica te osnove je a i površina piramide P . Izračunati osnovnu ivicu druge osnove.
- 142.*Odrediti zapreminu pravilne dvanaestostrane zarubljene piramide ako su dati poluprečnici kružnica opisanih oko osnova R i r ako su bočne ivice nagnute pod uglom od 60° prema ravni osnove.
143. Osnova piramide je jednakokraki trapez sa paralelnim stranicama 3 cm i 5 cm i krakom 7 cm. Visina piramide prolazi kroz presek dijagonala osnove. Veća bočna ivica iznosi 10 cm. Izračunati zapreminu piramide.
144. Visina pravilne četvorostrane zarubljene piramide iznosi 3 cm, zapremina 38 cm^3 a površine osnova odnose se kao 4 : 9. Izračunati površinu omotača zarubljene piramide.
- 145.*Odrediti odnos zapremina pravilnog tetraedra i oktaedra ako su njihove površine jednake.
- 146.*Odrediti zapreminu pravilne četvorostrane zarubljene piramide ako je veća osnovna ivica a , manja osnovna ivica b , a oštar ugao bočne strane 60° .
- 147.*Osnova piramide je pravougaonik čija je površina S i ugao između dijagonala 60° . Odrediti zapreminu piramide ako su bočne ivice nagnute prema ravni osnove pod uglom 45° .
148. Osnova piramide je paralelogram čije su strane 10 cm i 18 cm, a površina 90 cm^2 . Visina piramide prolazi kroz presek dijagonale osnove i jednaka je 6 cm. Izračunati površinu omotača.
- 149.*Dve bočne strane trostrane piramide uzajamno su normalne. Njihove površine jednake su P i Q a zajednička ivica normalna je na ravan osnove i jednaka je a . Izračunati zapreminu piramide.
150. Bočne ivice piramide imaju dužinu b . Osnova je pravougli trougao, čije se katete odnose $m : n$. Izračunati zapreminu piramide ako je dužina hipotenuze c .
- 151.*Središta strana tetraedra su temena novog tetraedra. Odrediti odnos njihovih površina i odnos njihovih zapremina.
152. Dijagonala kvadrata, koji je osnova pravilne četvorostrane piramide, jednaka je bočnoj ivici i iznosi a . Izračunati površinu i zapreminu piramide.
153. Osnovne ivice pravilne četvorostrane zarubljene piramide su a i b ($a > b$). Bočne ivice nagnute su prema ravni osnove pod uglom $\alpha = 45^\circ$. Odrediti njenu zapreminu.

154. Bočne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide nagnute su prema ravni osnove pod uglom od 60° . Osnove ivice su a i b ($a > b$). Odrediti zapreminu zarubljene piramide.
155. Visina zarubljene trostrane piramide je 10 m. Osnovne ivice jedne osnove jednake su 27 m, 29 m i 52 m, a obim druge osnove jednak je 72 m. Odrediti zapreminu zarubljene piramide.
156. Osnove ivice pravilne osmostrane zarubljene piramide jednake su 5 m i 4 m, a visina zarubljene piramide jednaka je 3 m. Zarubljena piramida dopunjena je do pune piramide. Odrediti zapreminu cele piramide.
157. Osnovna ivica pravilne šestostrane piramide jednaka je a . Izračunati zapreminu piramide ako je poznato da je površina omotača deset puta veća od površine osnove.
158. Osnova trostrane piramide je pravougli trougao, čiji je ugao $\alpha = 42^\circ 5'$. Sve bočne ivice $l = 7 \text{ cm}$ nagnute su prema osnovi pod uglom $\beta = 46^\circ 9'$. Odrediti zapreminu piramide.
159. Visina pravilne četvorostrane piramide je $H = 12 \text{ cm}$, a ugao zahaćen visinom i apotemom $\beta = 25^\circ 24' 40''$. Odrediti zapreminu piramide.
160. Neka je površina osnove pravilne trostrane piramide $B = 12 \text{ cm}^2$ i bočna ivica obrazuje sa visinom ugao $\beta = 6^\circ 55' 24''$. Odrediti zapreminu piramide.
161. Osnovna ivica pravilne petostrane piramide je a . Bočna strana nagnuta je prema ravni osnove pod uglom α . Odrediti zapreminu piramide.
162. Osnovna ivica pravilne trostrane piramide jednaka je a , a bočna strana nagnuta je prema ravni osnove pod uglom φ . Odrediti zapreminu i površinu piramide.
- 163.*Osnova piramide je tangentni poligon sa n stranica opisan oko kruga poluprečnika r . Obim poligona je $2p$, a bočne strane piramide nagnute su prema ravni osnove pod uglom φ . Odrediti zapreminu piramide.
- 164.*Bočne ivice pravilne trostrane zarubljene piramide nagnute su prema ravni osnove pod uglom α . Osnovne ivice piramide su a i b ($a > b$). Odrediti zapreminu piramide.
- 165.*Osnova piramide je pravougaonik. Dve bočne strane normalne su na ravan osnove, a druge dve obrazuju sa njom uglove α i β . Visina piramide jednaka je H . Izračunati zapreminu piramide.

- 166.*Piramida, čija je osnova pravougaonik sa stranicama a i b , jednakih bočnih ivica l , presečena je jednom ravni, paralelno osnovi, na dva dela jednakih zapremina. Odrediti rastojanje vrha piramide od ravni preseka.
- 167.*Na kom rastojanju od vrha treba preseći piramidu paralelno osnovi da bi se njena zapremina podelila u razmeni $m : n$?
- 168.*Zapreminu jednakoivične petostrane piramide izračunati u funkciji ivice a .
- 169.*Izračunati površinu omotača pravilne desetostrane piramide ako je poluprečnik kruga opisanog oko osnove jednak R , a visina piramide veća od poluprečnika za polovinu osnovne ivice.
- 170.*U pravilnu trostranu piramidu upisana je pravilna trostrana prizma čija je gornja osnova paralelni presek piramide a donja osnova pripada osnovi piramide. Osnovna ivica piramide je 12 cm i visina 15 cm. Površina omotača prizme je 120 cm^2 . Odrediti odnos zapremina prizme i piramide.
- 171.*U pravilnu piramidu upisana je pravilna prizma, tako da donja osnova prizme pripada osnovi piramide, a temena gornje osnove prizme poklapaju se sa težištima bočnih strana piramide. Odrediti odnos zapremina prizme i piramide ako je piramida: a) trostrana; b) četverostrana.
- 172.*Pravilna prizma i pravilna četverostrana zarubljena piramida imaju jednake visine. Osnova prizme jednaka je srednjem paralelnom preseku zarubljene piramide. Odrediti razliku zapremina oba tela ako su osnovne ivice zarubljene piramide 20 cm i 18 cm, a visina 6 m.
173. Osnova piramide je pravougaonik obima 14 dm i dijagonale 5 dm. Visina piramide jednaka je dijagonali pravougaonika. Izračunati njenu zapreminu.
174. Osnova piramide je trougao stranice $\sqrt{5} \text{ cm}$, $\sqrt{10} \text{ cm}$ i $\sqrt{13} \text{ cm}$. Izračunati zapreminu piramide ako je njena visina 12 cm.
175. Bočna ivica pravilne trostrane piramide je 10 cm i ona sa osnovom obrazuje ugao od 30° . Izračunati osnovnu ivicu, a zatim površinu i zapreminu piramide.
176. Data je prava pravilna četverostrana piramida osnovne ivice $a = 5\sqrt{2} \text{ cm}$ i bočne ivice $s = 13 \text{ cm}$. Izračunati ivicu kocke koja je upisana u tu piramidu tako da se njena četiri gornja temena nalaze na bočnim ivicama piramide.

- 177.*Osnova četverostrane piramide je romb čiji je oštar ugao α a kraća dijagonala d . Izračunati površinu piramide ako sve bočne strane te piramide zaklapaju isti ugao β sa osnovom.
- 178.*Osnova trostrane piramide je trougao stranica 25 cm, 29 cm i 36 cm. Izračunati zapreminu piramide ako je njena visina jednaka najmanjoj visini trougla osnove.
179. Visina piramide iznosi 16 cm a površina njene osnove 512 cm^2 . Na rastojanju 11 cm od osnove piramida je presečena sa ravni paralelno njenoj osnovi. Izračunati zapreminu piramide, zapreminu dela piramide iznad ravni preseka i zapreminu zarubljene piramide.

III. GLAVA

3. KRUG

3.1. DUŽINA KRUGA I KRUŽNOG LUKA. POVRŠINA KRUGA, KRUŽNOG ISEČKA I KRUŽNOG ODSEČKA

Obrasci:

1. Dužina kruga

$$(1) \quad C = 2\pi R \quad (R \text{ poluprečnik kruga}).$$

2. Dužina kružnog luka

$$(2) \quad l = \frac{\pi R \alpha}{180} \quad (\alpha \text{ centralni ugao meren u stepenima i } R \text{ poluprečnik odgovarajućeg kruga}),$$

$$(3) \quad l = R\alpha \quad (\alpha \text{ centralni ugao u radianima}).$$

3. Površina kruga

$$(4) \quad P = \pi R^2.$$

4. Površina kružnog isečka

$$(5) \quad P = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad (\alpha \text{ centralni ugao u stepenima}),$$

$$(6) \quad P = \frac{1}{2} R^2 \alpha \quad (\alpha \text{ centralni ugao u radianima}).$$

5. Površina kružnog odsečka

$$(7) \quad P = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{1}{2} R^2 \sin \alpha \quad (\alpha \text{ centralni ugao u stepenima}).$$

180. Odrediti odnos obima upisanog i opisanog kruga oko jednakokrakog trougla.

181. Odrediti obim kruga ako je za 7 cm veći od obima pravilnog u njemu upisanog šestougla.

182. Prečnik točka tramvaja jednak je 78 cm. Koliko obrtaja čini točak prelazeći put od 1 km?

183. Odrediti poluprečnik kruga koji je pretvoren u kružni luk poluprečnika 4 cm, sa centralnim uglom od 120° .

184. Krug poluprečnika $r = 2$ cm pretvoren je u kružni luk poluprečnika $R = 5$ cm. Odrediti centralni ugao kružnog luka.

185. Odrediti poluprečnik kružnog luka l sa centralnim uglom:
a) 135° , b) $10^\circ 40'$.

186. Kvadrat i krug imaju jednake obime. Odrediti odnos njihovih površina.

187. Iz starih grčkih rukopisa se vidi da su površinu kruga izračunavali kao površinu kvadrata čija je stranica 0,875 od prečnika kruga. Koja je približna vrednost za π korišćena u tom slučaju?

188. U trapezu čiji su kraci 15 cm i 13 cm i veća osnovica 21 cm upisan je krug. Izračunati njegovu površinu.

189. Visina hipotenuze pravouglog trougla deli hipotenuzu na odsečke dužine 16 cm i 9 cm. Odrediti površinu upisanog kruga u trouglu.

190. Stranice trougla su $a = 26$ cm, $b = 30$ cm i $c = 28$ cm. Odrediti površinu kruga koji dodiruje stranice a i b a njegovo središte leži na stranici c .

191. Krug je opisan oko jednakokrakog trapeza, sa krakom 10 cm i osnovicama 14 cm i 2 cm. Izračunati površinu kruga.

192.* Nad većom katetom pravouglog trougla, kao prečnikom, opisan je polukrug. Odrediti dužinu tog polukruga ako je manja kateta 30 cm, a dužina tetive koja spaja teme pravog ugla sa tačkom preseka hipotenuze sa polukrugom iznosi 24 cm.

193.* Oko pravilnog poligona stranice a cm opisan je i u njemu upisan krug. Dokazati da je površina kružnog prstena određenog tim krugovima jednaka površini kruga čiji je prečnik a cm.

194. Oko kruga poluprečnika 2 cm opisan je jednakokraki trapez površine 20 cm^2 . Odrediti stranice trapeza.

195. Izračunati poluprečnik kruga koji ima jednaku površinu sa kružnim prstenom čiji krugovi imaju poluprečnike 21 cm i 29 cm.

196. Odrediti poluprečnike kružnog prstena površine $50,24 \text{ cm}^2$ i širine 1,6 cm.

197. Data su dva koncentrična kruga. Tetiva većeg kruga dužine 6 cm, dodiruje manji krug. Izračunati površinu kružnog prstena.

198. Odrediti centralni ugao i površinu kružnog isečka poluprečnika 4 m i luka 5 m.

199. Tetiva odseca luk od 90° i kružni odsečak površine $2\pi - 4 \text{ cm}^2$. Izračunati dužinu tetiva.

200. Izračunati centralni ugao i luk kružnog iseka površine 75 m^2 ako je odnos poluprečnika i luka $2 : 3$.
201. Poluprečnik kruga je 2 m . Izračunati dužinu kružnog luka kome odgovara centralni ugao od $32^\circ 15'$ sa tačnošću od 1 cm .
202. Date su kružnice $K(O, r)$ i tačka A tako da je $OA = 2r$. Izračunati dužinu kružnog luka koji se vidi iz tačke A .
- 203.*Dati su krug K_1 poluprečnika $r_1 = 2 \text{ cm}$ i krug K_2 čiji je poluprečnik jednak stranici jednakokraničnog trougla upisanog u krug K_1 , tako da centar kruga K_2 leži na krugu K_1 . Izračunati dužinu krive koja obrazuje lunelu, a koju čine luci krugova K_1 i K_2 .
- 204.*Dat je jednakokraničan trougao stranice 3 cm i krug sa središtem u središtu trougla, koji deli stranicu trougla na tri jednaka odsečka. Odrediti površinu figure koja predstavlja zajednički deo trougla i kruga ograničen kružnicom.
- 205.*Centralna razdaljina krugova K_1 i K_2 je 2 cm . Oni se seku pod pravim uglom, a poluprečnik kruga K_1 iznosi 1 cm . Odrediti površinu figure koja istovremeno pripada i jednom i drugom krugu.
- 206.*Ako se nad katetama pravouglog trougla upisanog u polukrugu opišu polukrugovi dobiće se dve krivolinijske figure u obliku polumesece (Hipokratove lune). Dokazati da je zbir površina tih figura jednak površini datog trougla.
- 207.*Ako se prečnik nad kojim je opisan polukrug podeli ma sa kojom tačkom na dva dela, pa se nad tim delovima opišu polukrugovi, onda je površina između tih polukrugova jednaka površini onog kruga čiji je prečnik dužina normale povučene u deonoj tački na prečnik datog polukruga do preseka s tim polukrugom (Arhimedov srp). Dokazati.
- 208.*Krugovi $K(O, r)$ i $K_1(O_1, 3r)$ se dodiruju spolja u tački A i imaju zajedničku spoljnu tangentu BC (B i C dodirne tačke). Izračunati:
- površinu trapeza $OBCO_1$;
 - površinu trougla ABC ;
 - površinu ograničenu zajedničkom tangentom i krugovima.
- 209*. Ako se prečnik AB ma kog kruga podeli tačkama C i D na tri jednaka dela, tako da je $AC = CD = DB$, pa se nad AC i AD , s jedne strane, a nad BD i BC , s druge strane prečnika opišu polukrugovi, onda je površina kruga podeljena na tri jednaka dela. Dokazati.

- 210.*Dat je krug $K(O, r)$. Tačke A, B, C i D pripadaju krugu i raspoređene su u datom poretku tako da je odnos lukova $AB : BC = 2 : 1$, ugao $AOC = 90^\circ$ i tetiva $BC \parallel AD$. Dokazati da je površina dela kruga između te dve tetive jednaka trećini površine kruga.
- 211.*Duž a podeljena je na n jednakih delova, nad svakim kao tetivom konstruisani su naizmenično sa jedne, a zatim sa druge strane, kružni luci od 60° . Odrediti dužinu dobijene talasaste linije. Da li se dužina linije menja ako n neograničeno raste?
- 212.*Središta tri kruga pripadaju pravoj i svaki krug prolazi kroz središte susednog. Odrediti dužinu l konture dobijene figure.
- 213.*U jednakokraničnom trouglu stranice $a = 6 \text{ cm}$ upisan je krug K_1 . Jedno teme trougla je centar kruga K_2 , poluprečnika $\frac{a}{2}$. Izračunati (na dve decimale) površinu luka između K_1 i K_2 .

IV. GLAVA

4. OBRTNA TELA

4.1. VALJAK

Obrasci

1. Površina omotača pravog valjka

$M = 2R\pi H$ (M površina omotača, R poluprečnik i H visina valjka).

2. Površina pravog valjka

$P = 2R\pi(R + H)$ (P površina, R poluprečnik i H visina valjka).

3. Zapremina pravog valjka

$V = R^2 \pi H$ (V zapremina, R poluprečnik osnove i H visina valjka).

214. U kružnom valjku visine 3 dm upisan je pravougli paralelepiped, čija je dijagonala 34 cm. Izračunati poluprečnik osnove valjka.
215. Koliko je kvadratnih metara metalnog lima potrebno za izradu cilindričnog dimnjaka visine 18 m i prečnika 65 cm.
216. Ravan paralelna osi pravog kružnog valjka seče ga tako da od kruga njegove osnove odseca luk kome odgovara centralni ugao od 120° . Dužina ose je 10 cm, a njeno rastojanje od ravni preseka je $a = 2$ cm. Izračunati površinu preseka.
217. Od kvadrata stranice a načinjen je omotač kružnog valjka. Izračunati zapreminu valjka u funkciji od a .
218. Odrediti odnos između visine pravog kružnog valjka i poluprečnika njegove osnove ako se njihov zbir uzme za prečnik kruga čija je površina jednaka površini valjka.
219. Za koliko se mora povećati visina pravog kružnog valjka tako da površina omotača novog valjka bude jednaka površini datog valjka?
220. Oko jednakoivične trostrane prizme ivice b opisan je kružni valjak. Odrediti zapreminu valjka.
221. U kružnom valjku upisana je trostrana prizma, a u prizmi je upisan valjak. Odrediti razmeru zapremina tih valjaka.

222. U jednakokraničnom kružnom valjku upisana je i oko njega opisana pravilna šestostrana prizma. Ako je poluprečnik osnove valjka r , odrediti razliku površina omotača obe prizme.
223. Poluprečnik osnove pravog kružnog valjka je r a visina H . Ako se poluprečnik r smanji za izvesnu veličinu x , a zatim se visina H poveća za istu veličinu x i ako ta dva valjka imaju jednake zapremine, odrediti x .
224. Ako se pravi kružni valjak preseče jednom ravni paralelno njegovoj osi: a) izračunati površinu preseka u funkciji poluprečnika r , visine H i rastojanje d od ose valjka; b) $d = \frac{r\sqrt{3}}{2}$ izračunati površinu preseka i zapreminu oba dela.
225. Izračunati zapreminu kosoḡ valjka čiji je osni presek romb stranice a i oštrog ugla $\alpha = 60^\circ$.
226. Odrediti površinu pravog kružnog valjka čija se visina odnosi prema prečniku njegove osnove kao $m : n$, ako je njegova zapremina V .
227. Izračunati površinu šupljeg valjka čija je visina $H = 25$ cm, poluprečnik spoljnjeg omotača $R = 15$ cm, a unutrašnjeg $r = 6$ cm.
228. Bakarna žica, duga 25 m, teška je 0,1 N. Izračunati prečnik žice ako je specifična težina bakra $8,9 \text{ g/cm}^3$.
229. Data je površina $P = 150,976 \text{ m}^2$ pravog kružnog valjka i površina $M = 94,2478 \text{ m}^2$ njegovog omotača. Izračunati visinu valjka.
230. Kvadrat strane a rotira oko ose koja je od centra kvadrata udaljena za p ($p > \frac{a}{2}$). Odrediti površinu i zapreminu obrtnog tela ako je osa paralelna stranici kvadrata i leži u njegovoj ravni.
- 231.*Data su dva kružna valjka. Poluprečnik x osnove prvog valjka jednak je visini drugog, a poluprečnik y osnove drugog valjka jednak je visini prvog. Za koliko se razlikuju površine ako je zbir tih površina 200π , a zbir zapremina 240π ?
- 232.*Prečnik osnove pravog kružnog valjka je $2r = 12$ cm. Ako je dijagonala osnog preseka valjka $d = 13$ cm, izračunati površinu i zapreminu pravilne trostrane prizme upisane u valjak.
233. Površina kružnog valjka je $180\pi \text{ cm}^2$, a razlika visine i poluprečnika osnove je 3 cm. Izračunati zapreminu valjka.
234. Ako se razvije omotač jednog pravog kružnog valjka, dobija se pravougaonik čija je dijagonala dužine d nagnuta prema osnovici tog pravougaonika pod uglom α . Odrediti zapreminu tog valjka.

235. Izračunati zapreminu kružnog valjka upisanog u pravoj trostranoj prizmi čije su osnovne ivice $a = 9$ cm, $b = 10$ cm, $c = 17$ cm, a visina $H = 30$ cm.
- 236.**Ravan prolazi kroz centar donje osnove kružnog valjka i nagnuta je prema ravni osnove pod uglom α . Ta ravan seče gornju osnovu po tetivi b , kojoj odgovara centralni ugao β . Izračunati zapreminu valjka.
- 237.**Kroz tačku kružne linije bilo koje osnove valjka postavljena je ravan koja sa ravni osnove zaklapa ugao od 60° i omotač valjka deli na dva jednaka dela. Površina valjka je $2\pi(1 + 2\sqrt{3})$. Izračunati zapreminu.
238. Stranice trougla su 25 cm, 24 cm i 7 cm. Izračunati razliku zapremina valjka čije su osnove opisan i upisan krug u dati trougao. Visine valjaka jednake su srednjoj po veličini visini trougla.
- 239.*Površina pravilnog šestougla je $54\sqrt{3}$ cm². Odrediti odnos zapremina valjaka čije su donje osnove opisan i upisan krug u dati šestougao. Visina valjaka su jednake dužoj dijagonali šestougla.
- 240.*Oko osnove valjka opisan je jednakokraki trapez površine 50 cm², sa oštrim uglom 30° . Izračunati površinu i zapreminu valjka ako je njegova visina jednaka kraku trapeza.
241. Osnova prizme je jednakokraki trapez osnovica 8 cm i 2 cm. U trapez je upisan valjak. Izračunati razmeru zapremina valjka i prizme ako je visina tela krak trapeza.
- 242.*Osnova prizme je romb visine 24 cm i dijagonale 30 cm. U prizmu je upisan valjak. Izračunati razmeru površina valjka i prizme i razmeru njihovih zapremina ako je visina tela manja dijagonala romba.

4.2. KUPA I ZARUBLJENA KUPA

Obrasci

1. Površina omotača prave kupe

$M = R\pi s$ (M omotač, R poluprečnik osnove i s izvodnica kupe).

2. Površina prave kupe

$P = R\pi(R + s)$ (P površina, R poluprečnik osnove i s izvodnica kupe).

3. Zapremina prave kupe

$V = \frac{R^2\pi H}{3}$ (V zapremina, R poluprečnik osnove i H visina kupe).

4. Površina omotača prave zarubljene kupe

$M = \pi s(R + r)$ (R i r poluprečnici osnova, M omotač i s izvodnica kupe).

5. Površina prave zarubljene kupe

$P = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r))$ (P površina, R i r poluprečnici osnova i s izvodnica).

6. Zapremina prave zarubljene kupe

$V = \frac{\pi H}{3}(R^2 + Rr + r^2)$ (V zapremina, H visina i R i r poluprečnici osnova zarubljene kupe).

243. Visina kupe je 12 cm, a površina osnog preseka 42 cm. Odrediti poluprečnik osnove i izvodnicu kupe.
244. Prava kupa je opisana oko prave pravilne četverostrane piramide. Visina piramide je 7 cm a zapremina 70 cm³. Izračunati izvodnicu kupe.
245. Izračunati površinu i zapreminu kupe ako je njena izvodnica za 1 cm duža od visine, a prečnik osnove 1 dm.
246. Paralelni presek valjka je osnova kupe sa vrhom u centru gornje osnove valjka. Odrediti u kom odnosu paralelni presek deli visinu valjka ako omotač kupe deli zapreminu valjka na dva jednaka dela.
247. Obim osnove prave kupe je p , a osni presek je pravougli trougao. Izračunati površinu i zapreminu kupe.
248. U prvoj kupi upisana je i oko nje opisana pravilna četverostrana piramida. Ako je r poluprečnik osnove kupe i H visina, izračunati površinu obe piramide.
249. Odrediti zapreminu prave kupe ako njen omotač razvijen u ravni čini kružni isečak sa centralnim uglom od 120° i poluprečnikom s .
250. Ako je najveći ugao između dve izvodnice prave kupe 120° , onda je površina njenog omotača jednaka površini omotača pravog valjka koji sa kupom ima istu osnovu i visinu. Dokazati.
251. Stranice trougla su $a = 10$ cm, $b = 17$ cm i $c = 21$ cm. Izračunati zapreminu tela koje nastaje kad dati trougao rotira redom oko svake stranice.
- 252.*Ako trougao čije su stranice a , b i c rotira oko svake strane, onda su dobijene zapremine obrnuto proporcionalne stranicama trougla. Dokazati.
253. Izvodnica prave kupe jednaka je s i sa ravni osnove čini ugao od 30° . Izračunati zapreminu kupe.

254. Osnu presek kose kupe je pravougli trougao koji na osnovici ima ugao: a) $\alpha = 60^\circ$; b) $\alpha = 30^\circ$; c) $\alpha = 72^\circ$.
Ako je poluprečnik osnove r , izračunati zapreminu kupe.
255. Iz prave kupe izdubljen je pravi valjak, čija je visina jednaka polovini visine kupe i čija se osa poklapa sa osom kupe. Poluprečnik osnove kupe je $R = 3$ cm, osnove valjka $r = 1$ cm, a izvodnica kupe $s = 5$ cm. Izračunati zapreminu i površinu izdubljenog tela.
256. U pravoj kupi upisana je kocka. Izračunati zapreminu kocke ako je poluprečnik osnove kupe $r = 10$ cm i visina $H = 12$ cm.
257. Površina prave kupe je $P = 96 \pi \text{ cm}^2$ i izvodnica $s = 10$ cm. Odrediti zapreminu kupe.
- 258.*Projekcije kateta pravouglog trougla na hipotenuzi su 32 cm i 28 cm. Odrediti površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom trougla oko prave koja sadrži teme pravog ugla i paralelna je hipotenuzi.
- 259.*Ako su V_a , V_b i V_c zapremine tela koje se dobijaju rotacijom pravouglog trougla oko kateta a i b i hipotenuze c , dokazati da između zapremina V_a , V_b i V_c postoji relacija
- $$\frac{1}{V_c^2} = \frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2}.$$
260. Pravougli trapez osnovica $a = 10$ cm i $b = 2$ cm i površine 90 cm^2 rotira oko veće osnove. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.
261. Pravougli trapez osnovica 9 dm i 2 dm i dužeg kraka 25 dm rotira oko manje osnove. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.
- 262.*Odrediti zapreminu prave kupe ako njen omotač razvijen u ravni čini kružni isečak čija je površina M i centralni ugao 270° .
- 263.*Površina omotača kupe je dva puta veća od površine njegove osnove. Izračunati centralni ugao kružnog isečka omotača kupe u razvijenom obliku.
- 264.*Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje rotacijom pravouglog trougla čije su katete 5 cm i $6\frac{2}{3}$ cm, oko ose, koja sadrži teme pravouglog trougla i paralelna je hipotenuzi.
265. Odrediti zapreminu kupe, ako tetiva a kruga osnove odvađa kružni luk α , i visina kupe zaklapa sa izvodnicom ugao β .
266. Površina trougla ABC jednaka je P , stranica $AC = b$ u $\sphericalangle CAB = \alpha$. Odrediti zapreminu tela dobijenog rotacijom trougla ABC oko stranice AB .

267. Kroz dve izvodnice konusa koje obrazuju ugao α postavljena je ravan koja sa osnovom konusa gradi ugao β . Površina preseka je Q . Izračunati visinu konusa.
- 268.*U jednakokraničnom trouglu stranice a konstruisana je kroz težište prava l , paralelna osnovici. Odrediti razmeru veličina površina na koje je trougao podeljen. Svaka od tih površina posebno rotira oko prave l . Dokazati da tela koja nastaju tom rotacijom imaju jednake površine i jednake zapremine.
- 269.*Visina pravog kružnog konusa je h . Dve uzajamno normalne izvodnice dele krug osnove na dva luka, od kojih je jedan dva puta veći od drugog. Izračunati zapreminu kupe.
- 270.*Odrediti površinu omotača prave zarubljene kupe ako njena izvodnica gradi ugao od 30° sa ravni osnove a površina osnog preseka iznosi Q .
271. Zapremina kofe je 10,5 litara. Prečnici osnova dna i otvora su 16 cm i 28 cm. Odrediti dubinu kofe.
272. Poluprečnici osnova i izvodnica prave zarubljene kupe odnose se kao 1 : 2 : 5. U kom odnosu stoje površina omotača i površina zarubljene kupe?
273. Poluprečnici osnova prave zarubljene kupe i njena izvodnica odnose se kao 1 : 4 : 5, a visina zarubljene kupe je 8 cm. Izračunati površinu omotača.
274. Izvodnica prave zarubljene kupe je $s = 5$ cm, a poluprečnici osnova su $R = 5$ cm i $r = 1$ cm. Izračunati poluprečnik osnove pravog valjka koji sa njom ima jednaku visinu i jednaku površinu omotača.
- 275.*Isečak kružnog prstena sa centralnim uglom od 288° čini omotač prave zarubljene kupe. Izračunati zapreminu te kupe ako poluprečnici koncentričnih kružnica koji obrazuju prsten iznose R i r .
- 276.*Jednakokranična kupa sa poluprečnikom osnove r presečena je jednom ravni paralelno osnovi, tako da se površina omotača dopune prema površini omotača zarubljene kupe odnosi kao 1 : 3. Odrediti odnos površine omotača zarubljene kupe prema zbiru površina njenih osnova.
277. U pravoj zarubljenoj kupi visine H i poluprečnika osnova R i r upisana je pravilna četvorostrana zarubljena piramida. Odrediti zapreminu te piramide.
278. U pravoj zarubljenoj kupi upisana je i oko nje opisana pravilna šestostrana zarubljena piramida. Odrediti zapremine obe piramide ako je visina kupe H i poluprečnici osnova R i r .

279. Pravougli trapez osnovica $a = 10$ cm i $b = 2$ cm rotira oko manjeg kraka. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela ako je visina trapeza 15 cm.
280. Pravougli trapez osnovica $a = 9$ cm i $b = 4$ cm i sa dužim krakom 13 cm rotira oko ose paralelne visini, koja je u ravni trapeza i ne seče ga. Rastojanje ose je 1 cm od temena pravog ugla trapeza. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.
281. Data je površina zarubljene kupe $P = 216 \pi$ dm²; razlika poluprečnika osnova je 5 dm i izvodnica 13 dm. Odrediti zapreminu zarubljene kupe.
- 282.*Nad krugom poluprečnika $R = 5$ cm postavljeni su, na istoj strani, uspravni valjak i uspravna kupa. Ta dva tela imaju jednake površine i jednake zapremine. Izračunati zapreminu onog dela kupe koji pripada valjku.
- 283.*Ako se u osnom preseku zarubljene kupe može upisati kružnica, onda je:
- $$a) H = 2\sqrt{R \cdot r}; \quad b) M = \pi s^2; \quad c) V = \frac{1}{6} P \cdot H,$$
- gde su R i r poluprečnici osnova, H visina, s izvodnica, M omotač, P površina i V zapremina zarubljene kupe. Dokazati.
- 284.*Poluprečnik jedne osnovne zarubljene kupe dva puta je veći od poluprečnika druge osnove, bočna površina jednaka je zbiru površina osnova a površina osnog preseka iznosi 36 m². Izračunati zapreminu zarubljene kupe.
- 285.*Romb čije su dijagonale 3 dm i 4 dm rotira oko visine koja prolazi kroz središte romba. Izračunati zapreminu dobijenog tela.
- 286.*Stranice pravougaonika su 20 cm i 15 cm. Izračunati površinu tela koje nastaje pri rotaciji pravougaonika oko jedne svoje dijagonale.
287. Jednakokraki trapez čije su osnovice 20 cm i 8 cm i krak 10 cm rotira oko ose koja leži u njegovoj ravni a ne seče ga. Osa je paralelna većoj osnovici trapeza i na rastojanju je 2,5 cm od nje. Izračunati površinu i zapreminu nastalog tela.
- 288.*Trapez jedanput rotira oko veće, a drugi put oko manje paralelne stranice. Zapremine tih obrtnih tela odnose se kao 3 : 4. Odrediti razmeru paralelnih stranica trapeza.
- 289.*Poluprečnici osnova zarubljene kupe su R i r . Izvodnica je nagnuta prema ravni osnove pod uglom α . Izračunati površinu omotača i zapremine kupe.

- 290.*U zarubljenoj kupi površina jedne osnove je četiri puta veća od površine druge osnove. Ako je izvodnica, čija je dužina s , nagnuta prema ovoj osnovi pod uglom α , izračunati zapreminu kupe.
- 291.*Date su paralelne stranice jednakokrakog trapeza $a = 25$ cm i $c = 7$ cm i poznato je da dijagonale toga trapeza stoje normalno na neparalelnim stranicama. Izračunati površinu i zapreminu tela koje nastaje kad taj trapez rotira oko jedne neparalelne stranice.
- 292.*Visina kupe čija je zapremina V podeljena je na tri jednaka dela. Kroz deone tačke postavljene su ravni paralelne sa ravni osnove. Odrediti zapreminu srednjeg dela kupe.
- 293.*Dužina srednje linije jednakokrakog trapeza je m , njegove dijagonale su normalne, a jedan ugao trapeza iznosi 60°. Odrediti zapreminu tela dobijenog rotacijom trapeza oko ose koja leži u njegovoj ravni, prolazi kroz jedno teme na većoj osnovici i normalna je na dijagonalu koja polazi iz istog temena.
294. Izračunati površinu i zapreminu zarubljene kupe ako su površine njenih osnova 25π cm² i 4π cm² a površina omotača 35π cm².
295. Jednakostranični trougao stranice a rotira oko prave koja sadrži jedno njegovo teme i paralelna je naspramnoj stranici trougla. Izračunati površinu i zapreminu dobijenog obrtnog tela.
296. Jednakostranični trougao ABC stranice a rotira oko prave koja sadrži teme A i paralelna je visini kroz teme B . Izračunati površinu i zapreminu dobijenog rotacionog tela.
- 297.*Romb $ABCD$, stranice a rotira najpre oko stranice AB , a zatim oko dijagonale AC . Neka su V_1 i V_2 zapremine tako nastalih tela. Izračunati oštar ugao romba ako je $V_1 : V_2 = 9 : \sqrt{3}$. Izračunati, dalje, zapreminu tela koje nastaje rotacijom romba oko ose koja sadrži teme A oštrog ugla i normalna je na AB .
298. Izračunati površinu kupe čija je izvodnica nagnuta pod uglom α prema ravni osnove, a površina osnog preseka kupe je S .
299. Poluprečnici osnova i izvodnica zarubljene kupe stoje u odnosu 3 : 11 : 17. Izračunati površinu zarubljene kupe ako je njena zapremina 815π cm³.

Obrasci

1. Površina kalote

$P = 2\pi Rh$ (P površina kalote, R poluprečnik sfere i h visina kalote).

2. Površina zone

$P = 2\pi Rh$ (P površina zone, R poluprečnik sfere i h visina zone).

3. Površina lopte

$P = 4\pi R^2$ (P površina i R poluprečnik lopte).

4. Zapremina lopte

$V = \frac{4}{3}R^3\pi$ (V zapremina i R poluprečnik lopte).

5. Zapremina loptinog isečka

$V = \frac{2}{3}R^2\pi h$ (V zapremina isečka, R poluprečnik lopte i h visina kalote).

6. Zapremina loptinog odsečka

$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h)$ (V zapremina loptinog odsečka, R poluprečnik lopte i h visina odsečka).

7. Zapremina sloja lopte

$V = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + 3r_2^2 + h^2)$ (V zapremina sloja lopte r_1 i r_2 poluprečnici krugova koji čine sloj i h visina sloja).

300. Površina lopte jednaka je površini omotača valjka opisanog oko lopte. Dokazati.

301. Visina zone je 7 cm, a poluprečnici osnova iznose 16 cm i 33 cm. Izračunati površinu zone.

302. Na kom rastojanju od centra lopte poluprečnika R treba postaviti svetlu tačku da bi ona osvetlila $\frac{1}{3}$ njene površine?

303. Kružni odsečak sa lukom od $\frac{2\pi}{3}$ i površinom Q obrće se oko svoje visine. Izračunati površinu obrtnog tela.

304. U pravilnoj trostranoj prizmi sa osnovnom ivicom a upisana je lopta. Odrediti površinu i zapreminu oba tela i razmeru površina.

305. Visina pravilne četverostrane prizme je 2 cm i osnovna ivica 4 cm. Odrediti poluprečnik lopte opisane oko prizme.

306. U lopti površine πm^2 upisan je valjak, čiji osni presek ima površinu $48 dm^2$. Odrediti površinu i zapreminu valjka.

307. U pravilnom tetraedru ivice a upisana je i oko njega opisana lopta. Odrediti poluprečnike obe lopte.

308. U polulopti je upisan prav kružni konus čiji je poluprečnik osnove jednak visini. Koji deo je zapremina konusa od zapremine polulopte?

309. U pravilnu jednakoivičnu četverostranu piramidu ivice a treba upisati loptu. Izračunati poluprečnik i zapreminu lopte.

310.*Osnovna ivica pravilne četverostrane piramide je a , a bočna ivica $\frac{3a}{\sqrt{2}}$. Odrediti zapreminu piramide i poluprečnik lopte koja je oko nje opisana.

311.*Visina pravilne trostrane zarubljene piramide iznosi 17 cm, a poluprečnici krugova opisanih oko osnova su 5 cm i 12 cm. Izračunati poluprečnik opisane lopte.

312. U lopti poluprečnika r upisana je kupa, čija je visina jednaka poluprečniku osnove. Izračunati površinu i zapreminu kupe.

313. U kvadratu su upisani krug i jednakostranični trougao, tako da se osnovica trougla poklapa sa jednom stranicom kvadrata. Ako sve tri površi rotiraju oko ose koja sadrži centar kruga i normalna je na osnovice kvadrata i trougla, nastaju kupa, valjak i lopta. Odrediti:

a) U kom odnosu stoje površine omotača kupe, valjka i površina lopte?

b) Kako se odnose površine ta tri tela?

c) Kako se odnose njihove zapremine?

314.*Oko lopte je opisana prava zarubljena kupa čiji su poluprečnici osnova R i r . Dokazati da je poluprečnik lopte geometrijska sredina poluprečnika osnova kupe.

315.*Zapremina odsečka lopte poluprečnika r tri puta je veća od zapremine najveće lopte koja je u njemu upisana. Izračunati zapreminu odsečka.

316. U lopti je upisana kupa poluprečnika osnove r i visine h . Izračunati površinu i zapreminu loptinog odsečka čije su osnova i visina jednake osnovi i visini kupe.

317. U lopti poluprečnika R konstruisan je valjak, čija osa sadrži središte lopte, a poluprečnik osnove je $\frac{R}{2}$. Odrediti zapreminu složenog tela određenog valjkom i loptinim odsečcima.
318. U sferi poluprečnika R upisan je pravilan tetraedar. Odrediti zapreminu tetraedra.
319. U kupi su upisane dve lopte koje se dodiruju spolja. Jedna od njih ima poluprečnik R i zapreminu osam puta manju od zapremine druge. Izračunati površinu omotača i zapreminu kupe.
- 320.*U lopti je upisana kupa. Centar lopte deli visinu kupe tako da je veći odsečak geometrijska sredina visine i manjeg odsečka. Odrediti odnos zapremina lopte i kupe.
- 321.*Omotač zarubljene kupe jednak je površini kruga čiji je poluprečnik izvodnica kupe. Dokazati da se u zarubljenoj kupi može upisati lopta.
- 322.*Oko sfere poluprečnika R opisana je zarubljena kupa. Površina jednog bazisa dva puta je manja od površine drugog bazisa. Odrediti zapreminu zarubljene kupe.
323. Na osnovi polulopte čiji je poluprečnik $r = 10$ cm stoji kupa visine 30 cm. Odrediti površinu zone koja se nalazi izvan kupe.
324. U lopti poluprečnika $R = 8$ dm upisana je kupa čija je visina jednaka prečniku osnove. Odrediti površinu i zapreminu kupe.
325. Odrediti zapreminu zajedničkog dela dve jednake sfere, ako se centar jedne od njih nalazi na površini druge.
326. Sa iste strane centra lopte postavljene su dve paralelne ravni koje presecaju loptu. Rastojanje ravni je 9 cm, a površine krugova u preseccima su 400π cm² i 49π cm². Odrediti površinu i zapreminu lopte, kao i površinu zone i zapreminu sloja.
- 327.*Odrediti površinu prave kružne kupe koja je opisana oko lopte prečnika $2r$ i čija je visina dva puta veća od prečnika lopte.
328. Izračunati deo površine lopte koji se vidi iz tačke A , ako je poluprečnik lopte $R = 4$ cm i odstojanje tačke A od centra lopte $d = 8$ cm.
329. Izračunati površinu pojasa lopte poluprečnika $R = 65$ cm ako su poluprečnici graničnih krugova pojasa $r_1 = 33$ cm i $r_2 = 25$ cm.
- 330.*U konusu je upisana lopta. Izračunati zapreminu lopte ako je izvodnica konusa s nagnuta prema ravni osnove pod uglom α .

- 331.*U lopti je upisana kupa čija je zapremina jednaka $\frac{1}{4}$ zapremine lopte. Odrediti zapreminu lopte ako je visina kupe H .
- 332.*Nad visinom H kupe, kao nad prečnikom, opisana je lopta. Odrediti zapreminu dela lopte koji leži izvan kupe ako je ugao između visine i izvodnice kupe α .
- 333.*Odrediti ugao koji zahvataju visina i izvodnica kupe ako je omotač kupe podeljen na dva jednaka dela presekom sa sfernom površi koja ima centar u vrhu konusa i poluprečnik jednak visini kupe.
- 334.*U krugu poluprečnika R upisan je kvadrat i jednakostraničan trougao, tako da mu je osnovica paralelna stranici kvadrata. Rotacijom ove slike oko njene ose simetrije postaju valjak, kupa i lopta. Dokazati da je:
- površina valjka geometrijska sredina površine lopte i kupe;
 - zapremina valjka geometrijska sredina zapremina lopte i kupe.
- 335.*Data je lopta poluprečnika R . Odrediti poluprečnik r ($r < R$) lopte koncentrične sa datom loptom, čija je zapremina geometrijska sredina zapremina date lopte i onog dela date lopte koji se nalazi van lopte poluprečnika r .
- 336.*Sfera poluprečnika R podeljena je jednom ravni na dva dela, tako da je odnos površina odsečaka jednak 1 : 3. U kom odnosu stoje zapremine dobijenih delova? Odrediti površinu i zapreminu opisanog konusa koji dodiruje sferu po krugu nastalom presekom date ravni i sfere.
- 337.*Oko date lopte opisana je prava zarubljena kupa. Dokazati da je površina lopte manja od omotača kupe.
338. Ravan osnove prave kružne kupe dodiruje sferu, a vrh joj se nalazi u centru te sfere. Odrediti ugao između visine i izvodnice kupe ako je površina sfere jednaka površini kupe.
339. Svaka od četiri kugle koje leže na ravnom stolu (i dodiruju sto) dodiruju ostale tri kugle. Tri kugle imaju poluprečnik R . Odrediti poluprečnik četvrte kugle.
- 340.*Stranice trougla ABC su a, b, c . Naći poluprečnike sfere koje dodiruju ravan trougla ABC u tačkama A, B, C i koje se dodiruju međusobno.
341. Izračunati poluprečnik lopte upisane u pravilnu četvorostranu piramidu čija je osnovna ivica a i na nagibni ugao bočne strane prema osnovi α .

342. Sfera je presečena sa dve paralelne ravni čije je međusobno rastojanje 3 cm. Ravni se nalaze sa iste strane centra sfere. Te ravni seku sferu po krugovima poluprečnika 9 cm i 12 cm. Izračunati površinu sfere.
343. Radijusi triju sfera se odnose kao 1 : 4 : 8, a zbir zapremina odgovarajućih lopti je $\frac{2308\pi}{3}$. Odrediti zapreminu lopte čija sfera ima površinu jednaku zbiru površina datih sfera.
344. Izračunati poluprečnik sfere i zapreminu lopte ako se sfera može opisati oko paralelopipeda čije se ivice odnose kao 2 : 3 : 6, a meri broj površine paralelopipeda jednak je mernom broju njegove zapremine.
345. Dijametar sfere $2R$ podeljen je na tri jednaka dela dvema paralelnim ravnima. Odrediti površine kalota i zone koje su nastale presekom sfere paralelnim ravnima.
- 346.*Oko sfere poluprečnika $R = 1,5$ cm opisana je prava kupa čija je površina osnove jednaka površini sfere. Odrediti odnos zapremina lopte i kupe.

V. GLAVA

5. DETERMINANTE SA PRIMENOM

5.1. DETERMINANTE DRUGOG I TREĆEG REDA

Primenom definicije $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} ad - bc$, izračunati vrednost determinante (347–350):

$$347. \text{ a) } \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{ b) } \begin{vmatrix} 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}; \quad \text{ c) } \begin{vmatrix} a-b & -2 \\ ab & a-b \end{vmatrix}.$$

$$348. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & \log_b a \\ \log_a b & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{ b) } \begin{vmatrix} a+bi & b \\ 2a & a-bi \end{vmatrix}; \quad (i^2 = -1).$$

$$349. \begin{vmatrix} \cos \alpha + i \sin \alpha & 1 \\ 1 & \cos \alpha - i \sin \alpha \end{vmatrix} \quad (i^2 = -1).$$

$$350. \begin{vmatrix} \operatorname{tg} \alpha & 1 \\ -1 & \operatorname{ctg} \alpha \end{vmatrix}.$$

Primenom definicije

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Izračunati vrednost determinante (351–354):

$$351. \text{ a) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{ b) } \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ 4 & 2 & 6 \end{vmatrix}.$$

352. a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & -6 \\ -1 & 4 & 6 \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix}.$

353. a) $\begin{vmatrix} a & -a & a \\ a & a & -a \\ a & -a & a \end{vmatrix};$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -1 & 1 \end{vmatrix}.$

354. a) $\begin{vmatrix} 1+\cos\alpha & 1+\sin\alpha & 1 \\ 1-\sin\alpha & 1+\cos\alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$ b) $\begin{vmatrix} 2\cos^2\frac{\alpha}{2} & \sin\alpha & 1 \\ 2\cos^2\frac{\beta}{2} & \sin\beta & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$

Rešiti jednačine (355–359):

355. a) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

b) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 5 \end{vmatrix} = 0.$

356. a) $\begin{vmatrix} x-2 & 1 & -1 \\ -1 & x+2 & 1 \\ -1 & x & -1 \end{vmatrix} = 0;$ b) $\begin{vmatrix} 4 & 8 & x+3 \\ x+2 & 6 & 3 \\ 1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0.$

357. a) $\begin{vmatrix} -2 & 8 & x+3 \\ 1 & 6 & 3 \\ -1 & 2x & x \end{vmatrix} = 0;$ b) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & x+3 \\ x+2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 0.$

358.* $\begin{vmatrix} 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ x & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 8 \end{vmatrix} = 0.$

359.* $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0.$

Koristeći osobine determinanta dokazati da je (360–368):

360.* $\begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ x & x+2y+z & z \\ x & y & x+y+2z \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3.$

361. $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3.$

362.* $\begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ b+a & -2b & b+c \\ c+a & c+b & -2c \end{vmatrix} = 4(b+c)(c+a)(a+b).$

Ispitati saglasnost sistema linearnih jednačina (363–367):

363. $2x + y = 0 \wedge x + y = -1 \wedge 3x - 2y = 7.$

364. $x - y = 3 \wedge x^2 + y = 5 \wedge 2x + 3y = 11.$

365. $x + 2y + 3z = 6 \wedge 2x - 3y + z = 0 \wedge$
 $\wedge 3x - 2y + 4z = 5 \wedge x - y + 3z = 3.$

366. $x + y = 3 \wedge 2x + ay = 4 \wedge x + 2y = 5$
(a realan parametar).

367. $x + y + z = 1 \wedge 2x - y + z = 0 \wedge$
 $\wedge x - 2y + z = -2 \wedge x - y + az = 1$ (a parametar).

Primenom Gausovog algoritma rešiti sistem linearnih jednačina (368–376):

368. $x + 2y - 5z = 6 \wedge 2x + y + 2z = 5 \wedge -3x + 3y - 4z = 8.$

369. $x + 2y + 3z = 32 \wedge 2x + y + 3z = 31 \wedge 3x + 2y + z = 28.$

370. $\frac{6}{x} + \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = 4 \wedge \frac{3}{x} + \frac{8}{y} + \frac{5}{z} = 4 \wedge \frac{9}{x} + \frac{12}{y} - \frac{10}{z} = 4.$

371. $\frac{2}{x} + \frac{3}{y} - \frac{4}{z} = \frac{1}{12} \wedge \frac{3}{x} - \frac{4}{y} + \frac{5}{z} = \frac{19}{24} \wedge \frac{4}{x} - \frac{5}{y} - \frac{6}{z} = -\frac{1}{2}.$

372. $x + y = 20 \wedge x = 2z \wedge z + t = 12 \wedge 2y - 3t = 0.$

373. $x - y - z - t = -2 \wedge x - y + z - t = 0 \wedge$
 $\wedge 2x + y - 2z - t = 0 \wedge x + y - z - t = 0.$

374. $x + y + z + t = 1 \wedge 2x - y + 3z + 5t = 4 \wedge$
 $\wedge -x + 2y - z + t = -6 \wedge x + y - z - t = -1.$

375. $x + 2y - 3z + 2t = 2 \wedge$
 $\wedge 2x + 5y - 8z + 6t = 5 \wedge 3x + 4y - 5z + 2t = 4.$

376. $5x + y + 4z - 13t = 3 \wedge -x + 3y + 2z + 5t = 2 \wedge$
 $\wedge 2x + 2y + 3z - 4t = -1.$

Koristeći Kramerove formule rešiti sistem linearnih jednačina (377–384):

377. $x + 2y + 3z = 1 \wedge 2x + 4y - 6z = -2 \wedge -x + 2y + 6z = 4.$

378. $x + y + z = 9 \wedge x + 2y + 3z = 16 \wedge x + 3y + 4z = 21.$

379. $3x - 5y + 2z = -5 \wedge 6x + 2y + 3z = 253 \wedge 4x - 3y - z = 8.$

380. $-x - 2y + 14z = 8 \wedge 2x + 5y + 7z = 9 \wedge 4x - 2y - 3z = 24.$

$$381. x + y + z = 2 \wedge x - y = 3 \wedge x + z = 4.$$

$$382. 3x + 2y + z = 3 \wedge 2y - z = 2 \wedge 3z - 2y = -4.$$

$$383. \frac{y+z}{5} - \frac{6z+x}{2} = 2 \wedge \frac{y-2x}{3} + \frac{6z+5x}{4} = 0 \wedge \frac{y+6}{7} - \frac{x-2}{21} = \frac{2-z}{3}.$$

$$384. \frac{3+x}{4} - \frac{y+9z+2}{20} = \frac{x-4}{5} \wedge \frac{3y-3x}{7} - \frac{2x-z}{2} = y+2 \wedge \frac{5y-z}{2} - \frac{2z-2x}{3} = 5.$$

U zavisnosti od realnih parametara a , b i m diskutovati i rešiti sistem (385–393):

$$385. 4x + 8y + (m+3)z = -2 \wedge (m+2)x + 6y + 3z = 1 \wedge x + 2my + mz = -1.$$

$$386. x + (m+2)y - z = 0 \wedge (m+2)x + y - z = 1 \wedge x + y - (m+2)z = m+3.$$

$$387. x - y - mz = 1 \wedge mx + 3y + 3z = -1 \wedge mx + y + mz = 1 - m.$$

$$388. 2x + y - z = -1 \wedge -4x - 2y + mz = m \wedge (m-1)x + y + z = 2.$$

$$389. x + y + (1-m)z = m \wedge (1-m)x - y + z = -1 \wedge x + (m-1)y - z = 0.$$

$$390. ax + 2z = 2 \wedge 5x + 2y = 1 \wedge x - 2y + bz = 3.$$

$$391. ax + y + z = 4 \wedge x + by + z = 3 \wedge x + 2by + z = 4.$$

$$392. -2x + y + z = 1 \wedge x - 2y + z = -2 \wedge x + y + az = 4.$$

$$393. ax + y + z = 1 \wedge x + ay + z = a \wedge x + y + az = a^2.$$

Rešiti homogeni sistem linearnih jednačina (394–399):

$$394. 2x - y + 3z = 0 \wedge x + 2y - 5z = 0 \wedge 3x + y - 2z = 0.$$

$$395. 3x + 2y - z = 0 \wedge 2x - y + 3z = 0 \wedge x + 3y - 4z = 0.$$

$$396. 3x - y + 2z = 0 \wedge 2x + 3y - 5z = 0 \wedge x + y + z = 0.$$

$$397. x + y = -z \wedge 3x - y = z \wedge 2x + 3y + z = 0.$$

$$398. x + y + z = 0 \wedge 2x - 6y - 2z = 0 \wedge x - 3y - z = 0 \wedge 2x - 4y - z = 0.$$

$$399. x + y - 2z = 0 \wedge x - 2y + z = 0 \wedge -2x + y + z = 0.$$

Odrediti realan parametar a tako da homogeni sistem ima i netrivialna rešenja (400–407):

$$400. x + y + z = 0 \wedge ax + 4y + z = 0 \wedge 6x + (a+2)y + 2z = 0.$$

$$401. x + y + az = 0 \wedge x - y - z = 0 \wedge ax + y + 5z = 0.$$

$$402. 2x + 6y + (a+6)z = 0 \wedge -x + 7y + 5z = 0 \wedge ax + 5y + 13z = 0.$$

$$403.*x + y + az + t = 0 \wedge x - y - z - t = 0 \wedge ax + y + 5z + 3t = 0 \wedge x + 5y + 11z + 8t = 0.$$

$$404.*2x + y + z + t = 0 \wedge x + 2y + z + t = 0 \wedge x + y + 2z + t = 0 \wedge ax + y + z + 2t = 0.$$

$$405.*ax + y + z + t = 0 \wedge y + ay + z + t = 0 \wedge x + y + az + t = 0 \wedge x + y + z + at = 0.$$

$$406.*x + y - z = 0 \wedge ax + y + z = 0 \wedge 2x + 2y + (a-1)z = 0.$$

$$407.*ax + by + bz = 1 \wedge bx + ay + bz = 2 \wedge bx + by + az = 3$$

(a i b realni parametri).

VI. GLAVA

6. VEKTORI

6.1. VEKTORI U RAVNI I PROSTORU

408. Dve stranice trougla ABC su $\vec{BC} = \vec{a}$ i $\vec{CA} = \vec{b}$. Izraziti pomoću njih težišne linije $\vec{AM}$, $\vec{BN}$ i $\vec{CP}$ i dokazati da je njihov zbir nula.
409. Ako je T težište trougla ABC , tada je $\vec{TA} + \vec{TB} + \vec{TC} = \vec{0}$. Dokazati.
410. Dat je kvadrat $ABCD$. Ako je $CE \parallel BD$, $E \in AD$, dokazati da je:
- $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC}$;
 - $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} = \vec{AB} + \vec{CE}$.
411. Tačke A, B, C, D, E i F dele kružnicu na šest jednakih delova. Dokazati da je
- $$\vec{AB} + \vec{AC} + \vec{AD} + \vec{AE} + \vec{AF} = 3\vec{AD}.$$
412. Dat je trougao ABC , gde je $\vec{AC} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$. Nad AC konstruisan je kvadrat $ACDE$, a nad BC takođe kvadrat $BCFG$. Ako je $\vec{AD} = \vec{p}$ i $\vec{BG} = \vec{q}$, odrediti vektore $\vec{EF}$, $\vec{DF}$, $\vec{FG}$ i $\vec{DG}$, u funkciji datih vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$, $\vec{q}$.
413. Središta stranica AB, BC i CA trougla ABC su redom tačke C_1, A_1, B_1 , a M je proizvoljna tačka ravni trougla. Dokazati da je
- $$\vec{MA}_1 + \vec{MB}_1 + \vec{MC}_1 = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}.$$
414. Ako je tačka M težište trougla ABC , a tačka O ma koja tačka prostora, tada je $3\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$. Dokazati.
415. Dati su vektori $\vec{a} = (-5, 3)$ i $\vec{b} = (2, -\frac{3}{2})$. Odrediti vektore:
- $\vec{a} + \vec{b}$;
 - $\vec{a} - \vec{b}$;
 - $3\vec{a} + 2\vec{b}$;
 - $2\vec{a} - 4\vec{b}$.
416. Odrediti projekciju vektora $\vec{AB}$ na s -osu, ako je ugao između vektora $\vec{AB}$ i jediničnog vektora $\vec{e}$ s -ose $\alpha = 60^\circ$ i ako je $|\vec{AB}| = 8$.
417. Odrediti skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $2\vec{a} - \vec{b}$ ako je $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 60^\circ$.
418. Izračunati skalarni proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je $\vec{a} = 3\vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 4\vec{n}$, gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ uzajamno ortogonalni ortovi.
419. Izračunati intenzitet vektora $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ortogonalni ortovi.
420. Ako je $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AC}| = 4$, $\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{6}$ i ako je tačka M središte duži BC , izračunati $\vec{AM}$ pomoću vektora $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$, zatim izračunati $|\vec{AM}|$.
421. Izračunati intenzitet zbira vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, ako je $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 3$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{3}$.
422. Pomoću vektora izračunati dužinu težišnih duži jednakokrakog pravouglog trougla, konstruisanih iz temena oštih uglova.
423. Izračunati dužine dijagonala paralelograma, ako su mu stranice vektori $\vec{a} = 2\vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$, gde je $|\vec{m}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{n}| = 3$ i $\angle(\vec{m}, \vec{n}) = \frac{\pi}{4}$.
424. Odrediti skalarni proizvod vektora $\vec{a} = (1, -3)$ i $\vec{b} = (6, 2)$. Šta se može zaključiti o njihovom uzajamnom položaju i uglu koji oni grade?
425. Izračunati ugao koji zaklapaju vektori $\vec{a} = 2\vec{i}$ i $\vec{b} = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$.
426. Za koju su vrednost parametra m vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{b} = m\vec{i} - 6\vec{j}$ ortogonalni?
427. Dati su vektori:
- $$\vec{a} = (m - 1)\vec{i} + (3m + 4)\vec{j} \text{ i } \vec{b} = (m + 1)\vec{i} + (3m + 4)\vec{j},$$
- gde je m realan parametar. Odrediti:
- $\vec{v} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$;
 - za koje je vrednosti parametra m vektor $\vec{v}$ nula vektor?

428. Dati su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} - 12\vec{j}$, $\vec{b} = 5\vec{i} - \vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} + 5\vec{j}$. Dokazati da postoje dva realna parametra m i n , takva da je $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.
429. Dati su vektori $\vec{a} = 4\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = \vec{i} + 4\vec{j}$. Odrediti realne parametre p i q tako da važi jednakost $\vec{c} = p\vec{a} + q\vec{b}$.
430. $\vec{v} = (4, 2)$ razložiti po vektorima $\vec{a} = (2, -1)$ i $\vec{b} = (-4, 3)$. Odrediti koeficijente razlaganja.
431. Dat je vektor $\vec{a} = \vec{A_1A_2}$, sa početkom $A_1(x_1, y_1)$ i krajem $A_2(x_2, y_2)$. Odrediti Dekartove koordinate vektora $\vec{a}$.
432. Nad vektorima $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - 4\vec{j}$ konstruisan je trougao. Odrediti vektor visine $\vec{h}_a$ i ugao koji zaklapa ovaj vektor sa stranicom b .
433. Odrediti realan parametar n takav da vektor $\vec{a} = 2n\vec{i} + \vec{j}$ obrazuje sa vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 3\vec{i} - \vec{j}$ jednake uglove.
434. Koji ugao zaklapaju jedinični vektori $\vec{m}$ i $\vec{n}$ ako su vektori $\vec{a} = \vec{m} + 2\vec{n}$ i $\vec{b} = 5\vec{m} - 4\vec{n}$ uzajamno ortogonalni?
435. Izračunati $(\vec{m} \times \vec{n})^2 + (\vec{m} \times \vec{n})^2$, ako su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ jedinični vektori.
436. Ako je $\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{a} - 2\vec{b}$, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{6}$, izračunati $\vec{p} \times \vec{q}$.
437. Ako je $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 5$ i $\angle(\vec{a}, \vec{b}) = 30^\circ$, izračunati $\vec{a} \times \vec{b}$.
438. Ako je $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 2$ i $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$, izračunati $|\vec{a} \times \vec{b}|$.
439. Dati su vektori $\vec{a} = 2\vec{i} + m\vec{j}$, $\vec{b} = 3\vec{i} + 6\vec{j}$, gde je m realan broj. Izračunati $\vec{a} \times \vec{b}$, zatim odrediti m tako da vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ budu kolinearni.
440. Primenom vektorskog proizvoda, izračunati površinu paralelograma, ako su date dve stranice vektorima $\vec{a} = 2\vec{m} + 3\vec{n}$ i $\vec{b} = \vec{m} - 4\vec{n}$ gde su $\vec{m}$ i $\vec{n}$ normalni ortovi.
441. Data su temena trougla u Dekartovom koordinatnom sistemu $A(1, -4)$, $B(2, 3)$ i $C(-5, 4)$.
a) Izračunati njegove unutrašnje uglove.

- b) Primenom vektorskog proizvoda vektora izračunati površinu trougla.
442. Data su temena četvorougla $A(-4, -2)$, $B(-5, 5)$, $C(1, 3)$ i $D(-5, 0)$.
a) Izračunati njegove unutrašnje uglove.
b) Primenom vektorskog proizvoda izračunati površinu četvorougla.
443. Odrediti koordinate vektora $\vec{p}$ kolinearnog vektoru $\vec{q} = (3, -4)$, ako vektor $\vec{p}$ obrazuje sa osom Ox tup ugao, a $|\vec{p}| = 10$.
444. Ako su jedinični vektori koordinatnih osa Ox , Oy , Oz redom $\vec{i}$, $\vec{j}$ i $\vec{k}$, dokazati da je skalarni proizvod svaka dva od njih dat Kejljevom tablicom
- | | $\vec{i}$ | $\vec{j}$ | $\vec{k}$ |
|-----------|-----------|-----------|-----------|
| $\vec{i}$ | 1 | 0 | 0 |
| $\vec{j}$ | 0 | 1 | 0 |
| $\vec{k}$ | 0 | 0 | 1 |
445. Ako su jedinični vektori koordinatnih osa Ox , Oy , Oz redom $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$, dokazati da je njihov vektorski proizvod dat tablicom
- | $\times$ | $\vec{i}$ | $\vec{j}$ | $\vec{k}$ |
|-----------|------------|------------|------------|
| $\vec{i}$ | 0 | $\vec{k}$ | $-\vec{j}$ |
| $\vec{j}$ | $-\vec{k}$ | 0 | $\vec{i}$ |
| $\vec{k}$ | $\vec{j}$ | $-\vec{i}$ | 0 |
446. Data su tri uzastopna temena paralelograma $ABCD$: $A(-3, -2, 0)$, $B(3, -3, 1)$ i $C(5, 0, 2)$.
Odrediti koordinate četvrtog temena i ugao između vektora $\vec{AC}$ i $\vec{BD}$.
447. Vektori $\vec{AB} = (3, -2, 2)$ i $\vec{BC} = (-1, 0, -2)$ pripadaju dvema susednim stranicama paralelograma. Odrediti ugao između dijagonala AC i BD .
448. Pokazati da vektori $\vec{a} = (7, 6, -6)$ i $\vec{b} = (6, 2, 9)$ mogu biti ivice kocke i zatim odrediti vektor $\vec{c}$ treće ivice kocke.
449. Dati su vektori: $\vec{a} = (1, 1, -1)$, $\vec{b} = (-2, -1, 2)$, $\vec{c} = (1, -1, 2)$. Razložiti $\vec{c}$ po vektorima $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $(\vec{a} \times \vec{b})$.

450. Izračunati ugao između simetrala uglova xOy i xOz .
451. Odrediti kosinuse uglova koje vektor $\vec{a} = (1, -2, 2)$ obrazuje sa koordinatnim osama.
452. Odrediti skalarni proizvod vektora:
 a) $\vec{a} = (4, -3, 1)$ i $\vec{b} = (5, -2, -3)$;
 b) $\vec{a} = (3, -2, 1)$ i $\vec{b} = (4, -7, -3)$;
 c) $\vec{a} = (\frac{2}{3}, -\frac{5}{6}, \frac{1}{4})$ i $\vec{b} = (\frac{3}{2}, \frac{6}{5}, \frac{4}{3})$.
453. Dati su vektori $\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{b} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}$ i $\vec{c} = 4\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$. Odrediti $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}$.
454. Odrediti ugao između vektora $\vec{a} = (-2, 2, -1)$ i $\vec{b} = (-6, 3, 6)$.
455. Dati su vektori $\vec{a} = (1, -1, 2)$ i $\vec{b} = (0, 2, 1)$. Odrediti ugao između vektora $\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{a} - \vec{b}$.
456. Date su koordinate temena trougla ABC ($A(-1, 3, 1)$, $B(3, 4, -2)$, $C(5, 2, -1)$). Odrediti ugao ABC .
457. Dat je trougao ABC ($A(2, 4, 5)$, $B(-3, 2, 2)$, $C(-1, 0, 3)$). Dokazati da je trougao ABC pravougli.
458. Odrediti vektorski proizvod vektora $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k}$ i $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k}$.
459. U trouglu ABC date su koordinate temena $A(2, -5, 3)$ i vektori $\vec{AB} = (4, 1, 2)$ i $\vec{BC} = (3, -2, 5)$. Odrediti koordinate temena B i C i koordinate vektora $\vec{CA}$.
460. Odrediti projekciju vektora $\vec{a} = (2, 3, -1)$ na pravac vektora $\vec{b} = (-3, -1, 1)$, kao i projekciju vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$.
461. Odrediti projekcije vektora $\vec{a} = (5, 2, 5)$ na vektor $\vec{b} = (2, -1, 2)$.
462. Odrediti projekciju vektora $\vec{v} = 3\vec{a} - 2\vec{b}$ na vektor $\vec{c}$, ako je: $\vec{a} = (-2, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 5, 0)$, $\vec{c} = (4, 4, -2)$.
463. Odrediti vektorski proizvod vektora $\vec{u} = (3, -2, 5)$ i $\vec{v} = (2, -1, 3)$.
464. Izračunati projekciju vektora $\vec{a} = (3, -12, 4)$ na vektor $\vec{b} = \vec{c} \times \vec{d}$, ako je $\vec{c} = (1, 0, -2)$ i $\vec{d} = (1, 3, -4)$.

465. Dati su vektori: $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, -1, 2)$, $\vec{c} = (2, 1, -1)$. Izračunati $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$ i projekciju vektora $\vec{b}$ na vektor $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.
466. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (2, 1, 2)$ i $\vec{b} = (3, 2, 2)$.
467. Izračunati površinu paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (1, 1, -1)$ i $\vec{b} = (2, -1, 2)$.
468. Izračunati površinu trougla ako su date koordinate njegovih temena: $A(2, -3, 4)$, $B(1, 2, -1)$ i $C(3, -2, 1)$.
469. Ako su u prostoru $Oxyz$ dati vektori $\vec{a} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}$, $\vec{b} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$ i $\vec{c} = x_3\vec{i} + y_3\vec{j} + z_3\vec{k}$, tada je mešoviti proizvod $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$. Dokazati.
470. Dokazati da su vektori $\vec{a} = (-1, 3, 2)$, $\vec{b} = (-2, -3, 4)$, $\vec{c} = (-3, 12, 6)$ komplanarni i zatim odrediti njihovu linearnu zavisnost.
471. Tačke $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$ i $D(2, 1, 3)$ pripadaju jednoj istoj ravni. Dokazati.
472. Dati su vektori: $\vec{a} = (\ln(p-2), -2, 6)$, $\vec{b} = (p, -2, 5)$, $\vec{c} = (0, -1, 3)$. Odrediti realan broj p , tako da dati vektori budu komplanarni.
473. Izračunati zapreminu tetraedra čija su temena data koordinatama: $A(2, 3, 1)$, $B(4, 1, -2)$, $C(6, 3, 7)$, $D(-5, -4, 8)$.
474. Izračunati zapreminu paralelepipeda konstruisanog nad vektorima $\vec{a} = (0, 1, 1)$, $\vec{b} = (1, 0, 1)$ i $\vec{c} = (1, 1, 0)$.
- 475.* Tačke $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 6)$ i $D(2, 3, 8)$ su temena piramide. Izračunati zapreminu piramide i visinu koja odgovara osnovi ABC .
- 476.* Odrediti $\vec{v}$, ako je $\vec{v} \cdot \vec{a} = 1 \wedge \vec{v} \cdot \vec{b} = 2 \wedge \vec{v} \cdot \vec{c} = 3$ i ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ dati koordinatama: $\vec{a} = (2, -4, 3)$, $\vec{b} = (3, -1, 5)$, $\vec{c} = (1, -2, 4)$.

7. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

7.1. TAČKA

1. Rastojanje između dve tačke:

Neka su u odnosu na izabrani koordinatni sistem XOY date tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$. Njihovo rastojanje određuje se pomoću formule

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

2. Deljenje duži u datoj razmeri.

Koordinate sredine duži. Ako je tačka $M(x, y)$ unutrašnja tačka duži M_1M_2 ($M_1(x_1, y_1)$; $M_2(x_2, y_2)$) i ako je data razmera

$$\lambda = \frac{MM_1}{MM_2}$$

u kojoj tačka M deli duž M_1M_2 , onda se koordinate tačke M određuju obrascima

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Ako je tačka M središte duži M_1M_2 ($\lambda = 1$), njene koordinate su

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

3. Površina trougla

Neka su $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ temena datog trougla $M_1M_2M_3$ određena pomoću naznačenih koordinata u odnosu na izabrani pravougli koordinatni sistem XOY , tada je površina trougla data obrascem

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

482. Odrediti rastojanje tačke $M(3\sqrt{2}, \sqrt{7})$ od koordinatnog početka.

483. Odrediti dužine stranica trougla čija su temena $A(1, 1)$; $B(4, 1)$ i $C(1, 5)$.

484. Odrediti na x -osi tačku koja je podjednako udaljena od tačaka $M(7, -4)$ i $N(1, -2)$.

477.*Dati su vektori

$$\vec{a} = (0, 2p, p), \quad \vec{b} = (2, 2, 1), \quad \vec{c} = (-1, -2, -1) \text{ i } \vec{d} = (p, 0, 1).$$

Odrediti realan broj p tako da je $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{c} \cdot \vec{d} + 7$.

478.*Odrediti realan broj p tako da vektor $\vec{a} = 2p\vec{i} + \vec{j} + (1-p)\vec{k}$ gradi jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = -\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{c} = 5\vec{i} - \vec{j} + 8\vec{k}$.

479.*Dati su vektori

$$\vec{a} = (0, 2p, p), \quad \vec{b} = (2, 2, 1) \text{ i } \vec{c} = (-1, -2, -1).$$

a) Odrediti vektor $\vec{d} = (x, y, z)$ tako da je

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{d} \text{ i } \vec{a} \times \vec{c} = \vec{b} \times \vec{d}.$$

b) Dokazati da su vektori $\vec{a} - \vec{d}$ i $\vec{b} - \vec{c}$ kolinearni.

c) Dokazati da su vektori $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{c}$ i $\vec{d}$ komplanarni.

d) Odrediti realan broj p tako da je $(\vec{a} - \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + p$.

480.*Odrediti vektor $\vec{a} = (x, y, z)$ koji obrazuje jednake uglove sa vektorima $\vec{b} = (y, 2z, 3x)$, $\vec{c} = (-2z, 3x, -y)$, ako je vektor $\vec{a}$ normalan na vektor $\vec{d} = (1, -1, 2)$, i $|\vec{a}| = 2\sqrt{3}$ i ako je ugao koji gradi vektor $\vec{a}$ sa osom Oy -tup.

481.*Dati su vektori:

$$\vec{a} = (1, 1, -1), \quad \vec{b} = (-2, -1, 2), \quad \vec{c} = (1, -1, 2).$$

a) Rastaviti vektor $\vec{c}$ po pravcima vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{a} \times \vec{b}$.

b) Odrediti ugao koji obrazuje vektor $\vec{c}$ sa ravni određenom vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

485. Na y -osi odrediti onu tačku koja je podjednako udaljena od tačaka $A(2, -4)$ i $B(6, -2)$.
486. Odrediti apscisu tačke $A(x, 3)$, tako da njeno rastojanje od tačke $B(-4, 8)$ bude 13.
487. Odrediti poluprečnik opisane kružnice oko trougla $A(-1, 7)$, $B(3, -1)$, $C(6, 8)$.
488. Data su temena trougla $A(-3, -2)$, $B(0, -8)$ i $C(5, y)$. Odrediti y tako da trougao bude pravougao sa pravim uglom u A .
489. Odrediti geometrijsko mesto centara kružnica koje prolaze kroz tačke $A(1, 2)$ i $B(5, 3)$.
490. Odrediti koordinate tačke $M(x, y)$, koja je podjednako udaljena od tačaka: $A(-1, -3)$, $B(-4, 6)$, $C(3, -1)$ i naći to rastojanje.
491. Odrediti dužine težišnih linija trougla, čija su temena: $A(1, 1)$; $B(5, 3)$ i $C(3, -3)$.
492. Odrediti koordinate četvrtog temena D paralelograma $ABCD$, ako su data ostala tri temena: $A(1, 1)$, $B(4, 0)$ i $C(5, 3)$.
493. Date su tačke $A(3, -1)$ i $B(2, 1)$. Odrediti:
- koordinate tačke M koja je simetrična sa tačkom A u odnosu na tačku B kao centar simetrije;
 - koordinate tačke N simetrične tački B u odnosu na tačku A kao centar simetrije.
494. Do koje tačke treba produžiti duž čije su krajnje tačke $A(1, 4)$, $B(5, 1)$ da se ona udvostruči, ako se produženje vrši:
- u smeru AB ;
 - u smeru BA ?
495. Data su dva susedna temena paralelograma $A(-3, 5)$ i $B(1, 7)$, kao i presečna tačka dijagonala $M(1, 1)$. Odredi koordinate druga dva temena.
496. Tačke $A(2, -1)$, $B(-1, 4)$ i $C(-2, 2)$ su sredine stranica trougla. Odrediti koordinate njegovih temena.
497. Odrediti koordinate težišta trougla čija su temena $A(4, 2)$; $B(7, -2)$, $C(1, 6)$.
498. Odrediti koordinate težišta trougla čija su temena $A(3, 4)$, $B(-5, 2)$ i $C(-1, -6)$.
499. Težište T trougla leži na apscisnoj osi, dva njegova temena su $A(2, -3)$ i $B(-5, 1)$, a treće teme C leži na y -osi. Odrediti koordinate tačaka T i C .
500. Izračunati površinu trougla ABC ($A(-2, 3)$, $B(8, -2)$, $C(3, 8)$).

501. Odrediti površinu trougla ABC ($A(-3, -3)$, $B(3, 5)$, $C(-2, 5)$) i visinu h_c .
502. Tačke $A(-4, -2)$, $B(2, 4)$ i $C(-3, y)$ su temena trougla. Odrediti y tako da površina trougla bude 21.
503. Data su temena $A(2, -2)$ i $B(6, 0)$ jednakokrakog trougla ABC i njegova površina $P = 20$. Odrediti koordinate vrha C .
504. Izračunati površinu četvorougla $ABCD$ ($A(-2, -1)$, $B(4, 0)$, $C(2, 3)$, $D(0, 4)$) i dužine dijagonala.
505. Date su tačke $A(-1, -2)$ i $B(2, -5)$. Odrediti tačku C koja deli duž AB u razmeri $1 : 2$, zatim D na x -osi, koja je podjednako udaljena od tačaka A i B i površinu trougla ABD .
506. Temena trougla su $A(2, -4)$, $B(7, 6)$ i $C(12, 1)$. Tačka M deli stranicu AB u razmeri $2 : 3$, a tačka N stranicu BC u razmeri $3 : 2$. Odrediti:
- površine trouglova ABC , MNB i površinu trapeza $ACMN$;
 - odnos površina trouglova ACB i MNB .
507. Tačke $A(8, 6)$, $B(2, 4)$ i $C(x, y)$ su temena trougla.
- Odrediti relaciju koja postoji između x i y da bi površina trougla bila 20.
 - Odrediti x i y , tako da površina trougla bude 20, a stranica $AC = BC$.
508. Data su temena trougla $A(5, 1)$ i $B(3, 4)$, a treće se teme nalazi na y -osi. Odrediti ordinatu trećeg temena, tako da površina trougla bude 11,5.
509. Koordinate temena trougla su $A(7, 10)$, $B(-1, -4)$ i $C(-8, 4)$. Odrediti središte stranice AB , podeliti stranicu BC u razmeri $1 : 2$, a stranicu CA u razmeri $2 : 3$, povezati deone tačke i izračunati površinu dobijenog trougla.
510. Ako tačke $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$ pripadaju jednoj istoj pravoj, njihove koordinate zadovoljavaju relaciju
- $$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}.$$
- Dokazati.
511. Date su tri tačke $M_1(1, 3)$, $M_2(3, y)$ i $M_3(-4, -2)$. Odrediti y tako da date tri tačke leže na istoj pravoj.
512. Prava određena tačkama $M(5, 5)$, $N(1, 3)$ seče x -osu. Odrediti koordinate presečne tačke nepoznavajući jednačinu prave MN .

- 1°. Jednačina $y = kx + n$ predstavlja eksplicitni oblik jednačine prave; $k = \operatorname{tg} \alpha$ je koeficijent pravca prave; α je ugao koji prava gradi sa pozitivnim delom x -ose, a n je odsečak koji prava odseca na ordinatnoj osi. Odsečak koji prava odseca na apscisnoj osi je $m = -\frac{n}{k}$.
- 2°. Jednačina $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ ($m \neq 0, n \neq 0$) predstavlja segmentni oblik jednačine prave; m i n su odsečki prave na koordinatnim osama.
- 3°. Jednačina $Ax + By + C = 0$, naziva se opšti oblik jednačine prave ili Dekartova jednačina prave, gde su A, B i C realni parametri.
- 4°. Tanges ugla φ , koji grade dve prave koje se seku, a čiji su koeficijenti k_1 i k_2 određuje se obrascem $\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.
- 5°. Koeficijenti pravaca k_1 i k_2 paralelnih pravih zadovoljavaju uslov $k_1 = k_2$.
- 6°. Dve prave su normalne ako njihovi koeficijenti pravaca zadovoljavaju uslov $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.
- 7°. Jednačina pramena* pravih koje prolaze kroz datu tačku $M(x_1, y_1)$, a imaju proizvoljni koeficijent k ima oblik $y - y_1 = k(x - x_1)$.
- 8°. Jednačina $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ predstavlja pravu liniju koja sadrži dve date tačke $M_1(x_1, y_1)$ i $M_2(x_2, y_2)$; $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ je njen koeficijent pravca.
- 9°. Jednačina $x \cos \omega + y \sin \omega - p = 0$ predstavlja normalni oblik jednačine prave: $p \geq 0$ je normalno odstojanje prave od koordinatnog početka, a ω ($0 \leq \omega \leq 360^\circ$) je ugao koji ta normala gradi sa pozitivnim smerom x -ose. Opšti oblik jednačine prave $Ax + By + C = 0$ napisan u normalnom obliku glasi
- $$\frac{Ax + By + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$
- gde je znak pred korenom suprotan znaku koeficijenta C .

* Ako su $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ i $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ jednačine dveju pravih koje se seku u tački O , tada jednačina $A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ predstavlja jednačinu pramena sa centrom u O .

10°. Odstojanje d tačke $M(x_1, y_1)$ od prave $Ax + By + C = 0$ dato je formulom

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

11°. Ako se prave $A_1x + B_1y + C = 0$ i $A_2x + B_2y + C = 0$ seku, jednačine simetrala uglova koje obrazuju te prave su

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = 0,$$

gde znak $+$ između razlomaka odgovara simetrali koja prolazi kroz ugao (ili njegov unakrsni ugao) kome ne pripada koordinatni početak, a znak $-$ odgovara simetrali koja prolazi kroz ugao kome pripada koordinatni početak.

513. Odrediti jednačinu prave koja sa x -osom zaklapa ugao α , a na y -osi odseca odsečak n :

- a) $\alpha = 135^\circ, n = 3$; b) $\alpha = 120^\circ, n = -3$;
c) $\alpha = 45^\circ, n = -8$; d) $\alpha = 150^\circ, n = 2$.

514. Odrediti ugao koji prava zaklapa sa pozitivnim delom x -ose i odsečak na y -osi:

- a) $x - y + 3 = 0$; b) $2x\sqrt{3} - 2y - 1 = 0$;
c) $3x + 3y - 5 = 0$.

515. U jednačini $2x - (5p - 2)y - 3 = 0$, odrediti parametar p tako da grafik prave sa x -osom gradi ugao $\alpha = 45^\circ$.

516. U jednačini $3y - 5x + 4p - 3 = 0$ odrediti parametar p tako da prava:

- a) sadrži koordinatni početak;
b) da odseca na y -osi odsečak 3.

517. Odrediti segmente koje prava $3x - 4y - 12 = 0$ odseca na koordinatnim osama, zatim konstruisati njen grafik.

518. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $M(6, -4)$ i na apscisnoj osi odseca odsečak 3.

519. Prava sadrži tačku $M(-5, 4)$ i sa koordinatnim osama gradi trougao površine $P = 5$. Odrediti njenu jednačinu.

520. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $M(3, -7)$ i na koordinatnim osama odseca jednake odsečke.

521. Odrediti jednačinu prave koja gradi sa koordinatnim osama trougao površine $P = 16$, ako je razlika odsečaka prave na koordinatnim osama jednaka 4.
522. Na kojoj pravoj je tačka $M(2, 3)$ sredina odsečka među koordinatnim osama?
523. U jednačini $px + (p + 1)y - 8 = 0$, odrediti parametar p , tako da prava gradi dva puta veći odsečak na apscisnoj osi nego na ordinatnoj osi.
524. U jednačini $3x + py - 12 = 0$, odrediti parametar p , tako da odsečak prave između koordinatnih osa iznosi 5.
525. U jednačini $kx + (k + 1)y - p = 0$, odrediti parametre k i p tako da prava sadrži tačku $M(2, 1)$, a sa koordinatnim osama gradi trougao površine 4.
526. U jednačini $(2p + 1)x + (3p - 5)y + 4p = 0$ odrediti p tako da prava bude paralelna:
a) sa x -osom;
b) sa y -osom.
527. U jednačini $(3m - 2n + 5)x - (m - n)y + 2m - 5n + 1 = 0$, odrediti m i n tako da prava bude simetrala:
a) I kvadranta; b) II kvadranta.
528. Odrediti ugao pod kojim se seku prave:
a) $x + 2y - 9 = 0$ i $x - 3y + 14 = 0$;
b) $x\sqrt{3} - y + 4 = 0$ i $x\sqrt{3} + y - 4 = 0$.
529. Data su temena trougla $A(1, -4)$, $B(2, 3)$ i $C(-5, 4)$. Odrediti njegove unutrašnje uglove.
530. Data su temena četvorougla $A(-4, -2)$, $B(5, -5)$, $C(1, 3)$ i $D(-5, 0)$. Odrediti njegove uglove.
531. Odrediti ugao za koji treba da rotira prava $2x - 3y + 5 = 0$, oko svoje tačke $M(2, 3)$, pa da njen odsečak na x -osi bude 4.
532. U jednačini $Ax + By + 5 = 0$ odrediti nepoznate koeficijente, tako da prava sadrži tačku $M(1, 2)$ i sa pravom $2x - y - 3 = 0$ gradi ugao $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

533. Na pravom $x - 3y = 0$ odrediti tačku iz koje se duž AB ($A(-1, 7)$, $B(6, 8)$) vidi pod uglom od $\frac{\pi}{4}$.
534. Odrediti najmanji ugao za koji treba da se obrne prava $3x + 4y - 25 = 0$ oko svoje tačke $M(7, y)$, da bi joj pripadala tačka $S(6, 8)$.
535. Odrediti najmanji ugao za koji treba da se obrne prava $3x + y - 6 = 0$ oko svoje presečne tačke sa y -osom da bi sekla pravu $x - 3y - 6 = 0$ pod uglom $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
536. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $S(-2, 0)$ i seče prave $x + 7y - 23 = 0$ i $7x - y - 11 = 0$ pod jednakim uglovima. Odrediti taj ugao.
537. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku P i paralelna je sa pravom p :
a) $P(2, 3)$ i $p : x + y - 2 = 0$;
b) $P(7, -4)$ i $p : 9x + 7y - 25 = 0$.
538. Odrediti jednačinu prave koja sadrži datu tačku A i normalna je na datu pravu p :
a) $A(1, 2)$ i $p : 2x + 3y - 1 = 0$;
b) $A(-1, -2)$ i $p : x + y - 3 = 0$.
539. Odrediti tačku R simetričnu s tačkom $P(-5, 13)$ u odnosu na pravu $2x - 3y - 3 = 0$.
540. Odrediti projekciju tačke $P(-6, 4)$ na pravu $4x - 5y + 3 = 0$.
541. Iz tačke $A(6, 4)$ konstruisane su normale na prave $3x + y + 8 = 0$ i $x + 2y + 6 = 0$. Izračunati površinu trougla čija su temena tačka A i podnožja normala.
542. Date su tačke $A(-3, 7)$ i $B(5, -4)$. Odrediti jednačinu prave koja je normalna na pravu AB i deli duž AB u razmeri 4 : 7.
543. Odrediti jednačine visina trougla čije su stranice date jednačinama:
 $BC : 3x - y - 18 = 0$
 $CA : x - y - 2 = 0$
 $AB : x + 2y + 1 = 0$, a zatim odrediti ortocentar.
544. Odrediti pravu kojoj pripada tačka $M(2, -3)$, tako da s osom Ox gradi ugao dva puta veći od ugla koji sa osom Ox gradi prava $2y - x = 3$.

545. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presečnu tačku pravih $x + 7y - 12 = 0$ i $2x - y + 6 = 0$ i tačku $A(8, -4)$.
546. Napisati jednačine dijagonala četvorougla čija su temena: $A(-4, -5)$, $B(7, 6)$, $C(3, 8)$ i $D(-2, 3)$.
547. Jednačine rombovih dijagonala su:
 $y = x + 2$ i $x + y = 4$; apscisa jednog temena koje se nalazi na prvoj dijagonali je $x = -3$, a apscisa temena koje se nalazi na drugoj dijagonali je $x = 3$. Odrediti jednačine stranica romba, njegove uglove i njegovu površinu.
548. Naći jednačine težišnih linija trougla čija su temena $A(-1, 6)$, $B(5, 3)$, $C(-5, -2)$.
549. Data su dva temena trougla $A(-4, -5)$ i $B(-2, 3)$, a teme C pripada pravoj $x + y - 11 = 0$. Odrediti koordinate temena C , tako da površina trougla bude 15.
550. Data je prava $x + 2y - 2 = 0$ i tačka $M(4, 4)$. Odrediti koordinate ortogonalne projekcije date tačke na datu pravu i odstojanje date tačke od njene projekcije.
551. Odrediti jednačinu prave, ako je njen odsečak između koordinatnih osa u prvom kvadrantu dva puta veći od njenog rastojanja od koordinatnog početka, a površina trougla, koji ta prava obrazuje sa koordinatnim osama jednaka je 4,5.
552. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $R(0, 1)$ znajući da je njen odsečak između pravih: $x - 3y + 10 = 0$ i $2x + y - 8 = 0$ prepolovljen tačkom R .
553. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presek y -ose i prave $3x + 2y - 6 = 0$ i paralelna je pravoj $x - 2y + 3 = 0$.
554. Izračunati rastojanje preseka pravih $3x - 2y - 5 = 0$, $x + 2y - 7 = 0$ od prave $3x - 4y + 15 = 0$.
555. Od svih pravih koje sadrže koordinatni početak, odrediti jednačinu one prave koja je normalna na pravu $x + 2y + 1 = 0$.
556. Tačke $A(1, 0)$ i $B(4, 1)$ su temena na osnovici jednakokrakog trougla, a treće teme C leži na pravoj $x = 4$. Odrediti jednačinu stranice tog trougla kroz tačke A i C .
557. Dat je skup pravih $x - y + 2 + \lambda(2x - y) = 0$. Odrediti onu pravu iz ovog skupa koja sa koordinatnim osama gradi trougao površine $P = 18$.

558. Napisati jednačinu prave ako se zna njeno odstojanje p od koordinatnog početka i ugao ω koji normala p gradi s pozitivnim delom x -ose ako je:
 a) $p = 3$, $\omega = 30^\circ$; b) $p = 2$, $\omega = 135^\circ$
559. Izračunati odstojanje p prave od koordinatnog početka i ugao koji p gradi s pozitivnim delom x -ose, ako je jednačina prave:
 a) $x\sqrt{3} + y - 6 = 0$; b) $x - y + 2 = 0$
560. Odrediti dužinu normale p konstruisane iz koordinatnog početka na pravu, kao i koordinate podnožja te normale, ako je jednačina prave:
 a) $4x - 3y + 50 = 0$; b) $4x + 3y + 35 = 0$.
561. Odrediti jednačinu prave koja je paralelna sa pravama $3x - 2y - 1 = 0$ i $3x - 2y - 13 = 0$ i podjednako je udaljena od obe date prave.
562. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $M(3, -5)$ i obrazuje sa osom Ox ugao dva puta veći od ugla koji sa istom osom gradi prava $x - 2y - 5 = 0$.
563. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih $x - 3y + 2 = 0$ i $5x + 6y - 4 = 0$ i paralelna je pravoj $4x + y + 7 = 0$.
564. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku preseka pravih $3x - y + 4 = 0$ i $4x - 6y + 3 = 0$ i normalna je pravoj $5x + 2y + 6 = 0$.
565. Odrediti dužinu visine h_c trougla sa temenima $A(-3, 1)$, $B(5, -1)$, $C(6, 5)$.
566. Odrediti dužinu visine BD trougla čija su temena $A(-3, 0)$, $B(2, 5)$ i $C(3, 2)$.
567. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $A(2, 4)$ i udaljena je od koordinatnog početka za $d = 2$.
568. Date su tačke $A(-4, 0)$ i $B(0, 6)$. Kroz središte duži AB postaviti pravu, koja na osi Ox odseca odsečak dva puta veći nego na osi Oy .
569. Date su tačke $A(-2, 0)$ i $B(2, -2)$. Na odsečku OA konstruisati paralelogram $OACD$, čije se dijagonale seku u tački B . Napisati jednačine stranica, dijagonala i odrediti ugao CAD .
570. Dva suprotna temena romba $ABCD$ su tačke $A(1, 3)$ i $C(5, 9)$, a stranica AB ima jednačinu $x - y + 2 = 0$. Odrediti koordinate druga dva temena.

571. Dva suprotna temena pravougaonika $ABCD$ su tačke $A(1, 4)$ i $C(5, 6)$ a stranica BC gradi sa pozitivnim delom Ox -ose ugao od 45° . Odrediti površinu pravougaonika.
572. Jedna stranica romba sadrži koordinatni početak i sa pozitivnim delom ose Ox gradi ugao čiji je tangens $\frac{3}{4}$, a druga stranica ima jednačinu $y = 8$. Odrediti jednačine ostalih stranica romba, ako se njegove dijagonale seku u tački, koja pripada apscisnoj osi.
573. Iz tačke $A(6, 9)$ polazi svetlosni zrak pod uglom od 45° prema pozitivnom delu ose Ox . Dolaskom do ose Ox zrak se odbije od nje. Odrediti jednačinu upadnog i odbijenog zraka.
574. Svetlosni zrak prostire se po pravoj $y = \frac{2}{3}x - 4$. Dolaskom do ose Ox , on se od nje odbije. Odrediti jednačinu odbijenog zraka.
575. Svetlosni zrak se prostire od tačke $A(2, 3)$, odbija se od ose Ox i sadrži tačku $B(5, 8)$. Odrediti jednačine upadnog i odbijenog zraka.
576. Svetlosni zrak se prostire od tačke $A(3, 4)$, odbija se od prave $x + y - 2 = 0$ i posle odbijanja prolazi kroz tačku $B(5, 2)$. Odrediti jednačine upadnog i odbijenog zraka.
577. U jednačini prave $mx + (m + 7)y - 48 = 0$ odrediti m tako da njeno rastojanje od tačke $A(2, 1)$ bude 2.
578. Odrediti koordinate temena trougla, ako su date jednačine dveju stranica $x + 3y = 18$ i $4x - 3y = 12$, jednačina visine koja odgovara trećoj stranici $x - 2y + 2 = 0$ i dužina te visine $h = 2\sqrt{5}$.
579. Na pravoj $x - 2y + 8 = 0$ odrediti tačku, koja je podjednako udaljena od tačke $A(8, 3)$ i od prave $3x + 4y - 11 = 0$.
580. U jednačini prave $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$ odrediti odsečke m i n , tako da prava sadrži tačku $M(2, 1)$ i gradi sa pravom $2x - y - 1 = 0$ ugao od 45° .
581. Na pravoj $x - y - 3 = 0$ odrediti tačku koja je podjednako udaljena od pravih $7x - y - 11 = 0$ i $x + y - 5 = 0$.
582. Odrediti jednačinu prave koja sadrži tačku $M(8, 1)$ i sa pravama $7x + 6y - 42 = 0$ i $9x + 2y - 14 = 0$ obrazuje jednakokraki trougao.
583. Na pravoj $x - y + 3 = 0$ odrediti tačku koja je podjednako udaljena od tačaka $A(2, -1)$ i $B(6, 3)$.
584. Data su dva temena jednakokrakog trougla $A(1, -4)$, $B(7, -2)$, a treće teme C pripada pravoj $x - y + 1 = 0$. Odrediti koordinate temena C .

585. Date su koordinate krajnjih tačaka osnovice jednakokrakog trougla $A(3, 0)$ i $B(0, 4)$ i visina koja odgovara trećem temenu $h_c = 5$. Naći treće teme.
586. Dat je trougao ABC : $A(-1, 2)$, $B(3, 5)$, $C(0, 6)$. Odrediti njemu simetričan trougao u odnosu na pravu $x - y = 0$.
587. Odrediti koordinate temena trougla koji je simetričan trouglu ABC ($A(2, 3)$, $B(11, 6)$, $C(4, 7)$) u odnosu na pravu $y = \frac{x}{3} - 1$.
588. Odrediti jednačinu prave koja sadrži koordinatni početak i ako je njen odsečak između pravih $2x - y + 5 = 0$ i $2x - y + 10 = 0$ jednak $\sqrt{10}$.
589. Napisati jednačinu prave koja sadrži tačku $P(-5, 4)$, tako da je njen odsečak između pravih $x + 2y + 1 = 0$ i $x + 2y - 1 = 0$ jednak 5.
590. Kroz tačku $M(-1, 1)$ postaviti pravu, tako da sredina njenog odsečka između paralelnih pravih $x + 2y - 1 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ pripada pravoj $x - y - 1 = 0$.
591. Površina trougla iznosi 8, dva njegova temena su $A(1, -2)$ i $B(2, 3)$ a treće teme pripada pravoj $2x + y - 2 = 0$. Odrediti koordinate temena C .
592. Napisati jednačine stranica trougla ako je dato teme $B(2, -7)$, jednačina visine h_a : $3x + y + 11 = 0$ i težišne linije t_c : $x + 2y + 7 = 0$.
593. Odrediti jednačine stranica trougla, ako je dato teme $C(4, 3)$, jednačina simetrale ugla β : s_β : $x + 2y - 5 = 0$ i težišna linija t_β : $4x + 13y - 10 = 0$.
594. Jednačine dveju stranica trougla su: $5x - 4y + 15 = 0$ i $4x + y - 9 = 0$, a njegovo težište je u tački $T(0, 2)$. Odrediti koordinate temena trougla i jednačinu treće stranice.
595. Date su dve stranice trougla $2x - y = 0$, $5x - y = 0$ i težišna linija $3x - y = 0$. Odrediti jednačinu treće stranice, ako ona sadrži tačku $M(3, 9)$, kao i temena trougla.
596. Date su jednačine dveju težišnih linija trougla $4x + 5y = 0$ i $x - 3y = 0$ i jedno teme $(2, -5)$. Odrediti jednačine stranica i nepoznata temena trougla.
597. Odrediti jednačine stranica trougla, ako je dato teme $A(2, -4)$ i jednačine dveju simetrala uglova s_β : $x + y - 2 = 0$ i s_γ : $x - 3y - 6 = 0$.

598. Date su stranice trougla i to
 $AB: 3x + y - 3 = 0$, $AC: 3x + 4y = 0$, kao i simetrala ugla
 $s_\beta: x - y + 5 = 0$. Odrediti jednačinu nepoznate stranice BC .
599. Tačka $A(-4, 5)$ je teme kvadrata čija dijagonala pripada pravoj
 $7x - y + 8 = 0$. Napisati jednačine stranica i druge dijagonale kvadrata.
600. Date su jednačine dveju stranica pravougaonika i to:
 $5x + 2y - 7 = 0$, $5x + 2y - 36 = 0$, kao i jednačina dijagonale
 $3x + 7y - 10 = 0$. Odrediti jednačine ostalih stranica i druge dijagonale.
601. U paralelogramu $ABCD$ date su stranice
 $AB: 3x + 4y - 12 = 0$ i $AD: 5x - 12y - 6 = 0$, a tačka $E(-2, \frac{13}{6})$
je sredina stranice BC . Odrediti jednačine preostalih stranica paralelograma.
602. Date su jednačine
 $x + y - 5\sqrt{2} = 0$ i $x + y = 0$ paralelnih stranica romba i tačke
 $(3, 5)$ i $(1, 0)$ koje pripadaju drugim dvema stranicama. Napisati jednačine tih stranica.
603. Data su dva susedna temena $A(2, 5)$ i $B(5, 3)$ paralelograma
 $ABCD$, kao i presečna tačka njegovih dijagonala $M(-2, 0)$. Napisati jednačine stranica paralelograma.
604. Data su temena trougla $A(0, 1)$, $B(-2, 5)$ i $C(4, 9)$. Napisati jednačine stranica romba upisanog u trouglu, ako im je teme A zajedničko, dve stranice romba se poklapaju sa stranicama AB i AC trougla, a teme suprotno temenu A pripada stranici BC .
605. Dokazati da prava $x + 3y + 13 = 0$ pripada pramenu
 $3x + y - 1 + k(2x - y - 9) = 0$.
606. U pramenu $2x + y + 4 + k(x - 2y - 3) = 0$ odrediti pravu čije odstojanje od tačke $P(2, -3)$ iznosi $\sqrt{10}$.
607. U pramenu $2x + y + 1 + k(x - 3y - 10) = 0$ odrediti pravu koja odseca na koordinatnim osama jednake (po apsolutnoj vrednosti) odsečke.
608. Centar pramena $2x + 3y + 5 + k(3x - y + 2) = 0$ je jedno teme trougla, čije su visine $x - 4y + 1 = 0$ i $2x + y + 1 = 0$. Napisati jednačine stranica trougla.

609. Odrediti jednačinu prave koja sadrži presečnu tačku pravih
 $2x + 7y - 8 = 0$ i $3x + 2y + 5 = 0$, a sa pravom $2x + 3y - 7 = 0$ gradi ugao od 45° . Zadatak rešiti ne određujući presečnu tačku datih pravih.
610. Dati su pramenovi:
 $5x + 3y - 2 + m(3x - y - 4) = 0$,
 $x - y + 1 + n(3x - y - 2) = 0$.
Ne određujući njihove centre odrediti jednačinu zajedničke prave.
611. U trouglu ABC date su jednačine:
stranica $AB: x + 3y - 1 = 0$,
visina $h_a: x + 5y - 3 = 0$ i $h_b: x + y - 1 = 0$.
Ne određujući koordinate temena i presečnu tačku visina trougla odrediti jednačine drugih dveju stranica i treće visine.
612. Date su jednačine dveju stranica paralelograma: $3x - 2y + 12 = 0$ i $x - 3y + 11 = 0$; kao i tačka preseka njegovih dijagonala $O(2, 2)$. Odrediti jednačine drugih dveju stranica i jednačine njegovih dijagonala.
613. Date su jednačine dveju stranica romba:
 $3x - 10y + 37 = 0$ i $9x + 2y - 17 = 0$; i jednačina jedne njegove dijagonale $3x - 2y - 19 = 0$. Odrediti jednačine drugih dveju stranica i jednačinu druge dijagonale.
614. Data je prava $AB [A(-4, -2), B(8, 4)]$. Odrediti jednačinu prave koja je normalna na pravu AB , koja deli odsečak AB (od A ka B) u odnosu $3:4$.
615. Dat je trougao $ABC [A(-5, -2), B(7, 6), C(5, 4)]$. Odrediti:
a) jednačinu stranice AB ;
b) jednačinu težišne duži t_a ;
c) jednačinu visine h_c ;
d) uglove A i B ;
e) koordinate težišta trougla.
616. Tačke $A(-1, 1)$ i $C(5, 3)$ su dva suprotna temena kvadrata. Odrediti jednačine stranica i dijagonala kvadrata.
617. Odrediti jednačine kateta jednakokrako-pravouglog trougla, ako je jednačina njegove hipotenuze $x - 2y - 3 = 0$ i tačka $C(1, 6)$ teme pravog ugla.

- 618.*Date su jednačine dveju stranica paralelograma, koje polaze iz istog temena, $5x - 3y + 28 = 0$ i $x - 3y - 4 = 0$. Tačka $C(10, 6)$ je suprotno teme paralelograma. Odrediti jednačine drugih dveju stranica paralelograma, kao i jednačine njegovih dijagonala.
619. Date su tačke $A(5, 2)$, $B(-2, 3)$, $C(1, -6)$. Izračunati koordinate centra opisanog kruga S , težišta T i ortocentra O trougla ABC . Dokazati da tačke S , T i O pripadaju istoj pravoj i odrediti jednačinu te prave.
620. Na pravoj $x\sqrt{3} + y - 2\sqrt{3} = 0$ odrediti tačke A i B , tako da trougao OAB bude jednakokraničan. Tačka O je koordinatni početak.
621. Odrediti skup tačaka u ravni, podjednako udaljenih od tačaka $A(2, 4)$ i $B(4, 6)$.
- 622.*Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka čija se odstojanja od ose Ox i prave $3x - 4y = 0$ odnose kao $2 : 1$.
- 623.*Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka središta duži konstruisanih iz tačke $A(3, 4)$ do prave $x - y + 2 = 0$.
- 624.*Ortocentar trougla je u koordinatnom početku, a jednačine dveju stranica trougla su $x + 3y - 1 = 0$ i $3x + 5y - 6 = 0$. Odrediti jednačinu prave kojoj pripada treća stranica trougla.
625. Jedno teme trougla je $A(3, -4)$, a dve visine pripadaju pravama $7x - 2y - 1 = 0$ i $2x - 7y - 6 = 0$. Odrediti jednačine njegovih stranica.
- 626.*Napisati jednačinu prave koja je podjednako udaljena od tačaka $P(2, 5)$ i $Q(3, 1)$, ako njen odsečak između pravih $x + y - 3 = 0$ i $x + y - 10 = 0$ ima dužinu 5.
- 627.*Tačka $A(3, 5)$ je jedno teme jednakokrakog trougla, osnovica mu pripada pravoj $x - 2y + 12 = 0$, a površina mu je 15. Odrediti jednačine krakova.
- 628.*Odrediti skup tačaka $M(x, y)$, tako da razlika kvadrata rastojanja ma koje tačke skupa od dve fiksne tačke $A(-a, a)$ i $B(a, -a)$ bude $4a^2$.
- 629.*Dokazati da je proizvod rastojanja tačaka $A(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ i $B(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ od prave $\frac{x}{a} \cos \alpha + \frac{y}{b} \sin \alpha = 1$ jednak b^2 .
- 630.*Iz tačke $A(-5, 6)$ polazi svetlosni zrak pod uglom $\alpha = \arctg(-2)$ prema osi Ox , odbija se od te ose, a zatim i od ose Oy . Odrediti jednačine pravih koje određuju sva tri pravca kretanja ovog zraka.
- 631.*Date su tačke $A(a + b, a - b + 1)$, $B(a + b + 2, a - b + 3)$, $C(a + b + 5, a - b + 2)$, $D(a + b + 3, a - b)$, gde su a i b realni brojevi. Dokazati da je četvorougao $ABCD$ paralelogram i da je njegova površina konstantna.

- 632.*Odrediti jednačine stranica trougla ABC ako je dato teme $B(2, 6)$, kao i jednačine visine $x - 7y - 15 = 0$ i težišne linije $24x + 7y + 35 = 0$ iz temena A .
- 633.*Dato je teme $A(-2, 1)$ i visine $h_b : 2x - y - 1 = 0$, $h_c : x + y - 3 = 0$. Odrediti koordinate druga dva temena trougla ABC .
- 634.*Odsečak prave $3x + 2y = 6$ koga odsecaju koordinatne ose je hipotenuza jednakokrako-pravouglog trougla. Odrediti treće teme trougla.
- 635.*Date su jednačine pravih $4mx - (2m + 1)y + 14 = 0$ i $(4m + 5)x - (8m - 1)y + 21 = 0$. Odrediti parametar m tako da se prave seku na Oy osi. Izračunati površinu trougla koga obrazuju dobijene prave i Ox osa.
- 636.*Prava sadrži tačku $A(-2, -3)$ i seče prave $x + 3y - 9 = 0$ i $x + y + 1 = 0$ u tačkama B i C . Odrediti jednačinu prave AB , tako da je $AB \cdot AC = 20$.

7.3. GRAFIČKA INTERPRETACIJA SISTEMA LINEARNIH NEJEDNAČINA SA DVE NEPOZNATE. REŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

637. U Oxy -ravni šrafirati oblasti u kojima važe sledeće nejednakosti:
a) $x > -3$; b) $y \leq 2$; c) $x - y + 3 \geq 0$; d) $2x - y - 4 < 0$.
638. U Oxy -ravni šrafirati oblasti u kojima važe konjunkcije:
a) $x - y + 1 < 0 \wedge x + 2y + 3 \geq 0$;
b) $x \leq -3 \wedge 2x - y + 4 \geq 0 \wedge 3x - 3y + 5 < 0$;
c) $x + y > 1 \wedge x - 2y < 0 \wedge x - y < 1$;
d) $|x| \leq 4 \wedge |y| \leq 2$;
e) $2x - y < 1 \wedge x + 2y > 1 \wedge 2x - 2y \leq 1 \wedge 2x + 2y \geq 3$
639. Maksimizirati funkciju $L = x + y$, uz ograničenja
 $x - y \leq 3 \wedge x \leq 4 \wedge x + 2y \leq 10 \wedge x - y \geq -2 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.
640. Minimизirati funkciju $L = 2x - y$, uz ograničenja
 $x - y \leq 1 \wedge 2x + y \leq 11 \wedge y - 2x \leq 3 \wedge y \leq 5 \wedge x + y \geq 1 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.
641. Naći najmanje i najveće vrednosti funkcija
 $L_1 = x + y$ i $L_2 = -2x - y$, u oblasti
 $3x + 2y \geq 6 \wedge x - 2y \leq 2 \wedge -3x + 2y \leq 6 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$.

642. Grafičkom metodom naći optimalno rešenje sledećih zadataka linearnog programiranja:

- a) $x + 4y \leq 24 \wedge 3x + y \leq 21 \wedge x + y \leq 9 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
 $L = 2x + 5y \rightarrow \max$;
- b) $-x + 3y \leq 9 \wedge 2x + 3y \leq 18 \wedge 2x - y \leq 10 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
 $L = 4x + 2y \rightarrow \max$;
- c) $2x + y \geq 20 \wedge 2x + 3y \geq 30 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
 $L = 3x + 2y \rightarrow \min$;
- d) $15x + 4y \geq 60 \wedge 20x + 3y \leq 60 \wedge y \leq 7 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$,
 $L = 3x + y \rightarrow \max$;
- e) $5x + 2y \leq 100 \wedge 6x + y \geq 30 \wedge x + 2y \geq 20 \wedge x \geq 0 \wedge 6 \leq y \leq 30$,
 $L_1 = 2x + y \rightarrow \max$ i $L_2 = x + 2y \rightarrow \min$.

7.4. KRUŽNICA

Definicija: Kružnica je skup tačaka u ravni čija su rastojanja od jedne stalne tačke, jednaka datoj veličini.

Jednačina kružnice

Opšta jednačina kružnice je $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ gde je $S(p, q)$ centar kružnice, a r poluprečnik. Ako se centar kružnice nalazi u koordinatnom početku onda je $p = q = 0$, pa jednačina kružnice ima oblik $x^2 + y^2 = r^2$.

Ako je jednačina kružnice data u obliku

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \text{ tada je } p = -\frac{d}{2}, q = -\frac{e}{2} \text{ i } r = \sqrt{p^2 + q^2 - f}.$$

Prava i kružnica

Prava $y = kx + n$ je tangenta kružnice $x^2 + y^2 = r^2$ ako je zadovoljena relacija

$$(1) \quad r^2(k^2 + 1) = n^2.$$

Prava $y = kx + n$ je tangenta kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ako je ispunjena relacija

$$(2) \quad r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2.$$

Prava $Ax + By + C = 0$ je tangenta kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ ako je ispunjen uslov

$$(3) \quad r^2 = \frac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}.$$

Ako je kružnica data jednačinom $x^2 + y^2 = r^2$, uslov (1) glasi:

$$(4) \quad r^2 = \frac{C^2}{A^2 + B^2}.$$

643. Odrediti koordinate centra i poluprečnik kružnice čija je jednačina:

- a) $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 8 = 0$;
b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.

644. Konstruisati u istom koordinatnom sistemu kružnice čije su jednačine:

$$x^2 + y - 8x = 0; \quad x^2 + y^2 + 8y = 0; \quad x^2 + y^2 - 8x - 8y + 16 = 0.$$

645. Odrediti poluprečnik kružnice $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = r^2$, tako da kružnica sadrži tačku $M(5, 2)$.

646. Napisati jednačinu kružnice koja dodiruje koordinatne ose, a poluprečnik joj je 5.

647. Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačku A i B , a centar pripada pravoj p :

- a) $A(-1, -3), B(3, -3), p: x - y = 0$;
b) $A(-6, -2), B(0, 6), p: 4x + 3y + 6 = 0$;
c) $A(1, 6), B(2, -1), p: x - y + 4 = 0$.

648. Odrediti jednačinu kružnice kojoj pripadaju tačke $A(3, 1), B(6, 4)$, a centar joj pripada y -osi.

649. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačke $A(0, -2)$ i $B(2, 4)$, a centar joj pripada x -osi.

650. Napisati jednačinu kružnice čiji je centar u preseku pravih linija: $2x + y - 15 = 0$ i $x - 3y + 17 = 0$, a sadrži tačku $A(9, -5)$.

651. Napisati jednačinu kružnice kojoj pripadaju tačke $A(5, 4)$ i $B(-1, 2)$ a centar joj pripada pravoj liniji $x - 2y - 3 = 0$.

652. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačku $A(5, 2)$, dodiruje apscisnu osu i ima poluprečnik $r = 5$.

653. Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačke: $A(5, 6); B(-3, 2)$ i $C(-2, -1)$.

654. Odrediti jednačinu kružnice, koja sadrži tačke $A(2, 4)$ i $B(6, 8)$ a dodiruje apscisnu osu.

655. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačku $A(-5, 7)$, a dodiruje x -osu u tački $B(-4, 0)$.

656. Odrediti parametar k , tako da kružnica $x^2 + y^2 - (5k - 1)x + (4 - 2k)y = 5k$ dodiruje x -osu.

657. Odrediti parametar k tako da kružnica $x^2 + y^2 - (k - 4)x - ky + 2k + 5 = 0$ dodiruje y -osu.

658. Odrediti parametar k tako da kružnica $x^2 + y^2 + (k+2)x + (2k-2)y + 2k + 1 = 0$ dodiruje obe ose.
659. Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačke A, B i C :
- $A(-6, 5), B(-2, 7)$ i $C(-5, -2)$;
 - $A(1, 0), B(-1, 4)$ i $C(-8, 3)$;
 - $A(-1, 5), B(6, 4)$ i $C(7, 1)$.
660. Odrediti parametar m tako da kružnica $(x-2m)^2 + (y-m)^2 = 25$ sadrži tačku $M(6, 4)$.
661. Odrediti tačke u kojima kružnica $x^2 + y^2 + x - y - 12 = 0$ seče koordinatne ose.
662. Naći jednačinu tetive kružnice koja sadrži tačku A i da tom tačkom bude prepolovljena:
- $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0, A(1, 1)$;
 - $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0, A\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.
663. Prava $3x + y - 6 = 0$ seče kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$; odrediti dužinu tetive i centralni ugao koji joj odgovara.
664. Kroz tačku $A(-1, y)$ kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ konstruisana je tetiva, koja je paralelna sa pravom:
- $x - 3y + 7 = 0$;
 - $3x + y = 0$.
- Odrediti jednačinu tetive i njenu drugu presečnu tačku sa kružnicom.
665. Naći jednačinu kružnice koja sadrži tačku $M(-6, 2)$, a dodiruje y -osu u tački $P(0, 4)$.
666. Naći jednačinu kružnice koja sadrži tačke $M(10, 9)$ i $N(4, 3)$, a centar joj je na pravoj $2x - 3y + 19 = 0$.
667. Kroz tačku $A(-7, 0)$ konstruisana je prava paralelna sa pravom $x - 3y + 12 = 0$, koja seče kružnicu $x^2 + y^2 - 7x + 3y - 48 = 0$ u tačkama B i C . Odrediti koordinate tih tačaka.
668. Kada će jednačine dveju kružnica $ax^2 + ay^2 + bx + cy + d = 0$ i $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ predstavljati koncentrične kružnice?
669. Odrediti jednačinu kružnice koja je koncentrična sa kružnicom $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 5 = 0$, a pripada joj tačka $M(1, -4)$.
670. Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačke $M(3, 4)$ i $N(4, 5)$, a centar joj pripada kružnici $x^2 + y^2 = 50$.
671. Odrediti jednačinu kružnice sa centrom u tački $C(3, -1)$, a na pravoj $2x - 5y + 18 = 0$ odseca tetivu dužine 6.

672. Napisati jednačinu kružnice čije je središte u tački $C(2, 5)$, a dodiruje kružnicu $(x+2)^2 + (y-1)^2 = 2$
- spolja;
 - iznutra.
673. Odrediti jednačinu kružnice koja dodiruje apscisnu osu u tački $A(2, 0)$, a iznutra dodiruje kružnicu $(x+2)^2 + (y-8)^2 = 100$.
674. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačku $M(20, 3)$, a dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ u tački $N(4, y > 0)$.
675. Odrediti jednačinu kružnice, koja ima poluprečnik $r = 5$, sadrži tačku $M(8, 7)$, a na apscisnoj osi odseca tetivu dužine 6.
676. Naći jednačinu kružnice koja dodiruje ordinatnu osu u tački $M(0, 10)$ i spolja dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 + 4x - 8y - 5 = 0$.
677. Odrediti položaj tačke prema kružnici:
- $M(-3, 6), (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$;
 - $M(-1, 5), x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$;
 - $M(0, 0), (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.
678. Odrediti položaj prave i kružnice:
- $x + y - 9 = 0$ i $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$;
 - $x + y + 4 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2y - 3 = 0$;
 - $4x + 3y - 36 = 0$ i $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$.
679. Odrediti uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$ i $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 40 = 0$.
680. Odrediti uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 - 8x - 18y + 93 = 0$ i $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 23 = 0$.
681. Odrediti uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 = 25$ i $2x^2 + 2y^2 - 4x - 3y - 25 = 0$.
682. Odrediti uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 - 10x + 20 = 0$ i $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.
683. Naći uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 + 8y + 12 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
684. Naći uzajamni položaj kružnica $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 20 = 0$ i $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$.
685. U jednačini prave $y = kx + 10$ odrediti parametar k , tako da ona bude tangenta kružnice $x^2 + y^2 = 20$.

686. U jednačini prave $2x + y + m = 0$ odrediti parametar m tako da ona bude tangenta kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$.
687. Odrediti jednačine tangenti kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$;
 a) koje su paralelne sa pravom $4x - 3y - 12 = 0$;
 b) koje su normalne na pravoj $3x + 4y - 10 = 0$.
688. Odrediti jednačine tangenata kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 24 = 0$, koje seku pravu $7x - y = 0$ pod uglom $\alpha = 45^\circ$.
689. Napisati jednačinu prave koja od koordinatnih osa odseca jednake odsečke i dodiruje datu kružnicu:
 a) $x^2 + y^2 = 18$; b) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 27 = 0$.
690. Naći jednačinu prave koja sadrži tačku $A(2, -6)$ i dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$.
691. Odrediti jednačinu prave, koja na apscisnoj osi odseca odsečak $m = 6$ i dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
692. Odrediti jednačinu prave koja na ordinatnoj osi odseca odsečak $n = 2$ i dodiruje kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 2y = 0$.
693. Odrediti jednačinu prave koja odseca na y -osi dva puta veći odsečak nego na x -osi i dodiruje kružnicu $(x - 7)^2 + y^2 = 20$.
694. Za koji ugao treba da rotira prava oko svoje tačke M da bi postala tangenta kružnice?
 a) $M(-3, y)$, $x - 7y + 59 = 0$,
 $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$;
 b) $M(x, 7)$, $x - 7y + 50 = 0$, $x^2 + y^2 = 25$.
695. U presečnim tačkama prave $x - 7y + 29 = 0$ i kružnice $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ konstruisane su tangente na kružnicu. Odrediti:
 a) površinu trougla čija su dva temena pomenute presečne tačke, a treće presek tangenata;
 b) ugao između tangenata;
 c) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla.
696. U tačkama preseka prave $3x + y - 5 = 0$ i kružnice $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$ konstruisane su dirke na kružnicu. Odrediti:
 a) površinu trougla čija su dva temena pomenute presečne tačke, a treće presek tangenata;
 b) ugao između tangenata;
 c) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla.

697. Iz tačke $A(-5, 7)$ van kružnice konstruisane su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$. Odrediti:
 a) površinu trougla čija su temena data tačka i dodirne tačke pomenutih tangenata;
 b) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla;
 c) ugao pod kojim ova kružnica seče datu kružnicu;
 d) jednačinu zajedničke sečice ovih kružnica.
698. Iz tačke $A(4, -2)$ van kružnice konstruisane su tangente na kružnicu $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.
 Odrediti:
 a) površinu trougla čija su temena data tačka i dodirne tačke pomenutih tangenata;
 b) jednačinu kružnice opisane oko tako dobijenog trougla;
 c) ugao pod kojim ova kružnica seče datu kružnicu;
 d) jednačinu zajedničke sečice ovih kružnica.
699. Napisati jednačine stranica kvadrata opisanog oko kružnice $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$, čije se jedno teme nalazi u tački $A(-5, 2)$ i jednačine stranica kvadrata, čija se temena nalaze u tačkama u kojima strane prvog kvadrata dodiruju kružnicu.
700. U jednačini prave odrediti nepoznati koeficijent, tako da prava dodiruje datu kružnicu.
 a) $x + y + C = 0$; $x^2 + y^2 - 5x - 7y + 6 = 0$;
 b) $x + By + 1 = 0$; $x^2 + y^2 - 10x + 7 = 0$;
 c) $4x + 4y + 8 = 0$; $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$.
701. Odrediti parametar q , tako da kružnica $(x - 5)^2 + (y - q)^2 = 20$ dodiruje pravu $x - 2y + 1 = 0$.
702. Odrediti jednačinu kružnice koja dodiruje prave $3x - 4y + 35 = 0$ i $4x + 3y - 20 = 0$, a središte joj se nalazi u tački $C(p, 1)$.
703. Odrediti jednačinu kružnice koja dodiruje prave p_1 i p_2 , a centar joj pripada pravoj p_3 ;
 a) $p_1: 2x - y = 0$; $p_2: x - 2y - 6 = 0$; $p_3: 5x - 7y - 8 = 0$;
 b) $p_1: 3x - 4y - 20 = 0$; $p_2: x + y - 15 = 0$; $p_3: 2x - y + 5 = 0$;
 c) $p_1: x - y + 3 = 0$; $p_2: 4x + 3y - 10 = 0$; $p_3: x - y - 3 = 0$.

704. Odrediti jednačinu kružnice koja dodiruje prave $2x - y + 8 = 0$ i $2x + 11y - 48 = 0$ i sadrži tačku $A(1, 6)$.
705. Odrediti jednačinu kružnice upisane u trouglu, čije su stranice date jednačinama:
- $x + 2y + 5 = 0$; $2x + y - 5 = 0$ i $x - 2y + 5 = 0$;
 - $x - 2y + 8 = 0$; $2x + y - 14 = 0$ i $x + 2y - 4 = 0$;
 - $x - 2x + 5 = 0$; $2x - y + 25 = 0$ i $2x + y - 5 = 0$.
706. Odrediti jednačinu kružnice ako su poznate tri njene tangente:
- $2x - y + 1 = 0$; $x - 2y + 8 = 0$ i $x + 2y + 8 = 0$;
 - $x - 2y - 8 = 0$; $2x + y - 1 = 0$ i $x + 2y - 8 = 0$.
707. Iz date tačke van kružnice konstruisane su tangente na kružnicu; napisati njihove jednačine:
- $P(-6, 0)$ i $x^2 + y^2 = 9$;
 - $P(-3, 6)$ i $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 20 = 0$;
 - $P(1, 7)$ i $x^2 + y^2 = 25$;
 - $P(0, 8)$ i $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0$.
708. a) Pod kojim uglom se iz tačke $P(-6, 3)$ vidi kružnica $x^2 + y^2 - 6y = 0$?
- b) Pod kojim uglom se iz tačke $P(8, 4)$ vidi kružnica $x^2 + (y - 4)^2 = 16$?
- 709.*Naći jednačinu prave koja pripada pramenima $5x + 3y - 2 + k_1(3x - y - 4) = 0$ i $x - y + 1 + k_2(2x - y - 2) = 0$ i njen položaj prema kružnici $x^2 + y^2 - 3x + 2y - 3 = 0$.
- 710.*Odrediti ugao pod kojim data prava seče datu kružnicu:
- $x - 2y = 0$; $x^2 + y^2 = 5$;
 - $3x + 4y - 13 = 0$; $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$;
 - $x - 3y - 5 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 5 = 0$.
- 711.*Odrediti ugao pod kojim se seku date kružnice:
- $x^2 + y^2 = 5$ i $x^2 + y^2 - 5x + 5 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$ i $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$;
 - $x^2 + y^2 - 4x - 60 = 0$ i $x^2 + y^2 - 20x + 36 = 0$.
712. Dve kružnice jednakih poluprečnika sadrže jedna centar druge. Odrediti ugao pod kojim se seku kružnice.
713. Dokazati da se seku pod pravim uglom kružnice: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by - a^2 + b^2 = 0$ i $x^2 + y^2 - 2bx + 2ay + a^2 - b^2 = 0$.
714. Odrediti jednačinu kružnice čiji centar leži na x -osi, prolazi kroz tačku $M(-1, -2)$, a seče kružnicu $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 36$ pod pravim uglom.
715. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži tačku $A(-2, -6)$, seče ortogonalno kružnicu $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$, a središte joj pripada pravoj $3x - 2y - 12 = 0$.
- 716.*Napisati jednačinu kružnice koja sadrži tačku $A(1, -4)$ i seče ortogonalno kružnice: $x^2 + y^2 + 6x - 8y - 24 = 0$ i $x^2 + y^2 - 18x + 14y + 94 = 0$.
- 717.*Odrediti jednačinu pramena kružnice koja sadrži presek kružnica: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 17 = 0$ i $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$.
- 718.*Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži presek kružnica: $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 17 = 0$, $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11 = 0$ i datu tačku $A(10, -1)$.
- 719.*Naći jednačinu kružnice koja sadrži presek kružnica $x^2 + y^2 - 13x - y + 30 = 0$ i $x^2 + y^2 - 6x - 2y - 15 = 0$, a njeno središte pripada pravoj $3x - 10y - 30 = 0$.
- 720.*U pramenu $x^2 + y^2 - 6x - 6y - 2 + \lambda(x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2) = 0$. Odrediti onu kružnicu koja dodiruje pravu $x - 3y - 6 = 0$.
721. Odrediti zajedničke tangente kružnica:
- $x^2 + y^2 = 45$ i $x^2 + y^2 - 20x - 25 = 0$;
 - $x^2 + y^2 + 10x + 15 = 0$ i $x^2 + y^2 - 10x - 15 = 0$;
 - $(x + 1)^2 + y^2 = 5$ i $(x - 4)^2 + y^2 = 20$.
722. Odrediti geometrijsko mesto centara svih kružnica koje sadrže tačke $A(4, 2)$ i $B(-6, -4)$.
723. Napisati jednačinu geometrijskog mesta centra svih kružnica koje dodiruju pravu $3x - 4y + 16 = 0$ u tački $M(x, 1)$ date prave.
724. Date su tačke $A(1, 0)$ i $B(5, 0)$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$ u ravni za koje je $\frac{BM}{AM} = 5$.
725. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka $M(x, y)$ u ravni tako da je $\frac{AM}{BM} = \frac{2}{3}$ gde su A i B date tačke: $A(1, 1)$, $B(6, 6)$.
726. Duž $AB = l$ klizi po kracima pravog ugla, tako da tačka A pripada jednom kraku, tačka B drugom kraku pravog ugla. Odrediti jednačinu linije koju opisuje tačka M , središte duži AB .
727. Data je kružnica $x^2 + y^2 = a^2$ i na njoj tačka $P(0, a)$. Odrediti geometrijsko mesto sredina svih tetiva konstruisanih iz tačke P .

728. Dve prave rotiraju oko stalnih tačaka A i B ostajući stalno u istoj ravni i upravno jedna na drugoj; naći geometrijsko mesto preseka ovih pravih, ako je $AB = 2a$.
729. Napisati jednačinu geometrijskog mesta temena A svih trouglova koji imaju zajedničku stranu $a = 2m$ i jednake zbirove kvadrata drugih dveju strana.
730. Duž AB podeljena je tačkom C na odsečke $AC = m$ i $CB = n$; odrediti geometrijsko mesto tačaka M iz kojih se odsečki AC i CB vide pod jednakim uglovima.
731. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka u ravni iz kojih se kružnica $x^2 + y^2 = r^2$ vidi pod pravim uglom.
732. Data su temena jednakokrakog trougla $A(-2, 0)$, $B(2, 0)$ i $C(0, 4)$. Naći geometrijsko mesto tačaka tako da rastojanje svake tačke od osnovice trougla bude geometrijska sredina njenih rastojanja od krakova.
733. Data je tačka $A(a, 0)$. Tačka M se kreće tako da ugao OMA ostaje stalno prav. Odrediti jednačinu trajektorije (putanje) koju opisuje tačka M , ako je tačka O koordinatni početak.
734. Zakon kretanja tačke M dat je jednačinama $x^2 = 5 - t^2$ i $y = t - 3$, gde je sa t označeno vreme. Odrediti jednačinu kretanja tačke M .
735. Data je kružnica $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$. Odrediti koordinate tačke A , koja pripada kružnici, i koja je najbliža pravoj $3x + 4y + 34 = 0$. Zatim izračunati rastojanje tačke A od date prave.
736. Odrediti zajedničke tangente kružnica $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$ i $x^2 + y^2 + 4x + 2y - 4 = 0$.
737. Napisati jednačinu kružnice koja je upisana u trougao, čija jedna stranica pripada Ox osi, druga pravom $p: 3x - 4y + 36 = 0$, a treća pravom simetričnoj pravom p u odnosu na Oy osu.
738. Odrediti jednačinu sečice konstruisane iz tačke $A(15, -5)$ na kružnicu $x^2 + y^2 = 50$, tako da dužina odgovarajuće tetive iznosi 10.
739. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži presečne tačke kružnica $x^2 + y^2 + 2x - 99 = 0$ i $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 21 = 0$, i čije središte pripada ordinatnoj osi.

740. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži presečne tačke kružnica $x^2 + y^2 - 18x - 12y + 92 = 0$ i $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 86 = 0$, kao i tačku $A(1, 0)$.
741. Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži presečne tačke kružnica $x^2 + y^2 = 65$ i $x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0$, a središte joj pripada pravom $x = -3$.
742. Prava $12x + 5y - 111 = 0$ je tangenta kružnice sa središtem u tački $C(-4, -2)$. Odrediti jednačinu kružnice i jednačinu prave koja sadrži dodirnu tačku i obrazuje sa pravom $2x - 3y + 1 = 0$ ugao od 45° .
743. U kružnicu $x^2 + y^2 = 4$ upisan je jednakokrani trougao čije je jedno teme tačka $A(0, 2)$. Izračunati koordinate druga dva temena trougla.
- 744.* Odrediti jednačinu sečice konstruisane iz tačke $A(6, 5)$ na kružnicu $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 29 = 0$, tako da dužina odgovarajuće tetive iznosi $8\sqrt{2}$.
- 745.* Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka čiji je zbir kvadrata rastojanja od tačaka $A(-1, 3)$ i $B(4, -5)$ jednak 5.
746. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka središta svih kružnica koje sadrže tačku $P(1, 2)$, a poluprečnik im je 5.
- 747.* Odrediti skup tačaka iz kojih se kružnica $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$ vidi pod uglom od 90° .
- 748.* Tačka $M(6, 2)$ je unutrašnja tačka kružnice $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 36$.
a) Odrediti jednačinu tetive koja sadrži tačku M i ima dužinu $2\sqrt{27}$.
b) Odrediti jednačinu najmanje tetive koja sadrži tačku M .
- 749.* Date su tačke A i B čije je rastojanje jednako $2a$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka M za koje je $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = k^2$ ($k = \text{konst.}$)

7.5. ELIPSA

Definicija: Elipsa je skup tačaka u ravni s osobinom da je zbir rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Zbir rastojanja $r_1 + r_2 = 2a$, r_1 i r_2 su potezi elipse; stalne tačke $F_1(-e, 0)$ i $F_2(e, 0)$, čije je rastojanje $F_1F_2 = 2e$, nazivaju se žižama elipse.

Duži $A_1A_2 = 2a$ i $B_1B_2 = 2b$ su velika i mala osa; a duži $OA_2 = a$ i $OB_2 = b$ su poluose elipse. Broj $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ ($e < a$) je linearna ekscentričnost elipse.

Jednačina elipse:

Jednačina $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($a > b$) predstavlja centralnu jednačinu elipse.

Uslov da prava dodiruje elipsu: prava $y = kx + n$ dodiruje elipsu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ ako je } a^2k^2 + b^2 = n^2.$$

750. Napisati jednačinu elipse, ako se dva njena temena nalaze u tačkama $A_1(8, 0)$ i $A_2(-8, 0)$, a žiže imaju koordinate $(\pm 5, 0)$.
751. Odrediti jednačinu elipse, ako žiže imaju koordinate $(\pm 3, 0)$, a dužina veće ose jednaka je 12.
752. Napisati jednačinu elipse, koja sadrži tačku $A(3, \sqrt{2})$, a veća osa joj je $2a = 2\sqrt{15}$.
753. Odrediti dužinu tetive, koja sadrži žižu i normalna je na veću osu elipse $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{16} = 1$.
754. Odrediti jednačinu elipse ako njena manja osa ima dužinu 6, a jedna žiža ima koordinate $(-4, 0)$.
755. Odrediti jednačinu elipse koja sadrži tačke $M(6, 4)$ i $N(-8, 3)$.
756. Odrediti koordinate one tačke elipse $9x^2 + 25y^2 = 225$, čije je rastojanje od desnog fokusa četiri puta veće od rastojanja od levog fokusa.
757. Izračunati dužinu tetive elipse $x^2 + 2y^2 = 18$ koja polovi ugao između koordinatnih osa.
758. Odrediti dužinu tetive elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, koja se poklapa sa dijagonalom pravougaonika, konstruisanog nad osama date elipse.
759. Odrediti zajedničke tačke elipse $x^2 + 4y^2 = 4$ i kružnice koja sadrži žiže elipse, a centar joj je u temenu na pozitivnom delu ordinatne ose.
760. Na pravoj $x = -5$ odrediti tačku podjednako udaljenu od leve žiže i temena koje pripada pozitivnom delu ordinatne ose elipse $x^2 + 5y^2 = 20$.

761. Na elipsi $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{4} = 1$ odrediti tačku čiji su radijus-vektori uzajamno normalni.
762. Apscise tačaka kružnice $x^2 + y^2 = 4$ su udvostručene. Odrediti jednačinu dobijene krive.
763. Odrediti trajektoriju tačke M , koja pri svom kretanju ostaje tri puta bliža tački $A(1, 0)$ nego pravoj $x = 9$.
764. U elipsi $x^2 + 4y^2 = 4$ upisan je jednakokrani trougao. Jedno teme tog trougla pripada desnom temenu na velikoj osi elipse. Odrediti koordinate ostala dva temena trougla.
765. Ordinata svake tačke kružnice $x^2 + y^2 = 36$ smanjena je tri puta. Napisati jednačinu novodobijene krive.
766. Elipsa sadrži tačke $M(2\sqrt{3}, \sqrt{6})$ i $A(6, 0)$. Napisati njenu jednačinu, zatim odrediti koordinate žiže i rastojanje tačke M od žiže.
767. Odrediti trajektoriju tačke M koja pri svom kretanju ostaje dva puta bliža tački $F(-1, 0)$ nego pravoj $x = -4$.
768. Dokazati da za svaku tačku $P(x_1, y_1)$ u elipsi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ važi nejednakost $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} < 1$, a za svaku spoljašnju tačku $Q(x_2, y_2)$ važi nejednakost $\frac{x_2^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} > 1$.
769. Odrediti položaj tačaka: $A(6, -3)$, $B(-2, 5)$, $C(3, -6)$, $D(\sqrt{30}, 0)$, $E(-4, 2\sqrt{6})$ i $G(1, \sqrt{26})$ u odnosu na elipsu $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{36} = 1$.
770. Data je jednačina elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ i tačka $M(8, y > 0)$ na njoj; odrediti jednačine i dužine potega elipse u toj tački.
771. Odrediti jednačinu elipse čija je velika osa 16, a konfokalna je elipsi $\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{30} = 1$.
772. Odrediti one tačke elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ za koje je apscisa jednaka ordinati.

773. Na elipsi $5x^2 + 9y^2 = 405$ odrediti tačku u prvom kvadrantu za koju je razlika radijus-vektora $r_1 - r_2 = 8$.
774. Odrediti ugao koji obrazuju radijus-vektori tačke M ellipse k :
- $M(3, y > 0)$, $k: 4x^2 + 9y^2 = 180$;
 - $M(\sqrt{3}, -2)$, $k: 2x^2 + 3y^2 = 18$.
775. Odrediti dužinu potega one tačke ellipse $9x^2 + 16y^2 = 25$ čija je apscisa jednaka ordinati.
776. Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od kružnica: $(x + 2)^2 + y^2 = 64$ i $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
777. Data su temena trougla $A(4, 2)$, $B(-4, 2)$, $C(0, -2)$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka sa osobinom da je zbir kvadrata rastojanja svake tačke od strane datog trougla stalan i da ima vrednost 12.
778. Tačka P opisuje kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačke M koja deli ordinatu tačke P u razmeri 3 : 2.
779. U jednačini prave $Ax + y - 5 = 0$ odrediti parametar A tako da prava dodiruje elipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$.
780. U presečnim tačkama prave $5x - 3y - 14 = 0$ i ellipse $x^2 + 3y^2 = 28$ konstruisane su tangente na elipsu. Odrediti jednačine tangenata.
781. Tačka $M(x_1, y_1)$ na elipsi $2x^2 + 3y^2 = 35$ udaljena je od centra ellipse $d = \sqrt{17}$. Napisati jednačinu tangente ellipse u toj tački.
782. Napisati jednačinu tangente ellipse koja je normalna na pravu:
- $2x^2 + 3y^2 = 35$, $3x - 8y - 24 = 0$;
 - $x^2 + 2y^2 = 54$, $x + y - 4 = 0$.
783. Odrediti ugao za koji treba da rotira prava $5x - 11y - 59 = 0$ oko svoje tačke $P(14, y)$, da bi postala tangenta ellipse $x^2 + 4y^2 = 100$.
784. Napisati jednačinu one tangente ellipse $x^2 + 3y^2 = 28$ koja s pravom $x - 5y - 20 = 0$ gradi ugao od 45° .
785. Odrediti jednačinu ellipse koja dodiruje pravu $x + 4y - 10 = 0$ u tački $M(2, y)$.
786. Odrediti ugao pod kojim se vidi elipsa $3x^2 + y^2 = 48$ iz tačke $P(8, 0)$.
787. Napisati jednačinu ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ koja dodiruje pravu $5x + 12y + 75 = 0$ u tački $P(x, -4)$.

788. Iz tačke $A(0, 4)$ i $B(0, -4)$ konstruisane su tangente na elipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$. Dokazati da je figura koju čine tangente romb.
789. Iz tačke $A(-5, 4)$ konstruisane su tangente na elipsu $4x^2 + 25y^2 = 100$. Naći jednačine tih tangenti.
790. Napisati jednačinu ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ako su poznate dve njene tangente:
- $x + y - 8 = 0$ i $x + 3y + 16 = 0$;
 - $4x + 5y - 25 = 0$ i $9x + 20y - 75 = 0$.
- 791.* Odrediti ugao pod kojim se seku krive $(x - 5\sqrt{3})^2 + y^2 = 100$ i $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{25} = 1$.
792. Iz tačke $A(2, 7)$ konstruisane su tangente na elipsu $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$.
Odrediti jednačine tih tangenti i površinu trougla ograničenog tangentama i dodirnom tetivom.
793. Date su dirke ellipse:
 $x + 2y - 27 = 0$ i $7x - 4y - 81 = 0$.
Odrediti površinu trougla ograničenog dirkama i dodirnom tetivom.
794. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih: $9x^2 + 16y^2 = 576$ i $x^2 + (y - 2)^2 = 32$.
795. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih: $9x^2 + 16y^2 = 144$ i $16x^2 + 9y^2 = 144$.
796. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i na njoj tačka $M(x_1, y_1)$. Dokazati da jednačina tangente u tački M ima oblik $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.
- 797.* Ako se iz obe žiže ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ konstruišu normale na istu tangentu, njihov proizvod je konstantan i jednak kvadratu male poluose. Dokazati.
- 798.* Ma za koju tangentu ellipse, proizvod apscise dodirne tačke i apscise tačke u kojoj ova tangenta seče veliku osu jednak je kvadratu velike poluose. Dokazati.
- 799.* Pokazati da su tangente ellipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ konstruisane u krajnjim tačkama jednog prečnika međusobno paralelne.
- 800.* Na elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ konstruisane su tangente u krajnjim tačkama velike ose. Dokazati da je proizvod odsečka na tim tangentama koje odseca bilo koja tangenta ellipse konstantan i iznosi b^2 .

- 801.*U žiži $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ konstruisana je normala na veliku osu do preseka sa elipsom. U presečnoj tački konstruisane su tangente i normala elipse, a iz druge žiže konstruisane su normale na te prave. Odrediti površinu dobijenog četvorougla.
- 802.*Odrediti proizvod odstojanja žiža od bilo koje dve paralelne tangente elipse.
803. Iz tačke $A(0, 8)$ konstruisane su tangente na elipsu $x^2 + 3y^2 = 48$, a u dodirnim tačkama normale. Odrediti temena i površinu dobijenog četvorougla i ispitati kakav je taj četvorougao.
804. Odrediti ugao pod kojim se vidi elipsa $x^2 + 3y^2 = 12$ iz tačke $P(0, 4)$.
805. Odrediti relaciju koju zadovoljavaju koeficijenti A, B, C, a i b da prava $Ax + By + C = 0$ dodiruje elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.
806. Kroz tačku $N(1, 1)$ u elipsi $4x^2 + 9y^2 = 36$ treba postaviti tetivu koja je tom tačkom prepolovljena.
807. Napisati jednačinu ove tetive elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ koja je prepolovljena tačkom $M(2, 1)$.
808. Data je elipsa $x^2 + 4y^2 = 100$. Napisati jednačinu one tetive date elipse koja je prepolovljena tačkom $M\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ a zatim odrediti koordinate krajnjih tačaka tetive.
809. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Dokazati da se odsečak ma koje njene tangente, koji leži između tangenata koje su konstruisane u krajnjim tačkama velike ose, vidi iz fokusa pod pravim uglom.
- 810.*Oko elipse $x^2 + 8y^2 = 72$ opisati jednakokraki trapez sa osnovama paralelnim velikoj osi i ostrim uglom od 45° . Odrediti jednačine stranice; koordinate dodirnih tačaka; koordinate temena i površinu trapeza.
- 811.*Odrediti geometrijsko mesto tačaka iz kojih se vidi elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ pod pravim uglom.
812. Duž $AB = a$ se kreće tako da tačka A klizi po apscisnoj, a tačka B po ordinatnoj osi. Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$, koja deli duž AB u odnosu $1 : 2$ polazeći od tačke A .
813. U kružnici $x^2 + y^2 = 25$ upisana je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Poluprečnik kružnice konstruisan u njenoj tački $A(4, 3)$ prepolovljen je elipsom, napisati njenu jednačinu.

814. Napisati jednačine pravih koje sadrže žiže elipsa
 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ i $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{49} = 1$.
815. U elipsu $x^2 + 4y^2 = 36$ upisan je kvadrat. Odrediti njegovu površinu.
816. Izračunati površinu pravougaonika upisanog u elipsi $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$, tako da dve suprotne stranice sadrže žiže elipse.
817. Temena četvorougla nalaze se u žižama elipsi $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i $a^2x^2 + b^2y^2 = a^2b^2$. Odrediti koordinate temena i površinu ovog četvorougla.
818. Data je elipsa $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. Odrediti dužinu tetive koja sadrži žižu elipse i normalna je na žižnu osu.
- 819.*Odrediti jednačinu skupa tačaka u ravni, tako da je odnos njihovih rastojanja od tačke $A(1, 0)$ i od prave $x = 9$ jednak $\frac{1}{3}$.
- 820.*Duž $AB = 8$ kreće se tako da jedna njena krajnja tačka A klizi po Ox osi, a druga B po Oy osi. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka $M(x, y)$ koje opisuje tačka M duži AB , ako je $MA = 3$.
- 821.*Tangenta i normala elipse $x^2 + 2y^2 = 54$, koje su konstruisane u tački $M(6, 3)$, seku koordinatne ose u tačkama T, T_1, N, N_1 .
- a) Dokazati da obe žiže elipse pripadaju kružnici kojoj pripadaju i tačke M, T_1 i N_1 .
- b) Dokazati da se ova kružnica i kružnica koja sadrži tačke M, N, T seku pod pravim uglom.
- 322.*Odrediti jednačinu geometrijskog mesta tačaka u ravni koje su podjednako udaljene od kružnica $(x + 2)^2 + y^2 = 69$ i $(x - 2)^2 + y^2 = 4$.
- 823.*Data je elipsa
 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$.
 Odrediti jednačinu tangente u tački $P(2, y > 0)$. Neka su tačke A i B presečne tačke tangente sa tangentama konstruisanim u temenima na Ox osi. Dokazati da kružnica prečnika AB sadrži obe žiže elipse.
824. Odrediti geometrijsko mesto tačaka tako da odnos odstojanja svake tačke od tačke $F(2, 0)$ i od prave $x - 8 = 0$ bude stalan, i ima vrednost $0,5$.

825. Data je jednačina elipse $4x^2 + 9y^2 - 8x - 36y + 4 = 0$. Odrediti koordinate središta, poluose i žiže date elipse, i zatim je konstruisati.

Primedba 1: Translacijom elipse

$$(1) \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tako da njeno središte bude tačka $C(p, q)$, dobija se jednačina elipse u obliku

$$(2) \frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1.$$

Primedba 2: Žiže elipse (2) su tačke $F_1(p-e, q)$ i $F_2(p+e, q)$.

826. Dat je opšti oblik jednačine krive drugog reda:

$$(3) Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Koje uslove treba da zadovoljavaju realni brojevi A, B, C, E i F da bi jednačina (3) predstavljala elipsu oblika (2)?

- 827.*Data je elipsa:

$$a) x^2 + 4y^2 + 4x - 16y + 8 = 0;$$

$$b) x^2 + 5y^2 - 8x + 11 = 0;$$

$$c) 4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0;$$

$$d) 16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0.$$

Odrediti središte, poluose, žiže elipse, pa je transformisati u oblik (2) (primedba 1) i konstruisati grafik.

- 828.*Odrediti jednačinu elipse u obliku (2) (primedba 1), ako dodiruje Ox osu u tački $P(3, 0)$, a Oy osu u tački $N(0, -4)$.

7.6. HIPERBOLA

Definicija: Hiperbola je skup tačaka u ravni s osobinom da je razlika rastojanja ma koje tačke od dveju datih tačaka stalan broj.

Razlika rastojanja označava se sa

$r_1 - r_2 = 2a (a > 0)$, r_1 i r_2 su potezi (radijus vektori) hiperbole; stalne tačke $F_1(-e, 0)$, $F_2(e, 0)$ su žiže hiperbole, njihovo rastojanje $F_1 F_2 = 2e (e > a)$. Duž $A_1 A_2 = 2a$ je realna osa, a $B_1 B_2 = 2b$ imaginarna osa hiperbole. Broj $e = \sqrt{a^2 + b^2} (e > a)$ je linearni ekscentritet hiperbole.

Jednačina hiperbole

Jednačina $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ili $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ predstavlja centralnu jednačinu hiperbole.

Jednačina asimptote hiperbole

Prave: $y = \frac{b}{a}x$ i $y = -\frac{b}{a}x$ su jednačine asimptote hiperbole.

Uslov da prava dodiruje hiperbolu: prava $y = kx + n$ dodiruje hiperbolu $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ako je $a^2k^2 - b^2 = n^2$.

829. Odrediti koordinate temena i žiže hiperbole $\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$.

830. Napisati jednačinu hiperbole za koju:

a) žiže imaju koordinate $(\pm 4, 0)$, a realna osa je 6;

b) žiže imaju koordinate $(0, \pm 5)$, a realna osa je 8.

831. Napisati jednačinu hiperbole ako je razmera njenih poluosa 3 : 4 i $e = 15$.

832. Napisati jednačinu jednakostranične hiperbole koja prolazi kroz tačku $A(10, -8)$.

833. Tačke $A(4, \sqrt{5})$ i $B(-4\sqrt{3}, 5)$ pripadaju hiperboli. Odrediti njenu jednačinu.

834. Napisati jednačine asimptota hiperbola ako je realna osa 8, a rastojanje između žiža jednako 10.

835. Odrediti jednačinu hiperbole ako je rastojanje između žiža jednako $10\sqrt{2}$, a jednačine njenih asimptota $y = \pm \frac{3}{4}x$.

836. Tačka $A\left(10, 4\frac{1}{2}\right)$ pripada hiperboli, a jedna njena asimptota sadrži tačku $B(4, 3)$. Napisati jednačinu hiperbole.

837. Odrediti presečne tačke asimptote hiperbole

$x^2 - 3y^2 = 12$ s kružnicom čije je središte u desnom fokusu hiperbole i koja sadrži koordinatni početak.

838. Hiperbola sadrži tačku $M\left(6, \frac{3}{2}\sqrt{5}\right)$, a njena realna poluosa $a = 4$. Napisati jednačinu normale konstruisane iz leve žiže hiperbole na njene asimptote.

839. Na hiperboli $x^2 - y^2 = 4$ odrediti tačku čiji su radijus-vektori normalni.

840. Tačka M deli rastojanje između žiže hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ u odnosu na $F_1M : MF_2 = 2 : 3$, gde je F_1 leva žiža hiperbole. Kroz tačku M konstruisana je prava pod uglom od 135° prema osi Ox . Odrediti tačke preseka ove prave sa asimptotama hiperbole.
841. Data je elipsa $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{17} = 1$. Odrediti jednačinu konfokalne hiperbole čije su asimptote $y = \pm \frac{x\sqrt{3}}{3}$.
842. Data je elipsa $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$. Napisati jednačinu hiperbole čija se temena nalaze u žižama, a žiže u temenima elipse.
843. Dokazati da je proizvod odstojanja ma koje tačke hiperbole od njenih asimptota stalan.
844. Iz žiže hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$, konstruisana je normala na asimptotu: izračunati površinu ograničenu ovom normalom, asimptotom i apscisnom osom.
845. Data je hiperbola $x^2 - 4y^2 = 4$. Odrediti jednačine prave koje sadrže tačku $A(2, -5)$ i paralelne su asimptotama hiperbole.
846. Na hiperboli $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ odrediti tačku čije je odstojanje od jedne asimptote tri puta veće nego odstojanje od druge asimptote.
847. Date su tačke $A(-1, 0)$ i $B(2, 0)$. Tačka M kreće se tako da je u trouglu AMB ugao B stalno dva puta veći od ugla A . Odrediti jednačinu trajektorije kretanja.
848. Odrediti trajektoriju tačke $M(x, y)$ koja pri svom kretanju ostaje dva puta bliža pravoj $x = 1$ nego tački $F(4, 0)$.
849. Date su tačke $A(a, 0)$ i $B(-a, 0)$ i duž dužine b . Odrediti geometrijsko mesto tačaka $M(x, y)$ tako da za koeficijente pravca pravih MA i MB važi $k_{AM} \cdot k_{BM} = \frac{b^2}{a^2}$.
850. Odrediti geometrijsko mesto sredine tetive hiperbole $x^2 - 4y^2 = 16$ koje grade sa osom Ox ugao od 45° .
851. Odrediti geometrijsko mesto tačaka iz kojih se vidi hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ pod pravim uglom.
852. Odrediti jednačinu centra kružnica koje odsecaju na dvema međusobno normalnim pravama odsečke dužine $2a$ i $2b$.

853. Date su tačke $A(-a, 0)$ i $B(2a, 0)$. Tačka M se kreće tako da je ugao MAB stalno tri puta manji od spoljašnjeg ugla AMC trougla AMB . Odrediti jednačinu putanje tačke M .
854. Napisati jednačinu tangente hiperbole u svojoj tački M :
 a) $x^2 - y^2 = 40$, $M(x, 9)$;
 b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{64} = 1$, $M(-6\frac{1}{4}, y < 0)$.
855. U jednačini prave $y = kx - 7\frac{5}{12}$ odrediti parametar k tako da ona bude tangenta hiperbole $5x^2 - 4y^2 = 89$.
856. Koeficijent pravca tangente hiperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$ jednak je $-\frac{10}{9}$.
 Napisati jednačinu tangente.
857. Odrediti jednačine tangenti hiperbole $x^2 - y^2 = 2$ konstruisane iz tačke $M(1, 0)$.
858. Odrediti jednačine tangenti hiperbole $25x^2 - 4y^2 = 100$, konstruisane iz tačke $P(0, -10)$.
859. Odrediti jednačinu tangente hiperbole koja je paralelna sa datom pravom:
 a) $9x^2 - 4y^2 = 32$, $9x + 2y - 1 = 0$;
 b) $16x^2 - 9y^2 = 144$, $4x - y + 5 = 0$.
860. Odrediti jednačinu tangente hiperbole $3x^2 - 4y^2 = 12$, koja odseca na koordinatnim osama jednake odsečke.
861. Prava $x - \sqrt{2}y + 2 = 0$ seče hiperbolu $3x^2 - 2y^2 = 12$. Odrediti površinu trougla ograničenog tangentama, koje sadrže presečne tačke, i datom pravom.
862. Data je hiperbola $4x^2 - 5y^2 = 20$. Odrediti jednačinu prave koja sadrži koordinatni početak, seče hiperbolu u dvema tačkama čije je rastojanje $\sqrt{29}$.
863. Napisati jednačinu prave koja dodiruje hiperbolu $5x^2 - 7y^2 = 13$ i normalna je na pravu $7x + 10y + 28 = 0$.
864. Odrediti ugao za koji treba da rotira prava $x + 7y - 9 = 0$ oko svoje tačke $M(2, y)$ da bi dodirivala hiperbolu, koja sadrži tačke $A(2, 0)$ i $B(6, 4)$, a centar joj pripada koordinatnom početku.

865. Napisati jednačinu tangente hiperbole $x^2 - 2y^2 = 4$, koja sa pravom $x + 7y - 9 = 0$ čini ugao od 45° .
866. Odrediti jednačinu hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ ako je data njena asimptota $y = \frac{3}{2}x$ i tangenta $15x - 8y + 18 = 0$.
867. Napisati jednačinu hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, ako su poznate jednačine njenih tangenti:
 $5x - 7y - 1 = 0$ i $x - y - 1 = 0$.
868. Iz tačke $P(3, 2)$ konstruisane su tangente na hiperbolu $x^2 - 2y^2 = 2$. Odrediti njihove jednačine.
869. Odrediti ugao pod kojim se seku krive $3x^2 + 4y^2 = 84$ i $3x^2 - 4y^2 = 12$ i jednačine tangenti u jednoj presečnoj tački.
870. Dokazati da se hiperbola $x^2 - y^2 = a^2$ i kružnice $x^2 + y^2 = 2a^2$ seku pod uglom od 60° .
871. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih:
 $x^2 + y^2 - 14y + 17 = 0$ i $3x^2 - 4y^2 - 12 = 0$.
872. Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih: $6x^2 + 10y^2 = 15$ i $6x^2 - 10y^2 = 60$.
873. Odrediti jednačine zajedničkih tangenti krivih linija:
 $25x^2 + 100y^2 = 4$ i $x^2 - 3y^2 = 1$.
874. Odrediti jednačinu tangente hiperbole $x^2 - 12y^2 = 36$, koja gradi sa pravom $x + 2y = 0$ ugao od 45° .
875. Kroz tačku $A(3, -1)$ konstruisati tetivu hiperbole $x^2 - 4y^2 = 4$, koja je tom tačkom prepolovljena.
876. Napisati jednačinu tetive hiperbole $4x^2 - 9y^2 = 36$, koju polovi tačka $A(5, 1)$.
877. Na tangenti elipse $4x^2 + 5y^2 = 20$, koja je konstruisana u tački $M\left(-\frac{5}{3}, y > 0\right)$ elipse, leži tetiva hiperbole $4x^2 - y^2 = 36$. Odrediti dužinu tetive.
878. Odrediti uslov koji zadovoljavaju parametri A, B i C prave $Ax + By + C = 0$ i parametri a i b hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, da bi prava bila tangenta hiperbole.
- 879.* Data je hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i na njoj tačka $M(x_1, y_1)$. Dokazati da jednačina tangente hiperbole u tački M ima oblik $b^2xx_1 - a^2yy_1 = a^2b^2$.

- 880.* Dokazati da je odsečak dirke hiperbole između njenih asimptota prepolovljen tačkom dodira.
- 881.* Asimptote hiperbole i njena tangenta konstruisana u proizvoljnoj tački obrazuju trougao konstantne površine. Dokazati.
- 882.* Asimptote hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i prave koje prolaze kroz ma koju tačku hiperbole paralelno asimptotama obrazuju paralelogram konstantne površine. Dokazati.
- 883.* Proizvod odstojanja žiže hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ do bilo koje njene tangente je stalne veličine i jednak b^2 .
- 884.* Odstojanje žiža hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ od njenih asimptota iznosi b . Dokazati.
- 885.* U trouglu ABC date su krajnje tačke osnovice $A(-3, 0)$ i $B(3, 0)$. Uglovi na osnovici zadovoljavaju relaciju $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -4$. Odrediti jednačinu krive koju opisuje teme C .
- 886.* U trouglu ABC data je osnovica $AB = 2c$, a uglovi na osnovici zadovoljavaju relaciju $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta = -k^2$. Odrediti geometrijsko mesto temena C .
887. Na hiperboli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ odrediti tačku M čiji potezi čine ugao od 90° .
888. Napisati jednačinu hiperbole čija se temena nalaze u žižama elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{8} = 1$, a žiže se poklapaju sa temenima elipse.
889. Odrediti rastojanje temena hiperbole $\frac{x^2}{25} - \frac{4y^2}{25} = 1$ od njenih asimptota.
890. Odrediti jednačinu elipse čije žiže pripadaju žižama jednakokranične hiperbole $x^2 - y^2 = 18$, i ako tačka $N(5\sqrt{2}, 4\sqrt{2})$ pripada elipsi.
891. Na hiperboli $3x^2 - 4y^2 = 72$ odrediti tačku najbližu pravou $3x + 2y + 1 = 0$ i izračunati odstojanje između ove tačke i date prave.
892. Kružnica sa centrom na Ox osi seče hiperbolu $3x^2 - 4y^2 = 12$ u tački $A(4, -3)$ pod pravim uglom. Napisati jednačinu te kružnice.
893. Na hiperboli $9x^2 - 16y^2 = 144$ odrediti tačku iz koje se realna osa vidi pod uglom od 60° .

894. Dve poluprave sa početnim tačkama $A(-a, 0)$ i $B(a, 0)$ rotiraju oko njih tako da sa Ox osom grade uvek komplementne uglove. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta njihovih presečnih tačaka.
- 895.* U tački $A\left(\frac{40}{3}, y < 0\right)$ hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 576$ konstruisana je tangenta t . U temenima hiperbole konstruisane su tangente t_1 i t_2 . Odrediti ugao pod kojim se vidi iz desne žiže hiperbole odsečak tangente t između tangenti t_1 i t_2 ; zatim odrediti dužinu odsečka.
- 896.* Prava je određena tačkama $A(2, 0)$ i $B(6, 4)$. Odrediti realan broj b tako da prava AB bude tangenta hiperbole $b^2x^2 - 8y^2 = 8b^2$. U kojoj razmeri tačka dodira deli duž AB ?
- 897.* Odrediti geometrijsko mesto tačaka čiji je odnos rastojanja od tačke $F(e, 0)$ i prave $ex = a^2$ stalan i jednak $\frac{e}{a}$ ($e > a$ ili $e < a$).
898. Na hiperboli $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ odrediti tačku čiji su radijus-vektori međusobno normalni.
- 899.* Ako se oko jednog temena elipse, koje pripada njenoj maloj poluosi konstruiše kružnica poluprečnika jednakog velikoj poluosi, ona seče Ox osu u žižama elipse. Dokazati.
- 900.* Data je hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$. Odrediti dužinu tetive hiperbole koja sadrži žižu i normalna je na fokalnu žižinu osu.
901. Data je kružnica $x^2 + y^2 + 4x = 0$ i tačka $P(2, 0)$. Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje su podjednako udaljene od datog kruga i date tačke.

Primerbe 3: Translacijom hiperbole

$$(3) \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

tako da njeno središte bude tačka $C(p, q)$, dobija se jednačina hiperbole u obliku

$$(4) \frac{(x-p)^2}{a^2} - \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

Primerba 4: Jednačine asimptota hiperbole (4) su

$$(5) y - q = \pm \frac{b}{a}(x - p).$$

Primerba 5: Žiže hiperbole (4) pripadaju tačkama $F_1(p - e, q)$ i $F_2(p + e, q)$.

902. Data je jednačina hiperbole

$$4x^2 - 9y^2 - 8x + 36y - 68 = 0. \text{ Odrediti koordinate središta, poluose i žiže date hiperbole, i zatim je konstruisati.}$$

903. Dat je opšti oblik krive drugog reda

$$(6) Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Koje uslove treba da zadovoljavaju realni brojevi A, B, C, D, E i F da bi jednačina (6) predstavljala hiperbolu oblika (4)?

904. Odrediti jednačinu hiperbole čije su žiže $F(-10, 2)$ i $F(16, 2)$ i čija je realna osa $2a = 24$.

905. Odrediti poluose, koordinate centra i jednačine asimptota hiperbole, ako je data njena jednačina:

$$a) 4x^2 - 9y^2 - 16x - 18y - 29 = 0;$$

$$b) x^2 - 2y^2 - 2x + 8y - 9 = 0;$$

$$c) 9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0.$$

906. Odrediti jednačinu hiperbole

$$b^2(x-p)^2 - a^2(y-q)^2 = a^2b^2$$

koja sadrži tačke M i N , a centar joj je tačka C :

$$a) M(1, -1), N(4, 2), C(-1, -2);$$

$$b) M(11, 9), N(3, 3), C(1, 2);$$

$$c) M(3, -2), N(7, -6), C(1, -1).$$

- 907.* Odrediti jednačinu tangente hiperbole $x^2 - 2y^2 - 2x + 8y - 9 = 0$, ako tangenta gradi sa Ox osom ugao od 45° .

- 908.* Hiperbola $b^2(x-q)^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ sadrži tačku $M(11, 4)$. Odrediti njene poluose i centar ako je jednačina njene asimptote $x - 2y - 1 = 0$, a jednačina njene tangente $5x - 8y + 13 = 0$.

- 909.* Odrediti ugao za koji treba da rotira prava $x - 7y + 19 = 0$ oko svoje tačke $M(5, y)$ da bi dodirivala hiperbolu $2x^2 - 3y^2 - 12x + 12y + 1 = 0$.

7.7. PARABOLA

Definicija: Parabola je skup tačaka u ravni s osobinom da je rastojanje svake tačke od jedne stalne tačke jednako odstojanju te tačke od jedne stalne prave.

Stalna tačka $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ je žiža parabole, a stalna prava čija je jednačina $x + \frac{p}{2} = 0$ – direktrisa parabole.

Odstojanje tačke F od direktrise obeležava se sa p i naziva se parametar parabole; koordinatni početak je teme parabole.

Jednačina parabole

Jednačina $y^2 = 2px$ predstavlja konačni oblik jednačine parabole, koja pripada desnoj polupravi, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom Ox .

Jednačina $y^2 = -2px$ predstavlja konačni oblik jednačine parabole, koja pripada levoj polupravi, ima teme u koordinatnom početku, a osa joj se poklapa sa osom Ox .

Uslov da prava dodiruje parabolu.

Prava $y = kx + n$ dodiruje parabolu $y^2 = 2px$ ako je $p = 2kn$.

910. Odrediti jednačinu parabole $y^2 = 2px$ koja sadrži tačku $M(2, -4)$.
911. Napisati jednačinu parabole čija je žiža u tački $F(4, 0)$.
912. Direktrise parabole sa temenom u koordinatnom početku je prava $2x + 5 = 0$. Napisati jednačinu parabole i odrediti koordinate njene žiže.
913. Kroz žižu parabole $y^2 = 10x$ konstruisana je tetiva normalno na njenu osu. Odrediti dužinu tetive.
914. Sečica parabole $y^2 = 8x$ sadrži žižu i tačku čija je apscisa 4,5 a ordinata pozitivna. Napisati jednačinu sečice.
915. Data je parabola $y^2 = -4x$. Kroz njenu žižu konstruisana je prava pod uglom od 135° prema pozitivnom delu ose Ox . Napisati jednačinu prave i odrediti dužinu odgovarajuće tetive parabole.
916. U paraboli $y^2 = 2px$ upisan je jednakokrani trougao. Jedno teme trougla poklapa se sa temenom parabole. Izračunati dužinu stranice trougla.
917. Na paraboli $y^2 = 6x$ odrediti tačku ako je njen žižni radijus-vektor jednak 4,5.
918. Napisati jednačinu kružnice čiji je centar u žiži parabole $y^2 = 2px$ i dodiruje njenu direktrisu.
919. Kroz žižu parabole $y^2 = -4x$ konstruisana je sečica pod uglom od 120° prema pozitivnom delu apscisne ose. Napisati njenu jednačinu i odrediti dužinu dobijene tetive.
920. Napisati jednačinu parabole i njene direktrise ako parabola prolazi kroz presečnu tačku prave $y = x$ i kružnice $x^2 + y^2 + 6x = 0$, a simetrična je u odnosu na apscisnu osu.
921. Data je parabola $y^2 = -4x$. Kroz tačku $M(-2, -1)$ postaviti tetivu koja je tom tačkom prepolovljena.

922. Data je parabola $y^2 = 4x$ i tačka $M\left(2\frac{1}{2}, -1\right)$. Odrediti dužinu tetive parabole, koja je raspolovljena datom tačkom.
923. U paraboli $y^2 = 6x$ upisan je jednakokrani trougao; jedno teme je teme parabole, a jedna stranica je normalna na apscisnu osu. Odrediti površinu trougla.
924. Odrediti geometrijsko mesto centara kružnica, koje dodiruju kružnicu $x^2 + y^2 = 2ax$ i osu Oy .
925. Odrediti geometrijsko mesto sredine tetiva parabole $y^2 = 4x$, koje zaklapaju sa osom Ox ugao od 45° .
926. Sastaviti jednačinu geometrijskog mesta centara kružnica koji dodiruju kružnicu $x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0$ i y -osu.
927. Odrediti jednačinu geometrijskog mesta sredina tetiva parabole $y^2 = 2px$ koje polaze iz njenog temena.
928. Odrediti geometrijsko mesto sredina ordinata tačaka parabole $y^2 = 2px$.
929. Odrediti geometrijsko mesto tačaka koje dele ordinate tačaka parabole $y^2 = 2px$ u razmeri $m : n$, gde je prvi odsečak bliži apscisnoj osi, a drugi udaljeniji od nje.
930. Odrediti geometrijsko mesto tačaka iz kojih se vidi parabola $y^2 = 2px$ pod pravim uglom.
931. Napisati jednačinu geometrijskog mesta središta kružnica, koje dodiruju kružnicu $(x + 5)^2 + y^2 = 9$ i pravu $x - 2 = 0$.
932. Odrediti jednačinu tangente parabole (p) u svojoj tački (M):
a) $p : y^2 = 6x, M(2, y > 0)$; b) $p : y^2 = 10x, M\left(2\frac{1}{2}, y < 0\right)$.
933. Napisati jednačinu parabole ako je prava $3x + 2y + 3 = 0$ njena tangenta.
934. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 15x$, ako ona gradi sa pozitivnim delom ose Ox ugao od 45° .
935. Napisati jednačinu tangente date parabole, ako sadrži tačku M koja ne pripada paraboli:
a) $y^2 = 24x, M\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$; b) $y^2 = 16x, M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$.
936. Napisati jednačinu tangente date parabole, ako je poznato da je paralelna sa datom pravom:
a) $y^2 = 4x, x - 3y = 0$;
b) $y^2 = 12x, 3x - y - 4 = 0$.

937. Odrediti jednačine tangenti parabole $y^2 = 4x$ u presečnim tačkama sa pravom $2x + y - 4 = 0$.
938. U kojoj je tački parabole $y^2 = 16x$ tangenta nagnuta pod uglom od 135° prema x -osi?
939. Odrediti jednačinu tangente parabole $y^2 = 12x$, koja sa pravom $y = 3x - 4$ gradi ugao $\alpha = \frac{\pi}{4}$.
940. Iz tačke $S(-2, -2)$ konstruisane su dirke na parabolu $y^2 = 16x$. Odrediti:
- jednačine dirki;
 - ugao između njih;
 - površinu trougla kog obrazuju te dirke i prava koja prolazi kroz dodirne tačke.
941. Kroz tačku $S\left(\frac{5}{2}, -1\right)$ konstruisati tetivu parabole $y^2 = 4x$, koja je tom tačkom prepolovljena; odrediti njenu jednačinu i jednačine tangenti konstruisanih u njenim krajnjim tačkama.
- Napisati jednačine zajedničkih tangenti krivih (942–945)
942. $y^2 = 4x$ i $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$.
943. $x^2 + y^2 + 3x = 0$ i $y^2 = 9x$.
944. $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$ i $y^2 = 8x$.
945. $y^2 = 20x$ i $9x^2 + 16y^2 = 144$.
946. Prava $2x + y - 12 = 0$ seče parabolu $y^2 = 4x$. Odrediti:
- ugao između tangenti u tim tačkama;
 - jednačinu tangente parabole koja je paralelna sa datom pravom;
 - jednačinu kružnice opisane oko trougla čija su temena presečne tačke date prave i parabole, i presek tangenata povučenih na parabolu u tim tačkama;
 - ugao pod kojim se seku data parabola i pomenuta kružnica.
- 947.* Pod kojim se uglom seku kružnica $3x^2 + 3y^2 - 32x - 128 = 0$ i parabola $y^2 = 8x$?
- 948.* Zajedničke tangente parabole $y^2 = 4x$ i kružnice $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 9 = 0$ obrazuju trougao, oko koga je opisana kružnica. Napisati jednačinu te kružnice.
949. Kroz tačku $P(5, 2)$ konstruisana je tetiva parabole $y^2 = 4x$, koja je tom tačkom prepolovljena. Napisati jednačinu kružnice koja prolazi kroz krajnje tačke pomenute tetive i kroz presek onih tangenti parabole koje su konstruisane u krajnjim tačkama te tetive.

950. Iz tačke $B(2, -4)$ van parabole $x^2 = 8y$ konstruisane su tangente na parabolu. Napisati jednačinu kružnice opisane oko trougla koji obrazuju te tangente i duž koja spaja njihove dodirne tačke, pa dokazati da je taj trougao jednakokrak.
951. U jednačini prave $ax + y - 2a = 0$ odrediti parametar a , tako da površina trougla, koji se dobije kad se njene presečne tačke sa parabolom $y^2 = 4x$ spoje sa koordinatnim početkom bude 6. U kojoj se tački seku tangente parabole konstruisane u presečnim tačkama date prave i parabole?
- 952.* Kroz žižu parabole $y^2 = 6x$ konstruisana je tetiva koja sa osom parabole gradi ugao od 45° . Dokazati:
- da je dužina tetive četiri puta veća od dužine parametra;
 - da se tangente parabole konstruisane u krajnjim tačkama tetive seku na direktrisi parabole;
 - da pomenute tangente grade ugao od 90° .
- 953.* Ako se kroz žižu parabole $x^2 = 2py$ konstruiše tetiva pod uglom od 45° prema x -osi, onda je njena dužina četiri puta veća od dužine parametra parabole; a ako se konstruiše pod uglom od 60° , onda je njena dužina osam puta veća od parametra parabole. Dokazati.
- 954.* Pod kojim uglom treba da je nagnuta prema osi parabole $y^2 = 2px$ ona njena tetiva koja prolazi kroz žižu da bi njena dužina bila četiri puta veća od dužine parametra? Kako glasi jednačina te tetive i koliki ugao čine među sobom tangente parabole konstruisane u njenim krajnjim tačkama.
- 955.* Ako prava $y = kx + n$ seče parabolu $y^2 = 2px$ u dvema tačkama, a tangente u tim tačkama na parabolu čine ugao od 45° , onda postoji relacija: $\left(\frac{2n + kp}{2}\right)^2 + 2knp = p^2$, koja se u specijalnom slučaju za parabolu $y^2 = 4x$ svodi na jednačinu $\left(\frac{n + k}{2}\right)^2 + nk = 1$. Dokazati.
- 956.* Na parabolu $x^2 = 8y$ povučena je tangenta paralelna sa pravom $4x - y - 32 = 0$, pa je iz žiže spuštена normala na tangentu. Odrediti:
- površinu trougla čija su temena žiža parabole, dodirna tačka pomenute parabole i presečna tačka tangente sa normalom spuštена iz žiže na tangentu i jednačine njegovih strana;
 - jednačinu kružnice opisane oko trougla.
- 957.* Prava $3x - 5y + 25 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i konfokalne parabole $y^2 = 2px$; dokazati da je trougao, čija su temena tačke dodira i zajednička žiža pravougli trougao.

- 958.*Data su prave $x - \lambda y + 3\lambda = 0$, $x + ky + 2k = 0$ i parabola $y^2 = 2px$. Odrediti parametre λ , k i p , tako da obe prave dodiruju parabolu i da među sobom grade ugao od 45° .
959. Odrediti tangentu parabole $y^2 = 12x$ koja gradi sa pavom $x - 3y - 4 = 0$ ugao od 45° , a zatim odrediti njenu dodirnu tačku.
- 960.*Ako tangenta parabole $y^2 = 4x$, čija je jednačina $x - 3y + 9 = 0$, rotira oko svoje tačke $P\left(x, \frac{7}{2}\right)$ ona opet dodiruje parabolu u tački $A\left(\frac{1}{4}, y\right)$. Odrediti ugao rotacije i napisati jednačinu one tangente parabole koja je paralelna sa dodirnom tetivom prvih dveju tangenata.
961. U presečnim tačkama prave $2x + y - 12 = 0$ i parabole $y^2 = 4x$ konstruisane su tangente na parabolu. Odrediti:
- ugao između tangenti,
 - jednačinu kružnice koja sadrži presečnu tačku tih tangenata i kroz presečne tačke date prave i parabole,
 - ugao pod kojim se seku date krive.
962. Tangente parabole $y^2 = 4x$ konstruisane u njenim tačkama $A(1, 2)$, $B(1, -2)$ i $C(49, 14)$ obrazuju trougao. Napisati jednačine opisane i upisane kružnice oko tog trougla.
963. Prava $x + 2y + 4 = 0$ dodiruju parabolu $y^2 = 2px$. Odrediti:
- jednačinu parabole;
 - jednačine zajedničkih tangenti parabole i kružnice $x^2 + y^2 - 2x - 9 = 0$;
 - ugao između date prave i one zajedničke tangente parabole i kružnice, koja sa x -osom gradi oštar ugao;
 - površinu trougla koji obrazuje data prava sa zajedničkim tangentama parabole i kružnice.
- 964.*Data je jednačina tangente $x + y + 1 = 0$ hiperbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ i žižno rastojanje $e = \sqrt{7}$. Napisati:
- jednačinu hiperbole;
 - jednačinu parabole $y^2 = 2px$ koju dodiruje data tangenta;
 - jednačinu kružnice čije se središte nalazi u tački $S(0, 2)$ kojoj je zajednička tangenta parabole i hiperbole takođe tangenta;
 - dokazati da se dodirna tačka tangente kružnice nalazi na središnji rastojanja dodirnih tačaka tangenata hiperbole i parabole.

965. Data je parabola $y^2 = 2px$ i na njoj tačka $M(x_1, y_1)$. Dokazati da tangenta u tački M ima jednačinu $yy_1 = p(x + x_1)$.
966. Dokazati da proizvoljna dirka parabole $y^2 = 2px$ odseca na negativnom delu ose Ox odsečak jednak apscisi dodirne tačke, a na osi Oy odsečak jednak polovini ordinate dodirne tačke.
967. Data je parabola $y^2 = 2px$ i na njoj tačka $M(x_1, y_1)$. Dirka konstruisana u tački M seče direktrisu parabole u tački P , a tetivu, konstruisanu kroz žižu normalno na osu Ox u tački Q . Pokazati da je $PF = QF$.
968. Oko žiže parabole $y^2 = 2px$ opisana je kružnica čiji je poluprečnik $r = 2p$. Odrediti ugao pod kojim se seku data parabola i pomenuta kružnica.
969. Odrediti uslov da prava $Ax + By + C = 0$ dodiruje parabolu $y^2 = 2px$.
970. Data je parabola $y^2 = 2px$ i na njoj tačka $M(x_1, y_1)$. Pokazati da se dirka u tački M i prava konstruisana iz žiže normalno na tu dirku seku u jednoj tački, koja pripada tangenti u temenu parabole.
971. Odrediti ugao pod kojim kružnica opisana nad parametrom parabole $y^2 = 2px$, kao prečnikom seče parabolu.
972. Odrediti ugao koji obrazuju tangente parabole $y^2 = 2px$, konstruisane u krajnjim tačkama parametra. Zatim pokazati da seku direktrisu na osi Ox .
973. Odrediti presek parabola sa zajedničkim temenom u koordinatnom početku i žižama koje pripadaju tačkama $F_1(3, 0)$ i $F_2\left(0, \frac{3}{8}\right)$.
974. Data je parabola $y^2 = 2px$. Dokazati da je parametar p parabole jednak polovini tetive koja sadrži žižu i normalna je na osu parabole.
975. Kružnica $x^2 + y^2 = 20$ seče parabolu $x^2 = 8y$. Odrediti jednačinu zajedničke tetive.
976. Prava $2x - 3y + 4 = 0$ seče parabolu $y^2 = 4x$ u dvema tačkama. Odrediti jednačine tangenti parabole u tim tačkama i ugao između njih.
977. Data je parabola $y^2 = 16x$ i hiperbola $3x^2 - y^2 = 12$. Odrediti:
- jednačine njihovih zajedničkih tangenti;
 - tačke dodira dobijenih tangenti i datih krivih linija;
 - površinu četvorougla čija su temena dobijene dodirne tačke (pod b), ali prethodno dokazati da je taj četvorougao trapez;
 - ugao pod kojim se vide dijagonale trapeza iz žiže parabole.

978. Data je parabola $y^2 = 6x$. Odrediti jednačinu kružnice koja dodiruje parabolu iznutra u tačkama $A(6, 6)$ i $B(6, -6)$.
- 979.*Na paraboli $y^2 = 8x$ konstruisane su tangente u tačkama $M(2, y > 0)$, $N(2, y < 0)$, $P(8, y > 0)$ koje obrazuju trougao ABC . Odrediti jednačinu kružnice opisane oko trougla ABC i ispitati da li žiža pripada kružnici.
980. Konstruisati dve tetive koje sadrže žižu parabole $y^2 = 2px$, tako da je dužina jedne tetive dva puta veća od dužine parametra, a dužina druge da iznosi $\frac{4}{3}$ dužine parametra. Pod kojim uglom su nagnute tetive prema osi parabole i koliki je ugao između tetiva.
- 981.*Data je parabola $y^2 = 4x$. Odrediti jednačinu tangente parabole koja je paralelna pravoj $2x - 3y + 9 = 0$. Zatim odrediti površinu trougla čija su temena dodirna tačka, žiža i presek normale sa Ox osom.
- 982.*Parabola $y^2 = 2px$ i kružnica sa centrom na ordinatnoj osi dodiruje pravu $y = x + 3$ u istoj tački. Odrediti jednačine parabole i kružnice.
983. Oko žiže parabole $y^2 = 12x$ konstruisana je kružnica koja dodiruje direktrisu parabole. Odrediti jednačinu kružnice i ugao preseka parabole i kružnice.
984. Prava $y + 2x - 12 = 0$ seče parabolom $y^2 = 4x$ u tačkama A i B , u kojima su konstruisane tangente parabole koje se seku u tački C . Dokazati da je trougao ABC jednakokrako-pravougli, zatim odrediti jednačinu kružnice opisane oko trougla.
- 985.*Prava $x - 2y + 8 = 0$ je zajednička tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ i sa njom konfokalne parabole $y^2 = 2px$.
- Odrediti jednačine parabole i elipse.
 - Odrediti jednačinu kružnice koja sadrži obe dodirne tačke i čiji centar pripada tangenti, a zatim pokazati da zajednička žiža pripada kružnici.
 - Odrediti ugao preseka parabole i elipse.
- 986.*Data je hiperbola $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
- Odrediti parametar parabole $y^2 = 2qx$ tako da bude konfokalna sa datom hiperbolom ($q > 0$).
 - U tački $A(-e, -p)$, gde je e polurastojanje žiža a p parametar hiperbole, konstruisati tangentu na hiperbolu, pa dokazati da je ona takođe i tangenta parabole.
 - Dokazati da su radijus-vektori dodirnih tačaka i zajedničke žiže uzajamno normalni.

- 987.*Tačka $P(5, 3)$ pripada pravoj koja seče pravu $y + 3 = 0$ u tački A , a pravu $x + 5 = 0$ u tački B . Odrediti geometrijsko mesto tačaka sredina duži AB ako prava rotira oko tačke P .
Primedba 6: Parabola $y = ax^2$ je simetrična u odnosu na Oy osu. Njena jednačina je oblika
- $$(7) \quad x^2 = 2py \quad (a = \frac{1}{2p}, p > 0 \text{ ili } p < 0).$$
- Primedba 7:* Translacija parabole
- $$(8) \quad y^2 = 2px$$
- tako da njeno središte bude tačka $C(\alpha, \beta)$, dobija se jednačina parabole u obliku
- $$(9) \quad (y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha) \quad (p < 0 \text{ ili } p > 0).$$
- Primedba 8:* Translacijom parabole
- $$(10) \quad x^2 = 2py$$
- tako da njeno središte bude tačka $C(\alpha, \beta)$ dobija se jednačina parabole u obliku
- $$(11) \quad (x - \alpha)^2 = 2p(y - \beta) \quad (p < 0 \text{ ili } p > 0).$$
- Primedba 9:* Parabola oblika (10) kvadriranjem i množenjem svodi se na poznati oblik
- $$(12) \quad y = ax^2 + bx + c$$
- gde je
- $$\alpha = -\frac{b}{2a}, \beta = \frac{4ac - b^2}{4a}, p = \frac{1}{2a}.$$
988. Odrediti koordinate temena T , žiže F i jednačinu direktrise d , ako je jednačina parabole:
- $y^2 - 6y - 4x + 17 = 0$;
 - $y^2 - 4y + 9x - 14 = 0$;
 - $x^2 - 2x - 8y + 9 = 0$;
 - $x^2 - 12x - 8y + 52 = 0$;
 - $y^2 - 4y - 4x + 12 = 0$;
 - $x^2 - 2x + 4y + 5 = 0$.
- 989.*Odrediti jednačinu parabole $(y - \beta)^2 = 2p(x - \alpha)$ koja sadrži tačke $A(0, 0)$, $B(-2, 2)$, $C(5, -2)$ a čija je osa paralelna sa x osom.
- 990.*Odrediti jednačinu parabole $y^2 = 2p(x - m)$ tako da dodiruje pravu $x - 2y + 3 = 0$ u tački $M(1, 2)$.
- 991.*Parabola $y^2 = 2p(x - m)$ sadrži tačke $A(5, 4)$ i $B(9, 4\sqrt{3})$. Odrediti:
- jednačinu parabole;
 - ugao između tangenti parabole konstruisanih u tačkama A i B .

Grafički rešiti sistem jednačina (992-999):

$$992. x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0 \wedge x - y - 6 = 0.$$

$$993. x^2 + y^2 = 16 \wedge y^2 = 6x.$$

$$994. x^2 + 4y^2 = 4 \wedge 4y^2 = 3x.$$

$$995. y = x^2 + 3x + 1 \wedge xy = 3.$$

$$996. x^2 + y^2 + 2x - 6y + 5 = 0 \wedge x^2 + y^2 - 2y - 9 = 0.$$

$$997. 9x^2 + y^2 = 45 \wedge xy = 6.$$

$$998. x^2 + y^2 = 25 \wedge x^2 + y = 13.$$

$$999. x^2 + y^2 = 34 \wedge xy = -15.$$

U Dekartovom pravouglom sistemu Oxy šrafirati oblast za koju je (1000—1006):

$$1000. \{(x, y) \mid y^2 < x\} \cap \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1\}.$$

$$1001. \{(x, y) \mid x^2 - y^2 - 36 < 0\}.$$

$$1002. \{(x, y) \mid x^2 - y^2 \geq 4\}.$$

$$1003. \{(x, y) \mid x^2 + y^2 - 16 < 0\}.$$

$$1004. \{(x, y) \mid 9x^2 + 25y^2 < 225\}.$$

$$1005. \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 16\} \cap \{(x, y) \mid y^2 < 4(x + 1)\}.$$

$$1006. \{(x, y) \mid x^2 + 4y^2 \geq 4\} \cap \{(x, y) \mid 4y^2 \leq 3x\}.$$

1007.* Odrediti skup tačaka $M(x, y)$ u ravni čije koordinate zadovoljavaju sistem $2x + 3y - 6 < 0 \wedge y + 2 > 0 \wedge x + 1 > 0 \wedge x^2 + y^2 - 1 > 0$.

1008.* Rešiti u skupu celih brojeva sistem nejednačina

$$y - |x^2 - 2x| + \frac{1}{2} > 0 \wedge y + |x - 1| < 2.$$

1009.* U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu odrediti skup tačaka $M(x, y)$ za koji je

$$\{(x, y) \mid |x + 2| - |y - 2| < 2\}.$$

1010.* U Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu odrediti skup tačaka $M(x, y)$ za koji je

$$a) \{(x, y) \mid |x + y|^{-x+y+1} < 1\}.$$

$$b) |x + 1| + |y - 2| \leq 1.$$

8. MATEMATIČKA INDUKCIJA, NIZOVI

8.1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

Iskaz $T(n)$, čija formulacija sadrži prirodan broj n , je istinit za svaki prirodan broj, ako:

1) tvđenje $T(1)$ je tačno,

2) za svako k u skupu N implikacija

$T(k) \Rightarrow T(k + 1)$ je tačna.

Matematičkom indukcijom dokazati da za sve prirodne brojeve važi (1011—1020):

$$1011. 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}.$$

$$1012. 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}.$$

$$1013. 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n + 1) = \frac{n(n + 1)(n + 2)}{3}.$$

$$1014. 1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot 5 + \dots + n(n + 1)(n + 2) = \frac{1}{4} n(n + 1)(n + 2)(n + 3).$$

$$1015. \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n - 1)(2n + 1)} = \frac{n}{2n + 1}.$$

$$1016. 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n + 1)}{2} \right)^2.$$

$$1017. 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + (2n)^3 = 2n^2(n + 1)^2.$$

$$1018. 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + n(n + 2) = \frac{n(n + 1)(2n + 7)}{6}.$$

$$1019. 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{n-1} = 2^n - 1.$$

$$1020. 1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{n-1} n^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2}.$$

1021. Za sve prirodne brojeve $3^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$. Dokazati.

$$1022. 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{17}.$$

$$1023. 11^{n+2} + 12^{2n+1} \equiv 0 \pmod{133}.$$

$$1024. 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2 \equiv 0 \pmod{54}.$$

$$1025. 3^{2n+2} - 8n - 9 \equiv 0 \pmod{64}.$$

$$1026. 7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{57}.$$

$$1027. 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1} \equiv 0 \pmod{19}.$$

1028. Za sve prirodne brojeve je $2^n \geq 1 + n$.

1029. Za sve cele brojeve $n \geq -1$ je $2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 > 0$. Dokazati.

1030. Dokazati: $(1+h)^n > 1 + nh$
za $h \neq 0$ i $1+h > 0, n > 2$ (Bernulijeva nejednakost).

1031. Dokazati da je $2^n > n^2$ za $n \geq 5$.

1032. Dokazati nejednakost $\sqrt{p^n} + \sqrt{q^n} \leq \sqrt{(p+q)^n}$, gde su p i q pozitivni brojevi i n prirodni broj ≥ 2 .

Indukcijom dokazati formule (1033–1038)

$$1033. \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}}.$$

$$1034. \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2n-1)x = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

$$1035. \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos (2n-1)x = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}.$$

$$1036. \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$1037. \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots + \cos nx = \frac{\cos \frac{n+1}{2} x \sin \frac{nx}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

$$1038.* \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \operatorname{tg} \frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^n} - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

1039. Indukcijom dokazati formulu

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx \quad (i^2 = -1, \text{ Moavrov obrazac}).$$

1040.* Matematičkom indukcijom dokazati indentitet

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^n}{1+x^{2^n}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{n+1}}{1-x^{2^{n+1}}}$$

1041. Ako je $a_0 = 2, a_1 = 3$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, dokazati da je $a_n = 2^n + 1$.

1042. Ako je $a_0 = 0, a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1}$, dokazati da je $a_n = 2^n - 1$.

1043.* Ako su a i $b > 0$ proizvoljni dati brojevi i ako je

$$a_1 = \frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right), a_2 = \frac{1}{2} \left(a_1 + \frac{b}{a_1} \right), \dots, a_n = \frac{1}{2} \left(a_{n-1} + \frac{b}{a_{n-1}} \right),$$

dokazati da je

$$\frac{a_n - \sqrt{b}}{a_n + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^n} \quad (a_n \neq -\sqrt{b})$$

za bilo koji prirodni broj n .

1044.* Niz je definisan rekurentnom formulom

$$a_n = (\alpha + \beta)a_{n-1} - \alpha\beta a_{n-2}$$

i početnim uslovima $a_1 = \alpha + \beta, a_2 = \frac{\alpha^3 - \beta^3}{\alpha - \beta}$. Odrediti obrazac za opšti član.

1045.* Indukcijom dokazati da je 2^{2^n} broj kojem je poslednja cifra 6, za svako $n \geq 2$.

1046.* Dokazati da je broj $f(n) = 3^{2^n} - 1$ deljiv sa 2^{n+2} , a da nije deljiv sa 2^{n+3} ($n \geq 1$).

1047.* Dokazati da je broj $f(n) = 2^{3^n} + 1$ deljiv sa 3^{n+1} , a da nije deljiv sa 3^{n+2} .

Indukcijom dokazati identitete (1048–1053):

$$1048. \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

$$1049. \frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

$$1050. \frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$$

$$1051. \frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \frac{3^2}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$$

$$1052. 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

$$1053. 1^5 + 2^5 + 3^5 + \dots + n^5 = \frac{1}{12}n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1).$$

Dokazati da je $(\forall n) n \in \mathbb{N}$ (1054–1061):

$$1054. 4^{2n+2} - 15n - 16 \text{ deljiv sa } 225.$$

$$1055. 5^{n-1} + 2^n \text{ deljiv sa } 3.$$

$$1056. 11 \cdot 3^n + 3 \cdot 7^n - 6 \text{ deljiv sa } 8.$$

$$1057. 3^{2n+1} + 2^{n+2} \text{ deljiv sa } 7.$$

$$1058. 3 \cdot 4^{n+1} + 10^{n-1} - 4 \text{ deljiv sa } 9.$$

$$1059. 2^{3n} - 7n - 1 \text{ deljiv sa } 49.$$

$$1060. 3^{2n+3} + 40n - 27 \text{ deljiv sa } 64.$$

$$1061. 2^{3n+2} - 28n - 4 \text{ deljiv sa } 196.$$

1062.*Matematičkom indukcijom dokazati nejednakost

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n},$$

gde su $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ pozitivni brojevi i $n \in \mathbb{N}$.

1063.*Dokazati da za ma koji prirodan broj $n > 1$ važi nejednakost

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} > \frac{13}{24}.$$

1064.*Dokazati da je $2^{n-1}(a^n + b^n) > (a+b)^n$, ako je $a+b > 0, a \neq b$ i $n > 1$.

1065.*Dokazati da je broj $2^{2^n} - 1$ deljiv sa 15, ako je $n \geq 2$.

1066.*Odrediti realne brojeve a i b tako da jednakost

$$\sum_{k=1}^n k(2k-1) = n(n+1)(an+b) \text{ važi za svaki prirodan broj } n.$$

1067.*Odrediti brojeve A, B, C tako da za svaki prirodan broj n važi jednakost

$$\sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \frac{An+B}{2^n} + C.$$

8.2. BESKONAČNI NIZOVI

Definicija 1. Brojni (realni) niz je preslikavanje skupa prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ u skup realnih brojeva $\mathbb{R}$. Obično se slika originala n označava sa a_n i naziva se opšti član niza.

Definicija 2. Broj a je granična vrednost niza (a_n) , ako se za svaki proizvoljno mali pozitivan broj ε može odrediti prirodan broj $n_0(\varepsilon)$, takav da je $|a_n - a| < \varepsilon$, za svako $n > n_0$.

Pišemo: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ili $a_n \rightarrow a, n \rightarrow \infty$.

1068. Odrediti opšti član sledećih nizova:

$$a) \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \dots$$

$$b) \frac{1}{1 \cdot 2}, \frac{1}{2 \cdot 3}, \frac{1}{3 \cdot 4}, \frac{1}{4 \cdot 5}, \dots$$

$$c) 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, \dots$$

$$d) 1, -1, 1, -1, 1, -1, \dots$$

$$e) 1, \frac{2}{1 \cdot 2}, \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3}, \frac{4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}, \dots$$

1069. Dokazati da je niz $\frac{3}{4}, \frac{6}{7}, \frac{9}{10}, \frac{12}{13}, \dots$ monotono rastući.

1070. Dokazati da je niz $1, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{4}{7}, \dots$ monotono opadajući.

1071. Ispitati da li niz $a_n = \frac{10^n}{n!}$ monotono raste ili opada.

1072. Nizovi: a) $a_n = \frac{1}{n}$; b) $a_n = \frac{n+2}{n+1}$, su ograničeni. Dokazati.

1073. Neka je $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k$. Dokazati da je $a_n = n(n+1)$.

1074. Odrediti opšti član niza iz sledećih uslova: $a_1 = 2, a_{k+1} = a_k + k, k \geq 1$.

1075. Od kog člana u nizu $(a_n) a_n = n^2 + 1$ su sledeći članovi niza veći od 50?

1076. Dat je niz (a_n) čiji je opšti član $a_n = \frac{n}{3^n}$.

Napisati prvih šest članova niza (b_n) , ako je $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1077. Dat je niz (a_n) čiji je opšti član $a_n = \frac{n(n+1)}{2}$. Napisati prvih deset članova datog niza. Odrediti $a_{25}, a_{100}, a_{n-3}, a_{n+2}$.

1078. Dat je niz (a_n) čiji je opšti član $a_n = 5$. Napisati peti član niza.

1079. Prvih šest članova jednog niza su: 2, 5, 8, 11, 14, 17. (Razlika između svaka dva uzastopna člana niza je 3). Kako glasi n -ti član niza?

1080. Napisati prvih deset članova niza (a_n) čiji je opšti član:

$$a) a_n = \frac{3n + (-1)^n}{2n}; \quad b) a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n}; \quad c) a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \sin \frac{n\pi}{2}.$$

1081. Napisati prvih šest članova niza zadatog pomoću:

$$a) a_1 = -5, a_{n+1} = a_n + 5 \quad (n \geq 1);$$

$$b) a_1 = 2, a_{n+1} = -a_n \quad (n \geq 1).$$

1082.*Dokazati da niz čiji je opšti član $a_n = 2^{n-1} + 1$ zadovoljava rekurentnu formulu $a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$, za svako $n \geq 2$.

1083. Ako je $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + 8n$, dokazati da je $a_n = (2n-1)^2 \quad (n \in \mathbb{N})$.

1084. Ako je $a_1 = 2, a_{k+1} = \frac{k+2}{k} a_k$, dokazati da je $a_n = n(n+1)$.

1085.*Dat je niz (a_n) rekurentnom formulom:

$$a) a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ i } a_0 = 2, a_1 = 3;$$

$$b) a_{n+1} = 3a_n - 2a_{n-1} \text{ i } a_0 = 0, a_1 = 1.$$

Odrediti opšti član niza.

1086.*Neka su a_0 i a_1 proizvoljni pozitivni brojevi. Dokazati da je niz $a_{n+1} = |a_n| - a_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots)$ periodičan.

1087.*Odrediti opšti član niza zadatog uslovima $x_1 = 1, x_2 = 2$ i $x_n = (n-1)(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n \geq 3)$.

8.3. ARITMETIČKI NIZ

Definicija: Niz brojeva u kome je razlika ma koja dva sukcesivna broja niza stalna zove se aritmetički niz ili aritmetička progresija.

Oznake i obrasci

a_1 je prvi član, a_n n -ti član, d razlika aritmetičkog niza, S_n zbir n prvih članova niza, r broj interpoliranih članova između dva data broja a i b .

$$(1) a_n = a_1 + d(n-1),$$

$$(2) S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2},$$

$$(3) S_n = \frac{n}{2} (2a_1 + d(n-1)),$$

$$(4) d = \frac{b-a}{r+1}.$$

1088. Matematičkom indukcijom dokazati:

$$a) a_n = a_1 + (n-1)d; \quad b) S_n = \frac{n}{2} (a_1 + a_n).$$

1089. Naći 13-ti član aritmetičkog niza, -2, -6, -10, -...

1090. Peti član aritmetičkog niza je 13, a deveti 19. Napisati niz.

1091. Izračunati a_n i d u aritmetičkom nizu za koji je:

$$a) a_1 = -45, n = 31 \text{ i } S_n = 0;$$

$$b) a_1 = 16, n = 9 \text{ i } S_n = 0.$$

1092. Izračunati a_1 i d u nizu ako je:

$$a) a_n = 21, n = 7, S_n = 105;$$

$$b) a_n = 105, n = 16, S_n = 840.$$

1093. Izračunati n i S_n u aritmetičkom nizu za koji je:

$$a) a_1 = 4, d = 5, a_n = 49;$$

$$b) a_1 = 14,5, d = 0,7; a_n = 32.$$

1094. Izračunati n i a_n u aritmetičkoj progresiji za koju je:

$$a) a_1 = 41, d = 2, S_n = 4784;$$

$$b) a_1 = 2, d = 5, S_n = 245.$$

1095. Odrediti aritmetički niz za koji je:

$$a) 5a_1 + 10a_5 = 0 \wedge S_4 = 14;$$

$$b) S_2 - S_4 + a_2 = 1 \wedge S_3 + a_3 = 17.$$

1096. Četvrti član aritmetičkog niza je 9, a deveti član je -6. Koliko članova ovog niza treba sabrati da se dobije zbir 54?

1097. Izračunati a_1, d i n u aritmetičkoj progresiji za koju je:

$$a) a_3 + 10S_2 - 8a_4 = 14 \wedge a_1 + 2a_2 - a_3 = 4 \wedge S_n = 20;$$

$$b) S_3 = 30 \wedge S_5 = 75 \wedge S_n = 105.$$

1098. Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 36, a zbir kvadrata prva tri člana je 482. Odrediti niz.

1099. Koliko članova aritmetičkog niza 5, 9, 13, 17, ... treba sabrati da bi se dobio zbir 10877?

1100. Zbir prva četiri člana aritmetičkog niza je 26, a proizvod istih članova je 880. Odrediti niz.

1101. U aritmetičkom nizu prvi član je 1, a zbir prvih pet članova jednak je četvrtini zbira idućih pet članova. Kako glasi niz?
1102. U aritmetičkom nizu dato je: $a_2 + a_5 - a_3 = 10$; $a_1 + a_6 = 17$. Izračunati prvi član i diferenciju.
1103. Prvi član aritmetičkog niza je 1, zbir m članova odnosi se prema zbiru n članova kao $m^2 : n^2$. Odrediti taj niz.
1104. Odrediti aritmetički niz ako je $a_1 = 2$ i $S_m : S_n = m(m+1) : n(n+1)$.
1105. Zbir prvih m članova aritmetičke progresije je n , a zbir prvih n članova je m .
a) Izračunati S_{m+n} ; b) Izračunati S_{m-n} .
1106. Naći zbir prvih $m+n$ članova aritmetičkog niza ako je m -ti član jednak n , a n -ti član iznosi m .
1107. a) U aritmetičkoj progresiji $a_p = q$; $a_q = p$. Odrediti a_n u funkciji od n, p i q .
b) Dati su članovi aritmetičke progresije $a_{m+n} = A$ i $a_{m-n} = B$. Izračunati a_m i a_n .
1108. Odrediti zbir celih uzastopnih brojeva od 2 do $2n$.
1109. Odrediti zbir svih dvocifrenih celih brojeva.
1110. Izračunati zbir n prvih neparnih brojeva.
1111. Odrediti zbir prvih n članova aritmetičkog niza $a, 2a - b, 3a - 2b, \dots$
1112. Naći aritmetički niz u kome je, koliko god članova sabrali, zbir uvek jednak trostrukom kvadratu broja članova.
- 1113.* Ako su S_1, S_2 i S_3 zbirovi n_1 prvih članova, n_2 prvih članova i n_3 prvih članova nekog aritmetičkog niza, pokazati da je $\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0$.
1114. Dat je niz: $(a+x)^2, (a^2+x^2), (a-x)^2, \dots$. Dokazati da je niz aritmetički i naći zbir prvih n članova.
1115. Aritmetički niz ima 20 članova. Zbir članova koji su na parnim mestima je 250, a zbir članova na neparnim mestima 220. Naći dva srednja člana.
1116. Odrediti četiri uzastopna neparna broja, ako je zbir njihovih kvadrata za 48 veći od zbira kvadrata parnih brojeva koji se nalaze između traženih brojeva.

1117. Rešiti jednačinu:

a) $3 + 7 + 11 + \dots + x = 210$;

b) $1 + 9 + 17 + \dots + x = 370$.

1118.* Ako su brojevi a, b i c uzastopni članovi aritmetičke progresije, biće to i izrazi

$$a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right); \quad b\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a}\right); \quad c\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

Dokazati!

1119. Dokazati da će jednačina $ax^2 + 2bx + c = 0$ imati realne korene, ako njeni koeficijenti a, b i c obrazuju aritmetički niz.

1120. Dokazati da će izrazi $a^2 + b^2 + ab$, $a^2 + c^2 + ac$ i $b^2 + c^2 + bc$ biti uzastopni članovi aritmetičkog niza ako su to brojevi a, b i c .

1121. Pokazati da kvadrati polinoma $x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 1$, $x^2 + 2x - 1$ obrazuju aritmetički niz.

1122.* Ako brojevi $\log_k x$, $\log_m x$, $\log_n x$ ($x > 0, \neq 1$) obrazuju aritmetički niz, dokazati da je $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

1123. Između svaka dva uzastopna člana aritmetičkog niza 2, 14, 26, 38, ... umetnuti po 7 članova tako da se dobije novi aritmetički niz.

1124. Koliko članova treba umetnuti između 0 i 12 da bi se dobio aritmetički niz čiji je zbir (zajedno sa datim brojevima) 150?

1125. Između brojeva A i B umetnuti aritmetički niz od k članova. Kako glasi taj niz i koliki je zbir njegovih članova?

1126. Između brojeva -5 i 30 umetnuti aritmetički niz od šest članova. Koliki je zbir svih osam članova?

1127.* Između 1 i 31 interpolirati toliko brojeva koliko je potrebno da bi zajedno sa brojevima 1 i 31 obrazovali aritmetički niz i da zbir umetnutih bude četiri puta veći od zbira dvaju među njima najvećih brojeva.

1128. Dat je aritmetički niz $\frac{n-1}{n}, \frac{n-2}{n}, \frac{n-3}{n}, \dots$. Odrediti n -ti član i zbir n prvih članova.

1129. Ako se kvadrat izraza $x - 7$ uzme za prvi član aritmetičkog niza, a kvadrat izraza $x + 1$ za treći član, kojim će izrazom tada biti određen drugi član tog niza? Koju posebnu vrednost treba da ima x da bi drugi član bio 20? Koliko članova toga niza treba sabrati da bi se dobio zbir 760?

1130. Obim jednog pravouglog trougla je 3 h, njegove stranice obrazuju aritmetički niz. Kolike su stranice?
1131. Dimenzije pravouglog paralelopipeda čine aritmetički niz. Izračunati dimenzije paralelopipeda, ako je njegova površina 94 cm^2 , a dijagonala $5\sqrt{2} \text{ cm}$.
1132. Poluprečnik kružnice, upisane u trougao, iznosi 4 cm i obrazuje sa stranicama trougla četiri sukcesivna člana aritmetičkog niza. Naći površinu trougla.
1133. Poluprečnik baze, visina i izvodnica prave kupe su tri uzastopna člana aritmetičkog niza. Omotač kupe je $375\pi \text{ cm}^2$, a površina osnovnog preseka 300 cm^2 . Izračunati zapreminu kupe.
1134. Obim mnogougla je 158 cm. Njegove stranice obrazuju aritmetički niz sa razlikom 3 cm. Najveća stranica je 44 cm. Koliko stranica ima mnogougao.
1135. Naći stranice pravouglog trougla ako one čine aritmetički niz sa diferencijom 3.
1136. Da li se uvek mogu uzeti za tri uzastopna člana aritmetičkog niza merni brojevi stranica pravouglog trougla?
1137. Da li se mogu uzeti za četiri uzastopna člana aritmetičkog niza merni brojevi stranica i obim jednog trougla?
- 1138.*Uglovi trougla čine aritmetičku progresiju. Izračunati ih ako je zbir njihovih sinusa $\frac{3 + \sqrt{3}}{2}$.
1139. Polazeći iz iste tačke, kreću se po kružnici dva tela u suprotnim smerovima. Jedno prelazi u prvoj sekundi 3° , a u svakoj sledećoj 1° više nego u prethodnoj, a drugo u prvoj $1\frac{1}{2}^\circ$, a u svakoj sledećoj sekundi 6° više nego u prethodnoj. Kada će se tela sresti?
1140. Dva tela polaze istog trenutka iz dva mesta udaljena 450 m, jedno drugom u susret. Prvo prelazi u prvoj minuti 5 m, a u svakoj sledećoj 15 m više nego u prethodnoj. Drugo telo prelazi u prvoj minuti 100 m, a u svakoj sledećoj 10 m manje nego u prethodnoj. Kada će se tela sresti?
1141. Telo pri slobodnom padanju (u bezvazдушnom prostoru) prede u prvoj sekundi put od 4,9 m, a u svakoj sledećoj sekundi po 9,8 m više nego u prethodnoj. Koliki put prede telo u dvadesetprvoj sekundi, a koliko za 21 sekundi?
1142. Koliko će sekundi padati telo sa visine od 4410 m?

1143. U kojoj sekundi telo bačeno vertikalno uvis brzinom $646,8 \text{ m/s}$ postiže maksimalnu visinu?
1144. Posle koliko sekundi pada ponovo na zemlju telo bačeno vertikalno uvis brzinom 784 m/s ?
1145. Padobranac je skočio iz aviona i pada 10 s pre nego što mu se otvori padobran. Koliko je metara padao bez padobrana?
1146. Pokazati da kod funkcije $f(x) = x^2$ razlike $f(x+1) - f(x)$; $f(x+2) - f(x+1)$; $f(x+3) - f(x+2) \dots$ čine aritmetički niz.
1147. Istu osobinu (kao u prethodnom zadatku) pokazati i kod funkcija:
- a) $f(x) = ax^2$; b) $f(x) = ax^2 + c$;
 c) $f(x) = ax^2 + bx$; d) $f(x) = ax^2 + bx + c$.
1148. Data je funkcija $f(x) = x^2 - 3x + 2$.
- a) Pokazati da funkcije $f(x+1) - f(x)$; $f(x+2) - f(x+1)$; $f(x+3) - f(x+2) \dots$ čine aritmetički niz.
- b) Koju vrednost treba dati promenljivoj x da bi zbir prvih pet članova niza bio 60?
- c) Koliko članova najmanje treba sabrati da bi zbir bio veći od 120?
1149. Odrediti aritmetički niz koji ima osobinu:
 $a_m + a_n = a_{m+n}$.
- 1150.*U aritmetičkom nizu $a_n = a$, $a_p = b$, $a_q = c$ pokazati da će za taj niz vredeti ovaj odnos:
 $a(p-q) + b(q-n) + c(n-p) = 0$.
- 1151.*Ako su brojevi $a_1, a_2, \dots, a_n$ različiti od nule i ako obrazuju aritmetički niz:
- a) dokazati jednakost
 (1) $\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$;
- b) dokazati da je svaki niz brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$, koji za $n \geq 3$ zadovoljava uslov (1), aritmetički niz.
- 1152.*Ako pozitivni brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ obrazuju aritmetički niz, dokazati da je
 $\frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}$.

1153. Ako tri broja čine aritmetički niz sa diferencijom d , pri čemu je jedan od njih deljiv sa d , dokazati da je njihov proizvod deljiv sa $6d^3$.

1154. Izračunati zbir

$$S = \frac{x-1}{x} + \frac{x-2}{x} + \frac{x-3}{x} + \dots + \frac{1}{x}.$$

1155. Izračunati sume:

a) $S_1 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$;

b) $S_3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$.

1156. Naći aritmetički niz u kome je odnos zbira prvih n članova i zbira kn sledećih članova stalan i ne zavisi od n .

1157.*Dokazati da u svakom aritmetičkom nizu $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2k}$ važi jednakost

$$a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots + a_{2k-1}^2 - a_{2k}^2 = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2).$$

1158.*Dokazati da je u tablici

1,

2, 3, 4

3, 4, 5, 6, 7

4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

.....

zbir svih članova u svakoj vrsti jednak kvadratu srednjeg broja.

1159.*Koeficijenti drugog, trećeg i četvrtog člana razvoja $(1+x)^n$ obrazuju aritmetički niz. Odrediti n .

1160.*Za koje n koeficijenti petog, šestog i sedmog člana razvoja $(1+x)^n$ obrazuju aritmetičku progresiju?

1161.*Ako brojevi a, b, c čine aritmetički niz, dokazati da i brojevi

$$\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{c}}, \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}}, \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \quad (a, b, c > 0) \text{ čine aritmetički niz.}$$

1162.*Dokazati da razlomci $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ čine aritmetički niz ako brojevi a^2, b^2, c^2 čine aritmetički niz.

1163. Odrediti x tako da brojevi $\log 2, \log(2^x - 1), \log(2^x + 3)$ budu uzastopni članovi aritmetičkog niza.

1164. Odrediti realan broj m tako da rešenja jednačine:

a) $x^4 - (3m+2)x^2 + m^2 = 0$;

b) $x^4 - (m+3)x^2 + m+2 = 0$;

čine aritmetički niz.

1165. Odrediti x iz jednačine:

a) $(x+1) + (x+6) + (x+11) + \dots + (x+36) = 172$;

b) $(x+3) + (x+6) + (x+9) + \dots + (x+33) = 220$.

1166. Odrediti četvoročlani aritmetički niz, ako je zbir kvadrata srednjih članova 468, a zbir kvadrata krajnjih 612.

1167. Odrediti aritmetički niz kod kojeg je zbir drugog i sedmog člana 25, a njihov proizvod 100.

1168. Zbir prva tri člana aritmetičkog niza je 15, a zbir njihovih kvadrata 173. Odrediti dvadeseti član i zbir prvih dvadeset članova.

1169. Odrediti aritmetički niz kod kojeg je zbir petog i osmog člana 28, a razlika kvadrata petog i trećeg člana 72.

1170. Ako brojevi a, b, c čine aritmetički niz, tada je:

a) $(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 6(b^2 - ac)$;

b) $a^2(b+c) + b^2(a+c) + c^2(a+b) = \frac{2}{9}(a+b+c)^3$. Dokazati.

8.4. GEOMETRIJSKI NIZ

Definicija: Niz brojeva u kome je količnik ma koja dva sukcesivna broja niza stalan zove se geometrijski niz ili progresija.

Oznake i obrasci

a_1 je prvi član, q količnik geometrijskog niza, a_n n -ti član, S_n zbir prvih n članova niza, r broj interpoliranih članova između dva data broja a i b .

(1) $a_n = a_1 q^{n-1}$,

(2) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$ ($q > 1$), ili

(3) $S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$ ($q < 1$),

(4) $q = \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$,

(5) $a_m = \sqrt{a_{m+k} a_{m-k}}$.

1171. Dokazati metodom potpune indukcije tačnost obrasca:
 a) $a_n = a_1 q^{n-1}$;
 b) $S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}$.
1172. Izračunati deseti član geometrijskog niza 1, 3, 9, 27, ...
1173. Izračunati količnik geometrijskog niza ako je njegov prvi član 1, a šesti 1024.
1174. Odrediti broj članova geometrijskog niza ako je njegov prvi član 1, količnik 2, a poslednji član 4 096.
1175. Izračunati zbir prvih deset članova geometrijskog niza ako je prvi član 3, a količnik 2.
1176. Izračunati prvi član geometrijskog niza ako je zbir njegovih prvih dvanaest članova 8 190, a količnik 2.
1177. Prvi član geometrijskog niza je 5, a količnik 3. Koliko članova treba sabrati da bi se dobio zbir 16 400?
1178. Poslednji član geometrijskog niza je 112, zbir 217, a količnik 2. Izračunati a_1 i broj članova.
1179. Izračunati količnik geometrijskog niza ako je $a_1 = 3$, a $a_5 = 12\,288$.
1180. Prvi član geometrijskog niza je 1. Zbir trećeg i petog člana je 90. Odrediti niz.
1181. Izračunati prvi član i količnik geometrijskog niza ako je $a_5 - a_1 = 15 \wedge a_4 - a_2 = 6$.
1182. Odrediti geometrijsku progresiju kod koje je $a_1 + a_3 = 15 \wedge a_2 + a_4 = 30$.
1183. Odrediti geometrijski niz iz sledećih odnosa:
 a) $a_2 + a_5 - a_4 = 10 \wedge a_3 + a_6 - a_5 = 20$;
 b) $a_1 + a_2 + a_3 = 62 \wedge a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = 1\,000$;
 c) $a_1 + a_5 = 1285 \wedge a_2 \cdot a_4 = 6\,400$.
1184. Odrediti šestočlani geometrijski niz, ako je zbir prva tri člana 112, a poslednja tri 14.
1185. Četiri broja čine geometrijski niz. Naći te brojeve ako je prvi veći od drugog za 36, a treći od četvrtog za 4.
1186. Pokazati da je kod svakog geometrijskog niza zbir $a_4 + a_5 + a_6$ geometrijska sredina zbirova $a_1 + a_2 + a_3$ i $a_7 + a_8 + a_9$.

1187. Odrediti pravougle trouglove tako da merni brojevi stranica čine geometrijsku progresiju.
1188. Odrediti paralelogram tako da merni brojevi osnovice, visine i površine čine geometrijski niz.
1189. Dimenzije paralelopipeda obrazuju geometrijski niz. Površina bazisa je 108 cm^2 , a površina tela je 888 cm^2 . Izračunati dimenzije.
1190. Dimenzije paralelopipeda obrazuju geometrijski niz. Zapremina paralelopipeda je 216 m^3 , a dijagonala $\sqrt{364}\text{ m}$. Izračunati dimenzije.
1191. Osnovne ivice i visina uspravne piramide, čija je osnova pravougaonik, jesu tri uzastopna člana geometrijskog niza. Zapremina piramide je 576 cm^3 , a površina dijagonalnog preseka 120 cm^2 . Naći površinu piramide.
1192. U geometrijskom nizu je:
 $a_6 - a_4 = 216 \wedge a_3 - a_1 = 8 \wedge S_n = 40$.
 Izračunati a_1 , q i n .
1193. Izračunati q i S_5 ako je $a_1 = 3$, $a_5 = 12\,288$.
1194. $q = 2$, $S_7 = 625$. Izračunati a_1 i a_7 .
1195. $a_1 = 2$, $a_n = 1\,458$, $S_n = 2\,186$. Izračunati q i n .
1196. $a_1 = 2$, $q = -3$, $S_n = -364$. Izračunati a_n i n .
1197. Izračunati prvi član, količnik i n geometrijskog niza kod koga je $a_7 - a_5 = 48 \wedge a_6 - a_4 = 24 \wedge S_n = 1\,023$.
1198. Isti tekst kao i u prethodnom zadatku.
 $a_3 + a_5 = -40 \wedge a_1 - a_5 = 30 \wedge S_n = 42$.
1199. 9 750 podeliti na četiri dela tako da delovi obrazuju geometrijski niz. Odrediti delove tako da je odnos razlike krajnjih prema razlici srednjih članova kao 19 : 6.
1200. U rastućem geometrijskom nizu, zbir prvog i sedmog člana je 65, a proizvod trećeg i petog člana je 64.
 a) Odrediti niz.
 b) Koji član tog niza iznosi 1 024?
1201. Tri broja čiji je zbir 57, čine geometrijski niz. Srednji član je $\frac{6}{13}$ od zbira susednih. Odrediti te brojeve.

1202. Zbir prva tri realna broja koja čine geometrijski niz iznosi 7, a zbir njihovih kvadrata 21. Koji su to brojevi?
1203. Brojevi x, y, z obrazuju geometrijski niz: dokazati da je
 $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.
1204. Ako brojevi a, b, c, d obrazuju geometrijski niz, pokazati da je:
 a) $(a - c)^2 + (b - c)^2 + (b - d)^2 = (a - d)^2$
 b) $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.
1205. Dokazati identitete:
 a) $(1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2n-2}) : (1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = \frac{1 + x^n}{1 + x}$
 b) $(1 + x + x^2 + \dots + x^{2n}) \cdot (1 - x + x^2 - \dots + x^{2n}) = \frac{x^{4n+2} - 1}{x^2 - 1}$.
1206. Dat je geometrijski niz $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$. Izračunati
 $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$.
1207. Između 47 i 1 269 interpolirati dva broja koji sa datim čine geometrijski niz.
1208. Interpolirati između a^6 i b^6 geometrijski niz od 5 članova. Kolika je suma svih članova dobijenog niza.
1209. Interpolirati između $\frac{a}{b^2}$ i $\frac{b}{a^2}$ geometrijski niz od 5 članova.
1210. Između brojeva 4 i 1 024 umetnuti tri broja koji sa datim čine geometrijski niz.
1211. Dokazati da jednačina $ax^2 + 2bx + c = 0$ ima jednake korene ako koeficijenti a, b i c obrazuju geometrijski niz.
1212. Izračunati zbir prvih 6 članova geometrijskog niza ako je $a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$.
1213. Izračunati S_n geometrijskog niza ako je $a_n = (-1)^n a^{n-1} \cdot b^{n-n+1}$.
1214. Odrediti x tako da binomi $a + x; b + x; c + x$ čine geometrijski niz. (Specijalan slučaj $a = 10, b = 17, c = 31$).
1215. Metalno ogledalo apsorbira kod svakog odbijanja 10% svetlosti. Kolika je jačina svetlosti jednog svetlosnog zraka koji se šest puta odbio ako mu je pre odbijanja jačina bila J ?
1216. Zagrejano telo se hladi približno po zakonu geometrijskog niza. Ako je bilo zagrejano do 100°C , može se uzeti da se svakog minuta njegova temperatura smanjivala za petinu prethodne. Kolika je njegova temperatura posle 10 minuta?

1217. Dat je geometrijski niz $1, q, q^2, q^3, \dots$. Naći S_n i na osnovu toga napisati identitet koji pokazuje kako se $q^n - 1$ rastavlja na činioce.
- 1218.*Dat je geometrijski niz $a^{n-1}, a^{n-2}b, a^{n-3}b^2, \dots$. Naći S_n i na osnovu toga napisati identitet koji pokazuje kako se $a^n - b^n$ razlaže na činioce.
- 1219.*Dat je geometrijski niz
 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}, \dots, a_{2n}, \dots$
 Pokazati da je niz $S_1, S_2, S_3, \dots$ gde je
 $S_1 \equiv a_1 + a_2 + \dots + a_n$
 $S_2 \equiv a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n}$
 $\dots$
 takode geometrijski niz.
1220. Tri broja, čiji je zbir 26, obrazuju geometrijski niz. Ako se tim brojevima doda redom 1, 6 i 3, dobijaju se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Naći te brojeve.
1221. Četiri broja čine aritmetički niz. Ako se od svakog broja oduzme redom 2, 7, 9 i 5, dobijeni brojevi obrazuju geometrijski niz. Odrediti te brojeve.
1222. Ako se četiri broja, koji su uzastopni članovi geometrijskog niza, uvećaju respektivno za 5, 6, 9 i 15, dobijaju se četiri broja koji čine aritmetički niz. Naći te brojeve.
1223. Tri broja, čiji je zbir $3k$, čine aritmetički niz (k prirodan broj). Ako se drugom doda $\frac{k}{5}$, a trećem k , dobija se geometrijski niz.
 a) Izračunati te brojeve.
 b) Koliko članova aritmetičkog niza treba sabrati da se dobije zbir $7k$?
1224. U aritmetičkom nizu čiji je početni član a ; prvi, četvrti i dvadesetpeti član čine geometrijski niz. Kolika je razlika aritmetičkog niza i kako glase nizovi?
1225. Tri broja, čiji je zbir 93, čine geometrijski niz. Isti brojevi se mogu uzeti za prvi, drugi i sedmi član aritmetičkog niza. Naći te brojeve.
1226. Zbir tri broja je 114. Oni se mogu uzeti kao tri uzastopna člana geometrijskog niza ili kao prvi, četvrti i dvadesetpeti član aritmetičkog niza. Naći ove brojeve.
1227. Pokazati da je: $x^{b-c} \cdot y^{c-a} \cdot z^{a-b} = 1$, ako a, b i c čine aritmetičku, a x, y i z geometrijsku progresiju.

1228. Naći četiri broja, od kojih prva tri čine geometrijski, a poslednja tri aritmetički niz, ako je zbir krajnjih jednak 14 a zbir srednjih 12.
- 1229.*Napisati u trigonometrijskom obliku brojeve a , b , c i d , ako je $a = \sqrt{2}$, $d = 4i$ i ako njihovi argumenti čine aritmetički, a moduli geometrijski niz.
1230. Data su tri uzastopna člana geometrijskog niza: 1 , q , q^2 , gde je $q > 0$.
- Odrediti x tako da kvadrati binoma: $1 - x$, $q - x$ i $q^2 - x$ čine aritmetički niz. Pokazati da je x pozitivan broj, ma koliki bio pozitivan broj q .
 - Izraziti razliku novog niza kao funkciju datog broja q i postaviti uslov za q da se dobije aritmetički niz koji je rastući. Kojim granicama tada pripada x ? (Specijalan slučaj $q = \frac{1}{2}$.)
1231. Četiri broja čine geometrijski niz. Njihovi logaritmi, uzeti za osnovu 3, čine aritmetički niz čija je razlika 1, a zbir 18. Odrediti ta četiri broja.
1232. U geometrijskom nizu sa parnim brojem članova, odnos zbira članova na parnim mestima prema zbiru članova na neparnim mestima jednak je količniku niza. Dokazati.
- 1233.*U geometrijskom nizu $a_m = k$, $a_n = l$. Naći a_p .
- 1234.*Izračunati zbir n brojeva oblika $1, 11, 111, 1111 \dots$
- 1235.*Naći zbir
- $$(1) S_{n+1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots + (n+1)x^n.$$
- 1236.*Niz brojeva $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ($x_1 \neq 0$), za svako $n \geq 3$ zadovoljava uslov
- $$(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2) \cdot (x_2^2 + x_3^2 + \dots + x_n^2) = (x_1x_2 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n)^2.$$
- Dokazati da je niz geometrijski.
- 1237.*Neka brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ čine geometrijski niz. Naći proizvod $a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$ znajući zbrove
- $$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$
- $$S'_n = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}.$$
1238. U geometrijskoj progresiji srednji član jednak je 12. Zbir prvog i poslednjeg člana je 51, a zbir svih članova progresije iznosi 93. Koliko članova ima progresija?

1239. Zbir tri broja koja čine geometrijsku progresiju je 28. Ako se najveći broj umanjuje za 4, dobijaju se tri broja koja čine aritmetičku progresiju. Odrediti ove brojeve.
1240. Četiri broja čine geometrijski niz. Ako se drugom broju doda 1, a četvrti umanjuje za 5, dobijaju se četiri broja koja čine aritmetičku progresiju. Odrediti te brojeve.
1241. Četiri broja obrazuju aritmetičku progresiju. Ako se umanjuje drugi broj za 1, a četvrtom doda 5, dobijaju se četiri broja koja čine geometrijsku progresiju. Naći te brojeve.
1242. Četiri broja čine aritmetički niz. Prva dva od njih i četvrti čine geometrijski niz. Naći ove brojeve, ako se zna da je razlika aritmetičke progresije jednaka količniku geometrijske progresije.
1243. Odrediti aritmetičku progresiju, ako je zbir njena prva tri člana 42, zbir poslednja tri je -12, a zbir svih njenih članova iznosi 45.
1244. Odrediti zbir svih dvadeset članova aritmetičke progresije ako je $a_6 + a_9 + a_{12} + a_{15} = 20$.
1245. Dokazati da brojevi $\sqrt{2}$, 3 , $5 + \sqrt{2}$ ne mogu biti članovi jedne aritmetičke progresije.
1246. U jednoj aritmetičkoj progresiji dato je $\frac{S_m}{S_n} = \frac{m^2}{n^2}$.
- Dokazati da je $\frac{a_m}{a_n} = \frac{2m-1}{2n-1}$.
1247. Izračunati zbir n brojeva oblika $\frac{5}{6}, \frac{11}{12}, \frac{23}{24}, \frac{47}{48}, \dots$
1248. Odrediti tri pozitivna broja koja čine geometrijski niz, ako je njihov zbir 26, a zbir njihovih recipročnih vrednosti je $\frac{13}{18}$.
- 1249.*Ako su a, b, c, k -ti, n -ti i p -ti članovi jedne geometrijske progresije, tada je $a^{n-p} \cdot b^{p-k} \cdot c^{k-n} = 1$. Dokazati.
- 1250.*Ako članovi a_k, a_p, a_m i a_n jedne aritmetičke progresije ($d \neq 0$) čine geometrijsku progresiju, $k-1, l-m, m-n$ su uzastopni članovi neke geometrijske progresije. Dokazati.
1251. Odrediti četiri broja od kojih prva tri čine aritmetički niz, a poslednja tri geometrijski niz, zbir krajnjih je 20, a zbir srednjih 15.
1252. Odrediti četiri broja od kojih prva tri čine geometrijski niz, a poslednja tri aritmetički niz: zbir krajnjih je 80, a zbir srednjih 60.

- 1253.* Ako su S_m, S_n, S_{m+n} sume $m, n, m+n$ prvih članova aritmetičke progresije, tada je $\frac{S_m - S_n}{S_{m+n}} = \frac{m - n}{m + n}$. Dokazati.
1254. Odrediti aritmetičku i geometrijsku progresiju, ako su im prvi članovi jednaki jedinici, peti članovi su jednaki, a drugi član aritmetičke progresije je za 12 veći od trećeg člana geometrijske progresije.
1255. Odrediti aritmetičku i geometrijsku progresiju, ako su im prvi članovi jednaki jedinici, drugi član aritmetičke progresije jednak je trećem geometrijske, a dvadeset drugi član aritmetičke progresije jednak je sedmom članu geometrijske.
1256. Tri broja čine geometrijsku progresiju. Ako se drugi član poveća za 2, dobija se aritmetička progresija, ako se treći član aritmetičke progresije poveća za 16, dobija se geometrijska progresija. Odrediti te brojeve.
1257. Odrediti zbir prvih devetnaest članova aritmetičke progresije, ako je $a_3 + a_6 + a_{14} + a_{17} = 40$.
1258. Broj članova jedne geometrijske progresije je paran, zbir svih članova je tri puta veći od zbira članova koji se nalaze na parnim mestima. Odrediti količnik progresije.
1259. Tri broja, čiji je zbir 74, čine rastuću geometrijsku progresiju. Ako se prvi broj smanji za 2, dobijeni brojevi obrazuju aritmetičku progresiju. Odrediti ove brojeve.
1260. Drugi i treći član jedne geometrijske progresije jednaki su respektivno četvrtom i osmom članu jedne aritmetičke progresije, a količnik prve progresije jednak je razlici druge. Odrediti obe progresije, ako je drugi član aritmetičke progresije jednak nuli.
1261. Zbir tri broja koja čine geometrijski niz je $\frac{31}{5}$. Odrediti te brojeve ako i zbir njihovih recipročnih vrednosti daje istu vrednost.
- 1262.* Odrediti x -ti član geometrijskog niza čija su prva tri člana: $11 - x^{\log x}, x^{\log x} - 5, 35 - x^{\log x}$.
- 1263.* Stranice trougla obrazuju geometrijski niz.
a) Dokazati da količnik q toga niza zadovoljava uslov $\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) < q < \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.
b) Odrediti količnik q tako da trougao bude pravougli.
- 1264.* Odrediti x u brojevima $x + 5, 25 - x, 30 + 2x$ tako da oni budu uzastopni članovi:
a) aritmetičkog niza;
b) geometrijskog niza.
Kako glase nizovi?

1265. Odrediti članove aritmetičkog i geometrijskog niza ako je suma prvih članova 23, drugih 21, trećih 22 i četvrtih 29.
1266. Zbir prvih 10 članova aritmetičkog niza je 155, a zbir prva dva člana geometrijskog niza je 9. Odrediti oba niza, ako je prvi član aritmetičkog niza jednak količniku geometrijskog, a razlika aritmetičkog niza jednaka prvom članu geometrijskog niza.
1267. Zbir prva tri člana geometrijskog niza je 91. Ako se tim članovima doda redom 25, 27, 1 dobiće se tri broja koja obrazuju aritmetički niz. Odrediti sedmi član geometrijskog niza.

8.5. DIFERENCNE JEDNAČINE

Primedba 1. Problem određivanja opšteg člana x_n nekog niza kao funkcije od k ($k < n$) prethodnih članova tog niza dovodi do rekurentne formule, odnosno diferencne jednačine k -tog reda.

$$(1) \quad x_n = f(x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_{n-k}).$$

Primedba 2. Rešenje diferencne jednačine je svaki niz x_n čiji članovi zadovoljavaju diferencnu jednačinu (1).

Primedba 3. Jednačina oblika

$$(2) \quad x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \dots + a_k x_n = 0$$

zove se linearna homogena diferencna jednačina k -tog reda, gde su $a_1, a_2, \dots, a_k$ realni brojevi (konstantni koeficijenti).

Primedba 4. Smenom $x_n = t^n, n \in \mathbb{N}, t \neq 0$ diferencna jednačina (2) svodi se na oblik

$$(3) \quad t^k + a_1 t^{k-1} + a_2 t^{k-2} + \dots + a_k = 0$$

i zove se karakteristična jednačina diferencne jednačine (2) čija su rešenja $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Primedba 5. Opšte rešenje diferencne jednačine (2) formira se pomoću ovih rešenja i glasi

$$(4) \quad x_n = C_1 t_1^n + C_2 t_2^n + \dots + C_k t_k^n,$$

gde su $C_1, C_2, \dots, C_k$ proizvoljne konstante.

Rešiti sledeće linearne homogene diferencne jednačine prvog reda (1268–1271).

$$1268. \quad x_{n+1} - 5x_n = 0.$$

$$1269. \quad x_{n+1} - 3x_n = 0.$$

$$1270. \quad x_n + x_{n-1} = 0.$$

1271. Odrediti partikularno rešenje diferencne jednačine

$$x_n - 2x_{n-1} = 0, \text{ ako je } x_1 = 1.$$

Odrediti opšte rešenje sledećih homogenih diferencnih jednačina drugog reda (1272–1285):

1272. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.

1273. $x_{n+2} - 4x_{n+1} + 3x_n = 0$.

1274. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 0$.

1275. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + 5x_n = 0$.

1276. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 0$.

1277. $x_n + 3x_{n-2} = 0$.

1278. $x_{n+3} - 9x_{n+2} + 26x_{n+1} - 24x_n = 0$.

1279. $x_n + 2x_{n-1} - x_{n-2} - 2x_{n-3} = 0$.

1280. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + x_n - 3x_{n-1} = 0$.

1281. $x_{n+3} - 3x_{n+1} + 2x_n = 0$.

1282. $x_{n+3} + 10x_{n+2} + 32x_{n+1} + 32x_n = 0$.

1283. $x_{n+3} - 6x_{n+2} + 12x_{n+1} - 8x_n = 0$.

1284. $x_{n+3} - 3x_{n+2} + 3x_{n+1} - x_n = 0$.

1285. $x_{n+3} + 3x_{n+2} + 3x_{n+1} + x_n = 0$.

Odrediti partikularno rešenje diferencne jednačine (1286–1292):

1286. $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0$, ako je $a_1 = 1$ i $a_2 = -7$.

1287. $a_n - 4a_{n-1} + 3a_{n-2} = 0$, ako je $a_1 = 3$ i $a_2 = 9$.

1288. $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 4a_n = 0$, ako je $a_1 = 2$, $a_2 = 8$.

1289. $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$,
ako je $a_1 = 1$, $a_2 = -3$ i $a_3 = -29$.

1290. $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, ako je $x_0 = 2$ i $x_1 = 3$.

1291. $x_{n+1} = 3x_n - 2x_{n-1}$, ako je $x_0 = 0$ i $x_1 = 1$.

1292. $a_{n+2} - 6a_{n+1} + 9a_n = -4$, ako je $a_1 = 1$ i $a_2 = -7$.

1293. Odrediti sve nizove koji zadovoljavaju diferencnu jednačinu
 $a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4$.

1294. Koristeći definiciju granične vrednosti niza, dokazati:

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n+1} = 2$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2+3}{3n^2-4} = \frac{2}{3}$;

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+n-1}{3n^2+1} = \frac{1}{3}$; d) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n}) = 0$.

1295. Dat je niz $a_n = \frac{3n-1}{2n+1}$.

a) Odrediti graničnu vrednost niza.

b) Odrediti od kog člana u nizu pa nadalje skoro svi članovi su na rastojanju od granične vrednosti manjem od broja $\varepsilon = 0,01$.

1296. Dat je niz $a_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$.

a) Odrediti graničnu vrednost niza.

b) Za koje n je ispunjena nejednakost $|a_n - a| < 10^{-4}$?

1297. Dat je niz $a_n = \frac{n+1}{n+2}$. Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$, zatim odrediti n_0 tako da je:

a) $\varepsilon = 0,1$; b) $\varepsilon = 0,01$; c) $\varepsilon = 0,001$; d) $\varepsilon = 0,0001$.

1298. Odrediti graničnu vrednost niza (a_n) čiji je opšti član:

a) $a_n = \frac{(n+1)(3n+2)(5n-7)}{n^3}$; b) $a_n = \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)}{(n+1)^3}$;

c) $a_n = \frac{1^2+2^2+\dots+n^2}{n^3}$; d) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}$;

e) $a_n = \frac{1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^n}}$; f) $a_n = \sqrt{n^2+2n+2} - \sqrt{n^2-4n+3}$;

g) $a_n = \sqrt{n^2-5n+6} - n$.

1299. Dat je niz $a_n = \frac{1}{2n} + \frac{2n}{3n+1}$.

a) Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2}{3}$.

b) Odrediti n_0 tako da je $\left| a_n - \frac{2}{3} \right| < 10^{-4}$, za svako $n > n_0$.

1300. Dat je niz sa opštim članom $a_n = \frac{4n^2+1}{3n^2+2}$. Odrediti granicu ovog niza. Koliko treba da je n da bi $|a_n - a| < 0,001$?

1301. Odrediti opšti član niza: 0,9, 0,99, 0,999, ... i naći njegovu graničnu vrednost. Koliki treba da je indeks n u nejednakosti $|a_n - a| < 0,0001$?

1302. Odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \frac{3n^2 - 1}{4n^2 + 3}$.

Počevši od kog člana je ispunjena nejednakost $|a_n - a| < 10^{-2}$.

1303. Odrediti graničnu vrednost niza $a_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$.

1304. Odrediti graničnu vrednost sledećih nizova:

- a) $a_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$; b) $a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n$;
 c) $a_n = \left(\frac{2n+3}{2n+1}\right)^{n+1}$; d) $a_n = \left(1 - \frac{3}{n}\right)^n$;
 e) $a_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^{\frac{n}{2}}$; f) $a_n = n(\ln n - \ln(n+2))$;
 g) $a_n = n(\ln(n+3) - \ln n)$.

1305.* Odrediti graničnu vrednost niza sa opštim članom

$$a_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}.$$

1306.* Odrediti graničnu vrednost niza (a_n)

$$a_n = \frac{\log_3 3 + \log_3 9 + \dots + \log_3 3^n}{n^2}.$$

1307.* Niz (a_n) definisan je rekurentnom formulom $2a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$,

gde je $a_1 = a$, $a_2 = b$. Dokazati da je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{2b+a}{3}$.

1308.* Izračunati graničnu vrednost niza (a_n) ako je:

- a) $a_n = n^2 + \sqrt[3]{n^4 - n^6}$; b) $a_n = n + \sqrt[3]{n^2 - n^3}$;
 c) $a_n = \sqrt[3]{(n+1)^2} - \sqrt[3]{(n-1)^2}$.

1309.* Dat je zbir prvih n članova jednog niza $S_n = \frac{2n}{n+3}$. Naći opšti član niza, a zatim ispitati niz.

1310.* Dat je zbir prvih n članova niza $S_n = \frac{1-3^n}{2 \cdot 3^n}$. Odrediti opšti član niza i pokazati da je niz geometrijski, zatim ispitati niz.

1311.* Zbir prvih n članova jednog niza dat je obrascem

$$S_n = 9,5n^2 - 89,5n.$$

- a) Odrediti opšti član toga niza i pokazati da je aritmetički. Koliki su njegov prvi član i razlika?
 b) Pokazati da u posmatranom nizu postoji jedan član koji je dva puta veći od zbira svih prethodnih članova. Naći taj član.

1312. Dat je zbir od n prvih članova niza $S_n = \frac{5^{n+1} - 5}{4 \cdot 5^n}$

- a) Naći opšti član niza i ispitati konvergenciju niza.
 b) Odrediti sumu niza kad broj članova neograničeno raste.

1313. Zbir prvih n članova jednog niza dat je obrascem $S_n = \frac{2^{n+2} - 4}{2^n}$.

- a) Odrediti opšti član niza i graničnu vrednost niza.
 b) Naći $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

1314. Dat je niz $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ čiji su članovi celi pozitivni brojevi i svaki član niza posle drugog jednak je zbiru prethodnih članova. Odrediti a_1, a_2 i a_{10} ako je $a_{11} = 512$.

8.7. BESKONAČNI RED

Definicija: Neka je dat beskonačni niz realnih brojeva $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$. Izraz oblika

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ zove se beskonačni (brojni) red.}$$

Geometrijskom nizu $a, aq, aq^2, \dots, aq^n, \dots$ odgovara geometrijski red:

$$a \sum_{n=0}^{\infty} q^n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^n + \dots).$$

Zbir beskonačno opadajućeg geometrijskog reda je: $S = \frac{a}{1-q}$, ($|q| < 1$).

1315. Naći zbir beskonačnog geometrijskog reda:

- a) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \dots$; b) $1 + \frac{1}{1,05} + \frac{1}{1,05^2} + \dots$;
 c) $\sqrt{\frac{3}{2}} + \sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \dots$; d) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{2-\sqrt{2}} + \frac{1}{2} - \dots$.

1316. Kako glasi beskonačni opadajući red ako je zbir prva dva člana 12, a granična vrednost zbira svih njegovih članova $12\frac{1}{2}$?
1317. Naći beskonačnu opadajuću geometrijsku progresiju čiji je svaki član 2 puta veći od zbira svih sledećih iza njega.
1318. Kako glasi beskonačni geometrijski red čiji je količnik $\frac{1}{26}$, a zbir $S = \frac{1}{5}$?
1319. Pokazati da je
- $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \dots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$;
 - $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots = 2(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \dots)$.
1320. Naći zbir beskonačnog geometrijskog reda:
- $1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \dots (\alpha \neq k\pi)$;
 - $1 - \sin \alpha + \sin^2 \alpha - \dots (\alpha \neq \frac{(2k+1)\pi}{2})$;
 - $1 + \operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha + \dots (|\alpha| < \frac{\pi}{4})$;
 - $\frac{1}{2} + \frac{2}{x} + \frac{8}{x^2} + \dots$;
 - $x + 2x^2 + x^3 + 2x^4 + x^5 + 2x^6 + \dots$;
 - $2 + 3x + 2x^2 + 3x^3 + 2x^4 + \dots$;
 - $4 - 3x + 4x^2 - 3x^3 + 4x^4 - 3x^5 + \dots$.
1321. Odredi bar jedan beskonačni geometrijski red čiji je zbir:
- $S = \frac{6}{3-2x}$;
 - $S = \frac{3}{3-x}$;
 - $S = \frac{1}{1+2x}$;
 - $S = \frac{1}{1+x}$.
1322. Zbir jednog beskonačnog geometrijskog reda je 72; ako se svakom članu na parnom mestu promeni znak, dobija se beskonačni geometrijski red sa zbirom 56. Kako glase oba reda?
1323. Naći graničnu vrednost izraza:
- $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5}}}} \dots$;
 - $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}} \dots$.
1324. Izračunati vrednost periodičnog razlomka 0,777 ...
1325. Izračunati vrednost mešovito periodičnog razlomka 0,3444....
1326. Sledeće periodične razlomke pretvoriti u obične razlomke: a) 0,555...; b) 2,717171...; c) 0,3 (8); d) 1,41 (26); e) 0,17 (21); f) 0,(142857).

1327. Naći zbir beskonačnog reda

- $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$;
- $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \dots$;
- $\frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 6} + \frac{1}{6 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{2n(2n+2)} + \dots$;
- $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{n(n+2)} + \dots$.

1328. U jednakokraničnom trouglu stranice a upisan je novi jednakokranični trougao spajanjem sredina stranica datog trougla. U dobijenom trouglu je upisan drugi trougao na isti način. Odrediti zbir obima i zbir površina svih trouglova.
1329. U kružnici poluprečnika r upisan je jednakokraničan trougao, u trouglu je upisana kružnica, a u kružnici nov jednakokraničan trougao itd. Odrediti zbir obima i zbir površina svih krugova i svih trouglova.
1330. U kvadratu stranice a upisan je drugi kvadrat tako da su mu teme na sredine stranica prvog kvadrata, a u drugom kvadratu na isti način je upisan treći kvadrat itd. Naći zbir obima i zbir površina svih kvadrata.
1331. U jednakokraničan valjak poluprečnika r upisan je drugi jednakokranični valjak poluprečnika $\frac{r}{2}$, u ovom treći poluprečnika $\frac{r}{4}$ itd. Odrediti zbir površina svih ovih valjaka.
1332. Dat je beskonačan niz kvadrata tako da je stranica svakog prethodnog kvadrata jednaka dijagonali idućeg. Stranica najvećeg je a .
- Izračunati zbir obima i površina svih kvadrata.
 - Koji kvadrat po redu ima površinu 1 cm^2 ako je $a = 1,6 \text{ dm}$?
1333. Za koje je vrednosti a zbir opadajućeg geometrijskog reda $2a + a\sqrt{2} + a + \dots$ jednak 8.
1334. Dat je beskonačni geometrijski red $1 + \cos \alpha + \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha + \dots$. Izračunati α ako je razlika između zbira svih parnih i zbira svih neparnih članova $\frac{2}{3}$. Koliki je u tom slučaju zbir odgovarajućeg konvergentnog reda?
1335. U pravilnom šestouglu stranice a upisana je kružnica, u njoj opet pravilan šestougao, a u ovom kružnica itd. Odrediti zbir površina svih šestouglova i krugova.
1336. Dat je jednakokraničan trougao stranice a . Nad visinom ovog treba konstruisati novi jednakokranični trougao. Nad visinom drugog, treći itd. Odrediti zbir površina svih trouglova.

- 1337.* U kocki ivice a upisana je lopta, u lopti kocka, a u kocki ponovo lopta itd. Izračunati zbir zapremina svih kocki i svih lopti.
- 1338.* U jednakokrakom trouglu osnovice $2a$ i ugla pri vrhu 2α upišu se jedan iznad drugog sve do vrha krugovi, tako da prvi dodiruje osnovicu trougla i oba kraka, a svaki sledeći dodiruje prethodni krug i krake. Koliki je zbir obima i površina svih krugova?
- 1339.* Dat je beskonačni red $\frac{1}{7^x+1} + \frac{1}{(7^x+1)^2} + \frac{1}{(7^x+1)^3} + \dots$. Dokazati konvergenciju tog reda, zatim odrediti x tako da zbir toga reda bude 7.
1340. Dat je beskonačan red $(1+x) + x + \frac{x^2}{1+x} + \dots$. Odrediti promenljivu x tako da red bude konvergentan, a zatim odrediti x tako da zbir reda bude 49.
- 1341.* Dat je beskonačan red $\log_{\frac{1}{8}} x + \log_{\frac{1}{8}}^2 x + \log_{\frac{1}{8}}^3 x + \dots$. Odrediti interval u kome se mora nalaziti x da bi red bio konvergentan, zatim odrediti x tako da zbir reda bude $\frac{1}{2}$.

8.8 SLOŽENI INTERESNI RAČUN

Suma od K dinara uložena uz p % kamate za n godina naraste na K_n tj.

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n; \quad q = 1 + \frac{p}{100}; \quad K_n = Kq^n$$

Ako se obračunavanje vrši svakog m -tog dela godine suma od K dinara uložena uz p % kamate za n godina naraste na K_n tj.

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100m}\right)^{nm} = Kq^{nm}, \quad q = 1 + \frac{p}{100m}$$

1342. Dokazati metodom matematičke indukcije tačnost obrasca

$$K_n = k \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

1343. Na koju vrednost naraste kapital od 500 000 dinara ako je uložen na dve godine i šest meseci uz $6\frac{1}{2}$ % složenog interesa?
1344. Koja suma će za 15 godina narasti na 992 240 dinara ako je uložena uz 5% složenog interesa?
1345. Za koliko godina će suma od 437 000 din. uložena uz 6,5% porasti na 770 960 din?

1346. Uz koliko procenata je uložena suma od 362 500 din. ako je za 4 godine porasla na 466 350 din?
1347. Proknjižena vrednost jedne mašine je 4 000 000 din. Kolika će se vrednost knjižiti posle 20 godina ako se ona svake godine smanjuje za 4%?
1348. Posle koliko godina će se suma uložena složenim interesom od 7% udvostručiti ako se obračunavanje vrši polugodišnje?
1349. U jednom gradu od 297 800 stanovnika poslednjih godina je godišnji priraštaj stanovništva bio 5,5%. Ako taj priraštaj ostane narednih 8 godina nepromenjen, koliko će stanovnika taj grad imati posle 8 godina?
1350. Godišnji priraštaj jedne šume je 3,5%. Ako sada u njoj ima 145 000 m³ drvene mase, koliko će drvene mase biti posle 10 godina?
1351. Posle koliko godina će se suma od 40 000 dinara uložena po 6% složenog interesa izjednačiti sa sumom od 50 000 dinara uloženom po 5% složenog interesa?
1352. Ako je u jednoj šumi bilo pre 5 godina 840 000 m³ drvene mase, a sada je ima 1 050 000 m³, za koliko se procenat drvene mase svake godine povećava? Koliki je prosečan godišnji priraštaj u m³?
1353. Ako je godišnji priraštaj stanovništva jednog grada 3%, za koliko će godina stanovništvo da se uveća od 60 000 stanovnika na 108 365 stanovnika?
1354. Za koji procenat se udvostruči suma posle 14 godina?
1355. Za koji procenat se utrostruči suma posle 27 godina?
1356. Za koji procenat jedna suma naraste za svoju polovinu u toku 8 godina složenog interesa?
1357. Ako se za jednu mašinu, čija praktična vrednost iznosi K dinara, zna da će posle 5 godina upotrebe njena vrednost iznositi $\frac{3}{5}$ od prvobitne vrednosti, za koliko procenata treba svake godine prilikom knjiženja osnovnih sredstava smanjivati vrednost mašine?
1358. Na koju vrednost naraste suma od 100 000 dinara uz 5% interesa kroz 4 godine ako je kapitalisanje: a) polugodišnje; b) tromesečno.
1359. Ako je suma K data pod složenim interesom od p % na n godina, šta je korisnije za ulagača: godišnje ili polugodišnje obračunavanje interesa?
1360. Ako je godišnji procenat p , koliki treba da je polugodišnji procenat da bi se i pri godišnjem i pri polugodišnjem obračunavanju dobila ista krajnja vrednost glavnice?

IX. GLAVA

9. KOMPLEKSNI BROJEVI

9.1. OZNAKE, OBRASCI I DEFINICIJE

Definicija 1. Skup svih kompleksnih brojeva, u oznaci $\mathbb{C}$, je skup svih uređenih parova $z = (x, y)$ realnih brojeva za koje važe sledeće aksiome:

- 1) aksioma sabiranja: $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$;
- 2) aksioma množenja: $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$.

Definicija 2. Kompleksan broj $(0, 0)$ zove se kompleksna nula, a broj $(1, 0)$ kompleksna jedinica.

Definicija 3. Kompleksan broj $(0, 1)$ zove se imaginarna jedinica i označava se sa i .

Stav 1. Svaki kompleksan broj (x, y) može se predstaviti na jedinstven način u obliku $x + iy$, koji se zove algebarski oblik kompleksnog broja (x, y) .

Definicija 4. Neka je dat broj $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$). Broj $\bar{z} = x - iy$ je konjugovan broju z .

Definicija 5. Modul ili norma kompleksnog broja $z = x + iy$ je realan nenegativan broj $\sqrt{x^2 + y^2}$ i označava se sa $|z|$ (često se $|z|$ označava sa r ili ρ , tj. $|z| = r = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$).

9.2. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

(1) $= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ (r modul a φ argument kompleksnog broja)

Proizvod dva kompleksna broja:

(2) $r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$.

Količnik dva kompleksna broja:

(3) $\frac{r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$.

Stepen kompleksnog broja:

(4) $(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$.

Moavrov obrazac:

(5) $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

Koren kompleksnog broja:

(6) $\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad k=0, 1, 2, \dots, n-1$.

Ojlerova formula:

(7) $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

1361. Dat je kompleksan broj $z = \frac{3-2i}{2+i} + \frac{2-i}{3+i}$.

Odrediti realni deo $R_e(z)$ i imaginarni deo $I_m(z)$ datog kompleksnog broja z .

1362. Dat je kompleksan broj $z = \frac{(1+i)^3}{(2-3i)^2} \left(\frac{3-i}{2+i} - \frac{2-i}{3+i} \right)$.

Odrediti $R_e(z)$, $I_m(z)$ i $|z|$.

1363. Ako je $f(z) = 2 + z + 3z^2 - z^3$ i $z = 3 + 2i$. Dokazati da je kompleksan broj $f(z)$ konjugovan broju $\bar{f}(z)$.

1364. Pokazati da su $z_1 = 2 + 3i$ i $z_2 = -2 + i$ nule funkcije date formulom $f(z) = z^2 - 4iz - 7 + 4i$.

1365. Izračunati $z^n + \bar{z}^n$ i $z^n - \bar{z}^n$ za $n = 2, 3$ i 4 , ako je $z = 1 + i$ ili $z = 2 + i$.

1366. Izračunati vrednost kompleksnog izraza:

a) $\frac{z - \bar{z}}{1 + z \cdot \bar{z}}$ za $z = 1 + i$;

b) $\frac{z + \bar{z}}{2z + 3}$ za $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$.

1367. Ako su z i w dva kompleksna broja dokazati da je:

a) $\left| \frac{z}{w} \right| = \frac{|z|}{|w|}$;

b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$.

Rešiti po z jednačinu (1368–1372):

1368. a) $2z(3 - 5i) + z - 1 = -30 - 65i$;

b) $(q + i)z + 2z - 3 = 4 + 6i$.

1369. $(z + i)(1 + 2i) + (1 + zi)(3 - 4i) = 1 + 7i$.

1370. a) $z + 2\bar{z} = 6 - i$; b) $\bar{z} + 4z = 20 + 18i$.
 1371. a) $|z| + z = 2 + i$; b) $|z| - z = 1 + 2i$.
 1372. a) $z^2 = \bar{z}$; b) $z^3 = \bar{z}$.
 1373. Dat je kompleksan broj $z_1 + i$. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ tako da je $R_e(z \cdot z_1) = 0 \wedge |z \cdot z_1| = 2$.
 1374. Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 - 3i$. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ tako da je $R_e(z \cdot z_1) = 18 \wedge J_m\left(\frac{\bar{z}}{z_1}\right) = \frac{1}{13}$.
 1375. Dat je kompleksan broj $z_1 = 2 + i$. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ koji zadovoljava konjunkciju.
 a) $R_e\left(\frac{z}{z_1}\right) = \frac{3}{5} \wedge J_m(\bar{z} \cdot z_1) = 1$;
 b) $R_e(\bar{z} \cdot z_1) = 1 \wedge J_m\left(\frac{z}{z_1}\right) = -\frac{3}{5}$.
 1376. Ako je $z = 1 + i$ i $|z + z_1| = 1$, kako treba izabrati z_1 , pa da $z + z_1$ bude čisto imaginarni broj?

Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ ako je (1377–1381):

1377. $\left|\frac{z}{z+1}\right| = 1 \wedge z : \bar{z} = i$.
 1378. $\left|\frac{z-12}{z-8i}\right| = \frac{5}{3} \wedge \left|\frac{z-4}{z-8}\right| = 1$.
 1379. $|z^2 - 2i| = 4 \wedge \left|\frac{z+1+i}{z-1-i}\right| = 1$.
 1380. $\left|\frac{2z+1}{z-1}\right| = 2 \wedge R_e\left(\frac{z+8}{\bar{z}}\right) = 1$.
 1381. $\left|\frac{\bar{z}-1}{2z-6}\right| = \frac{1}{2} \wedge R_e\left(\frac{2\bar{z}+3}{z+1}\right) = 1$.

Odrediti realne brojeve x i y iz jednačine (1382–1385):

1382. $5x - 3yi + 2i = 6 - ix - y$.
 1383. $x^2i + (1 - 2i)xy + (1 - i)y^2 = 4 + 2i$.
 1384. $x^2i + 63i + x + 3 = xyi + y - y^2i$.
 1385. $(x + y)^2 + 6 + xi = 5(x + y) + (y + 1)i$.

1386. Ako je $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, pokazati da je $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$ i $\alpha^3 = 1$, a zatim odrediti realni i imaginarni deo kompleksnog broja $z = \frac{a\alpha^2 + b\alpha}{a + b\alpha^2}$.
 1387. Izračunati vrednost izraza $(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)(2 - \alpha + \alpha^2)$ za $\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.
 1388. Ako je $\alpha = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$, $\beta = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$ tada je:
 a) $\alpha^3 + \beta^3 = 2$; b) $\alpha^{3n} = \beta^{3n} = 1$; c) $\alpha^{3n+1} = \beta^{3n+2} = \alpha$.
 Dokazati.
 1389. Ako je $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$ (n prirodan broj) odrediti $R(z)$ i $J_m(z)$.
 1390. Odrediti prirodan broj n za koji je tačna jednakost $(1+i)^n = (1-i)^n$.
 1391. Ako je $f(n) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$ (n prirodan broj) dokazati da je $f(n+4) + f(n) = 0$.
 1392. Ako su z_1 i z_2 dva kompleksna broja dokazati da je $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$.
 1393. Dokazati da je $\sqrt{1+i\sqrt{3}} + \sqrt{1-i\sqrt{3}} = \sqrt{6}$.
 1394. Dokazati da je $z = (1+i)^4 - (1-i)^4$ realan broj.
 1395. Dokazati da je $z = \frac{(1+i)^6 - (1-i)^6}{(1+i)^6 \cdot (1-i)^6}$ imaginarni broj.
 1396. Izračunati $\left(\frac{3}{1+i} + \frac{1+i}{2i}\right)^{16}$.
 Dokazati da je (1397–1401):
 1397. $\frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{a}i}{b\sqrt{a} - a\sqrt{b}i} = i$.
 1398. a) $(\sqrt{2} + i)^6 + (\sqrt{2} - i)^6 = -46$;
 b) $(1 + i\sqrt{2})^5 - (1 - i\sqrt{2})^5 = -22i\sqrt{2}$.
 1399. $(i\sqrt{3} - 1)^9 - (i\sqrt{3} + 1)^9 = 1024$.
 1400. $3(1+i)^{100} = 4i(1+i)^{98} - 4(1-i)^{96}$.

$$1401. \frac{\sqrt{1+x} + i\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} - i\sqrt{1-x}} - \frac{\sqrt{1-x} + i\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x} - i\sqrt{1+x}} = 2x.$$

$$1402. \text{ Dat je kompleksni broj } z = \frac{\sqrt{a^2+b^2} + i\sqrt{2ab}}{a-b+2i\sqrt{ab}}. \text{ Odrediti } |z|.$$

1403. Ako su a i b realni brojevi dokazati da je

$$\sqrt{a+bi} = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \pm i \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}}.$$

Izračunati (1404–1405):

$$1404. \text{ a) } \sqrt{3+4i}; \quad \text{ b) } \sqrt{-15+8i}.$$

$$1405. \text{ a) } \sqrt{-7+24i}; \quad \text{ b) } \sqrt{4pq+2(p^2+q^2)i}.$$

Rešiti kvadratne jednačine po z (1406–1410):

$$1406. z^2 - (4-6i)z + 10-20i = 0.$$

$$1407. (1+i)z^2 - (2+i)z + 3+i = 0$$

$$1408. z^2 - (3+2i)z + 5(1+i) = 0.$$

$$1409. 6z^2 - (7+4i)z + 4+3i = 0.$$

$$1410. 3z^2 - (8+7i)z - 5+i = 0.$$

Šta predstavlja skup tačaka z , u Gausovoj ravni, ako je (1411–1413):

$$1411. \text{ a) } |z-3| = 5; \quad \text{ b) } |z+2| + |z-2| = 5?$$

$$1412. \text{ a) } |z| = R(z) + 1; \quad \text{ b) } |z+i| = 2?$$

$$1413. \text{ a) } |z-i| = |z+2|; \quad \text{ b) } |z-1| = |z+1| = |z-i\sqrt{2}|?$$

Odrediti oblasti kojima pripadaju tačke u Gausovoj ravni ako je (1414–1416):

$$1414. \text{ a) } 2 \leq |z| \leq 5; \quad \text{ b) } 3 \leq |z+i| \leq 5.$$

$$1415. \text{ a) } J_m(z) \leq 3; \quad \text{ b) } R(z) + J_m(z) < 1.$$

$$1416. \text{ a) } 0 < \arg z \leq \frac{\pi}{4}; \quad \text{ b) } -\frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{3}.$$

Pretvoriti kompleksne brojeve u trigonometrijski oblik (1417–1420):

$$1417. z_1 = 1+i; z_2 = 1+i\sqrt{3}; z_3 = \sqrt{3}-i.$$

$$1418. z_1 = 4; z_2 = -3; z_3 = i.$$

$$1419. z_1 = -2+6i; z_2 = -3-3i; z_3 = -1.$$

$$1420. z_1 = 1 - \cos \alpha + i \sin \alpha, z_2 = 1 + \sin \alpha - i \cos \alpha (0 < \alpha < 2\pi).$$

1421. Odrediti čisto imaginarni broj koji odgovara tački iz koje se duž AB [$A(3, 0)$; $B(-1, 0)$] vidi pod pravim uglom.

1422. Odrediti kompleksne brojeve koji odgovaraju temenima pravilnog šestougla upisanog u kružnicu poluprečnika $r = 2$, sa centrom u koordinatnom početku, ako jedno teme pripada realnoj osi.

1423. Odrediti kompleksne brojeve koji odgovaraju temenima kvadrata upisanog u kružnicu poluprečnika $r = 2$, sa centrom u koordinatnom početku, ako radijus vektor jednog temena sa realnom osom obrazuje ugao od 30° .

1424. Ako je $\arg(1+z) = \frac{\pi}{4}$ i $|1+z| = 4$ odrediti kompleksan broj z .

1425. Dati su kompleksni brojevi

$$z_1 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) \text{ i } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}).$$

Odrediti kompleksan broj $z = z_1 \cdot z_2$.

1426. Dati su kompleksni brojevi

$$z_1 = \sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ) \text{ i } z_2 = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ).$$

Odrediti kompleksan broj $z = \frac{z_1}{z_2}$.

1427. Odrediti količnik kompleksnih brojeva:

$$\text{a) } z_1 = -4 \text{ i } z_2 = 4\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}).$$

$$\text{b) } z_1 = 2(\cos(-30^\circ) + i \sin(-30^\circ)) \text{ i } z_2 = 6(\cos(-45^\circ) + i \sin(-45^\circ)).$$

Primenom Moavrovog obrasca izračunati (1428–1433):

$$1428. z^6, \text{ ako je } z = 2(\cos \frac{\pi}{18} + i \sin \frac{\pi}{18}).$$

$$1429. z^{20}, \text{ ako je } z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$1430. z^{10}, \text{ ako je } z = 1+i.$$

$$1431. z^{24}, \text{ ako je } z = -0,5(1+i\sqrt{3}).$$

$$1432. z^{18}, \text{ ako je } z = 0,5(1+i\sqrt{3}).$$

$$1433. z^{40}, \text{ ako je } z = 0,5(\sqrt{3}-i).$$

1434. Izračunati:

$$\text{a) } \sqrt[3]{1};$$

$$\text{b) } \sqrt[4]{-4};$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{-1}.$$

1435. Izračunati:

a) $\sqrt[3]{i}$; b) $\sqrt[4]{-i}$; c) $\sqrt[6]{-64i}$.

1436. Dokazati da $\sqrt[4]{i}$ ima sledeće vrednosti:

$$\pm 0,5 (\sqrt{2} + \sqrt{2} + i\sqrt{2} - \sqrt{2}); \pm 0,5 (-\sqrt{2} - \sqrt{2} + i\sqrt{2} + \sqrt{2}).$$

1437. Dokazati da $\sqrt[4]{-7-24i}$ ima sledeće vrednosti:

$$\pm(2-i); \pm(1+2i).$$

1438. Izračunati sve vrednosti izraza $(-16)^{\frac{3}{4}}$.

Izračunati sve vrednosti korena (1439–1442):

1439. $\sqrt[3]{-2+2i}$.

1440. $\sqrt[4]{-8-8i\sqrt{3}}$.

1441. $\sqrt[4]{-8+8i\sqrt{3}}$.

1442. a) $\sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}}$; b) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$.

1443.* Izračunati $\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}}$ ako je $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

Rešiti jednačine (1444–1450):

1444. a) $z^3 - 8 = 0$; b) $z^6 + 64 = 0$.

1445. $(5+3i)z^3 - 3 + 5i = 0$.

1446. $(4-7i)z^3 - 7 - 4i = 0$.

1447. $z^8 + 255z^4 - 256 = 0$.

1448. $z^8 - 624z^4 - 625 = 0$.

1449. $z^6 - (2-i)z^3 - 2i = 0$.

1450. $z^6 - (8-i)z^3 - 8i = 0$.

1451. Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ ako je

$$\left| \frac{z+4}{\bar{z}+12} \right| = 1 \wedge R_e \left(\frac{\bar{z}}{z} \right) = -0,5. \text{ Zatim izračunati sve vrednosti } \sqrt[4]{z}.$$

1452.* Odrediti kompleksan broj $z = x + iy$ ako je

$$\left| \frac{16z+1}{4\bar{z}} \right| = 4 \wedge R_e \left(\frac{2z}{\bar{z}} \right) = 1. \text{ Zatim izračunati sve vrednosti } \sqrt[4]{z}.$$

1453.* Rešiti jednačinu $\frac{iz^6+8}{8i-z^6} = \sqrt{3}$ po z i grafički prikazati rešenja u kompleksnoj ravni.

1454.* Rešiti jednačinu po x .

$$\left(\frac{1+xi}{1-xi} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

1455.* Rešiti po x jednačinu $(x+i)^n + (x-i)^n = 0 \quad (n \in \mathbb{N})$.

1456. Koristeći Moavrov obrazac izraziti:

a) $\sin 5\alpha$ u funkciji $\sin \alpha$ i $\cos 5\alpha$ u funkciji $\cos \alpha$;

b) $\sin 7\alpha$ u funkciji $\sin \alpha$ i $\cos 7\alpha$ u funkciji $\cos \alpha$.

1457. Koristeći Moavrov obrazac dokazati jednakost

$$\left(\frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} \right)^n = \frac{1+i \operatorname{tg} n\alpha}{1-i \operatorname{tg} n\alpha}.$$

1458.* Ako je $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$, tada je:

a) $x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha$;

b) $x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\alpha$.

1459. Kompleksan broj $z = \frac{1+xi}{1-xi}$, gde je x realan broj, ima modul 1. Dokazati.

1460. Svaki kompleksan broj različit od -1 , čiji je modul jednak 1, može se predstaviti u obliku $z = \frac{1+xi}{1-xi}$, gde je x realan broj. Dokazati.

1461. Ako je broj $\frac{z-1}{z+1}$ čisto imaginaran, tada je $|z| = 1$. Dokazati.

1462.* Ako je $z = 2 + 11i$ tada je $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}}$ realan broj. Dokazati.

1463.* Dokazati da je $\frac{(-1+i\sqrt{3})^{15}}{(-1-i)^{20}} + \frac{(-1-i\sqrt{3})^{15}}{(1+i)^{20}} = -64$.

1464. Odrediti kvadratnu jednačinu sa realnim koeficijentima ako jedan njen koren $z = a + bi$ ($b > 0$) zadovoljava jednačinu $(z+2i)^2 + 4z - 4i\bar{z} + 17 = 0$, gde je $\bar{z} = a - bi$.

1465.* Odrediti zbireve:

a) $\sin x + \sin 3x + \dots + \sin (2n-1)x$;

b) $\cos x + \cos 3x + \dots + \cos (2n-1)x$.

$$1466.*S_1 = 1 - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \binom{n}{6} + \dots;$$

$$S_2 = \binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \binom{n}{7} + \dots$$

1467.*Izračunati $z^{142} + z^{-142}$ ako je z koren jednačine $z + z^{-1} = 1$.

1468.*Dokazati identitete:

$$a) (1 + \cos \alpha + i \sin \alpha)^n = 2^n \cos^n \frac{\alpha}{2} \left(\cos \frac{n\alpha}{2} + i \sin \frac{n\alpha}{2} \right);$$

$$b) (1 + i\sqrt{3})^n + (1 - i\sqrt{3})^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{3};$$

$$c) (\sqrt{3} - i)^n + (\sqrt{3} + i)^n = 2^{n+1} \cos \frac{n\pi}{6};$$

$$d) (1 - i)^n + (1 + i)^n = 2 \cos \frac{n\pi}{4}.$$

gde je n prirodan broj, a α realan.

1469.*Primenom kompleksnih brojeva odrediti sumu

$$S_1 = \binom{n}{1} - 3\binom{n}{3} + 3^2\binom{n}{5} - 3^3\binom{n}{7} + \dots$$

$$S_2 = 1 - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - 3^3\binom{n}{6} + \dots$$

1470. Primenom Ojlerovog obrasca dokazati da je

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{i} \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

1471. Primenom Ojlerovog obrasca dokazati identitete

$$a) \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \quad b) \cos^2 y \cdot \sin^2 y = \frac{1}{8}(1 - \cos 4y).$$

1472. Polazeći od Ojlerove formule, dokazati Moavrovu formulu.

1473. Napisati brojeve $1, i, -2, -i$ u obliku stepena osnove e .

1474. Primenom Ojlerove formule dokazati da je i^i realan broj koji ima beskonačno vrednosti.

9.3. BINOMNE JEDNAČINE

Definicija: Jednačina oblika

(1) $Ax^n \pm B = 0$ ($A > 0$ i $B > 0$) naziva se binomna jednačina.

Primedba: Smenom $x = y \sqrt[n]{\frac{B}{A}}$ binomna jednačina (1) svodi se na ekvivalentnu jednačinu

(2) $y^n \pm 1 = 0$.

Odrediti skup rešenja sledećih binomnih jednačina (1475–1448):

$$1475. a) 5x^2 + 2 = 0.$$

$$b) 8x^2 - 11 = 0$$

$$1476. a) 8x^3 - 27 = 0;$$

$$b) 125x^3 + 8c^3 = 0.$$

$$1477. m^3x^3 - (m+n)^3 = 0.$$

$$1478. a) 16x^4 - 81 = 0;$$

$$b) 11x^4 - 17 = 0.$$

$$1479. b^4x^4 - (2a - c)^4 = 0.$$

$$1480. a) x^6 - 729 = 0;$$

$$b) x^6 + 64 = 0.$$

$$1481. x^3(8x^3 + 1) - 1 = 8x^3.$$

$$1482. 512x^6 - 64x^3 = 27(1 - 8x^3).$$

$$1483. x^3(3x^3 + 5) = 192x^3 + 320.$$

$$1484. x^2(27 - x^3) = 108 - 4x^3.$$

$$1485. (x - a)^3 + (x - b)^3 = 0.$$

$$1486. (a - x)^4 - (b - x)^4 = 0.$$

$$1487. (2x - 5)^3 + (5x - 2)^3 = 0.$$

$$1488. (2x - 3)^3 - (9 - x)^3 = 0.$$

9.4. TRINOMNE JEDNAČINE

Definicija. Jednačina oblika

$$(1) ax^{2n} + bx^n + c = 0,$$

gde su a, b i c realni brojevi (različiti od nule), naziva se trinomna jednačina.

Trinomna jednačina (1) ekvivalentna je jednačini

$$(2) a(x^n)^2 + bx^n + c = 0,$$

koja je kvadratna po nepoznatoj x^n .

Odrediti skup rešenja jednačine (1489–1504):

$$1489. a) x^6 + 7x^3 - 8 = 0; \quad b) \frac{x^2}{x^2 - 2a^2} = \frac{6a^2}{x^2 - a^2}.$$

$$1490. a) x^6 - 9x^3 + 8 = 0; \quad b) x^8 - 17x^4 + 16 = 0.$$

$$1491. a) a^2b^2x^4 - (a^4 + b^4)x^2 + a^2b^2 = 0;$$

$$b) c^4x^4 + c^2(a^2 - b^2)x^2 - a^2b^2 = 0.$$

$$1492. a) 8x^6 - 35x^3 + 27 = 0;$$

$$b) 512x^6 + 152x^3 - 27 = 0.$$

$$1493. a) \frac{x^3 + 216}{x^3} = 36 - x^3; \quad b) \frac{x^6 + 3}{x^3} = \frac{x^3 + 217}{9}.$$

$$1494. (x^2 + 5)(x^2 - 5) + \frac{8(x^4 + 2)}{x^4} = 0.$$

$$1495. \frac{(4x^4 - 3)^2}{x^2 + 1} + 7(x + 1)(x - 2) = \frac{1}{x^2 + 1}.$$

Uvođenjem odgovarajuće smene rešiti sledeće jednačine (1496–1504):

$$1496. (x^2 + 2a^2 + m^2)^2 - 4(a^2 + m^2)(x^2 + 2a^2 + m^2) + 3(a^4 + m^4) + 10a^2m^2 = 0.$$

$$1497. (x^2 - a^2 - 1)^2 - a(a^2 - 3a + 2)(x^2 - a^2 - 1) + 2a^3(a^2 - 3) = 0.$$

$$1498. \left(\frac{n^2x^2}{a} - a\right)^2 - a\left(\frac{n^2x^2}{a} - a\right) + 2an^2 = n^2\left(\frac{n^2x^2}{a} - a\right) + 2a^2 = 0.$$

$$1499. (x^2 - 2m)^4 - 5(x^2 - 2m)^2 + 4 = 0.$$

$$1500. (x^2 - 3a^2)^4 - 37a^4(x^2 - 3a^2)^2 + 36a^8 = 0.$$

$$1501. (3 + x)^2 + \frac{1}{(3 + x)^2} = 100,01.$$

$$1502. (2x^2 - 3x + 1)^2 = 22x^2 - 33x + 1.$$

$$1503. (x - 2)^2 + \frac{1}{(x - 2)^2} = \frac{82}{9}.$$

$$1504. (x + a)^2 + \frac{1}{(x + a)^2} = b^2.$$

9.5. SIMETRIČNE (RECIPROČNE) JEDNAČINE

Definicija: Jednačina oblika

$$(1) ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \dots \pm cx^2 \pm bx \pm a = 0,$$

gde su $a, b, c, \dots$ realni brojevi, naziva se simetrična (recipročna) jednačina.

Primer 1. Naziv simetrična jednačina potiče iz osobine simetričnosti njenih koeficijenata.

Primer 2. Naziv recipročna potiče iz osobine: ako je $x = \alpha$ koren jednačine, onda je i $x = \frac{1}{\alpha}$ takođe koren date jednačine.

Primer 3. Simetrične jednačine neparnog stepena imaju uvek koren $x = -1$ ili $x = 1$.

Odrediti skup rešenja sledećih simetričnih jednačina (1505–1539):

$$1505. 3x^3 + 13x^2 + 13x + 3 = 0.$$

$$1506. 12x^3 - 13x^2 - 13x + 12 = 0.$$

$$1507. 2x - 7x^2 + 7x - 2 = 0.$$

$$1508. 15x^3 + 19x^2 - 19x - 15 = 0.$$

$$1509. 6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$$

$$1510. 12x^4 - 25x^3 + 25x - 12 = 0.$$

$$1511. 12x^5 + 16x^4 - 37x^3 - 37x^2 + 16x + 12 = 0.$$

$$1512. 6x^5 - x^4 - 43x^3 + 43x^2 + x - 6 = 0.$$

$$1513. 2x^5 + 5x^4 - 13x^3 - 13x^2 + 5x + 2 = 0.$$

$$1514. x^6 + 4x^5 - 6x^4 - 28x^3 - 6x^2 + 4x + 1 = 0.$$

$$1515. 2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0.$$

$$1516. 12x^3 - 37x^2 + 37x - 12 = 0.$$

$$1517. 2x^4 - 7x^3 + 9x^2 + 7x + 2 = 0.$$

$$1518. x^4 - 15,3x^3 + 54,52x^2 - 15,3x + 1 = 0.$$

$$1519. x^4 + (n - n^{-1})x^3 - 2n^2x^2 + (n - n^{-1})x + 1 = 0.$$

$$1520. \frac{2}{3}(x - 1)^2 + \frac{25x^2}{2(x + 1)^2} = \frac{28x}{9}.$$

$$1521. 1 + \frac{x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{(2x + 1)^2} + \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = 0.$$

$$1522. x^3 + \frac{3x^2 + 1}{x - 3} + x = 0.$$

$$1523. 12x^2 + \frac{25x(x^2 - 1)}{x^2 + 1} = 12.$$

$$1524. \frac{6}{x^4 - 5x^2 - 6} - \frac{5x}{x^2 - 6} = \frac{2(3x^2 - 1)}{x^2 + 1}.$$

$$1525. x(6x^2 + 5) + \frac{7x^2(x + 8) + x^2 + 6}{x - 7} = 0.$$

$$1526. x(6x + 7)(6x - 7) - (6x + 1)^2 = (5x + 1)(5x - 1) - 36.$$

$$1527. 12x^2(3x - 1) - (11x + 3)(11x - 3) = 10 - 7(19x - 5).$$

$$1528. 8x^5 - 46x^4 + 47x^3 + 47x^2 - 46x + 8 = 0.$$

$$1529. 6x^5 - 41x^4 + 97x^3 - 97x^2 + 41x - 6 = 0.$$

$$1530.*12(x^5 + 1) + 2x(8x - 1)6x^2 - 1 = 7x(5x^2 + 3x - 2).$$

$$1521. 1 + \frac{x(2x^3 - 3x^2 + 1)}{(2x + 1)^2} + \frac{4x^2 - 2x + 1}{2x + 1} = 0.$$

$$1532.*8x^4(x - 2) + (6x + 1)^2 + 4x(x^4 + 1) = x^2(16x - 1) + 7(3x^3 + 1) + 6.$$

$$1533. 2(x^3 + 6) - x(7x - 3) = \frac{10(x + 1)}{x^2 + 1}.$$

$$1534. 3x(2x^2 - 19) + 11(x^2 - 7) + \frac{239x + 314}{x^2 + 4} = 0.$$

1535. $*mx^4 - (m+1)^2x^3 + 2(m^2+m+1)x^2 - (m+1)^2x + m = 0$.
1536. $*amx^4 + (a+m)(am+1)x^3 + ((a+m)^2 + a^2m^2 + 1)x^2 + a + m)(am+1)x + am = 0$.
1537. $*3x^6 - 10x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 10x - 3 = 0$.
1538. $*2x^6 + 3x^5 - 18x^4 + 18x^2 - 3x - 2 = 0$.
1539. $x^7 + 4x^6 + 2x^5 + 5x^4 + 5x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = 0$.

9.6. POLINOMI NAD POLJEM KOMPLEKSNIH BROJEVA

Definicija 1. Polinom P po promenljivoj x definiše se sa

$$(1) P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

gde je n prirodni broj ili nula a $a_0, a_1, \dots, a_n$ realni i kompleksni brojevi.

Definicija 2. Ako je $a_0 \neq 0$, broj n zove se stepen polinoma P i kaže se da je P polinom stepena n po x .

Broj 0 smatra se polinomom neodređenog stepena i naziva se nula-polinom.

Definicija 3. Pod algebarskom jednačinom po x podrazumeva se jednačina $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

Polinom $P(x)$ zove se polinom jednačine.

Stav 1. Svaki polinom stepena ($n \geq 1$) ima bar jednu nulu, realnu ili imaginarnu. (Osnovni stav algebre).

Definicija 4. Ako je x_1 nula polinoma

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$$

razlika $x - x_1$ zove se koren i činilac ili linearni faktor poliona $P_n(x)$.

Stav 2. Svaki polinom $P_n(x)$ deljiv je svakim od svojih korenih činilaca.

Stav 3. Potreban i dovoljan uslov da polinomi $P(x)$ i $Q(x)$ budu identički jednaki je da koeficijenti njihovih odgovarajućih članova budu jednaki.

Definicija 5. Pod rešenjem ili korenom jednačine $P(x) = 0$ smatra se svaka nula polinoma $P(x)$.

1540. Polinom $P(x) = x^4 + 2x^3 + ax^2 + 2x + b$ je kvadrat drugog polinoma, gde su a i b realni brojevi. Odrediti drugi polinom i realne brojeve a i b .

1541. Data je jednačina $P(x) = 6x^3 - 7x^2 - 16x + a = 0$, gde je a realan broj.

a) Odrediti a tako da $x = 2$ bude koren date jednačine.

b) Za nađeno a odredi sve nule polinoma $P(x)$.

1542. Ako su $x = 2$ i $x = 3$ koreni jednačine

$$P(x) = 2x^3 - ax^2 - 13x + b = 0,$$

odrediti realne brojeve a i b i izračunati sve nule polinoma $P(x)$ za nađene vrednosti a i b .

1543. Odrediti realne brojeve a i b tako da polinom $P(x) = x^4 + ax^2 + b$ bude deljiv sa $(x - 2)^2$.

1544. Dat je polinom $P(x) = x^3 + a^2x^2 + ax - 5$, gde je a realan broj. Odrediti realan broj a da dati polinom bude deljiv sa $x + 1$.

1545. Polinom $x^8 + 2x^7 + 3x^2 + ax + b$ deljiv je polinomom $x^2 + x - 2$. Odrediti realne brojeve a i b .

1546. Za koeficijente a, b, c i d i nule x_1, x_2 i x_3 polinoma $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ važe formule (Vietove formule za polinom trećeg stepena – François Viète (1540–1603)).

$$x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = \frac{c}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{d}{a}. \text{ Dokazati.}$$

1547. Za koeficijente a, b, c, d i e i nule x_1, x_2, x_3 i x_4 polinoma $P(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ važe formule (Vietove formule za polinom četvrtog stepena).

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{c}{a},$$

$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\frac{d}{a},$$

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 = \frac{e}{a}. \text{ Dokazati.}$$

1548. Rešiti jednačinu $8x^3 + 4x^2 - 34x + 15 = 0$, ako je poznato da njena dva korena zadovoljavaju relaciju $2x_1 - 4x_2 = 1$.

1549. Rešiti jednačinu

$$2ax^3 - (2a^2 + a + 2)x^2 + (a^2 + 2a + 1)x - a = 0,$$

ako je proizvod dva njena korena jednak jedinici.

1550. Koren jednačine $x^2 + 41 = 14x + \frac{10}{x}$ je $2 - \sqrt{3}$. Odrediti ostale korene date jednačine.

1551. Rešiti jednačinu $x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 58x + 35 = 0$, ako je jedan njen koren kompleksan broj $2 + i$.
1552. Za koje vrednosti realnog broja a jednačina $x^3 + (a^2 - 1)x^2 + (3a - 1)x + 1 = 0$, ima jedan koren jednak jedinici.
1553. Rešiti jednačine $2x^3 - 5x^2 + 6x - 2 = 0$ i $6x^3 - 3x^2 - 2x + 1 = 0$, ako imaju zajednički koren.
1554. Rešiti jednačine $x^3 - 2x^2 - 3x + 10 = 0$ i $x^4 - x^3 - 22x^2 + 16x + 96 = 0$, ako imaju zajednički koren.
1555. Koreni x_1, x_2, x_3 jednačine $x^3 - 6x^2 + px + q = 0$ ($p, q \in \mathbb{R}$) zadovoljavaju proporciju $x_1 : x_2 : x_3 = 1 : 2 : 3$. Izračunati korene jednačine i realne brojeve p i q .
1556. Rešiti jednačinu $27x^3 + 9x^2 - 48x + 20 = 0$, ako ona ima dva jednaka korena.
1557. U jednačini $x^3 - 12x^2 + mx - 60 = 0$, odrediti realan broj m , ako su rešenja date jednačine stranice pravouglog trougla.
1558. Stranice pravouglog trougla su koreni jednačine $36x^3 - 72x^2 + 47x - 10 = 0$.
Odrediti korene jednačine.
1559. Kompleksan broj $x_1 = -3 + i$ je koren jednačine $x^3 + x^2 + ax + b = 0$.
Odrediti realne brojeve a i b i druga dva korena jednačine.
1560. Data je jednačina $x^3 - (m^2 - m + 7)x - (3m^2 - 3m - 6) = 0$, gde je m realan broj. Odrediti m ako je jedan koren date jednačine $x_1 = -1$, zatim odrediti druga dva korena jednačine.

Rešiti jednačinu (1561–1563):

1561. $(x^2 + 1) + (2x^2 + 3) + (3x^2 + 5) + \dots + (10x^2 + 19) = 45$.
1562. $x(x + 1) + (x + 1)(x + 2) + \dots + (x + 9)(x + 10) = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 9 \cdot 10$
1563. $1 + 2x + 4x^2 + \dots + (2x)^n + \dots = 3,4 - 1,2x$, $n \in \mathbb{N}$ a $|x| < 0,5$.
1564. Polinom $x^8 + 2x^7 + 3x^2 + ax + b$ deljiv je polinomom $x^2 + x - 2$.
Odrediti realne brojeve a i b .
1565. Dokazati da je polinom $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 27x + 14$, deljiv polinomom $x^2 + 3x + 2$, a zatim rešiti jednačinu $x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 27x + 14 = 0$.

1566. Rešiti jednačinu $x^4 - 3x^3 - 5x^2 + 17x - 6 = 0$, ako je zbir dva njena rešenja jednak 5.
1567. Rešiti jednačinu $6x^4 - 13x^3 - 35x^2 - x + 3 = 0$, ako se zna da je $2 - \sqrt{3}$ jedan njen koren.
1568. Dokazati da je polinom $nx^{n+1} - (1 + np)x^n + (p - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x) + p$ deljiv polinomom $x^2 - (p + 1)x + p$, ($n \in \mathbb{N}$ i $p \in \mathbb{R}$).
1569. Odrediti realne brojeve a i b da polinom $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4$ bude potpun kvadrat jednog drugog polinoma.
1570. Polinom $x^8 + x^4 + 1$ predstaviti u obliku proizvoda četiri faktora.
1571. Za koje je vrednosti realnih brojeva p i q polinom $x^5 - 3x^4 + 2qx^3 - 2px^2 - 5x - 5$ deljiv polinomom $x^2 - 3x + 2$?
1572. Odrediti realne korene jednačine $(x - 1)(x^9 + x^8 + \dots + x^2 + x + 1) = x^5 + 991$.
1573. Rešiti jednačinu $(x^2 + x + 1) + (x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 3x + 5) + \dots + (x^2 + 20x + 39) = 4\,500$.

9.7. SISTEM ALGEBARSKIH JEDNAČINA VIŠEG REDA

Primerba: Sistem od jedne linearne i jedne kvadratne jednačine, kao i sistem od dve kvadratne jednačine sa dve nepoznate, obrađen je u knjizi Zbirka rešenih zadataka iz matematike 2.

Definicija 1: Konjukcija jednačina

$f_1(x, y, z) = 0 \wedge f_2(x, y, z) = 0 \wedge f_3(x, y, z) = 0$ naziva se sistem od tri jednačina sa tri nepoznate.

Definicija 2: Uredena trojka (α, β, γ) naziva se rešenje datog sistema ako je $f_1(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \wedge f_2(\alpha, \beta, \gamma) = 0 \wedge f_3(\alpha, \beta, \gamma) = 0$.

Odrediti skup rešenja sledećih sistema (1574–1582):

1574. $x^3 - y^3 = 31(x - y) \wedge x^2 + y^2 = 26$.
1575. $x^3 + y^3 = \frac{31}{14}(x + y) \wedge xy = \frac{3}{2}$.
1576. $x^4 + y^4 = 1\frac{1}{16} \wedge xy = \frac{1}{2}$.
1577. $x^3 + y^3 = 1\,512 \wedge x^2y + xy^2 = 1\,440$.

$$1578. x^5 + y^5 = 33 \wedge x + y = 3.$$

$$1579. x^5 - y^5 = 242 \wedge (x - y)^2 - x + y = 2.$$

$$1580. x + y = 1 \wedge (x^2 + y^2)(x^3 + y^3) = 35.$$

$$1581. \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{175}{36} \wedge x - y = 1.$$

$$1582. \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} + \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 12\frac{4}{9} \wedge x + y = 4.$$

Odrediti skup rešenja sledećih sistema (1583–1610):

$$1583. x + y - z = 7 \wedge x^2 + y^2 - z^2 = 61 \wedge xy = z^2.$$

$$1584. x - y - z = -5 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 29 \wedge xy + xz + yz = 26.$$

$$1585. (x + y)(y + z) = 45 \wedge (y + z)(z + x) = 30 \wedge (x + z)(x + y) = 54.$$

$$1586. x + y + z = 1 \wedge x^2 + y^2 - z^2 = -1 \wedge xy = 4.$$

$$1587. x + y + z = 11 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 49 \wedge x(y + z) = 5x.$$

$$1588. x + y + z = 6 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 14 \wedge (x + y)z = 5.$$

$$1589. x + y - z = 0 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 14 \wedge xy + xz + yz = 11.$$

$$1590. x = y + z \wedge x(y + z) = 16 \wedge xyz = 12.$$

$$1591. x + y + z = 24 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 200 \wedge z^2 - x^2 - y^2 = 0.$$

$$1592. x + y + z = 12 \wedge xy + yz + xz = 47 \wedge x^2 + y^2 = z^2.$$

$$1593. x + y = 9 \wedge xy + xz + yz = 36 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = 49.$$

$$1594. x + y + z = 1 \wedge xyz = -16 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 1.$$

$$1595. x^2 + y^2 + z^2 = 94 \wedge x(y + z) = 45 \wedge x + y + z = 14.$$

$$1596. \frac{1}{xy} + \frac{1}{xz} = 22 \wedge \frac{1}{xy} + \frac{1}{yz} = 40 \wedge \frac{1}{xz} + \frac{1}{yz} = 42.$$

$$1597. \frac{y + z}{xyz} + a^2 = 0 \wedge \frac{x + z}{xyz} + b^2 = 0 \wedge \frac{x + y}{xyz} + (a + b) = 0.$$

$$1598. x + y + z = 6 \wedge x^2 + y^2 - z^2 = 8 \wedge x^3 + y^3 + z^3 = 90.$$

$$1599. x^2 + xy + xz = 20 \wedge xy + y^2 + yz = 50 \wedge xz + yz + z^2 = 30.$$

$$1600. x^2 + y^2 = 29 \wedge y^2 + z^2 = 34 \wedge z^2 + x^2 = 13.$$

$$1601. x + y + z = 21 \wedge y^2 = xz \wedge xyz = 216.$$

$$1602. x + y = 18xyz \wedge y + z = 30xyz \wedge z + x = 24xyz.$$

$$1603. x^2 + x(y + z) = 8 \wedge y^2 + y(x + z) = 3 \wedge z^2 + z(x + y) = 5.$$

$$1604. x^2 + y^2 = 2(a^2 + b^2) \wedge x^2 + z^2 = (a + b)^2 \wedge y^2 + z^2 = (a - b)^2.$$

$$1605. x + y + z = (a + b)^2 \wedge xy = a^2b^2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 = a^4 + 4a^2b^2 + b^4.$$

$$1606. (x + y)(z + x) = a \wedge (y + z)(x + y) = 2a \wedge (z + x)(y + z) = 2.$$

$$1607. x : y = z : u \wedge x + u = 13 \wedge y + z = 20 \wedge x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 425.$$

$$1608. xu = yz = 6 \wedge x + y + z + u = 2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 50.$$

$$1609. x : y = z : u \wedge x - u = 6 \wedge y - z = 2 \wedge x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 164.$$

$$1610. x : y = z : u \wedge x + u = 9 \wedge y + z = 6 \wedge x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 585.$$

X. GLAVA

10. RAZNI ZADACI*

1611. Data je funkcija

$$y = x^2 - 2x \cos \alpha + 1 - \sin \alpha,$$

gde je $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Odrediti a , tako da apscisna osa bude tangenta grafika funkcije i skicirati grafike tih funkcija;

b) Ako su x_1 i x_2 rešenja jednačine

$$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 - \sin \alpha = 0,$$

odrediti α iz relacije

$$x_1^2 + x_2^2 = 2.$$

c) Naći relaciju između rešenja x_1 i x_2 jednačine

$$x_2 - 2x \cos \alpha + 1 - \sin \alpha = 0$$

koja ne zavisi od α .

1612. Data je jednačina

$$x^2 - (m + 3)x + m + 2 = 0.$$

Odrediti sve vrednosti parametra m za koje je tačna konjunkcija

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} > \frac{1}{2} \wedge x_1^2 + x_2^2 < 5.$$

1613. Tri broja x , y , z zadovoljavaju relaciju $y^2 = xz$. Dokazati da je $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.

1614. Odrediti sve vrednosti parametra $\alpha \in [0, 2\pi]$ za koje je kvadratni trinom $y = (\sin \alpha + \frac{1}{2})x^2 - (2 \sin \alpha - 3)x + 1$, pozitivan za svako x .

1615. Zbir dva pozitivna broja je 18. Odrediti te brojeve tako da njihov proizvod bude maksimalan.

1616. Dat je skup funkcija $x^2 - 2kx - 1 + 2k^2 - y = 0$, gde je k realan parametar.

a) Naći geometrijsko mesto minimuma funkcije kad se k menja.

b) Na osnovu tog geometrijskog mesta ispitati prirodu nula date funkcije (Gradsko takmičenje u Beogradu školske 1969/70. godine.)

1617. Odrediti najmanju vrednost izraza $x^6 + y^6$ ako je $x^2 + y^2 = 1$.

1618. Koji dvocifreni brojevi $10x + y$ zadovoljavaju uslov

$$10x + yx^2 + y^2 + xy?$$

1619. Izračunati zapreminu kose kupe ako je dat poluprečnik osnove $r = 25$ i nagibni uslovi najduže i najkraće izvodnice prema osnovi $\alpha = 24^\circ 11'$, $\beta = 53^\circ 8'$.

1620. Data je kvadratna jednačina po nepoznatoj x ;

$$2x^2 + 2x + \cos \alpha = 0, \text{ gde je } 0 < \alpha < \pi.$$

a) Odrediti interval kome pripada parametar α da oba rešenja jednačine budu realna.

b) Odrediti α ako je $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{4}{3}$ i pokazati da je tada

$$x_1^2 + x_2^2 < 1,9, \text{ gde su } x_1 \text{ i } x_2 \text{ rešenja date jednačine.}$$

1621. Data je jednačina

$$ax^2 - x + \frac{\log a}{a} = 0,$$

gde je a pozitivan broj i osnova logaritma 10. Odrediti parametar a , tako da data jednačina:

a) ima realne korene;

b) dva pozitivna korena;

c) jednake korene.

U poslednjem slučaju rešiti jednačinu.

1622. Odrediti sve cele brojeve m za koje je

$$(1 + i)^m = (1 - i)^m, (i = \sqrt{-1}).$$

1623. Ako je $z_1 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ i $z_2 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$, onda je

$$a) z_1^3 + z_2^3 = 2,$$

$$b) z_1^{3n} + z_2^{3n} = 2, n \in \mathbb{N}. \text{ Dokazati.}$$

* Ovi zadaci služe za ponavljanje, sistematizaciju i produbljivanje gradiva. Uglavnom su korišćeni na raznim opštinskim i međuopštinskim takmičenjima iz matematike, kao i na prijemnim ispitima na tehničkim fakultetima.

1624. Ako jednačina

$$(1) dx^2 + px + q = 0,$$

ima realna i različita rešenja (p, q realni parametri), onda i jednačine

$$(2) \begin{aligned} x^2 + (p + 2a)x + q + ap &= 0, \\ 3x^2 + 2(a + p)x + q + ap &= 0, \end{aligned}$$

gde je a ma koji realan broj, takođe imaju realna i različita rešenja. Dokazati.

1625. Trougao čije su stranice $a - 2, a, a + 2$ i jedan ugao od 120° rotira oko najduže stranice. Odrediti površinu i zapreminu nastalog tela.

1626. Data je kvadratna jednačina $(2 \cos \alpha - 1)x^2 - 2x + \cos \alpha = 0$, gde je α parametar.

a) Odrediti vrednost parametra α za koju jednačina ima realna rešenja.

b) Odrediti α ako je $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} - 4 \sin \alpha = 0$, gde su x_1 i x_2 rešenja date jednačine.

c) Iz skupa funkcija

$$y = (2 \cos \alpha - 1)x^2 - 2x + \cos \alpha$$

izdvojiti one funkcije čija je tangenta x -osa i konstruisati njihove grafike u ravni xOy .

1627. Osnova piramide je pravougli trougao čija je hipotenuza c i jedan ugao α . Bočne ivice piramide zaklapaju ugao φ sa osnovom. Izračunati zapreminu piramide.

1628. Odrediti sve vrednosti parametra p , za koje je izraz $\log((p - 1)x^2 + 2px + 3p - 2)$, definisan za svako x .

1629. Ako je $0 < \varphi < \frac{\pi}{3}$, odrediti realne vrednosti parametra m za koje je tačna jednakost $\cos \varphi = \frac{m^2 - 4m - 4}{m^2 + 1}$.

1630. Ako je $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$, za koje realne vrednosti parametra m je tačna jednakost $\operatorname{tg} \varphi = \frac{2m^2 + 2m}{m^2 - 6m + 9}$?

1631. Dokazati jednakost $\frac{1 + \operatorname{tg}^4 x}{\operatorname{tg}^2 x + \cot^2 x} = \operatorname{tg}^2 x$.

1632. Osnova prizme je trougao čiji su uglovi α i β , a poluprečnik opisanog kruga R . Odrediti zapreminu prizme ako bočna ivica dužine m zaklapa sa osnovom ugao φ .

1633. U trouglu ABC je $a : b = 13 : 1$, $c = 16\sqrt{3}$, $\alpha = 30^\circ$:

a) naći stranice trougla a i b ;

b) naći površinu i zapreminu tela nastalog rotacijom ovog trougla oko stranice c .

1634. Date su funkcije $y = a \cdot 2^x + b$, $y = b \cdot 2^{-x} + a$,

gde su a i b realni parametri. Koji uslov treba da zadovoljavaju a i b da grafiči datih funkcija imaju:

a) jednu zajedničku tačku (odrediti tu tačku);

b) dve zajedničke tačke (odrediti te tačke)?

1635. Date su funkcije

$$y = \log_2(x + 14) \text{ i } y = 6 - \log_2(x + 2).$$

Odrediti presečnu tačku njihovih grafika.

1636. Data je jednačina $x^2 - 10x + 2xy - y + y^2 = 0$. Odrediti sva njena rešenja u skupu celih brojeva.

1637. Ako je $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$, odrediti realne vrednosti nepoznate x za koje su tačne jednakosti:

$$a) x^2 - 5x + 7 = 3 \operatorname{tg}^2 \alpha;$$

$$b) x^2 - 7x + 14 = 8 \sin^2 \alpha.$$

1638. Skratiti dati razlomak R , a zatim izračunati njegovu vrednost za dato x :

$$a) R = \frac{3x^2 + x^{-2} - x^4 - 3}{2 - x^2 - x^{-2}}, x = \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1} \right)^{-\frac{1}{4}};$$

$$b) R = \frac{x^4 + 3x^2 + x^{-2} + 3}{2 + x^{-2} + x^2}, x = \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2} + 1} \right)^{-\frac{1}{4}};$$

1639. Dokazati da je $(az^2 + bz)(bz^2 + az) = a^2 - ab + b^2$, pri čemu su a i b realni brojevi, a z je rešenje jednačine $1 + z + z^2 = 0$.

1640. Data je jednačina $x^2 - 6x + 5 + m(x^2 - 5x + 6) = 0$ ($m \in \mathbb{R}$). Odrediti relaciju između rešenja date jednačine nezavisne od realnog parametra m . (Deseto savezno takmičenje, održano maja 1969.).

1641. Odrediti interval za x u kome je funkcija

$$y = \sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 24 - 10\sqrt{x - 1}}$$

konstanta. (Republičko takmičenje iz matematike SR Srbije, 1981.)

1642. Dati su kompleksni brojevi z_1 i z_2 takvi da je $J_m(z_1) \neq 0$ i $J_m(z_2) \neq 0$. Dokazati da su brojevi $z_1 + z_2$ i $z_1 \cdot z_2$ istovremeno realni ako, i samo ako, je $z_1 = \bar{z}_2$. Opštinsko takmičenje iz matematike održano 1984. godine, Beograd).

1643. Dokazati da sistem jednačina

$$z + \bar{z} = 4 \wedge |z| = 1,$$

gde je z kompleksni broj, nema rešenja. (Opštinsko takmičenje iz matematike 1983. godine, Beograd).

1644. Odrediti sve kompleksne brojeve z takve da je

$$2(1-i)z^2 - 4(2-i)z - 5 - 3i = 0.$$

(Opštinsko takmičenje iz matematike 1987. godine, Beograd).

1645. Odrediti realan broj m tako da razliku rešenja jednačine

$$x^2 + 4mx + 5m^2 - 6m + 5 = 0$$

bude maksimalna (Opštinsko takmičenje iz matematike 1987. godine, Beograd).

1646. Rešiti nejednačinu $\left| \frac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + x + 1} \right| < 2$.

1647. Za koje realne vrednosti broja a nejednačina $\left| \frac{x^2 + ax + 1}{x^2 + x + 1} \right| < 2$ važi za sve vrednosti x ?

1648. Dati su kompleksni brojevi $z_1 = 2 + i(\sqrt{3 + \sqrt{8}} - \sqrt{3 - \sqrt{8}})$

i $z_2 = 3 + i \log_{27} \frac{1}{a}$. Izračunati imaginarne delove datih brojeva i dokazati da je $z_2 : z_1 = 3 : 2$, ako je $a = 0,333...$ (Prijemni ispit, Mašinski fakultet, Beograd 1986. godine)

1649. Rešiti jednačinu

$$x = 1 - 1986(1 - 1986x^2)^2 \quad (\text{Prijemni ispit na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, 1986. godine}).$$

1650. Grafički prikazati skup tačaka $M(x, y)$ čije koordinate zadovoljavaju nejednakost

$$|x + y|^{-x+y+1} \leq 1. \quad (\text{Prijemni ispit na Elektrotehničkom fakultetu u Beogradu, 1985. godine}).$$

1651. Izračunati $\log_{ab} \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}$, ako je $\log_{aba} = n$.

1652. Za koje je vrednosti realnog broja x ispunjena jednakost

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 8x + 16}, \quad \text{ako je } \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}.$$

1653. Rešiti jednačinu

$$4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x \quad (\text{Međuopštinsko takmičenje iz matematike, Beograd 1988. godine}).$$

1654. Neka su $n_1, n_2, n_3, \dots, n_k$ svi prirodni brojevi, koji su delioci broja n , a različiti od 1 i n . Dokazati da je

$$\frac{2}{\log_k n} (\log_k n_1 + \log_k n_2 + \log_k n_3 + \dots + \log_k n_k) = k.$$

(Međuopštinsko takmičenje iz matematike održano u Beogradu 1988. godine).

1655. Odrediti polinom trećeg stepena sa realnim koeficijentima tako da zadovoljava uslove $P(i + i) = 3i - 4$ i $P(-i) = 4i - 1$ ($i^2 = -1$).

1656. Rešiti jednačinu

$$\sin ax \sin bx = \sin cx \sin dx$$

po x , ako su a, b, c, d uzastopni pozitivni članovi aritmetičkog niza.

1657. Dokazati da je $\operatorname{ctg} 7,5^\circ + \operatorname{tg} 67,5^\circ - \operatorname{ctg} 67,5^\circ - \operatorname{tg} 7,5^\circ = 2(3 + \sqrt{3})$.

1658. Rešiti po x jednačinu

$$2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x + \dots = 3^{x+3} + 3^{x+2} + 3^{x+1} + \dots$$

1659. Dat je beskonačni red $\log_8 x + \log_8^2 x + \log_8^3 x + \dots$

Odrediti interval u kome se mora nalaziti x da bi red bio konvergentan, zatim odrediti x tako da zbir reda bude 0,5.

1660. Stranice trougla čine aritmetički niz sa diferencijom 2. Odrediti stranice trougla ako je jedan unutrašnji ugao 120° .

1661. Četiri broja obrazuju geometrijski niz. Njihov zbir je 130, a zbir kvadrata 5044. Odrediti niz.

1662. Ako brojevi $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ čine geometrijski niz, dokazati tačnost jednakosti

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1^{-1} + a_2^{-1} + a_3^{-1} + \dots + a_n^{-1}} \right)^{\frac{n}{2}} = a_1 a_2 a_3 \dots a_n.$$

1663. Dat je beskonačan geometrijski red čiji je prvi član $a_1 = k$ ($k > 1$),

a količnik $q = \frac{k-1}{k}$. Ako je S zbir reda, a S_n zbir prvih n članova, za koje vrednosti n je tačna nejednakost $|S_n - S| < 10^{-2}$?

1664. Zbir beskonačnog geometrijskog reda je a , a zbir kvadrata njegovih članova b . Odrediti prvi član i količnik reda.

1665. Dat je niz $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

1666. Dat je niz $\sqrt{a}, \sqrt{a + \sqrt{a}}, \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}, \dots$

Dokazati da je niz konvergentan i odrediti njegovu graničnu vrednost.

1667. Realan niz (a_n) definisan je rekurentnom formulom

$$a_{n+2} = 5a_{n+1} - 6a_n, \quad a_1 = 3, \quad a_2 = 1. \text{ Odrediti opšti član niza.}$$

1668. Realan niz (a_n) definisan je rekurentnom formulom

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, \quad a_1 = a_2 = 1. \text{ Odrediti opšti član niza (Fibonačijev niz).}$$

1669. Data je funkcija definisana formulom

$$f(x) = -\log(1+x), \quad (x > -1).$$

Dokazati nejednakost

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}, \text{ gde su } x_1 \text{ i } x_2 \text{ dve vrednosti iz oblasti definisanosti funkcije } (x_1 > -1, x_2 > -1).$$

1670. Ako su α, β i γ ($\alpha < \beta < \gamma$) uglovi trougla i ako $\lg \frac{\alpha}{2}, \lg \frac{\beta}{2}, \lg \frac{\gamma}{2}$

čine aritmetički niz, tada $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ takođe čine aritmetički niz. Dokazati.

1671. Ako je

$$\log \frac{a-b}{2} = \frac{1}{2}(\log a + \log b - \log 2),$$

gde su a i b katete pravouglog trougla, odrediti uglove trougla.

1672. Ako kotangensi uglova trougla čine aritmetički niz, onda i kvadrati stranica čine aritmetički niz. Dokazati.

1673. Ako je $\lg \alpha = 3^x, \lg \beta = 3^{-x}$ i $\alpha - \beta = \frac{\pi}{6}$, odrediti x .

1674. Ako uglovi trougla α, β i γ čine aritmetički niz u datom poretku, dokazati da između stranica trougla a, b, c postoji relacija $a^2 - ac + c^2 = b^2$ i obratno.

1675. Dva ugla trougla određena su jednačinama:

$$4^{tg x} + tg y = 8, \quad 16^{tg^2 x - tg^2 y} = 8.$$

a) Odrediti tangens trećeg ugla trougla.

b) Ako je dat poluprečnik R opisane kružnice, odrediti stranice trougla.

1676. Stranice trougla čine aritmetički niz, čija je razlika d . Odrediti stranice i najveći ugao trougla ako je $\cos \alpha = \frac{13}{14}$, gde je α najmanji ugao trougla.

1677. Dokazati da je grafik funkcije $x \rightarrow y$, koja je data formulom $y^2 - 4x^2 - 12x - 9 = 0$, unija dve prave. Odrediti presek ove dve prave i ugao koji obrazuju.

1678. U trouglu ABC uglovi α, β i γ čine geometrijski niz sa količnikom 2. Dokazati da stranice trougla zadovoljavaju jednakost $a^{-1} = b^{-1} + c^{-1}$.

Rešiti jednačine (1679–1686):

$$1679. \log_{\frac{1}{8}}(2^{x+1} + \lg^2 \frac{\pi}{4}) + \log_{\frac{1}{8}}(2^x + \lg^2 \frac{\pi}{6}) = \frac{5}{3} + 3\log_{\frac{1}{8}} 5.$$

$$1680. 2^{1 - \log_2 x + \log_2^2 x - \log_2^3 x + \dots} = x.$$

$$1681. \sin^{1988} x + \cos^{1000} x = 1.$$

$$1682. \sin^{77} x + \cos^{88} x = 1.$$

$$1683. \sin x + \cos x = \sqrt{2} \cos 99x.$$

$$1684. \sin x - \sqrt{3} \cos x = 2 \sin 1999x.$$

$$1685. \operatorname{ctg} 2^x = \lg 2^x + 2 \lg 2^{x+1}.$$

$$1686. \log_2(\cos 2x + \cos \frac{x}{2}) + \log_{0.5}(\sin x + \cos \frac{x}{2}) = 0.$$

1687. Odrediti skup tačaka u Dekartovoj ravni za koje je $\sin(\pi(x+y)) > 0$.

1688. Funkcija $f(n)$ definisana u skupu prirodnih brojeva zadovoljava uslove $f(n) = f(n-1) + a^n, f(1) = 1$.
Odrediti $f(n)$.

1689. Ako pozitivni brojevi a, b, c čine geometrijski niz, tada je $a^2 b^2 c^2 (a^{-3} + b^{-3} + c^{-3}) = a^3 + b^3 + c^3$. Dokazati.

1690. Ako je $a = A \cos^2 \alpha + B \sin \alpha \cos \alpha + C \sin^2 \alpha$,
 $b = 2C \sin \alpha \cos \alpha + B \cos 2\alpha - 2A \sin \alpha \cos \alpha$,
 $c = A \sin^2 \alpha - B \sin \alpha \cos \alpha + C \cos^2 \alpha$,
tada je $b^2 - 4ac = B^2 - 4AC$.

1691. Ako za uglove trougla važi jednakost

$$\cos \alpha + \cos \beta - \cos (\alpha + \beta) = \frac{3}{2},$$

tada je trougao jednakostraničan. Dokazati.

1692. Izračunati zbir

$$\frac{\sin 1}{\cos 0 \cos 1} + \frac{\sin 1}{\cos 1 \cos 2} + \dots + \frac{\sin 1}{\cos (n-1) \cos n}.$$

REŠENJA

1. POVRŠINA (KVADRATURA) POLIGONA

1. 12 dm^2 .
2. 192 cm^2 .
3. 2,5 cm i 6 cm ili 7,5 cm i 2 cm.
4. 2 cm^2 .
5. $P_1 = a^2 (3 - 2\sqrt{2})$
 $P_2 = 2a^2 (3 - 2\sqrt{2})$, gde je a kateta jednakokrakog pravouglog trougla tj. $P_2 = 2P_1$.
6. Ugao između visina jednak je oštrom uglu paralelograma (uglovi sa normalnim kracima), tražena površina $P = 12 \text{ cm}^2$.
7. 48 cm^2 .
8. 30 m.
9. 20 cm^2 .
10. 10 cm.
11. 336 cm^2 .
12. 8316 cm^2 .
13. 204 cm^2 .
14. $78,75 \text{ cm}^2$.
15. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$.
16. 42 cm^2 i 56 cm^2 .
17. 18 cm^2 .
18. 300 cm^2 .
19. 32 cm^2 .
20. 5 cm, 12 cm i 30 cm^2 .
21. 48 cm^2 .

22. Neka je T težište ABC , CN i BM odstojanja temena B i C od medijane m , koja polazi iz temena A . Lako se pokazuje da je $CN = BM$ pa je

$$P_{ABC} = \frac{m \cdot CN}{2} + \frac{m \cdot BM}{2} = m \cdot BM$$

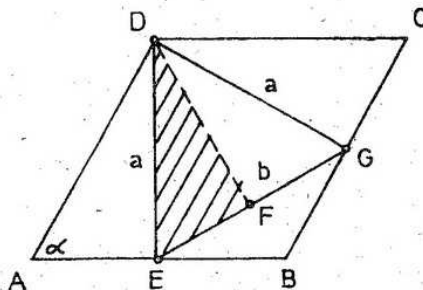
$$P_{ABT} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} m \cdot MB = \frac{1}{3} m \cdot MB$$

ili

$$P_{ABT} = \frac{1}{3} P_{ABC}.$$

23. Analogno prethodnom zadatku, lako se dolazi do tvrđenja.
24. Označi krak sa x i primeni obrasce $P = sr$ i
 $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. Tražena površina
 $P = 540 \text{ cm}^2$.
25. Iskoristiti osobine tangenčnih duži i uputstvo prethodnog zadatka
 13 cm , 15 cm , 84 cm^2 .
26. 1 cm centar upisane kružnice.
27. $R = 12,5 \text{ cm}$, $r = 3 \text{ cm}$.
28. Trougao čije su stranice dve date stranice, a treća dvostruka težišna linija ima jednaku površinu sa trouglom čija se površina traži. Dokazati. Tražena površina je 270 cm^2 .
29. 6 cm , 8 cm , 10 cm .
30. Površina romba je $P = x^2 \sin \alpha$,
 gde su x i α povezani
 relacijom $x = \frac{a}{\sin \alpha}$.
 Iz trougla DEF (sl. 1)

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{b}{2a}$$



Slika 1

$$\text{Kako je } \sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \text{ i } \cos^2 \frac{\alpha}{2} = 1 - \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

dobijamo

$$P = \frac{a^2}{\sin \alpha} = \frac{a^3}{b \sqrt{1 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2}} = \frac{2a^4}{b \sqrt{4a^2 - b^2}}.$$

31. Označi stranice sa $n-1$, n i $n+1$, zatim primeni Heronov obrazac.

Stranice su 5 cm , 6 cm i 7 cm .

32. Lako se pokazuje da je zbir površina trouglova AOB i CDO jednak polovini površine paralelograma odakle sledi tvrđenje.

$$33. a = 20 \text{ cm}, b = 5,6 \text{ cm}, P = 122,88 \text{ cm}^2.$$

$$34. 288\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

35. Iz datih uslova imamo $2a = p$, $d_1 + d_2 = m$.

$$\text{Kako je } d_1 \cdot d_2 = 2P, d_1^2 + d_2^2 = 4a^2 = p^2,$$

$$\text{iz } m^2 = (d_1 + d_2)^2 = d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2, \text{ dobijamo } m^2 - p^2 = 4P$$

$$P = \frac{m^2 - p^2}{4}.$$

(Da bi zadatak imao rešenje, mora biti $m > p$.)

36. Neka je AB tetiva kružnice, O centar kružnice. Površina manjeg trougla ABC $P_1 = \frac{r^2 \sin \alpha}{2}$. Površina većeg trougla ABC

$$P_2 = \frac{r^2 \sin \alpha}{2} + 2 \cdot \frac{r^2 \sin \left(180^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \frac{2r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2} + r^2 \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{r^2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + r^2 \sin \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cos \frac{\alpha}{2}}{1 + \cos \frac{\alpha}{2}} = \frac{2\sqrt{3} + 3}{3} \Rightarrow \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

37. $P = 2r^2 \sin^2 \alpha \sin 2\alpha$.

38. Iz pravouglog trougla ABO gde je O presek dijagonala, imamo

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2a} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}},$$

odakle izlazi da je $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \alpha = 30^\circ$.

Dakle, uglovi romba su 30° i 150° .

39. 8 cm, ili 4 cm.

40. Primenom obrazaca: $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = rs$
imamo

$$\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2P}, \quad \frac{1}{h_b} = \frac{b}{2P}, \quad \frac{1}{h_c} = \frac{c}{2P}, \quad \text{ili}$$

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{a+b+c}{2P} = \frac{2s}{2P} = \frac{r}{rs} = \frac{1}{r}.$$

41. Kako je $P = \frac{1}{2}ah_a$, $P = \frac{1}{2}bh_b$, $P = \frac{1}{2}ch_c$, tada je

$$P^3 = \frac{1}{8}abc \cdot h_a h_b h_c \Rightarrow P = \frac{\sqrt[3]{abch_a h_b h_c}}{2}.$$

42. Primenom obrazaca $P = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2} = \frac{abc}{4R}$, izlazi tvrđenje.

43. Neka je CC_1 težišna linija $\triangle ABC$, tačka D centralno simetrična sa težištem T trougla u odnosu na C_1 tada je četvorougao $ATBD$ paralelogram, pa je $P_{ABC} = P_{ATD}$.

Na osnovu zadatka 22 imamo $P_{ABC} = 3P_{ABT} = 3P_{ATD} =$

$$= 3 \sqrt{\frac{2}{3}m \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_a \right) \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_b \right) \left(\frac{2}{3}m - \frac{2}{3}m_c \right)} =$$

$$= \frac{4}{3} \sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}.$$

44. 72 cm².

45. 225 cm².

46. 600 cm².

47. $10(\sqrt{3} \pm 1)$ cm.

48. Trouglovi AED i EBD imaju jednake površine, jer imaju jednake osnove i visine. Trouglovi DFB i FCB imaju takođe jednake površine, odakle izlazi tvrđenje.

49. 48 cm².

50. Neka su m i n odseci koje čini dodirna tačka upisane kružnice na hipotenuzi, a r poluprečnik kružnice, tada su katete $m+r$, $n+r$, a površina trougla $P = r(m+n+r)$. Primenom Pitagorine teoreme $(m+r)^2 + (n+r)^2 = (m+n)^2$ imamo $r(m+n+r) = mn$, odakle izlazi da je $P = mn$.

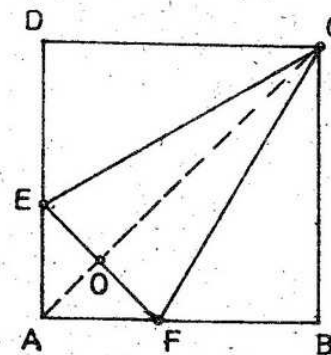
51. $P = 2(a^2 + b^2 + ab)$.

52. Na osnovu osobine tangentnog četvorougla krak

$$c = \frac{a+b}{2}, \text{ pa je } 2r = h = \sqrt{\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2} = \sqrt{ab}.$$

53. Dijagonala kvadrata $d = a\sqrt{2}$ (sl. 2). U trouglu ABD srednja linija

$$EF = \frac{d}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$



Slika 2

U jednakokrakom trouglu AOE stranica

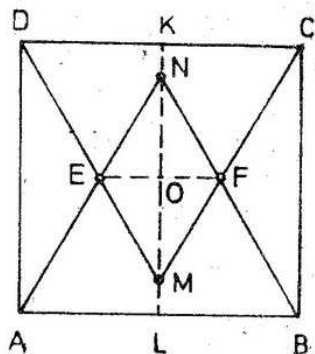
$$AO = OE = \frac{a\sqrt{2}}{4}, \text{ zato je}$$

$$OC = d - OA = \frac{3a\sqrt{2}}{4}.$$

Tražena površina

$$P = \frac{1}{2}EF \cdot OC = \frac{3}{8}a^2.$$

54. Traženi četvorougao je romb, čiji su uglovi 60° i 120° (sl. 3). Visina trougla DMC , $MK = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, odsečak



Slika 3

$ML = a - \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Veća dijagonala romba

$MN = LK - 2ML = a(\sqrt{3} - 1)$. Trougao EMF je jednakostraničan, pošto je $EM = MF = EF$.

Iz pravouglog trougla EOM imamo $EM^2 - OE^2 = OM^2$, pošto je $OE = \frac{EM}{2}$

$$OM = \frac{MN}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{3} - 1),$$

pa je

$$EM^2 - \frac{EM^2}{4} = \frac{a^2}{4}(\sqrt{3} - 1)^2,$$

odakle izlazi da je stranica romba

$$EM = \frac{a(3 - \sqrt{3})}{3}.$$

Kako je strana romba jednaka manjoj dijagonali, tražena površina je

$$P = \frac{1}{2}EF \cdot MN = \frac{1}{2}EM \cdot MN = \frac{a^2}{3}(2\sqrt{3} - 3).$$

55. $P = \frac{(a-b)^2}{2}.$

56. Neka je stranica kvadrata a , a dimenzije pravougaonika x i y , na osnovu pretpostavke imamo sistem

$$\begin{cases} xy = \frac{3}{4}a^2 \\ 2x + 2y = 4a. \end{cases}$$

Iz sistema lako se dobije jednačina

$$3x^2 - 10xy + 3y^2 = 0$$

ili

$$3\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 10\frac{x}{y} + 3 = 0,$$

odakle izlazi da je $x : y = 3 : 1$.

57. Dijagonala koja leži naspram datog ugla α deli četvorougao na dva trougla. Površinu četvorougla izraziti kao zbir ovih trouglova.

58. Imamo $a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos(180^\circ - \varphi),$

$$b^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{d_2}{2} \cos \varphi,$$

ili

$$a^2 - b^2 = d_1 \cdot d_2 \cos \varphi.$$

S druge strane površina paralelograma

$$P = \frac{1}{2}d_1 \cdot d_2 \sin \varphi,$$

odakle izlazi da je

$$P = \frac{1}{2}(a^2 - b^2) \operatorname{tg} \varphi.$$

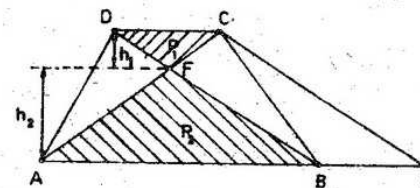
59. Neka je tačka O presek dijagonala trapeza $ABCD$ a MN visina trapeza konstruisana kroz tačku O . Trouglovi MBO i CNO su jednakokrako pravougli, pa je

$$MN = OM + ON = MB + CD = m.$$

Tražena površina je

$$P = m^2.$$

60. Konstruišimo $CE \parallel DB$ (sl. 4) i označimo visine trouglova CDF i ABF sa h_1 i h_2 . Očigledno tražena površina P jednaka je površini trougla ACE . Zato je iz sličnosti trouglova CDF i ACE



Slika 4

$$(1) \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}.$$

Takođe iz sličnosti trouglova ABF i AEC imamo

$$(2) \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{h_2}{h_1 + h_2}.$$

Iz (1) i (2) imamo

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1 + h_2}{h_1 + h_2} = 1.$$

$$\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} = \sqrt{P}$$

odakle

$$P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2.$$

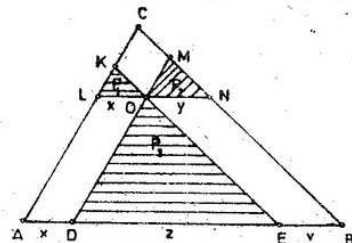
61. Neka je tražena površina P , a odsečki $AD = x$, $BE = y$ i $DE = z$ (sl. 5). Pošto je svaki dobijeni trougao sličan sa datim, imamo sledeće tri jednakosti:

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{x}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{P_2}}{\sqrt{P}} = \frac{y}{x+y+z}, \quad \frac{\sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{z}{x+y+z}$$

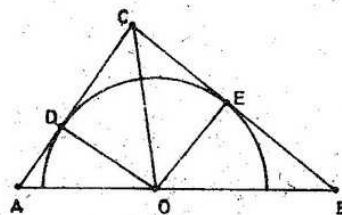
odakle izlazi

$$\frac{\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}}{\sqrt{P}} = \frac{x+y+z}{x+y+z} = 1,$$

$$\text{ili } \sqrt{P} = \sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3}, \text{ tj. } P = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2} + \sqrt{P_3})^2.$$



Slika 5



Slika 6

62. Pošto su poznate sve tri stranice trougla, po Heronovom obrascu nalazimo površinu P trougla. Spajanjem temena C sa centrom O upisane polukružnice (sl. 6), površinu trougla možemo izračunati kao zbir površina AOC i OBC tj.

$$P = \frac{1}{2} AC \cdot OD + \frac{1}{2} BC \cdot OE = \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} ar = \frac{r}{2} (a + b) \text{ odakle je}$$

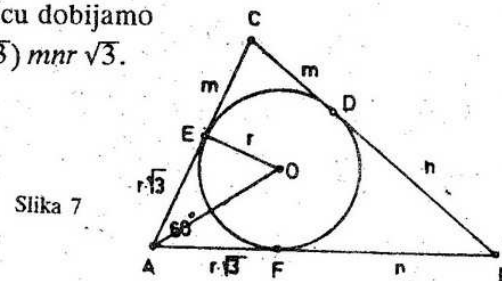
$$2r = \frac{4P}{a + b}.$$

63. Neka je poluprečnik kružnice r (sl. 7). U trouglu AOE hipotenuza $AO = 2r$, pošto je $EAO = 30^\circ$ to $AE = \sqrt{AO^2 - OE^2} = r\sqrt{3} = AF$. Kako je $EC = m$ i $BF = n$, primenom obrasca $P = sr$ imamo

$$(1) P = (m + n + r\sqrt{3})r,$$

a po Heronovom obrascu dobijamo

$$(2) P = (m + n + r\sqrt{3})mn\sqrt{3}.$$



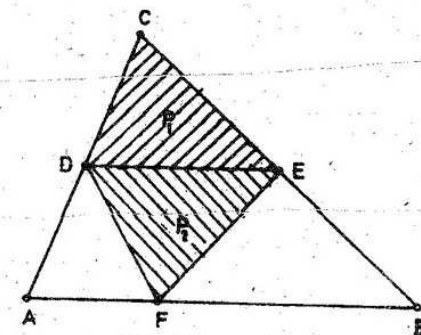
Slika 7

Iz (1) i (2) imamo

$$(m + n + r\sqrt{3})^2 r^2 = (m + n + r\sqrt{3})mn\sqrt{3},$$

ili

$$(m + n + r\sqrt{3})r = mn\sqrt{3};$$



Slika 8

$$\text{dakle, } P = mn\sqrt{3}.$$

64. Neka je tražena površina Q , a visine trouglova DCE i ADF , konstruisane iz temena C i D , h_1 i h_2 (sl. 8), tada je

$$Q = P_1 + P_2, \text{ gde je}$$

$$P_2 = P_{DEF}.$$

Kako je DE zajednička osnovica trouglova DEC i DEF tada je

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{h_2}{h_1} \text{ ili } \frac{P_2}{P_1} + 1 = \frac{h_2}{h_1} + 1.$$

$$\text{Odatle } \frac{P_2 + P_1}{P_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \text{ tj. } \frac{Q}{P_1} = \frac{h_2 + h_1}{h_1}. \quad (1)$$

Pošto je $\triangle DCE \sim \triangle ABC$ to je

$$\frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_1}{h_1 + h_2}. \quad (2)$$

Množenjem (1) i (2) imamo

$$\frac{Q}{P_1} \cdot \frac{\sqrt{P_1}}{\sqrt{P}} = \frac{h_2 + h_1}{h_1} \cdot \frac{h_1}{h_2 + h_1} = 1$$

ili

$$\frac{Q}{\sqrt{PP_1}} = 1 \Rightarrow Q = \sqrt{PP_1}.$$

65. Neka je $CM = x$, a visine trouglova ABE i CME su h_1 i h_2 . Po pretpostavci

$$\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2}\frac{a+b}{2}(h_1 + h_2).$$

$$\frac{2a}{a+b} = \frac{h_1 + h_2}{h_1} = 1 + \frac{h_2}{h_1}.$$

Iz sličnosti trouglova ABE i CME imamo

$$\frac{x}{a} = \frac{h_2}{h_1}, \text{ odakle } \frac{2a}{a+b} = 1 + \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot \frac{a-b}{a+b}.$$

66. Neka je T težište trouglova ABC , po pretpostavci

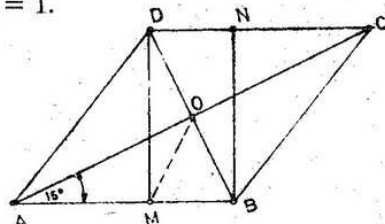
$$\angle ATC = 120^\circ, AT = \frac{2}{3}m_a, CT = \frac{2}{3}m_c,$$

pa je

$$P_{ATC} = \frac{1}{2}AT \cdot CT \cdot \sin 120^\circ = \frac{2}{9}m_a m_c \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{9}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}.$$

Na osnovu zadatka 22 imamo

$$P_{ABC} = 3P_{ATC} = 3 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$



Slika 9

67. Neka je $ABCD$ dati romb (sl. 9) u kome je upisan pravougaonik $MBND$.

U trouglu AOB

$$\angle AOB = 90^\circ, \angle BAO = 15^\circ,$$

$$BO = \frac{a}{2} \operatorname{tg} 15^\circ, \angle ABO = 75^\circ.$$

U trouglu MOB $MO = OB$, kao polovine dijagonala pravougao- nika, $\angle ABO = \angle OMB = 75^\circ$, pa je $\angle BOM = 30^\circ$.

Površina $MBND$

$$P = \frac{1}{2}BD \cdot MN, \text{ gde je } BD = MN = a \operatorname{tg} 15^\circ,$$

pa je

$$P = \frac{a^2}{4} \operatorname{tg}^2 15^\circ.$$

Kako je

$$\operatorname{tg} 15^\circ = \operatorname{tg} \frac{30^\circ}{2} = \frac{1 - \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 2 - \sqrt{3}$$

$$P = \frac{a^2}{4} (2 - \sqrt{3})^2 = \left(\frac{a(2 - \sqrt{3})}{2} \right)^2.$$

68. Primenom kosinusne teoreme

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha,$$

$$\text{pošto je } P = \frac{1}{2}bc \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2P}{bc} = \frac{4}{5}$$

to

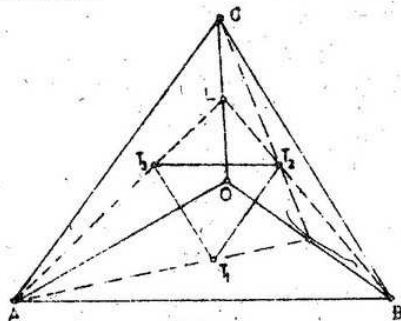
$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \pm \frac{3}{5},$$

pa je

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - \frac{6}{5}bc} \text{ ili } a = \sqrt{b^2 + c^2 + \frac{6}{5}bc}.$$

Oba rešenja zadovoljavaju postavljeni uslov, u prvom slučaju ugao α je oštar, a u drugom tup.

69. Kako je $T_3L = \frac{1}{3}AL$ i $T_2L = \frac{1}{3}BL$ (osobine težišnih linija) to je i $T_2T_3 = \frac{1}{3}AB$ (Talesova teorema). Analogno $T_1T_2 = \frac{1}{3}AC$; $T_1T_3 = \frac{1}{3}BC$ (sl. 10). Dakle stranice trougla $T_1T_2T_3$ su $\frac{1}{3}$ stranica trougla ABC . Primenom



Slika 10

Heronovog obrasca na trougao $T_1T_2T_3$ imamo

$$\begin{aligned} P_{T_1T_2T_3} &= \sqrt{\frac{a+b+c}{6} \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{a}{3} \right) \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{b}{3} \right) \left(\frac{a+b+c}{6} - \frac{c}{3} \right)} = \\ &= \frac{1}{36} \sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)} = \\ &= \frac{4}{36} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{1}{9} P_{ABC}. \end{aligned}$$

70. Neka je $ABCD$ konveksan četvorougao, čije se dijagonale seku u tački O .

Dokazaćemo da je $AO = OC$.

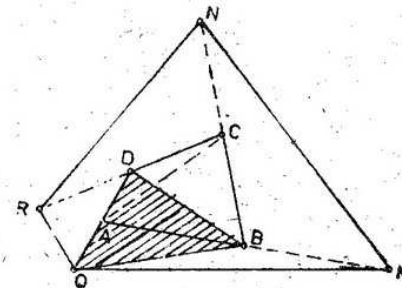
Trouglovi ABD i BCD imaju jednake površine sa zajedničkom stranom BD , odakle proizlazi da su njihove visine AK i CL prema stranici BD jednake. Iz podudarnosti pravouglih trouglova AOK i COL proizlazi jednakost $AO = OC$.

Analogno dokazujemo da je $BO = OD$.

U datom četvorouglu dijagonale se uzajamno polove tj. posmatra ni četvorougao je paralelogram.

71. U četvorouglu $ABCD$ konstruišemo dijagonalu BD (sl. 11), tada, očigledno, $P_{QBA} = P_{ABD}$ (BA – medijana).

S druge strane, $P_{QBM} = P_{QBA}$ (QB medijana), odakle proizlazi da je $P_{AQM} = 2P_{ABD}$.



Slika 11

Analogno se utvrđuje da je

$$P_{RNC} = 2P_{BCD}.$$

Konstrukcijom dijagonale AC , utvrđujemo da je

$$P_{BMN} = 2P_{ABC}, \quad P_{QRD} = 2P_{ACD}.$$

Sabiranjem dobijenih jednakosti imamo

$$P_{AQM} + P_{BMN} + P_{RCN} + P_{RDQ} = 4P_{ABCD},$$

ili

$$P_{MNRQ} = 5P_{ABCD}.$$

72. Produžimo stranice BC i AD datog četvorougla i neka se one seku u tački S i neka je ugao koji one grade φ . Ako je $AQ = QR = RD = m$ i $SD = k$, a $BM = MN = NC = n$ i $CS = l$, tada je

$$P_{ABCD} = P_{ABS} - P_{DCS} = \frac{1}{2} (l + 3k)(k + 3m) \sin \varphi - \frac{1}{2} kl \sin \varphi.$$

$$(1) \quad P_{ABCD} = \frac{3}{2} (nk + ml + 3mn) \sin \varphi,$$

$$P_{MNRQ} = P_{QMS} - P_{RNS} = \frac{1}{2} (1 + 2n)(k + 2m) \sin \varphi - \frac{1}{2} (l + n)(m + k) \sin \varphi.$$

$$(2) \quad P_{MNRQ} = \frac{1}{2} (nk + ml + 3mm) \sin \varphi.$$

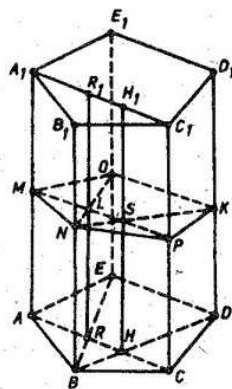
$$\text{Iz (1) i (2)} \Rightarrow P_{ABCD} = 3P_{MNRQ}.$$

II. GLAVA

2. POLIEDRI

2.1. PRIZMA I PIRAMIDA. RAVNI PRESECI PRIZME I PIRAMIDE

73. Neka je data prizma (sl. 12) i neka su M, N i P tri date tačke na susednim bočnim ivicama prizme. Ravan određena tačkama M, N i P seče prizmu po kosom preseku $MNPQ$. Treba odrediti tačku K na ivici DD_1 i tačku Q na ivici EE_1 . Dijagonalni presek AA_1C_1C seče dijagonalni presek BB_1D_1D po duži HH_1 , a dijagonalni presek BB_1E_1E po duži RR_1 . Kako prava MP pripada ravni preseka AA_1C_1C , to i ona mora seći duži HH_1 i RR_1 u tačkama S i L . Prava NS pripada ravni preseka BB_1D_1D , pa seče ivicu DD_1 u tački K , a prava NL pripada ravni preseka BB_1E_1E , pa seče ivicu EE_1 u tački Q , čime je konstruisan kosi presek $MNPQ$.
74. Presek se konstruiše slično prethodnom zadatku i on je jednako-kraki trapez čije su paralelne strane $\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, a krak $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Površina preseka je $P = 1\frac{1}{8} \text{ m}^2$.



Slika 12

75. Neka su u paralelopipedu $ABCEA_1B_1C_1E_1$ dijagonale D_1, D_2, D_3, D_4 , ivice a, b i c ; dijagonale osnova d_1, d_2 i x projekcija ivice b na ivicu a . Iz trouglova ABC i ACE lako se dokazuje da je $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ax$ i $d_2^2 = a^2 + b^2 + 2ax$, odakle proizlazi da je

$$(1) \quad d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2.$$

Primenom (1) na paralelogram AA_1C_1C imamo

$$(2) \quad D_1^2 + D_2^2 = 2d_1^2 + 2c^2,$$

a na paralelogram BB_1E_1E

$$(3) \quad D_1^2 + D_4^2 = 2d_1^2 + 2c^2.$$

Ako saberemo (2) i (3) i uzmemo u obzir (1), dobijamo

$$D_1^2 + D_2^2 + D_3^2 + D_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2.$$

76. Primeniti kosinusnu teoremu na kosougle trouglove u osnovi paralelopipeda i zatim iskoristiti Pitagorinu teoremu. Rezultat:

$$D_1 = a + b \text{ i } D_2 = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

77. Neka je traženo odstojanje x i odsečki koje podnožje odstojanja čini na dijagonalu y i z . Tada je

$$z + y = \sqrt{3} \wedge x^2 + y^2 = b^2 \wedge z^2 + x^2 = 2b^2,$$

odakle proizlazi da je traženo odstojanje $x = \frac{b\sqrt{6}}{3}$.

$$78. \quad 18 : 8 = 1,5^2 : x^2 \Rightarrow x = 1 \text{ dm.}$$

$$79. \quad 35 \text{ cm.}$$

$$80. \quad 81 \text{ cm}^2, 36 \text{ cm}^2, 9 \text{ cm}^2.$$

$$81. \quad x = \frac{aH}{a + H}.$$

$$82. \quad P = 2a^2(1 + \sqrt{2}) \left(\frac{m}{m + n} \right)^2.$$

2.2. POVRŠINA I ZAPREMINA PRIZME

$$83. \quad P = 3Q\sqrt{2}, \quad V = \frac{Q}{2}\sqrt{Q\sqrt{2}}.$$

$$84. \quad 2,5 \text{ časa.}$$

85. Određivanje ivice i visine prizme svodi se na sistem

$$4aH = 8 \wedge (a\sqrt{2})^2 + H^2 = 9 \Leftrightarrow (H = \frac{2}{a} \wedge 2a^2 + H^2 - 9 = 0)$$

$$\Leftrightarrow (a = 2 \wedge H = 1) \vee (a = \frac{\sqrt{2}}{2} \wedge H = 2\sqrt{2}).$$

Tražena zapremina iznosi $V = 4 \text{ m}^3$ ili $V = \sqrt{2} \text{ m}^3$.

$$86. \quad V = 405 \text{ dm}^3.$$

$$87. \quad P = 552 \text{ dm}^2.$$

$$88. \quad V = 121,5 \text{ dm}^3.$$

$$89. V = \frac{1}{4} \sqrt{2(d_1^2 + d_2^2 - d_3^2)(d_2^2 + d_3^2 - d_1^2)(d_3^2 + d_1^2 - d_2^2)}.$$

90. Produžena proporcija

$$\frac{a}{17} = \frac{b}{10} = \frac{c}{9} = k \Leftrightarrow a = 17k \wedge b = 10k \wedge c = 9k.$$

Primena obrasca

$$P = 2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} + (a+b+c)H$$

nalazimo da je

$$a = 34 \text{ cm}, b = 20 \text{ cm}, c = 18 \text{ cm}.$$

$$91. P = 1416 \text{ cm}^2.$$

$$92. x = \left(\frac{P(2 - \sqrt{3})}{3} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

93. Iz sistema $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p} = k \wedge a^2 + b^2 = d^2$, dobijamo

$$a = \frac{md}{\sqrt{m^2 + n^2}}, b = \frac{nd}{\sqrt{m^2 + n^2}}, c = \frac{pd}{\sqrt{m^2 + n^2}},$$

pa je površina

$$P = \frac{2d^2(mn + mp + np)}{m^2 + n^2},$$

i zapremina

$$V = \frac{mnpd^3}{\sqrt{(m^2 + n^2)^3}}.$$

94. Neka su d_1, d_2 dijagonale osnove, a osnovna ivica i H – visina paralelopipeda. Tada imamo sistem

$$a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 \wedge P = d_1H \wedge Q = d_2H,$$

odakle proizlazi da je

$$4a^2 = \frac{P^2}{H^2} + \frac{Q^2}{H^2} \Rightarrow aH = \frac{\sqrt{P^2 + Q^2}}{2}.$$

Kako je površina omotača $M = aH$, imamo $M = 2\sqrt{P^2 + Q^2}$.

$$95. V = 3 \text{ m}^3.$$

96. Visina prizme je visina bočne strane, koja je normalna na ravan osnove. Dakle, visina prizme jednaka je visini romba i jednaka je

$$h = \frac{c}{2a} \sqrt{4a^2 - c^2}, \text{ a zapremina prizme } V = \frac{ac}{8} \sqrt{12a^2 - 3c^2}.$$

$$97. 906 \text{ cm}^2; 240 \text{ cm}^2.$$

98. Po Heronovom obrascu, nalazimo da je površina bazisa $B = 10\sqrt{2} \text{ m}^2$. Visina H u funkciji nagibnog ugla i bočne ivice jednaka je $H = (10 \sin 45^\circ) = 5\sqrt{2} \text{ m}$. Rezultat: 100 m^3 .

$$99. P = 244 \text{ cm}^2, V = 120 \text{ cm}^3.$$

$$100. V = \frac{a^3}{2}.$$

$$101. P = 2592 \text{ cm}^2.$$

$$102. V = \frac{abc\sqrt{2}}{2}.$$

103. Iz sistema $d_1H = S_1 \wedge d_2H = S_2 \wedge \frac{d_1d_2}{2} = Q$, nalazimo da je $d_1d_2H^2 = S_1S_2 \wedge d_1d_2 = 2Q$,

$$\text{odakle je } H = \sqrt{\frac{S_1S_2}{2Q}}, \text{ pa je zapremina } V = QH = \sqrt{\frac{S_1S_2Q}{2}}.$$

104. Iz sistema $aH = P_1 \wedge bH = P_2 \Rightarrow (a+b)H = P_1 + P_2$, pa je zapremina prizme

$$V = \frac{(a+b)}{2} dH = (a+b)H \cdot \frac{d}{2} = \frac{(P_1 + P_2)d}{2}.$$

105. Sistem

$$aH = 9 \wedge bH = 10 \wedge cH = 17$$

ekvivalentan je sa

$$a = \frac{9}{H} \wedge b = \frac{10}{H} \wedge c = \frac{17}{H} \Rightarrow s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{18}{H}.$$

Ako zamenimo u Heronovom obrascu, nalazimo da je $H = 3 \text{ cm}$, a zapremina $V = 12 \text{ cm}^3$.

$$106. M = 16 \text{ m}^2.$$

$$107. V \approx 17854 \text{ cm}^3.$$

108. Neka je $ABCD A_1B_1C_1D_1$ paralelopiped i neka je $AB = a$, $BC = b$ i $\angle DAB = \alpha$.

Kako je $BD^2 = BD_1^2 - DD_1^2 = 17 \text{ cm}$ i $AC^2 = 65 \text{ cm}^2$, dobijamo sistem $a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha = 17 \wedge a^2 + b^2 + 2ab \cos \alpha = 65$, iz toga proizlazi da je $a^2 + b^2 = 41$, što zajedno sa jednačinom $2a + 2b = 18$ daje rešenje za a i b : $a = 5 \text{ cm}$ i $b = 4 \text{ cm}$. Dalje nalazimo da je $4ab \cos \alpha = 49 \Rightarrow \cos \alpha = 0,6 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - 0,6^2} = 0,8$. Površina osnove $B = ab \sin \alpha = 16 \text{ cm}^2$. (Rezultat $P = 104 \text{ cm}^2$, $V = 64 \text{ cm}^3$.)

109. Neka su dijagonale d_1 i d_2 ($d_1 < d_2$). Primenom kosinusne teoreme imamo $d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \alpha$ i $d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos (180 - \alpha)$. Kraća dijagonala paralelopipeda je $D = d_2$, a na osnovu Pitagorine teoreme je $H^2 = D^2 - d_1^2 = 4ab \cos \alpha \Rightarrow H = 2\sqrt{ab \cos \alpha}$. Zapremina paralelopipeda je $V = BH = ab \sin \alpha \cdot 2\sqrt{ab \cos \alpha} = 2ab \sin \alpha \sqrt{ab \cos \alpha}$.
110. Uočimo trougao čije su stranice osnovna ivica a , dijagonala tela m , dijagonala bočne strane d , $\angle(m, d) = \alpha$. Kako je taj trougao pravougli, imamo $a = m \sin \alpha$ i $d = m \cos \alpha$, a zatim nalazimo da je $H^2 = d^2 - a^2 = m^2 \cos^2 \alpha - m^2 \sin^2 \alpha \Rightarrow H = m \sqrt{\cos 2\alpha}$. Omotač prizme je $M = 4m^2 \sin \alpha \sqrt{\cos 2\alpha}$.
111. Neka je V zapremina splava, σ_v specifična težina vode ($\sigma_v = 1$), σ_{sp} specifična težina splava ($\sigma_{sp} = 0,84$) a G težina tereta. Tada je $\sigma_v \cdot V = \sigma_{sp} \cdot V + G \Leftrightarrow G = (\sigma_v - \sigma_{sp}) \cdot V = 460,8 \text{ kg}$.
112. Označimo krak trougla sa x i primenimo obrasce $P = s \cdot r$ i $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$. $V = 19440 \text{ cm}^3$.
113. Iskoristiti uputstvo prethodnog zadatka i osobine tangentskih duži. $V = 1176 \text{ cm}^3$.
114. $M = a(m+n+p)$.
115. $P = 8(9 + \sqrt{3})$; $V = 72\sqrt{3} \text{ cm}^3$ ili $P = 9(8 + 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2$; $V = 27\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
116. $V = 12\sqrt{3} \text{ cm}^3$.
117. $V = 1680 \text{ cm}^3$.
118. $P = 1152 \text{ cm}^2$; $V = 2448 \text{ cm}^3$.

2.3. POVRŠINA I ZAPREMINA PIRAMIDE I ZARUBLJENE PIRAMIDE

119. $P = 360 \text{ cm}^2$; $V = 400 \text{ cm}^3$.
120. $V = 640 \text{ m}^3$.
121. $V = 360 \text{ cm}^3$.
122. $B = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2}$, $H = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.
123. $V = \frac{1}{12} d^3 \tan \beta \sin \alpha$.

124. Ivica odsečene trostrane piramide je $x = \frac{a}{2}(2 - \sqrt{2})$, tražena zapremina je $V = a^3 - \frac{8}{6} \left(\frac{a(2 - \sqrt{2})}{2} \right)^3 = \frac{7a^3}{6} (\sqrt{2} - 1)$.
125. $P \approx 448,04 \text{ cm}^2$, $V = 448 \text{ cm}^3$.
126. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{12}$.
127. $V = \frac{a^3 \sqrt{2}}{3}$.
128. $V = 960 \text{ cm}^3$; $P \approx 1163,27 \text{ cm}^2$.
129. $P = 4(1 + \sqrt{73}) \text{ dm}^2 \approx 38,18 \text{ dm}^2$.
130. $V \approx 889 \text{ cm}^3$.
131. $P = 2r(h + r)\sqrt{3}$.
132. Iz sličnosti trouglova nalazimo da je ivica kocke $\frac{a\sqrt{2}}{3}$, a zapremina $V_1 = \frac{2a^3\sqrt{2}}{27}$. Zapremina oktaedra je $V_2 = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$, a odnos $V_2 : V_1 = 9 : 2$.
133. $H = 2 \sqrt[3]{\frac{V\sqrt{3}}{3}}$.
134. Bočne strane piramide su pravougli trouglovi, čije su katete a , b i c . Ako se uzme da je osnova piramide jedna bočna strana, na primer, trougao sa katetama a i b , onda je visina $H = c$. Zapremina piramide je $V = \frac{1}{6} abc$.
Kako je $ab = 6 \text{ cm}^2 \wedge bc = 8 \text{ cm}^2 \wedge ca = 12 \text{ cm}^2 \Rightarrow (abc)^2 = 6 \cdot 8 \cdot 12 \text{ cm}^6 \Rightarrow abc = 24 \text{ cm}^3$,
pa je $V = \frac{1}{6} 24 \text{ cm}^3 = 4 \text{ cm}^3$.
135. 1:7.
136. $V = 109 \text{ m}^3$.
137. $V = 104 \text{ cm}^3$.
138. $\frac{21}{2} \text{ m}^3$.

$$139. V = \frac{26\sqrt{3}}{3} \text{ m}^3.$$

$$140. M = \frac{3(a^2 - b^2)}{4}.$$

$$141. x = \sqrt{3a^2 - \frac{4P}{\sqrt{3}}}.$$

142. Ugao pri vrhu karakterističnog trougla pravilnog dvanaestougla iznosi 30° , pa je njegova površina

$$B_1 = 12 \cdot \frac{R \cdot R}{2} \sin 30^\circ = 3R^2.$$

Slično se nalazi da je $B_2 = 3r^2$. Visina zarubljene piramide je

$$H = (R-r) \operatorname{tg} 60^\circ = (R-r) \sqrt{3}.$$

Zapremina zarubljene piramide je

$$V = \frac{\sqrt{3}}{3} (R-r) (3R^2 + \sqrt{9R^2 r^2} + 3r^2) = \sqrt{3} (R^3 - r^3).$$

143. Visina trapeza je $h = 4\sqrt{3}$ cm, a njegova dijagonala je $d = 8$ cm. Presečna tačka dijagonala deli dijagonalu na odsečke dužine 5 cm i 3 cm, odakle se nalazi da je visina piramide $H = 5\sqrt{3}$ cm, pa je zapremina $V = 80 \text{ cm}^3$.

$$144. M = 10 \sqrt{19} \text{ cm}^2.$$

$$145. 1 : \sqrt{2}.$$

$$146. V = \frac{\sqrt{3} (a^3 - b^3)}{6}.$$

$$147. V = \frac{1}{9} S \sqrt{S} \sqrt{27}.$$

$$148. M = 192 \text{ cm}^2.$$

149. Osnova piramide je pravougli trougao, čije su katete $x = \frac{2P}{a}$ i

$y = \frac{2Q}{b}$, a visina piramide je zajednička ivica a , pa je zapremina

$$V = \frac{1}{3} \frac{xy}{2} a = \frac{2PQ}{3b}.$$

$$150. V = \frac{mnc^2 \sqrt{4b^2 - c^2}}{12 (m^2 + n^2)}.$$

$$151. P_1 : P_2 = 9 : 1; V_1 : V_2 = 27 : 1.$$

$$152. P = \frac{a^2}{2} (1 + \sqrt{7}); V = \frac{a^3}{12} \sqrt{3}.$$

$$153. V = \frac{(a^3 - b^3) \sqrt{2}}{6}.$$

$$154. V = \frac{(a^3 - b^3) \sqrt{3}}{12}.$$

155. Osnove zarubljene piramide su slični poligoni, pa su tačne proporcije

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{O}{O_1} \wedge \frac{B}{B_1} = \frac{a^2}{a_1^2}.$$

Ako se uzme u obzir i Heronov obrazac, lako se određuje da je $V = 1900 \text{ m}^3$.

$$156. V = 250 (\sqrt{2} + 1) \text{ m}^3.$$

$$157. V = \frac{9}{4} a^3 \sqrt{11}.$$

$$158. V = \left(\frac{l^3}{3} \sin 2\alpha \sin \beta \cos^2 \beta \right) \text{ cm}^3 \approx 3938 \text{ cm}^3.$$

$$159. V = \left(\frac{4}{3} H^3 \operatorname{tg}^2 \beta \right) \text{ cm}^3 \approx 519,99 \text{ cm}^3.$$

$$160. V = \left(\frac{2B}{3\sqrt{3}} \sqrt{\frac{B}{\sqrt{3}}} \operatorname{ctg} \beta \right) \text{ cm}^3 \approx 100,12 \text{ cm}^3.$$

$$161. V = \frac{5a^3}{24} \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg}^2 36^\circ.$$

162. Neka je $ABCD$ data piramida, tačka O podnožje visine, DE apotema piramide. Iz trougla DOE imamo

$$H = OE \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} CE \operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{3} \frac{a\sqrt{3}}{2} \operatorname{tg} \varphi \text{ i } DE = \frac{a\sqrt{3}}{6 \cos \varphi},$$

pa je

$$P = \frac{a^2 \sqrt{3} \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi} \text{ i } V = \frac{a^3 \operatorname{tg} \varphi}{24}.$$

163. Visina piramide je $H = r \operatorname{tg} \varphi$. Ako su $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ stranice poligona, onda je površina osnove

$$B = \frac{1}{2} a_1 r + \frac{1}{2} a_2 r + \frac{1}{2} a_3 r + \dots + \frac{1}{2} a_n r =$$

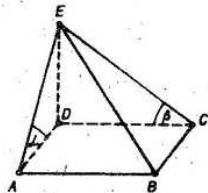
$$= \frac{1}{2} r (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n) = \frac{1}{2} r \cdot 2p = rp,$$

pa je zapremina piramide

$$V = \frac{r^2 p \operatorname{tg} \varphi}{3}.$$

$$164. V = \frac{1}{12} (a^3 - b^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

165. Ako su strane ADE i CDE (sl. 13) normalne na ravan osnove, onda je ivica DE visina piramide. Ugao DAE je nagibni ugao bočne strane ABE , jer je strana ADE normalna na ivicu AB , tj. $\angle DAE = \alpha$. Slično je $\angle DCE = \beta$.



Slika 13

Zapremina piramide je

$$V = \frac{1}{3} DA \cdot DC \cdot DE = \frac{1}{3} H^3 \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

166. Zapremina piramide V i zapremina piramide iznad ravni V_1 stoje u odnosu $V:V_1 = 2:1$. Ako je visina piramide H i x rastojanje vrha piramide od ravni preseka, onda je

$$V:V_1 = BH:B_1x, \text{ tj. } \frac{BH}{B_1x} = \frac{2}{1},$$

jer je $V:V_1 = 2:1$.

$$\text{Kako je } \frac{B}{B_1} = \frac{H^2}{x^2} \text{ to je } \frac{H^3}{x^3} = \frac{2}{1} \Rightarrow x = \frac{H}{\sqrt[3]{2}}.$$

Primenom Pitagorine teoreme imamo

$$H^2 = l^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{4l^2 - a^2 - b^2}{4},$$

pa je traženo rastojanje

$$x = \frac{\sqrt{4l^2 - a^2 - b^2}}{2\sqrt[3]{2}}$$

$$167. x = H \sqrt[3]{\frac{m}{m+n}}.$$

168. Karakteristični trougao ABO pravilnog petougla ima stranice

$$AO = OB = R \text{ i } AB = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}}, \text{ a ugao } AOB = 72^\circ. \text{ Površina}$$

$$\text{bazisa je } B = \frac{5a^2}{4 \operatorname{tg} 36^\circ}, \text{ a visina } H = a \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 36^\circ}}.$$

Zapremina piramide je

$$V = \frac{5a^2}{12 \operatorname{tg} 36^\circ} \sqrt{1 - \frac{1}{4 \sin^2 36^\circ}}.$$

$$\text{Kako je } \operatorname{tg} 36^\circ = \sqrt{5 - 2\sqrt{5}}, \text{ a } \sin 36^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}},$$

zapremina se svodi na oblik

$$V = \frac{5a^3}{12} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{10}}.$$

169. Osnovna ivica piramide je $a = 2R \sin 18^\circ$, visina je $H = R(1 + \sin 18^\circ)$, a apotema $h = R\sqrt{2}(1 + \sin 18^\circ)$.

Površina omotača je

$$M = 10R^2 \sin 18^\circ \sqrt{2}(1 + \sin 18^\circ).$$

$$\text{Kako je } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}, \text{ onda je } M = 5R^2.$$

170. Osnovna ivica prizme je 8 cm ili 4 cm, a visina prizme 5 cm ili 10 cm. Odnos zapremina je 2:9 ili 4:9.

171. a) 1:9; b) 2:9.

$$172. V = 200 \text{ cm}^3.$$

$$173. V = 20 \text{ dm}^3.$$

$$174. V = 14 \text{ cm}^3.$$

$$175. a = 15 \text{ cm}; P = \frac{225}{4}(\sqrt{3} + \sqrt{7}) \text{ cm}^2; V = \frac{375\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^3.$$

$$176. x = \frac{60\sqrt{2}}{12 + 5\sqrt{2}}.$$

$$177. P = \frac{1}{2} d^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos \beta}\right).$$

$$178. V = 2400 \text{ cm}^3.$$

$$179. V_1 = \frac{8192}{3} \text{ cm}^3; V_2 = \frac{800}{3} \text{ cm}^3; V_3 = \frac{7392}{3} \text{ cm}^3.$$

III. GLAVA

3. KRUG

3.1. DUŽINA KRUGA I KRUŽNOG LUKA.
POVRŠINA KRUGA, KRUŽNOG ISEČKA I ODSEČKA

180. Poluprečnik r upisanog kruga C_1 u jednakokranični trougao je $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, a poluprečnik opisanog kruga C_2 je $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Traženi odnos $C_1 : C_2 = 1 : 2$.

181. Iz jednačine $2R\pi - 6R = 7 \Rightarrow R = \frac{7}{2\pi - 6}$ cm. Dalje sledi

$$c = 2R\pi = \frac{14\pi}{2\pi - 6} \approx 157 \text{ cm}.$$

182. 409 obrtaja.

183. Neka je r broj poluprečnika kruga i R poluprečnik kružnog luka. Iz jednačine

$$2r\pi = \frac{R\pi\alpha}{180} \text{ proizlazi da je } r = 1\frac{1}{3} \text{ cm}.$$

184. $\alpha = 144^\circ$.

185. a) $\frac{41}{3\pi}$; b) $\frac{1351}{8\pi}$.

186. $\pi : 4$.

187. $\pi \approx 3,0625$.

188. Trapez je tangentni pa su zbrovi naspramnih stranica jednaki, tj. $21 + b = 15 + 13 \Leftrightarrow b = 7$ cm, gde je b manja osnovica trapeza. Poluprečnik kruga r jednak je polovini visine trapeza. Trougao čija je osnovica razlika osnovica trapeza, a ostale dve stranice kraci trapeza, po Heronovom obrascu, ima površinu 84 cm^2 . Iz površine nalazimo visinu $h = 12$ cm. Poluprečnik kruga $r = 6$ cm, a $P = 36\pi \text{ cm}^2$.

189. Primenom sličnosti pravouglih trouglova nalazimo katete trougla (15 i 20). Zatim, iz obrasca $P = s \cdot r$ određujemo poluprečnik kruga. Rezultat: $25\pi \text{ cm}^2$.

190. Površina trougla određuje se Heronovim obrascem. Ako je tačka O središte kruga, površina trougla ABC može se izraziti kao zbir površina trouglova AOC i BOC , tj.

$$\frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} = P_{ABC}$$

odakle nalazimo r (rezultat: $144\pi \text{ cm}^2$).

191. Poluprečnik kruga se određuje iz obrasca $R = \frac{abc}{4P}$, gde je P površina trougla, čije su stranice osnovica $a = 14$ cm, krak $c = 10$ cm i dijagonala trapeza $d = 8\sqrt{2}$ cm (rezultat: $P = 50\pi \text{ cm}^2$).

192. Neka su a i b katete ($a < b$) i c hipotenuza trougla. Tetiva koja spaja teme pravog ugla sa tačkom preseka hipotenuze i polukruga jeste hipotenuzina visina pravouglog trougla. Dužina polukruga je $l = \frac{b}{2}\pi$. Iz sličnosti trouglova dobijamo

$$\frac{b}{h_c} = \frac{a}{p} \Leftrightarrow b = \frac{a \cdot h_c}{p} = \frac{a \cdot h_c}{\sqrt{a^2 - h_c^2}} = 40 \text{ cm},$$

gde je p projekcija katete a na hipotenuzu.

Dakle, $l = 20\pi$ cm.

193. Neka je: OAB karakteristični trougao pravilnog mnogougla, osnovica trougla a , krak R i apotema r . Primenom Pitagorine teoreme imamo

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2 - r^2 \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = R^2 \pi - r^2 \pi \Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi = (R^2 - r^2) \pi,$$

čime je dokaz završen.

194. Ako su osnovice trapeza $2x$ i $2y$, koristeći teoremu o tangentnim dužima konstruisanim iz date tačke van kruga na krug, dobijamo da je krak $x + y$. Iz formule za površinu trapeza i Pitagorine teoreme dobijamo sistem jednačina

$$x + y = 5 \wedge (x + y)^2 - (x - y)^2 = 16,$$

odakle nalazimo da su stranice 8 cm, 5 cm i 2 cm.

195. 20 cm.

196. 4,2 cm i 5,8 cm.

197. $9\pi \text{ cm}^2$.

198. $\alpha \approx 71^\circ 53'$, $P = 10 \text{ cm}^2$.

199. $R = 2\sqrt{2}$ cm, $t = 4$ cm.

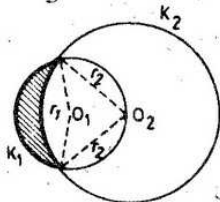
200. $\frac{3}{2} \approx 86^\circ; 15 \text{ m.}$

201. Ako se iskoristi da je $32^\circ 15' = \left(32 + \frac{15}{60}\right)^\circ$, dobija se da je kružni luk $l = 109 \text{ cm.}$

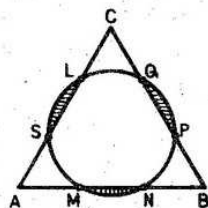
202. $l = \frac{2}{3} \pi r.$

203. Kriva je sastavljena iz dva kružna luka (sl. 14). Jedan kružni luk pripada kružnici K_1 i njemu odgovara centralni ugao od 120° , a drugi pripada kružnici K_2 i njemu odgovara centralni ugao od 60° . Ako je l merni broj dužine tražene lunele, onda je

$$l = \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi\sqrt{3}}{3} = 2\pi \frac{(2 + \sqrt{3})}{3}.$$



Slika 14



Slika 15

204. Tražena površina se sastoji od površine pravilnog šestougla $MNPOLS$ (upisan je u krugu) i površina tri osenčena kružna odsečka (sl. 15). Ako je tražena površina P , površina šestougla P_1 , površina kruga P_2 , a P_3 zbir površina tri kružna odsečka, onda je $P = P_1 + P_3 \wedge P = P_1 - P_3$, odakle nalazimo da je

$$P = \frac{1}{2} (P_1 + P_2).$$

Kako je $P_2 = \pi \text{ cm}^2$, a $P_1 = \frac{6\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \text{ cm}^2$, dobijamo

$$P = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{3\sqrt{3}}{2} \right) \text{ cm}^2 = 2,86 \dots \text{ cm}^2.$$

205. $P = \frac{1}{6} (4\pi - 3\sqrt{3}) \text{ cm}^2 = 1,228 \dots \text{ cm}^2.$

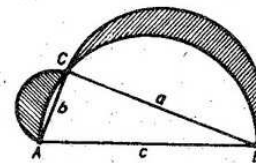
206. Zbir $P_1 + P_2$ dobija se ako se saberu površine polukrugova konstruisanih nad katetama sa površinom trougla i od tog zbira oduzme se površina polukruga konstruisanog nad hipotenuzom (sl. 16). Dakle,

$$P_1 + P_2 = P_{ABC} + \frac{1}{2} \left(\frac{b}{2} \right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{c}{2} \right)^2 \pi.$$

Kako je, prema Pitagorinoj teoremi, $a^2 + b^2 - c^2 = 0$, to je

$$\frac{\pi}{8} (a^2 + b^2 - c^2) = 0, \text{ pa je } P_1 + P_2 = P_{ABC} = \frac{1}{2} ab.$$

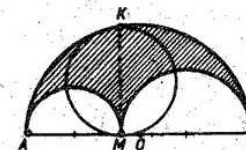
Zbir površina Hipokritovih lunela jednak je površini pravouglog trougla, što znači da je nezavisna od π .



Slika 16

207. Čitava površina se može izraziti na sledeći način (sl. 17):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \left(\frac{AB}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{AM}{2} \right)^2 \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{MB}{2} \right)^2 \pi \\ &= \frac{1}{8} \pi (AB^2 - AM^2 - MB^2) \\ &= \frac{1}{8} \pi ((AM+MB)^2 - AM^2 - MB^2) \\ &= \frac{1}{8} \pi (2AM \cdot MB) = \frac{1}{4} \pi \cdot AM \cdot MB. \end{aligned}$$



Slika 17

Kako je trougao ABK pravougli, to je

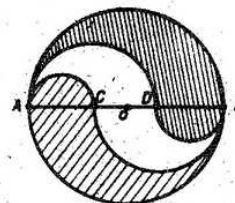
$$MK^2 = AM \cdot MB, \text{ pa je } P = \frac{1}{4} \pi MK^2 = \pi \left(\frac{MK}{2} \right)^2,$$

čime je tvrdjenje dokazano.

208. a) $P = 4r^2 \sqrt{3}$; b) $P = \frac{3r^2 \sqrt{3}}{2}$; c) $P = 4r^2 \sqrt{3} - \frac{11r^2 \pi}{6}.$

209. Površina svetlije osenčenog dela (sl. 18):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} r^2 \pi - \frac{1}{2} \left(\frac{2r}{3} \right)^2 \pi + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{3} \right)^2 \pi \\ &= \frac{1}{2} r^2 \pi - \frac{2}{9} r^2 \pi + \frac{1}{18} r^2 \pi = \frac{1}{3} r^2 \pi. \end{aligned}$$



Slika 18

predstavlja trećinu površine kruga.

Lako se dokazuje da je tamnije osenčena površina podudarna prvoj, tj. ona je $\frac{1}{3} r^2 \pi$, odakle sledi tvrdjenje.

210. Pošto je ugao $AOB = 60^\circ$ i ugao $BOC = 30^\circ$, površina dela kruga između tetiva može se izraziti i u obliku:

$$P = \frac{r^2 \pi 150^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin 150^\circ}{2} - \left(\frac{r^2 \pi 30^\circ}{360^\circ} - \frac{r^2 \sin 30^\circ}{2} \right)$$

$$= \frac{5r^2 \pi}{12} - \frac{r^2 \pi}{4} - \frac{r^2 \pi}{12} + \frac{r^2 \pi}{4} = \frac{1}{3} r^2 \pi,$$

što je i trebalo dokazati.

211. $l = n \cdot \frac{\frac{a}{n} \pi 60^\circ}{180^\circ} = \frac{a\pi}{3}$. Dužina linije ne zavisi od broja n .
212. $l = \frac{10}{3} r\pi$, tj. dužine konture je $\frac{5}{3}$ od obima jednog od krugova.
213. Označimo presečne tačke krugova K_1 i K_2 sa D i E (sl. 19). Neka je P_1 površina kružnog iseka DBE , a P_2 površina figure između luka DE kruga K_1 i duži DB i BE . Tada je tražena površina $P = P_1 - P_2$.

Dalje je $P_1 = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2} \right)^2 \pi = \frac{a^2 \pi}{24}$,

tj. šestina kruga, i

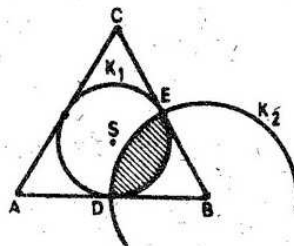
$$P_2 = \frac{1}{3} \left(\frac{a^2 \sqrt{3}}{4} - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6} \right)^2 \pi \right) = \frac{a^2}{36} (3\sqrt{3} - \pi).$$

Tražena površina je

$$P = \frac{a^2}{72} (5\pi - 6\sqrt{3}),$$

pa za $a = 6$ cm imamo

$$P = \frac{1}{2} (5\pi - 6\sqrt{3}) \text{ cm}^2 \approx 2,66 \text{ cm}^2.$$



Slika 19

IV. GLAVA

4. OBRTNA TELA

4.1. VALJAK

214. 2 cm.
215. $36,74 \text{ m}^2$.
216. $P \approx 69,28 \text{ cm}^2$.
217. $V = \frac{a^3}{4\pi}$.
218. $H = 7r$.
219. Za r .
220. $V = \frac{b^3 \pi}{3}$.
221. 4 : 1.
222. $4r^2 (2\sqrt{3} - 3)$.
223. $x = \frac{r(2H + r)}{H}$.
224. a) $P = 2H\sqrt{r^2 - d^2}$; b) $P = rH$; $V_1 = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12} r^2 H$;
 $V_2 = \frac{10\pi + 3\sqrt{3}}{12} r^2 H$.
225. $V = \frac{a^3 \pi \sqrt{3}}{8}$.
226. $P = (2m + n) \left(\frac{2\pi V^2}{m^2 n} \right)^{\frac{1}{3}}$.
227. $P = 1428 \pi \text{ cm}^2 \approx 4486,19 \text{ cm}^2$.
228. 0,75 mm.
229. $H = \frac{M}{\sqrt{2\pi(P - M)}} \text{ m} \approx 4,99208 \text{ m}$.
230. $P = 8a\pi, V = 2a^2\pi$.
231. $(x = 6 \wedge y = 4) \vee (x = 4 \wedge y = 6)$. Razlika površina je 40π .

$$232. P = 144\sqrt{3} \text{ cm}^2, V = 135\sqrt{3} \text{ cm}^3.$$

$$233. 324 \pi \text{ cm}^3.$$

234. Iz pretpostavke proizlazi da je

$$H = d \sin \alpha \text{ i } 2\pi R = d \cos \alpha \Rightarrow R = \frac{d \cos \alpha}{2\pi},$$

$$\text{pa je zapremina valjka } V = \frac{d^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{4\pi}.$$

$$235. V = 120\pi \text{ cm}^3.$$

$$236. V = \frac{b^3 \operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2}} \pi.$$

237. Da bi omotač valjka bio podeljen na dva dela, ravan mora da sadrži i neku tačku gornje osnove. Ako je prečnik osnove $2R$, visina je $H = 2R\sqrt{3}$. Iz površine dobijamo da je $R = 1$ i $H = 2\sqrt{3}$. Zapremina valjka je $V = 2\pi\sqrt{3}$.

$$238. V_1 - V_2 = 922 \frac{1}{4} \pi \text{ cm}^3.$$

$$239. V_1 : V_2 = 3 : 4.$$

$$240. P = 62,5 \pi \text{ cm}^2, V = 62,5 \pi \text{ cm}^3.$$

$$241. V_1 : V_2 = \pi : 5.$$

$$242. P_1 : P_2 = 6\pi : 25, V_1 : V_2 = 4\pi : 25.$$

4.2. KUPA I ZARUBLJENA KUPA

$$243. r = 3,5 \text{ cm}, s = 12,5 \text{ cm}.$$

$$244. 8 \text{ cm}.$$

$$245. P = 90\pi \text{ cm}^2 \approx 282,7 \text{ cm}^2, V = 100\pi \text{ cm}^3 \approx 314 \text{ cm}^3.$$

$$246. 1 : 3.$$

$$247. P = \frac{p^2}{4\pi} (1 + \sqrt{2}); V = \frac{p^3}{24\pi^2}.$$

$$248. P_1 = 2r(r + \sqrt{2H^2 + r^2}), P_2 = 4r(r + \sqrt{H^2 + r^2}).$$

$$249. V = \frac{2\pi s^3 \sqrt{2}}{81}.$$

251. Odrediti površinu trougla po Heronovom obrascu. Iz površine odrediti visinu. Visina je poluprečnik zajedničke osnove za obe kupe, itd.

$$V_c = 448\pi \text{ cm}^3, V_b = \frac{9408\pi}{17} \text{ cm}^3 \text{ i } V_a = \frac{4704\pi}{5} \text{ cm}^3.$$

252. Neka je V_a zapremina tela koje nastaje rotacijom trougla ABC oko stranice BC . Tada mogu nastati sledeća tri slučaja:

a) projekcija temena A na BC je u tački D između B i C ; tada je zapremina V_a jednaka zbiru zapremina dveju kupa sa zajedničkom osnovom, poluprečnikom AD i visinama CD i BD tj.

$$V_a = \frac{1}{3}\pi AD^2 BD + \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot CD = \frac{1}{3}\pi AD^2 (BD + CD) = \\ = \frac{1}{3}\pi BC \cdot AD^2.$$

b) Ako tačka D pripada produžetku stranice BC i tačka C je između B i D , onda je zapremina V_a jednaka razlici zapremina dveju kupa, tj.

$$V_a = \frac{1}{3}\pi AD^2 BD - \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot CD = \frac{1}{3}\pi AD^2 (BD - CD) = \\ = \frac{1}{3}\pi BC \cdot AD^2.$$

Isti slučaj je i kada tačka pripada produžetku stranice BC , tako da je tačka B između C i D .

c) Ako se tačka D poklapa sa tačkom C , dobijeno rotaciono telo je kupa sa poluprečnikom osnove $AD = AC$ i visinom BC , pa je $V_a = \frac{1}{3}\pi AD^2 \cdot BC$.

Isti rezultat se dobija i kada se tačka D poklapa sa tačkom B . Dakle, u sva tri slučaja zapremine su jednake.

Kako je $BC = a$ i $AD = h_a$, imamo

$$V_a = \frac{1}{3}\pi \cdot a \cdot h_a^2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a^2 \cdot h_a^2}{a}.$$

Kako je $a \cdot h_a = 2P$, gde je $P = P_{ABC}$, zapremina je

$$V_a = \frac{4}{3}\pi \frac{P^2}{a}.$$

Slično nalazimo da je

$$V_b = \frac{4}{3}\pi \frac{P^2}{b} \text{ i } V_c = \frac{4}{3}\pi \frac{P^2}{c},$$

odakle proizlazi tvđenje

$$V_a : V_b : V_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}.$$

$$253. V = \frac{6^3 \pi}{8}$$

$$254. a) V = \frac{2\sqrt{3}\pi r^3}{3}; \quad b) V = \frac{2\sqrt{3}\pi r^3}{9}; \quad c) V = \frac{2\pi r^3\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{3}$$

$$255. V = 10\pi \text{ cm}^3, \quad P = 28\pi \text{ cm}^2.$$

$$256. V = \left(\frac{60}{5+3\sqrt{2}}\right)^3 \text{ cm}^3.$$

$$257. V = 96\pi \text{ cm}^3.$$

$$258. P = 4080\pi \text{ cm}^2, \quad V = 19200\pi \text{ cm}^3.$$

259. Neka su a i b katete, c hipotenuza, h hipotenuzina visina pravougloug trougla, a p i q projekcije kateta a i b na hipotenuzi. Tada je: $a^2 = cp$, $b^2 = cq$ i $h^2 = pq$ (primena sličnosti na pravougli trougao). Zapremine nastalih rotacionih tela su:

$$V_a = \frac{ab^2\pi}{3}, \quad V_b = \frac{a^2b\pi}{3} \quad \text{i} \quad V_c = \frac{h^2c\pi}{3}.$$

Iz toga proizlazi da je

$$\begin{aligned} \frac{1}{V_a^2} + \frac{1}{V_b^2} &= \frac{9}{a^2b^4\pi^2} + \frac{9}{a^4b^2\pi^2} = \frac{9}{a^2b^2\pi^2} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = \frac{9c^2}{a^4b^4\pi^2} \\ &= \frac{9c^2}{(cp)^2 \cdot (cq)^2 \pi^2} = \frac{9}{c^2(pq)^2 \pi^2} = \frac{9}{h^4c^2\pi^2} = \frac{1}{\left(\frac{h^2c\pi}{3}\right)^2} = \frac{1}{V_c^2}. \end{aligned}$$

$$260. P = 540 \text{ cm}^2, \quad V = 1050\pi \text{ cm}^3,$$

$$261. P = 1608\pi \text{ dm}^2, \quad V = 3840\pi \text{ dm}^3.$$

262. Neka je s poluprečnik kružnog isečka površine M i centralnog ugla 270° ; tada iz obrasca $M = \frac{s^2\pi \cdot 270^\circ}{360^\circ}$ dobijamo

$$s = 2\sqrt{\frac{M}{3\pi}}, \text{ pa je dužina kružnog luka}$$

$$b = \frac{2\sqrt{\frac{M}{3\pi}} \pi \cdot 270^\circ}{180^\circ} = \sqrt{3M\pi}.$$

Kako je obim osnove kupe jednak dužini kružnog luka, to je $2r\pi = \sqrt{3M\pi} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3M\pi}}{2\pi}$. Primenom Pitagorine teoreme imamo

$H^2 = s^2 - r^2$, odakle nalazimo da je $H = \sqrt{\frac{7M}{12\pi}}$, pa je zapremina kupe

$$V = \frac{M}{8} \sqrt{\frac{7M}{3\pi}}.$$

$$263. \alpha = 180^\circ.$$

$$264. P = 113\frac{1}{3}\pi \text{ cm}^2, \quad V = 88\frac{8}{9}\pi \text{ cm}^3.$$

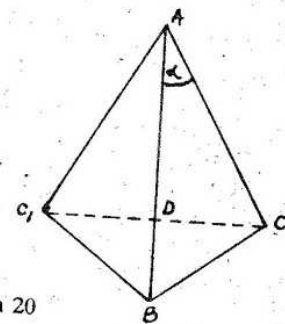
$$265. V = \frac{\pi a^3 \operatorname{ctg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}.$$

266. Na slici 20 prikazan je osni presek tela pri rotaciji trougla ABC oko stranice AB . To telo se sastoji iz dva konusa i njegova zapremina je

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot AD + \frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot DB \\ &= \frac{\pi}{3} DC^2 (AD + DB) = \frac{\pi}{3} DC^2 \cdot AB. \end{aligned}$$

Kako je $DC \cdot AB = 2P$ i $DC = b \sin \alpha$, to je zapremina rotacionog tela

$$V = \frac{2\pi Pb \sin \alpha}{3}.$$



Slika 20

267. Neka je S vrh konusa, a CD duž po kojoj ravan seče osnovu. Konstruišimo prečnik $AB \perp CD$ i neka se AB i CD seku u tački K . Po pretpostavci je $\angle AKS = \beta$, $\angle CSD = \alpha$, a visina H konusa je $H = SK \sin \beta$. Kako je $Q = SK \cdot CK = SK^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, iz trougla CKS imamo $CK = SK \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$, pa je $SK = \sqrt{Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$, $H = \sqrt{Q \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}} \sin \beta$.

268. Površine na koje je podeljen trougao odnose se kao 5 : 4. Površine rotacionih tela koje nastaju su $P_1 = P_2 = \frac{4\pi a^2 \sqrt{3}}{9}$, a zapremine rotacionih tela su $V_1 = V_2 = \frac{2\pi a^3}{27}$.

269. Ako je $SM = SB = 1$, $OB = R$, $SM \perp SB$ (sl. 21), onda je luk $OMDB = \frac{2\pi}{3}$ radijana, a $BM = R\sqrt{3}$. Kako je ugao

$MSB = 90^\circ$, iz trougla SOM imamo

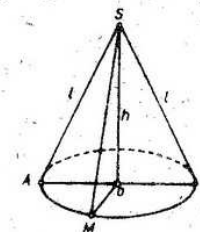
$$(1) \quad 2l^2 = 3R^2,$$

a iz trougla SOB imamo

$$(2) \quad l^2 = R^2 + H^2.$$

Iz (1) i (2) dobija se $R^2 = 2H^2$.

Zapremina kupe je $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{2}{3}\pi h^3$.



Slika 21

270. $M = 2\pi Q$.

271. Približno 26,95 cm.

272. Produžna proporcija $r : R : s = 1 : 2 : 5 \Leftrightarrow$

$$\frac{r}{1} = \frac{R}{2} = \frac{s}{5} = k \Leftrightarrow (r = k \wedge R = 2k \wedge s = 5k).$$

Površina omotača zarubljene kupe $M = 15\pi k^2$, a površina zarubljene kupe je $P = 20\pi k^2$, pa je njihov odnos $M : P = 3 : 4$.

273. Slično prethodnom zadatku, imamo

$$\frac{r}{1} = \frac{R}{4} = \frac{s}{5} = k \Leftrightarrow (r = k \wedge R = 4k \wedge s = 5k).$$

274. 5 cm.

Iz Pitagorine teoreme $H^2 + (R - r)^2 = s^2 \Rightarrow 64 + 9k^2 = 25k^2 \Rightarrow k = 2$, pa je $r = 2$ cm, $R = 8$ cm i $s = 10$ cm. Površina omotača je $M = 100\pi$ cm².

275. Dužina većeg kružnog luka prstena je $l = \frac{R\pi 288^\circ}{180^\circ} = \frac{8}{5}\pi R$, a

manjeg $l_1 = \frac{8}{5}\pi r$.

Ako su poluprečnici osnova zarubljene kupe x i y ($x > y$), onda je

$$2x\pi = \frac{8}{5}\pi R \Rightarrow x = \frac{4R}{5} \text{ i } 2y\pi = \frac{8}{5}\pi r \Rightarrow y = \frac{4r}{5}.$$

Izvodnica zarubljene kupe je $s = R - r$, a visina zarubljene kupe, na osnovu Pitagorine teoreme, je

$$H^2 = s^2 - (x - y)^2 \Rightarrow H^2 = (R - r)^2 - \left(\frac{4}{5}(R - r)\right)^2 \Rightarrow$$

$$H = \frac{3}{5}(R - r).$$

Zapremina zarubljene kupe je

$$V = \frac{\pi H}{3}(x^2 + xy + y^2) = \frac{16\pi}{125}(R^3 - r^3).$$

276. 6 : 5.

277. $V = \frac{2H(R^2 + Rr + r^2)}{3}$.

278. $V_1 = \frac{H\sqrt{3}}{2}(R^2 + Rr + r^2)$, $V_2 = \frac{2H\sqrt{3}}{2}(R^2 + Rr + r^2)$.

279. $P = 308\pi$ cm², $V = 620\pi$ cm³.

280. $P = 342\pi$ cm², $V = 688\pi$ cm³.

281. $V = 388\pi$ dm³.

282. Ako je visina valjka h , a visina kupe H , onda iz jednakosti zapremine proizlazi da je $H = 3h$.

Iz jednakosti površina proizlazi da je $s = 2h + R$, tj. ako uzmemo u obzir prethodnu jednakost, $s = \frac{2}{3}H + R$. Iz Pitagorine teoreme

sledi $H^2 + R^2 = \left(\frac{2}{3}H + R\right)^2$, odakle nalazimo da je $H = 12$ cm, i zatim $h = 4$ cm i $s = 13$ cm.

Iz sličnosti trouglova imamo proporciju $\frac{R}{r} = \frac{H}{H-h}$, odakle nalazimo da je $r = \frac{10}{3}$ cm.

Deo kupe koji leži u valjku je zarubljena kupa poluprečnika R i r i visine h , pa je zapremina zarubljene kupe

$$V = \frac{1900\pi}{27} \text{ cm}^3.$$

283. a) Izvodnica je $s = R + r$ (tangentne duži konstruisane iz iste tačke van kruga na krug su jednake). Primenom Pitagorine teoreme dobijemo $H^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$, pa je $H = 2\sqrt{Rr}$.

b) Površina zarubljene kupe je

$$P = \pi(R^2 + r^2 + s(R + r)) = \pi(R^2 + r^2 + (R + r)^2) = 2\pi(R^2 + Rr + r^2).$$

Iz obrasca za zapreminu zarubljene kupe proizlazi da je

$$R^2 + Rr + r^2 = \frac{3V}{\pi H}.$$

Zamenom u prethodni obrazac, za površinu zarubljene kupe dobijamo

$$P = 2\pi \cdot \frac{3V}{\pi H} \Leftrightarrow V = \frac{1}{6}PH,$$

čime je dokaz završen.

284. $r = 3$ m, $R = 6$ m, $H = 4$ m, $V = 84\pi$ m³.

285. 4898π cm³.

286. Telo se sastoji od dve podudarne kupe i dve zarubljene kupe.

$$P = 547\frac{1}{32}\pi \text{ cm}^2.$$

287. $528\pi, 1328\pi$.

288. Ako trapez rotira oko veće osnovice, onda je

$$V_1 = r^2 \pi b + \frac{1}{3} r^2 \pi x + \frac{1}{3} r^2 \pi y = \frac{1}{3} r^2 \pi (2b + a),$$

a ako trapez rotira oko manje osnovice

$$V_2 = r^2 \pi a - \frac{1}{3} r^2 \pi x - \frac{1}{3} r^2 \pi y = \frac{1}{3} r^2 \pi (2a + b),$$

gde su a i b osnovice trapeza, r visina, x i y projekcije krakova na većoj osnovici. Na osnovu pretpostavke proizlazi

$$\frac{2b + a}{2a + b} = \frac{3}{4} \Rightarrow 5b = 2a \Rightarrow a : b = 5 : 2.$$

$$289. M = \frac{\pi (R^2 + r^2)}{\cos \alpha}, \quad V = \frac{\pi}{3} (R^3 - r^3) \operatorname{tg} \alpha.$$

$$290. V = \frac{7}{3} \pi s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha.$$

$$291. P = \frac{4616 \pi}{5} \text{ cm}^2; \quad V = \frac{13584 \pi}{5} \text{ cm}^3.$$

$$292. V_1 = \frac{7}{27} V.$$

293. Pri rotaciji nastaju dve zarubljene kupe i dve cele kupe. Zapremina dobijenog tela jednaka je razlici zbira zapremina zarubljenih i zbira zapremina celih kupa itd.

$$\text{Rezultat: } V = \frac{\pi m^3}{9} (9\sqrt{2} + \sqrt{6}).$$

$$294. P = 64 \pi \text{ cm}^2, \quad V = 52 \pi \text{ cm}^3.$$

$$295. P = 2 \pi a^2 \sqrt{3}, \quad V = \frac{\pi a^3}{2}.$$

$$296. P = 3 \pi a^2, \quad V = \frac{1}{4} \pi a^3 \sqrt{3}.$$

297. Ako romb rotira oko stranice AB , zapremina nastalog rotacionog tela je $V_1 = a^3 \pi \sin^2 \alpha$.

Ako romb rotira oko dijagonale AC zapremina nastalog tela

$$V_2 = \frac{2a^3 \pi}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}.$$

Na osnovu pretpostavke proizlazi da je

$$a^3 \sin \alpha : \frac{2a^3 \pi}{3} \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 9 : \sqrt{3} \Leftrightarrow$$

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \left(4\sqrt{3} \cos \frac{\alpha}{2} - 6 \right) = 0 \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 0 \vee \cos \frac{\alpha}{2} = 0$$

$$\vee \cos \frac{\alpha}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0. \text{ Odgovara samo rešenje } \alpha = 60^\circ.$$

$$V = \frac{3a^3 \pi \sqrt{3}}{4}.$$

$$298. P = \frac{5 \pi (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$$

$$299. P = 368 \pi.$$

4.3. POVRŠINA LOPTE, SFERNE KALOTE I POJASA. ZAPREMINA LOPTE, LOPTINOG ISEČKA I ODSEČKA

$$301. 910 \pi \text{ cm}^2.$$

$$302. 3 R.$$

$$303. \frac{12 \pi Q}{4 - 3\sqrt{3}}.$$

$$304. P = \frac{3a^2 \sqrt{2}}{2}, \quad P_1 = \frac{\pi a^2}{3}, \quad V = \frac{a^3}{4}, \quad V_1 = \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54}.$$

$$305. 3 \text{ cm}.$$

$$306. 66 \pi \text{ dm}^2, 72 \pi \text{ dm}^2 \text{ ili } 80 \pi \text{ dm}^2, 96 \pi \text{ dm}^2.$$

$$307. \frac{a\sqrt{6}}{12}, \frac{a\sqrt{6}}{4}.$$

$$308. \frac{1}{2}.$$

$$309. r = \frac{a\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}, \quad V = \frac{a^3 \pi \sqrt{2}(3\sqrt{3}-5)}{12}.$$

$$310. V = \frac{2a^3}{3}, \quad R = \frac{9a}{8}.$$

$$311. 13 \text{ cm}.$$

$$312. P = r^2 \pi (1 + \sqrt{2}), \quad V = \frac{r^3 \pi}{3}.$$

$$313. \text{ a) } 3:2:2; \text{ b) } 9:6:4; \text{ c) } 9:6:4.$$

$$314. V = \frac{108 \pi r^3}{125}.$$

$$316. P = \pi (r^2 + h^2); \quad V = \frac{\pi h}{6} (3r^2 + h^2).$$

317. Tražena zapremina se sastoji od zapremine valjka i zapremine dva loptina odsečka. Zapremina valjka je $V_1 = \frac{\pi R^3 \sqrt{3}}{4}$, a zapremina loptinog odsečka

$$V_2 = \frac{\pi R^3}{24} (16 - 9\sqrt{3}), \text{ pa je } V = V_1 + 2V_2 = \frac{\pi R^3}{8} (8 - 3\sqrt{3}).$$

318. $V = \frac{8}{27} R^3 \sqrt{3}.$

319. $M = 24 \pi R^2, V = \frac{64 \pi R^3}{3}.$

320. Na osnovu pretpostavke proizlazi da je $CO^2 = OD \cdot CD$ (sl. 22). Tada su zapremine V_1 i V_2 lopte i kupe:

$$V_1 = \frac{4}{3} \pi \cdot CO^3 = \frac{4}{3} \pi \cdot CO \cdot OD \cdot CD.$$

$$V_2 = \frac{1}{3} \pi \cdot AD^2 \cdot CD = \frac{1}{3} \pi \cdot CO \cdot OD \cdot CD,$$

jer je

$$AD^2 = OA^2 - OD^2 = OC^2 - OD^2 = OD \cdot CD - OD^2 = OD \cdot OC.$$

Dakle, imamo da je $V_1 : V_2 = 4 : 1$.

321. Dovoljno je dokazati da osni presek kupe predstavlja tangenti trapez, tj. da je zbir dijametara osnova jednak dvostrukoj izvodnici.

322. $V = \frac{\pi R^3}{3} (2 + 3\sqrt{2}).$

323. $P = 120 \pi \text{ cm}^2.$

324. $P = \left(\frac{32}{5}\right)^2 (1 + \sqrt{5}) \pi \text{ cm}^2, V = \frac{2 \pi}{3} \cdot \left(\frac{32}{5}\right)^3 \text{ dm}^3.$

325. $V = \frac{5R^3 \pi}{12}.$

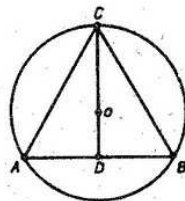
326. Površina lopte $P = 2500 \pi \text{ cm}^2$, zapremina lopte $V = \frac{62500 \pi}{3} \text{ cm}^3$, površina zone $P = 450 \pi \text{ cm}^2$ i zapremina $V = 2142 \pi \text{ cm}^3$.

327. $P = 8 \pi r^2.$

328. $P = 16 \pi \text{ cm}^2.$

329. $P = 520 \pi \text{ cm}^2.$

330. $V = \frac{4}{3} \pi s^3 \cos^3 \alpha \operatorname{tg}^3 \frac{\alpha}{2}.$



Slika 22

331. Iz pretpostavke proizlazi da je

$$\frac{1}{3} \pi r^2 H = \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3} \pi R^3, \text{ tj. } r^2 H = R^2.$$

Drugu jednačinu po R i r dobijamo iz pravouglog trougla ADC (sl. 23) i ona glasi $r^2 = H(2R - H)$.

Ako eliminišemo r iz sistema

$$r^2 H = R^2 \wedge r^2 = H(2R - H)$$

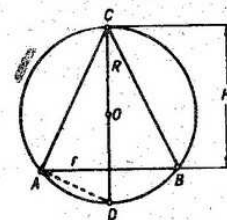
$$\Rightarrow R^3 - 2H^2 R + H^3 = 0 \Rightarrow (R - H)(R^2 + RH - H^2) = 0$$

$$\Rightarrow R - H = 0 \vee R^2 + RH - H^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = H \vee R = \frac{H(\sqrt{5} - 1)}{2} \vee R = -\frac{H(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

Negativno rešenje ne odgovara zadatku. Zapremina lopte je

$$V = \frac{4}{3} \pi H^3 \text{ ili } V = \frac{4}{3} \pi (\sqrt{5} - 2) H^3.$$



Slika 23

332. Tražena zapremina jednaka je razlici zapremine loptinog odsečka $MECFN$ i konusa MCN gde je na slici 24 prikazan osni presek tog tela, tj.

$$V = V_2 - V_1 = \pi h^2 \left(\frac{H}{2} - \frac{h}{3} \right) - \frac{\pi r^2 h}{3},$$

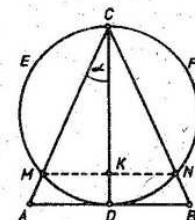
gde je $r = MK$, $h = CK$.

Kako je $r^2 = h(H - h)$, imamo

$$V = \frac{\pi h^2 H}{6}.$$

Dalje je $h = MC \cos \alpha \sin \alpha$ i

$$r = MC \sin \alpha = H \cos \alpha \sin \alpha, \text{ pa je } V = \frac{\pi H^3 \cos^4 \alpha}{6}.$$



Slika 24

333. Po pretpostavci, omotač konusa MCN jednak je polovini omotača konusa ACB (sl. 25). Površine omotača tih konusa odnose se kao kvadrati izvodnica:

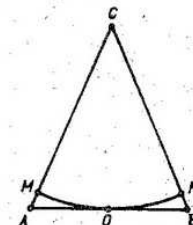
$$\frac{CN^2}{CB^2} = \frac{1}{2}.$$

Dalje imamo da je

$CN = CO$, pa je

$$\left(\frac{CO}{CB} \right)^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ.$$



Slika 25

334. a) Neka je stranica jednakokraničnog trougla $2x$, stranica kvadrata $2y$, tada su površine lopte, kupe i valjka redom

$$(1) P_l = 4\pi R^2, P_k = 3\pi x^2, P_v = 6\pi y^2.$$

Kako je $x = \frac{R\sqrt{3}}{2}$, $y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, iz (1) sledi

$$P_k = \frac{9\pi R^2}{4}, P_v = 3\pi R^2, \text{ pa je}$$

$$P_l \cdot P_k = 9\pi^2 R^4 = (3\pi R^2)^2 = (P_v)^2.$$

- b) Zapremine lopte, kupe i valjka su redom

$$(2) V_l = \frac{4\pi R^3}{3}, V_k = \frac{1}{2}\pi x^2 R = \frac{3}{8}\pi R^3, V_v = 2\pi y^3 = \frac{R^3\pi\sqrt{2}}{2}.$$

Kako je $V_l \cdot V_k = \frac{\pi^2 \cdot R^6}{2} = (V_v)^2$, tvrđenje je dokazano.

335. Neka je x traženi poluprečnik; tada je, na osnovu pretpostavke,

$$\left(\frac{4}{3}\pi x^3\right)^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \frac{4}{3}\pi (R^3 - x^3) \Leftrightarrow x^6 + R^3x^3 - R^6 = 0.$$

Smenom $x^3 = y$ poslednja jednačina ekvivalentna je jednačini

$$y^2 + R^3y - R^6 = 0,$$

odakle je

$$y = \frac{R^3}{2}(\sqrt{5} - 1) \vee y = \frac{-R^3(\sqrt{5} + 1)}{2}.$$

$$\text{Iz smene } x^3 = y \Rightarrow x^3 = \frac{R^3}{2}(\sqrt{5} - 1) \Rightarrow x = R\sqrt[3]{\frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)};$$

drugo rešenje ne odgovara prirodi zadatka.

$$336. 5:27, P = 9\pi R^2, V = 3\pi R^3.$$

337. Neka su R i r poluprečnici osnova kupe, a njena izvodnica i ρ poluprečnik lopte; tada su površina lopte i omotača kupe.

$$P = 4\pi\rho^2 = \pi(2\rho)^2, M = \pi s(R+r).$$

Kako je trapez (osni presek kupe) tangentan, važi jednakost $s = R + r$, pa je $M = s^2\pi$. Pošto je $s > 2\rho$ dobija se $\pi s^2\pi(2\rho)^2$, odnosno $M > P$, čime je dokaz završen.

338. Neka je R poluprečnik sfere, r poluprečnik osnove i s izvodnica kupe, pa je $r^2 = s^2 - R^2$.

Kako je površina sfere $P_s = 4R^2\pi$ i površina kupe

$$P_k = r\pi(r+s) = (s^2 - R^2 + s\sqrt{s^2 - R^2})\pi, \text{ iz uslova } P_s = P_k, \text{ sleduje}$$

$$(1) 5R^2 = s^2 + s\sqrt{s^2 - R^2}.$$

Neka je α traženi ugao, tada je $R = s \cos \alpha$.

Zamenom u (1) imamo ekvivalencije

$$5 \cos^2 \alpha = 1 + \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} \Leftrightarrow 5 \cos^2 \alpha = 1 + \sin \alpha \Leftrightarrow$$

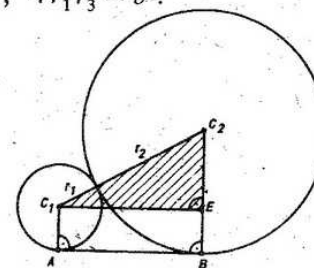
$$5 \sin^2 \alpha + \sin \alpha - 4 = 0 \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{4}{5} \vee \sin \alpha = -1.$$

Drugo rešenje ne dolazi u obzir zbog prirode zadatka, pa je traženi ugao $\alpha = \arcsin \frac{4}{5} \approx 59^\circ 7' 48''$.

339. Centri triju kugli poluprečnika R pripadaju paralelnoj ravni stola i obrazuju jednakokranični trougao $C_1C_2C_3$ stranice $2R$. Visina tog trougla je $h = R\sqrt{3}$. Ako četvrta kugla ima poluprečnik r , njen centar C_4 nalazi se na rastojanju r od stola i sa centrima ostalih triju kugli određuje jednu trostranu piramidu, čija je osnova trougao $C_1C_2C_3$. Visina te piramide je $H = R - r$, a bočne ivice su $s = R + r$. Neka je T težište trougla $C_1C_2C_3$. Tada iz pravouglog trougla C_1TC_4 imamo ekvivalencije

$$s^2 = H^2 + \left(\frac{2h}{3}\right)^2 \Leftrightarrow (R+r)^2 = (R-r)^2 + \frac{4R^2}{3} \Leftrightarrow r = \frac{R}{3}.$$

340. Na slici 26 prikazan je presek sfera, koje su konstruisane iznad temena A i B , sa ravni koja prolazi kroz centre sfera C_1 i C_2 i temena A i B . Primenom Pitagorine teoreme na pravougli trougao C_1EC_2 imamo $(r_1 + r_2)^2 = (r_2 - r_1)^2 + c^2$, tj. $4r_1r_2 = c^2$. Analogno se dobijaju jednačine $4r_2r_3 = a^2$, $4r_1r_3 = b^2$.



Slika 26

Množenjem levih i desnih strana tih jednačina dobijamo

$$8r_1r_2r_3 = abc. \text{ Na osnovu toga se dobija } r_1 = \frac{bc}{2a}, r_2 = \frac{ac}{2b}, r_3 = \frac{ab}{2c}.$$

$$341. r = \frac{a}{2} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

$$342. P = 900\pi \text{ cm}^2.$$

$$343. V = 972\pi.$$

344. Ako su a, b i c merni brojevi ivica paralelograma, onda iz sistema $a : b : c = 2 : 4 : 6 \wedge 2(ab + ac + bc) = abc$ imamo, $a = 4, b = 6, c = 12$. Dalje iz jednačine je $(2R)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow R = 7$. Tražena zapremina $V = \frac{1372\pi}{3}$.

345. Površina kalota: $P_1 = P_2 = \frac{4R^2\pi}{3}, P_3 = P_4 = \frac{8R^2\pi}{3}$.

346. $V_l : V_k = 3 : 8$.

V. GLAVA

5. DETERMINANTE SA PRIMENOM

5.1. DETERMINANTE DRUGOG I TREĆEG REDA

347. a) -2 ; b) -6 ; c) $a^2 + b^2$.

348. a) 0 ; b) $(a - b)^2$.

349. 0 .

350. 2 .

351. a) 48 ; b) -48 .

352. a) 24 ; b) 16 .

353. a) $-4a^3$; b) -2 .

354. a) 1 ; b) $\sin(\beta - \alpha)$.

355. a) $x = 3 \vee x = 2$; b) $x = -3 \vee x = 3$.

356. a) $x = 0 \vee x = 1$.

b) data jednačina ekvivalentna je jednačini
 $(x + 1)^2(x + 3) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = -3$.

357. a) $x = 1 \vee x = -3$; b) $x = 1 \vee x = -3$.

358. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & x+1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x & x+1 & x+5 & x+3 \\ 1 & 6 & 12 & 12 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -1 \begin{vmatrix} 2 & x+1 & 2 \\ 6 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 12x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = 1.$$

359. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(a - 1)^2(a^2 + 2a - 3) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -3.$$

360. Primenom osobina determinanti postupno se dobija da je data determinanta jednaka determinanti

$$\begin{vmatrix} 2x & +y & +z & y & 8 \\ -x & -y & -z & x+y+z & 0 \\ -x & -y & -z & 0 & x+y+z \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2x+y+z & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2x+y+z & 2x+2y+z & z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (x+y+z)^2 \begin{vmatrix} 2x+y+z & 2x+2y+z & 2x+2y+2z \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(x+y+z)^3 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2(x+y+z)^3.$$

361. Analogno prethodnom zadatku.

362. Analogno zadatku 360.

5.2. SISTEM LINEARNIH JEDNAČINA

363. Saglasan, rešenje je $(1, -2)$.

364. Saglasan, rešenje je $(4, 1)$.

365. Saglasan, rešenje je $(1, 1, 1)$.

366. Ako je $a \neq 1$ sistem nije saglasan, ako je $a = 1$ sistem je saglasan, rešenje je $(1, 2)$.

367. Ako je $a \neq -1$ sistem nije saglasan, a za $a = -1$ sistem je saglasan, rešenje je $(1, 1, -1)$.

368. Ako se prva jednačina sistema pomnoži sa 2 i doda drugoj, zatim se prva pomnoži sa 3 i doda trećoj dobija se ekvivalentan sistem datom

$$x + 2y - 5z = 6$$

$$(1) \quad 5y - 8z = 17$$

$$9y - 19z = 26.$$

Eliminacijom x iz druge i treće jednačine sistema (1) dobije se jednačina $23z = 23$, pa je sistem (1) ekvivalentan sistemu

$$x + 2y - 5z = 6$$

$$(2) \quad 5y - 8z = 17$$

$$23z = 23.$$

Iz trougaonog sistema (2) sukcesivno iz treće jednačine se dobije $z = 1$, iz druge sledi da je $y = 5$, a iz prve $x = 1$. Dakle, rešenje datog sistema je uređena trojka $(1, 5, 1)$.

369. $(4, 5, 6)$.

370. Smenom

$$\frac{1}{x} = u, \frac{1}{y} = v, \frac{1}{z} = t,$$

dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$6u + 4v + 5t = 4 \wedge 3u + 8v + 5t = 9 \wedge 9u - 12v - 10t = 4$$

$$\Leftrightarrow u = \frac{1}{3} \vee v = \frac{1}{4} \vee t = \frac{1}{5}.$$

Rešenje datog sistema je uređena trojka $(3, 4, 5)$.

371. $(6, 12, 8)$.

372. $(8, 12, 4, 8)$.

373. $(1, 1, 1, 1)$.

374. $(1, -1, 2, -1)$.

375. $\{(-m + 2n, 1 - 2m - 2n, m, n) \mid m, n \in \mathbb{R}\}$.

376. Nema rešenje.

377. Determinanta sistema $D = 48$, a determinante:

$$D_x = -48, D_y = 24 \text{ i } D_z = 16.$$

Primenom Kramerovih formula dobija se:

$$x = \frac{D_x}{D} = -1, y = \frac{D_y}{D} = \frac{1}{2} \text{ i } z = \frac{D_z}{D} = \frac{1}{3},$$

dakle, rešenje datog sistema je uređena trojka $\left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$.

378. $(4, 3, 2)$.

379. $(2, 1, -3)$.

380. $(10, 5, 2)$.

381. $(1, -2, 3)$.

382. $\left(1, \frac{1}{2}, -1\right)$.

383. $(2, 1, -1)$.

384. $(-1, 6, 8)$.

385. a) Posle razvijanja i sređivanja, determinante u zavisnosti realnog parametra m imaju oblik:

$$D = 2(m-1)^2(m+3), D_x = 2(m-1)(m+3),$$

$$D_y = (m-1)(m+3) \text{ i } D_z = -4(m-1)(m+3).$$

1° Ako je $m \neq 1$ i $m \neq -3$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left(\frac{1}{m-1}, \frac{1}{2(m-1)}, \frac{2}{1-m} \right).$$

2° Ako je $m = -3$ sistem postaje

$$4x + 8y = -2 \wedge x - 6y - 3z = -1 \wedge x - 6y - 3z = -1 \Leftrightarrow$$

$$4x + 8y = -2 \wedge x - 6y - 3z = -1.$$

Dakle, sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja. Skup rešenja je

$$\left\{ \left(\frac{1-4c}{2}, c, \frac{1-16c}{6} \right) \mid c \in R \right\}.$$

3° Ako je $m = 1$ sistem postaje

$$x + 2y + 4z = -\frac{1}{2} \wedge x + 2y + z = \frac{1}{3} \wedge x + 2y + z = -1,$$

dakle, sistem je protivurečan i nema rešenja.

386. Posle razvijanja i svodenja, determinante se svode na oblik:

$$D = (m+1)^2(m+4), D_x = 0,$$

$$D_y = -(m+1)(m+4) \text{ i}$$

$$D_z = -(m+1)(m+2)(m+4).$$

1° Ako je $m \neq -1$ i $m \neq -4$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left(0, -\frac{1}{m+1}, \frac{m+2}{m+1} \right).$$

2° Ako je $m = 4$, sistem je neodređen i ima beskonačno mnogo rešenja. Skup rešenja je

$$\left\{ \left(\frac{3c-1}{3}, c, -\frac{3c+1}{3} \right) \mid c \in R \right\}.$$

3° Ako je $m = -1$ dati sistem postaje

$$x + y - z = 0 \wedge x + y - z = 1 \wedge x + y - z = 2,$$

dakle, sistem je protivurečan i nema rešenja.

387. Determinante se svode na oblik:

$$D = 3(1-m)(1+m), D_x = 3(m-2)(m-1),$$

$$D_y = (m-1)(-m^2+2m-3) \text{ i}$$

$$D_z = (m-1)(m+4).$$

1° Ako je $m \neq \pm 1, D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left\{ \left(\frac{2-m}{m+1}, \frac{m^2-2m+3}{3(m+1)}, -\frac{(m+4)}{3(m+1)} \right) \mid m \in R \right\}.$$

2° Ako je $m = 1$, tada je $D = D_x$ neodređen, skup rešenja sistema je

$$\left\{ \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2} - c, c \right) \mid c \in R \right\}.$$

3° Ako je $m = -1$, tada je $D = 0, D_x = 18,$

$$D_y = 12 \text{ i } D_z = -12, \text{ pa je sistem protivurečan.}$$

388. Determinante su:

$$D = (m-2)(m-3), D_x = m-2, D_y = 4-2m \text{ i}$$

$$D_z = (m-2)(m-3).$$

Ako je $m \neq 3$ i $m \neq 2$, tada je $D \neq 0$, sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left\{ \left(\frac{1}{m-3}, \frac{-2}{m-3}, 1 \right) \mid m \in R \right\}.$$

Ako je $m = 2$, tada je $D = D_x = D_y = D_z = 0,$

sistem je neodređen, skup rešenja je

$$\{(2c-3, 5-3c, c) \mid c \in R\}.$$

Ako je $m = 3$ sistem je protivurečan.

389. Determinante su: $D = (m+1)(m-2)^2, D_x = 0,$

$$D_y = (1+m)(2-m), D_z = (m-2)(1-m^2).$$

Ako je $m \neq -1$ i $m \neq 2$ sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left\{ \left(0, \frac{1}{(m-1)(m-2)}, \frac{1-m}{m-2} \right) \mid m \in R \right\}.$$

Ako je $m = 2$ i $m = -1$ sistem je protivurečan.

390. Determinante zavise od dva realna parametra a i b .

Posle razvijanja i sređivanja dobijamo:

$$D = 2(a-12), D_x = 4(b-4),$$

$$D_y = ab - 10b + 28 \text{ i } D_z = 8(a-3).$$

Determinanta sistema $D \neq 0$, ako je $ab \neq 12$ tj. $b \neq \frac{12}{a}$.

Uredene dvojke (a, b) koje zadovoljavaju ovu nejednačinu ne pripadaju hiperboli $b = \frac{12}{a}$.

Dakle, sistem ima jedinstveno rešenje, ako uređeni parovi (a, b) ne pripadaju hiperboli.

Ako uređeni parovi $(a, b) \neq (3, 4)$ pripadaju hiperboli sistem je protivrečan.

Ako je $(a, b) = (3, 4)$, sistem je neodređen.

391. Determinante su:

$$D = b(1-a), D_x = 1-2b,$$

$$D_y = 1-a, D_z = 4b-2ab-1.$$

Ako je $a \neq 1$ i $b \neq 0$ sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left\{ \left(\frac{1-2b}{b(1-a)}, \frac{1}{b}, \frac{4b-2ab-1}{b(1-a)} \right) \mid a, b \in R \right\}.$$

Ako je $a = 1$ i $b = 0$ sistem je protivrečan.

392. Ako je $a = -2$, sistem nije saglasan. Ako je $a \neq -2$, skup rešenja sistema je:

$$\left\{ \left(\frac{3}{a+2}, \frac{a+5}{a+2}, \frac{3}{a+2} \right) \mid a \in R \wedge a \neq -2 \right\}.$$

393. Ako je $a \neq -2$ i $a \neq 1$ sistem ima jedinstveno rešenje

$$\left(-\frac{a+1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{(a+1)^2}{a+2} \right).$$

Ako je $a = -2$ sistem nema rešenja. Ako je $a = 1$, skup rešenja je $\{(m, n, 1-m-n) \mid m, n \in R\}$.

394. Skup rešenja sistema je: $\{(-c, 13c, 5c) \mid c \in R\}$.

395. $\{(5c, -11c, -7c) \mid c \in R\}$.

396. $(0, 0, 0)$.

397. $(0, 0, 0)$.

398. $\{(c, c, -2c) \mid c \in R\}$.

399. $\{(c, c, c) \mid c \in R\}$.

400. Sistem ima netrivialna rešenja ako je determinanta sistema $D = 0$. Determinante sistema

$$D = a^2 - a - 12 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \vee a = -3.$$

Ako je $a \neq 4$ i $a \neq -3$ sistem ima samo trivijalno rešenje.

Ako je $a = 4$, rešenje sistema je skup

$$\{(c, -c, 0) \mid c \in R\}.$$

Ako je $a = -3$, rešenje sistema je skup

$$\left\{ \left(-\frac{3c}{7}, -\frac{4c}{7}, c \right) \mid c \in R \right\}.$$

401. Determinanta sistema $D = a^2 - 9$. Ako je $a \neq \pm 3$ jednačina ima samo trivijalno rešenje $(0, 0, 0)$. Ako je $a = 3$, skup rešenja je $\{(-c, -2c, c) \mid c \in R\}$. Ako je $a = -3$, skup rešenja je $\{(2d, d, d) \mid d \in R\}$.

402. Determinanta sistema

$$D = -7a^2 - 17a + 180 = 0 \Leftrightarrow a = 4 \vee a = -\frac{45}{7}.$$

Ako je $a \neq 4$ i $a \neq -\frac{45}{7}$,

sistem ima samo trivijalno rešenje.

Ako je $a = 4$, skup rešenja sistema je

$$\{(-2c, -c, c) \mid c \in R\}.$$

Ako je $a = -\frac{45}{7}$, skup rešenja je

$$\left\{ \left(\frac{33}{20}d, \frac{67}{140}d \right) \mid d \in R \right\}.$$

403. Determinanta sistema se izjednači sa nulom i postupno se svodi

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ a & 1 & 5 & 3 \\ 1 & 5 & 11 & 8 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & a+1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & a+1 & a+5 & a+3 \\ 1 & 6 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -1 \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 5 \\ a+1 & a+5 & a+3 \\ 6 & 12 & 9 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-3a^2 + 12a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = 1.$$

Ako je $a = 3$, skup rešenja je $\{(-c, -2c, c, 0) \mid c \in R\}$.

Ako je $a = 1$, skup rešenja je $\{(0, d, d, -2d) \mid d \in R\}$.

405. Determinanta sistema

$$D = (a-1)^2(a^2+2a-3) = 0 \Leftrightarrow a = 1 \vee a = -3.$$

Ako je $a = 1$, skup rešenja je $\{(c, c, c, -3c) \mid c \in R\}$.

Ako je $a = -3$, skup rešenja je $\{(d, d, d, d) \mid d \in R\}$.

406. Ako je $a = 1$, skup rešenja je $\{(c, -c, 0) \mid c \in R\}$.

407. Ako je $a \neq b$, rešenje sistema je

$$\left(\frac{a-4b}{(a-b)(a+2b)}, \frac{2}{a+2b}, \frac{3a}{(a-b)(a+2b)} \right);$$

ako je $a=b$, sistem je neodređen.

VI. GLAVA

6. VEKTORI

6.1. VEKTORI U RAVNI I PROSTORU

$$408. \vec{AM} = -\left(\frac{\vec{a}}{2} + \vec{b}\right), \vec{BN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2} \text{ i } \vec{CP} = \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}.$$

$$412. \vec{DF} = \vec{a} + \vec{p} - \vec{q}, \vec{FG} = -\vec{b}, \vec{DG} = \vec{a} + \vec{q} - (\vec{b} + \vec{p}), \vec{EF} = 2\vec{a} + \vec{q} - \vec{p}.$$

414. Na osnovu definicije zbira dva vektora imamo:

$$(1) \vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM} = \vec{OA} + \frac{2}{3}\vec{AA}_1$$

$$(2) \vec{OM} = \vec{OB} + \frac{2}{3}\vec{BB}_1$$

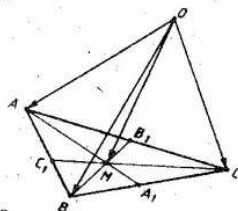
$$(3) \vec{OM} = \vec{OC} + \frac{2}{3}\vec{CC}_1$$

Sabiranjem jednakosti (1), (2) i (3), dobija se

$$3\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \frac{2}{3}(\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1).$$

Pošto je $\vec{AA}_1 + \vec{BB}_1 + \vec{CC}_1 = 0$ (vidi zadatak 408), sledi da je

$$\vec{OM} = \frac{1}{3}(\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}) \text{ (slika 27)}$$



Slika 27

$$415. a) -3\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{j} \quad b) -7\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{j}$$

$$c) -11\vec{i} + 6\vec{j} \quad d) -18\vec{i} + 12\vec{j}$$

416. Projekcija $\vec{AB}$ na S -osu jednaka je 4.

417. 5.

$$418. \vec{a} \cdot \vec{b} = -5.$$

$$419. |\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a} = (3\vec{m} - 4\vec{n})(3\vec{m} - 4\vec{n}) = 25, \text{ tada je } |\vec{a}| = 5.$$

420. Lako se dobije da je $\vec{AM} = \frac{1}{2}(\vec{AC} + \vec{AB})$. Pošto je

$$|\vec{AM}|^2 = \vec{AM} \cdot \vec{AM} = \frac{1}{4}(\vec{AC} + \vec{AB})(\vec{AC} + \vec{AB}) = \frac{1}{4}(25 + 12\sqrt{3}),$$

$$\text{tada je } |\vec{AM}| = \frac{1}{2}\sqrt{25 + 12\sqrt{3}}.$$

421. Primenom kosinusne teoreme dobijamo

$$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{b} \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = 49.$$

Odavde imamo da je $|\vec{a} + \vec{b}| = 7$.

$$422. \frac{\sqrt{5}}{2} |\vec{a}| \text{ (} \vec{a} \text{ je kateta).}$$

$$423. |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{45}, |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{293}.$$

$$424. \vec{a} \cdot \vec{b} = 0; \vec{a} \perp \vec{b}; \varphi = 90^\circ.$$

$$425. \varphi = 30^\circ.$$

$$426. m = 9.$$

$$427. \vec{v} = (-m - 5)\vec{i} + (-3m - 4)\vec{j}; \text{ ni za jedno } m \text{ vektor } \vec{v} \text{ nije nula vektor.}$$

$$428. m = 2, n = -2.$$

$$429. p = 11/14, q = 15/14.$$

$$430. \text{ Kako je } m\vec{a} + n\vec{b} = \vec{v}, \text{ tada je } m(2\vec{i} - \vec{j}) + n(-4\vec{i} + 3\vec{j}) = 4\vec{i} + 2\vec{j}.$$

Iz sistema $2m + 4n = 4 \wedge -m + 3n = 2$, dobija se $m = 6$ i $n = 2$, pa je $\vec{v} = 6\vec{a} + 2\vec{b}$.

431. Ako je O koordinatni početak pravouglonog Dekartovog sistema, tada je

$$\vec{a} = \vec{OA}_2 - \vec{OA}_1 \text{ i } \vec{OA}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j},$$

$$\vec{OA}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}. \text{ Zamenom u prethodnu jednačinu imamo}$$

$$\vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}.$$

432. Neka je $M(x, y)$ podnožje visine h_a , tačka M pripada vektoru $\vec{a}$, pa je

$$\vec{h}_a = (2 - x)\vec{i} + (-4 - y)\vec{j}.$$

Iz ortogonalnosti vektora $\vec{h}_a$ i $\vec{a}$ dobijamo:

$$(1) 5(2 - x) + 2(-4 - y) = 0,$$

a iz kolinearnosti vektora $\vec{a}$ i vektora $\vec{OM} = x\vec{i} - y\vec{j}$ proizlazi

$$(2) \frac{x}{5} = \frac{y}{2}.$$

$$\text{Iz (1) i (2) dobija se } x = \frac{10}{29}, y = \frac{4}{29}, \vec{h}_a = \frac{48}{29}\vec{i} - \frac{120}{29}\vec{j}.$$

$$433. n = \frac{1}{2}.$$

$$434. \varphi = 60^\circ.$$

435. 1.

436. Vektorski proizvod

$$\vec{p} \times \vec{q} = (2\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 2\vec{b}) = 2\vec{a} \times \vec{a} - 4\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{a} - 2\vec{b} \times \vec{b} \\ = -5\vec{a} \times \vec{b} = 5\vec{b} \times \vec{a}, \text{ pa je } \vec{p} \times \vec{q} = 5\vec{a} \times \vec{b} = 5 |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{e} = 30 \vec{e}.$$

437. 15 e.

438. Kako je $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{3}{5}$, tada je $\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{4}{5}$.

Vektorski proizvod vektora

$$\vec{a} \text{ i } \vec{b} \text{ je } \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) \vec{k} = 16 \vec{k}, (\vec{k} \text{ jedinični vektor}), \\ \text{odavde je } |\vec{a} + \vec{b}| = 16.$$

439. Vektorski proizvod vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je

$$\vec{a} \times \vec{b} = (2 \cdot 3 - 6m) \vec{k} = (12 - 3m) \vec{k} (\vec{k} \text{ jedinični vektor}).$$

Vektori su kolinearni ako i samo ako je

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow 12 - 3m = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

440. Ugao između vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ određuje se obrascem

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{-10}{\sqrt{221}}, \text{ tada je}$$

$$\sin(\vec{a}, \vec{b}) = \sqrt{1 - \frac{100}{221}} = \frac{11}{\sqrt{221}}.$$

Iz vektorskog proizvoda vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, površina paralelograma je

$$P = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin(\vec{a}, \vec{b}) = 11.$$

441. a) Vektori $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ u Dekartovim koordinatama su:

$$\vec{AB} = (2 - 1)\vec{i} + (3 - (-4))\vec{j} = \vec{i} + 7\vec{j},$$

$$\vec{AC} = (-5 - 1)\vec{i} + 4(-(-4))\vec{j} = -6\vec{i} + 8\vec{j}.$$

Kosinus ugla između vektora $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ je

$$\cos(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\angle(\vec{AB}, \vec{AC}) = 45^\circ.$$

Analogno, $\vec{BA} = -\vec{i} - 7\vec{j}$, $\vec{BC} = -7\vec{i} + \vec{j}$, pa je

$$\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = 0 \Leftrightarrow \angle(\vec{BA}, \vec{BC}) = 90^\circ.$$

Dakle, trougao ABC je jednakokrako pravougli.

b) Površina trougla je

$$P = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin(\vec{AB}, \vec{AC}) = 25.$$

442. $\angle(\vec{AB}, \vec{AD}) = 135^\circ$, $\angle(\vec{BA}, \vec{BC}) = 45^\circ$,

$$\angle(\vec{CB}, \vec{CD}) = \angle(\vec{DA}, \vec{DC}) = 90^\circ.$$

443. Neka je vektor $\vec{p} = x\vec{i} + y\vec{j}$. Iz uslova kolinearnosti vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ sledi da je

$$x\vec{i} + y\vec{j} = k(3\vec{i} - 4\vec{j}) \Leftrightarrow x = 3k \wedge y = -4k.$$

Zamenom u jednačinu $\sqrt{x^2 + y^2} = 10$ sledi da je $k = \pm 2$.

Da bi vektor $\vec{p}$ sa osom Ox gradio tup ugao mora da je $k = -2$, pa je traženi vektor $\vec{p} = (-6, 8)$.

444. Primenom definicije skalarnog proizvoda dobija se:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1,$$

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| \cos \frac{\pi}{2} = 0, \dots$$

445. Primenom definicije vektorskog proizvoda dobija se:

$$\vec{i} \times \vec{i} = |\vec{i}| |\vec{i}| (\sin 0^\circ) \vec{k} = 0,$$

$$\vec{i} \times \vec{j} = |\vec{i}| |\vec{j}| (\sin \frac{\pi}{2}) \vec{k} = \vec{k}, \dots$$

446. Ako se iskoriste osobine paralelograma dobija se:

$$\vec{AB} = (6, -1, 1), \vec{AC} = (8, 2, 2), \vec{AB} = \vec{DC}, \vec{BD} = (-4, 4, 0), \\ D(-1, 1, 1)$$

$$\cos(\vec{AC}, \vec{BD}) = -0,5 \Rightarrow \angle(\vec{AC}, \vec{BD}) = 120^\circ.$$

447. $\angle(\vec{AC}, \vec{BD}) = 135^\circ$.

448. Kako su vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ortogonalni ($\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$), oni mogu biti dve ivice kocke. Da bi vektor $\vec{c} = (x, y, z)$ bio treća ivica kocke treba da je ortogonalan vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kao i da je $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}|$. Iz sistema

$$7x + 6y - 6z = 0 \wedge 6x + 2y + 9z = 0 \wedge \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 11,$$

dobija se da je $\vec{c} = (\pm 6, \mp 9, \mp 2)$.

449. Iz jednakosti $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} + p(\vec{a} \times \vec{b})$ dobija se da je $m = -\frac{3}{2}$,

$$n = -\frac{1}{2}, p = \frac{3}{2}.$$

Odavde sledi da je

$$\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b}).$$

450. Vektor simetrale ugla xOy je $\vec{r}_1 = (a, a, 0)$, a vektor simetrale ugla xOz $\vec{r}_2 = (a, 0, a)$, pa je

$$\cos \varphi = \frac{a^2 + a \cdot 0 + 0 \cdot a}{\sqrt{2a^2} \cdot \sqrt{2a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

451. Primedba: ako je vektor $\vec{a}$ dat koordinatama $\vec{a} = (x, y, z)$ i ako su α, β, γ uglovi koje vektor $\vec{a}$ obrazuje sa koordinatnim osama Ox , Oy i Oz , njihovi kosinusi dati su obrascima:

$$(1) \cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}, \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}, \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

Na osnovu primedbe dobija se:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{1 + (-2)^2 + 2^2} = 3,$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{3}, \cos \beta = -\frac{2}{3}, \cos \gamma = \frac{2}{3}.$$

452. a) 23; b) 23; c) $\frac{1}{3}$.

$$453. (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = +7\vec{i} + 5\vec{j} + 6\vec{k}.$$

$$454. \varphi = \arccos \frac{4}{9}.$$

$$455. \varphi = \arccos \frac{1}{11}.$$

456. Odrediti koordinate vektora $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$:

$$\vec{BA} = -4\vec{i} - 1\vec{j} + 3\vec{k} \text{ i } \vec{BC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Ugao ABC jednak je uglu između vektora $\vec{BA}$ i $\vec{BC}$.

$$\cos(\vec{BA}, \vec{BC}) = \frac{(-4) \cdot 2 + 0 \cdot (-2) + 3 \cdot 1}{\sqrt{(-4)^2 + 0 + 3^2} \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1}} = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \angle ABC = \arccos\left(-\frac{1}{3}\right).$$

457. $\vec{CA} \perp \vec{BC}$, dakle, trougao ABC je pravougli.

458. Primedba: ako su vektori dati koordinatama,

$$\vec{a} = (x_1, y_1, z_1) \text{ i } \vec{b} = (x_2, y_2, z_2),$$

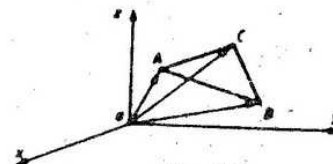
tada se njihov vektorski proizvod određuje determinantom

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \vec{a} \times \vec{b}.$$

Primenom primedbe dobija se:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = (-1, 1, 1).$$

459. Ako je tačka O koordinatni početak Dekartovog pravouglog sistema $Oxyz$ tada je (slika 28).



Slika 28

$$\vec{OB} = \vec{OA} + \vec{AB} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 3\vec{k} + 4\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow B(6, -4, 5),$$

$$\vec{OC} = \vec{OB} + \vec{BC} = 6\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k} + 3\vec{i} - 2\vec{j} + 5\vec{k} = 9\vec{i} - 6\vec{j} + 10\vec{k} \Rightarrow C(9, -6, 10),$$

$$\vec{CA} = -\vec{AB} - \vec{BC} = -4\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k} - 3\vec{i} + 2\vec{j} - 5\vec{k} = -7\vec{i} + \vec{j} - 7\vec{k}.$$

460. Primedba: neka su dati vektori $\vec{OA} = \vec{a}$ i $\vec{OB} = \vec{b}$ (slika 29).

Projekcija vektora $\vec{b}$ na pravac vektora $\vec{a}$ (oznaka b_a) je

$$(1) b_a = |\vec{OC}| = |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Projekcija vektora $\vec{a}$ na pravac vektora $\vec{b}$ je

$$a_b = |\vec{OD}| = |\vec{a}| \cos(\vec{b}, \vec{a}) = |\vec{a}| \cos(-(\vec{a}, \vec{b})),$$

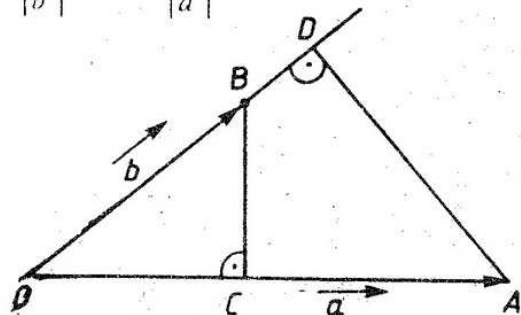
$$(2) a_b = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{b}).$$

Množenjem jednačine (1) sa $|\vec{a}|$ i jednačine (2) sa $|\vec{b}|$ dobija se:

$$b_a |\vec{a}| = a_b |\vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Oдавде sledi da je

$$(3) \quad a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}, \quad b_a = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}.$$



Slika 29

Primenom obrasca (3), odnosno primedbe, dobija se:

$$a_b = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}) \cdot (-3\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})}{\sqrt{11}} = \frac{-6 - 3 - 1}{\sqrt{11}} = -\frac{10}{\sqrt{11}}, \quad b_a = -\frac{10}{\sqrt{14}}.$$

461. $a_b = 6$.

462. $v_c = -11$.

463. $\vec{u} \times \vec{v} = 0 \cdot \vec{i} - 10\vec{j} + 10\vec{k}$.

464. $a_b = \frac{6}{7}$.

465. $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{i} - 4\vec{j} + 7\vec{k}$;

$$b_a = \frac{(\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})) \cdot \vec{b}}{|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})|}.$$

$$(\vec{d} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})).$$

466. *Primedba:* Moduo vektorskog proizvoda dva vektora jednak je površini paralelograma konstruisanog nad tim vektorima. U ovom zadatku:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Moduo $|\vec{a} \times \vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2 + 1^2} = 3$,
pa je površina paralelograma $P = 3$.

467. $P = \sqrt{26}$.

468. Ako se trougao ABC transformiše u paralelogram $ABDC$, tada je

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} P_{ABDC}, \text{ pa je}$$

$$P_{ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}| = 5\sqrt{2}.$$

469. Mešoviti proizvod vektora, datih koordinatama jednak je:

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} \cdot (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) =$$

$$= \left(\vec{i} \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right) \cdot (x_3 \vec{i} + y_3 \vec{j} + z_3 \vec{k}) =$$

$$= x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} - y_3 \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} + z_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

470. Ako je ispunjen uslov komplanarnosti

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 4 \\ -3 & 12 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

dati vektori su komplanarni. Njihova linearna zavisnost je
 $\vec{c} = 5\vec{a} + \vec{b}$.

471. Ako je $(\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 0$, date tačke pripadaju jednoj istoj ravni.

472. $p = 3$.

473. Zapremina tetraedra jednaka je $V = \frac{1}{6} (\vec{AB} \times \vec{AC}) \cdot \vec{AD} = 11$.

474. $V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = 2$.

475. $V = 14$, $H = \sqrt{14}$.

476. Ako je vektor $\vec{v} = (x, y, z)$, tada iz sistema

$$2x - 4y + 3z = 1 \wedge 3x - y + 5z = 2 \wedge x - 2y + 4z = 3$$

sledi da je $\vec{v} = (-1, 0, 1)$.

477. $p = 1$.

478. Iz jednačine

$$\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| |\vec{c}|}$$

dobija se da je $p = \frac{1}{4}$.

479. a) $\vec{d} = (-3p, -2p, -p)$;

b) $\vec{a} - \vec{d} = (3p, 4p, 2p)$,

$\vec{b} - \vec{c} = (3, 4, 2)$;

c) $((\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{a} \times \vec{c})) \cdot \vec{d} = 0$;

d) $p = 7$.

480. $\vec{a} = (2, -2, -2)$.

481. a) $\vec{c} = -\frac{3}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{2}(\vec{a} \times \vec{b})$;

b) $\alpha = 60^\circ$.

VII. GLAVA

7. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI

7.1. TAČKA

482. $d = 5$.

483. $AB = 3$, $BC = 5$, $AC = 4$.

484. Neka je tražena tačka $P(x, 0)$, onda je $PM = PN$, tj.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (0+2)^2} = \sqrt{(x-7)^2 + (0+4)^2}$$

odakle je $x = 5$.

485. $P(0, 5)$.

486. $x = 8$. $x = -16$.

487. $R = 5$.

488. $y = 2$.

489. Neka je $M(x, y)$ ma koja tačka traženog geometrijskog mesta, tada je $AM = BM$, tj.

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2}$$

ili konačno

$8x + 2y - 29 = 0$, traženo geometrijsko mesto je prava.

490. $M(-1, 2)$, $MA = MB = MC = 5$.

491. Polazeći od definicije težišnih linija, njihove dužine biće:

AA_1 , BB_1 , i CC_1 gde su A_1 , B_1 , i C_1 sredine stranice BC , AC i AB trougla ABC .

Primenom obrazaca $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ i $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$

nalazimo da sredine stranica trougla imaju koordinate $A_1(4, 0)$, $B_1(2, -1)$ i $C_1(3, 2)$,

pa su dužine težišnih linija $AA_1 = \sqrt{10}$, $BB_1 = 5$, $CC_1 = 5$, tj.

dati trougao je jednakokraki.

492. $D(2, 4)$

493. a) $M(1, 3)$; b) $N(4, -3)$.

494. a) $M(9, -2)$; b) $N(-3, 7)$.

495. $C(5, -3)$ i $D(1, -5)$.

496. $A(-5, 7)$, $B(1, -3)$ i $C(3, 1)$.

497. Primenom obrasca $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}$,

gde je $\lambda = \frac{1}{2}$, imamo

$$x = \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} = 4, \text{ i}$$

$$y = \frac{\frac{y_1 + y_2}{2} + \frac{y_3}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} = 2, \text{ tj. } T(4, 2).$$

498. $T(-1, 0)$.

499. $T(-1, 0)$, $C(0, 2)$.

500. $P = 37,5$.

501. $P = 20$, $h_c = 4$.

502. $y = 6$.

503. Dva rešenja: $C_1(0, 7)$ -i $C_2(8, -9)$.

504. $P = 16$, $AC = BD = 4\sqrt{2}$.

505. Za određivanje koordinata tačke C primeni obrasce:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \text{ i } y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \text{ gde je } \lambda = \frac{1}{2}$$

$$C(0, -3), D(4, 0), P = 10\frac{1}{2}.$$

506. a) $P_{ABC} = \frac{75}{2}$, $P_{MNP} = \frac{27}{2}$, $P_{ACMN} = 24$.

b) $P_{ABC} : P_{MNP} = 25 : 9$.

507. a) $x = 3y + 10$; b) $x = 7, y = -1$.

508. $C(0, -3)$.

509. Koordinate temena novog trougla su: $M_1(3, 3)$

$$M_2(-\frac{10}{3}, -\frac{4}{3}), M_3(-2, \frac{32}{5}).$$

510. Tačke A, B i C pripadaju istoj pravoj, ako je površina trougla ABC jednaka nuli, tj.

$$x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \text{ ili}$$

$$x_1(y_2 - y_1 - y_3 + y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0 \text{ ili}$$

$$x_1(y_2 - y_1) - x_1(y_3 - y_1) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2) = 0.$$

$$\text{ili } (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1) = 0,$$

što se konačno može napisati u obliku proporcije

$$a) \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1}.$$

511. Da bi date tačke pripadale istoj pravoj liniji, njihove koordinate moraju zadovoljavati uslov (a):

$$\frac{3 - 1}{-4 - 1} = \frac{y_2 - 3}{-2 - 3}, \text{ odakle je } y_2 = 5.$$

512. $P(-5, 0)$.

7.2. PRAVA

543. a) $x + y - 3 = 0$; b) $x\sqrt{3} + y + 3 = 0$; c) $x - y - 8 = 0$;
d) $x\sqrt{3} + 3y - 6 = 0$.

514. a) $\alpha = 45^\circ$, $n = 3$; b) $\alpha = 60^\circ$, $n = -\frac{1}{2}$; c) $\alpha = 135^\circ$, $n = \frac{5}{3}$.

515. $p = \frac{4}{5}$.

516. a) $p = \frac{3}{4}$; b) $p = -\frac{3}{2}$.

517. Segmenti su: $m = 4$, $n = -3$.

518. $4x + 3y - 12 = 0$.

519. Pošto tačka M pripada pravoj, čiju jednačinu tražimo i s obzirom na datu površinu trougla imamo sistem:

$$-\frac{5}{m} + \frac{4}{n} = 1 \wedge \frac{mn}{2} = 5.$$

Odatle: $m_1 = 5$, $n_1 = 2$ i $m_2 = -\frac{5}{2}$, $n_2 = -4$, što znači da dve prave zadovoljavaju postavljene uslove:

$$2x + 5y - 10 = 0 \text{ i } 8x + 5y + 20 = 0.$$

520. $x + y + 4 = 0$.

521. $x + 2y - 8 = 0$ i $2x + y + 8 = 0$.

522. $3x + 2y - 12 = 0$.

523. $p = 1$.

524. Iz jednačine $\sqrt{16 + \frac{144}{p^2}} = 5$ sledi $p = \pm 4$.

525. $x + 2y - 4 = 0$.

526. a) $p = -\frac{1}{2}$; b) $p = \frac{5}{3}$.

527. a) $m = -3, n = -1$; b) $m = -\frac{11}{7}, n = -\frac{3}{7}$.

528. a) $\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$; b) $\alpha_1 = \frac{\pi}{3}, \alpha_2 = \frac{2\pi}{3}$.

529. $\alpha = \gamma = 45^\circ, \beta = 90^\circ$.

530. $\alpha = 135^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = \delta = 90^\circ$.

531. $\alpha = 90^\circ$.

532. $A = 1, B = -3$ i $A = -3, B = -1$.

533. Neka je $M(x_1, y_1)$ tražena tačka, tada su koeficijenti pravca:

$$k_2 = K_{MA} = \frac{y_1 - 7}{x_1 + 1} \text{ i } k_1 = \frac{y_1 - 8}{x_1 - 6}.$$

Prema uslovu zadatka je $k_2 - k_1 = 1 + k_1 k_2$, tj.

$$1) \frac{y-7}{x+1} - \frac{y-8}{x-6} = 1 + \frac{y-7}{x-1} \cdot \frac{y-8}{x-6}.$$

$$2) x - 3y = 0.$$

Iz jednačina (1) i (2) dobija se

$$x = 0, y = 0 \text{ i } x = 3, y = -1.$$

534. $\alpha = 45^\circ$

535. $\alpha = 45^\circ$.

536. Tražena jednačina je $y - 0 = k(x + 2)$, a ugao koji čini tražena prava sa pravom $x + 7y - 23 = 0$ dat je obrascem

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}},$$

a ugao sa pravom $7x - y - 11 = 0$ obrascem

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{7 - k}{1 + 7k}.$$

Ako je $\operatorname{tg} \varphi_1 = \operatorname{tg} \varphi_2$ biće

$$\frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}} = \frac{7 - k}{1 + 7k}$$

ili $12k^2 + 7k - 12 = 0$, odakle je $k_1 = -\frac{4}{3}, k_2 = \frac{3}{4}$.

Tražena prava je $4x + 3y + 6 = 0$ ili $3x - 4y - 8 = 0$, a ugao $\alpha = 45^\circ$.

537. a) $x + y - 5 = 0$; b) $9x + 7y - 35 = 0$.

538. a) $3x - 2y + 1 = 0$; b) $x - y + 1 = 0$.

539. $R(11, -11)$.

540. $P(-2, -1)$.

541. $P = 30$.

542. Koordinate tačke koja deli duž AB u razmeri $4 : 7$ su $(-\frac{1}{11}, 3)$, pa je tražena jednačina $8x - 11y + 41 = 0$.

543. $h_a : x + 3y + 2 = 0, h_b : x + y - 2 = 0,$

$h_c : 2x - y - 10 = 0, O(4, -2)$.

544. $4x - 3y - 17 = 0$.

545. $3x + 5y - 4 = 0$.

546. $AC : 13x - 7y + 17 = 0, BD : x - 3y + 11 = 0$.

547. $AB : x - 3y = 0; BC : 3x - y - 8 = 0;$

$CD : x - 3y + 16 = 0; DA : 3x - y + 8 = 0;$

$\alpha = \gamma = 53^\circ 8'; \beta = \delta = 126^\circ 52'; P = 32$.

548. $AN : 11x + 2y - 1 = 0;$

$BP : x - 8y + 19 = 0;$

$CM : 13x - 14y + 37 = 0$.

549. $C(3, 8)$.

550. Jednačina prave koja sadrži tačku $M(4, 4)$ i normalna je na pravu $x + 2y - 2 = 0$, glasi $2x - y - 4 = 0$. Presečna tačka $P(2, 0)$ je ortogonalna projekcija tačke M . Traženo rastojanje je $PM = 2\sqrt{5}$.

551. Neka je jednačina tražene prave $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, gde su m i n odsečki prave na koordinatnim osama ($m, n > 0$). Odsečak između koordinatnih osa je $\sqrt{m^2 + n^2}$, dok je rastojanje koordinatnog početka od prave

$$d = \frac{mn}{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

Prema datim uslovima dobijamo

$$\sqrt{m^2 + n^2} = 2d = \frac{2mn}{\sqrt{m^2 + n^2}} \text{ i } \frac{mn}{2} = 4,5.$$

Iz ovih jednačina sledi $m = n = 3$, prema tome jednačina tražene prave je $x + y - 3 = 0$.

552. Neka su tačke M_1 i M_2 na datim pravama tako izabrane da je $R(0, 1)$ sredina duži $M_1 M_2$. Polazeći od toga možemo postaviti sledeći sistem jednačina:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \wedge \frac{y_1 + y_2}{2} = 1 \wedge x_1 - 3y_1 + 10 = 0$$

$\wedge 2x_2 + y_2 - 8 = 0$. Rešenje ovog sistema je:

$$x_1 = -4, y_1 = 2; x_2 = 4, y_2 = 0.$$

Jednačina tražene prave je: $4x + y - 4 = 0$.

553. $x - 2y + 6 = 0$.

554. $d = \frac{16}{5}$.

555. $y = 2x$.

556. $AC: 4x + 3y - 4 = 0$.

557. Ako jednačinu prave napišemo u segmentnom obliku, dobijemo

$$P = \frac{1}{2} \left| -\frac{2}{1+2\lambda} \cdot \frac{2}{1+\lambda} \right| = 18 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 9(1+2\lambda)(1+\lambda) = 1 \vee 9(1+2\lambda)(1+\lambda) = -1.$$

Odatle nalazimo λ .

558. a) $x\sqrt{3} + y - 6 = 0$;

b) $x\sqrt{2} - y\sqrt{2} + 4 = 0$.

559. a) $p = 3, \omega = \frac{\pi}{6}$;

b) $p = 2, \omega = \frac{7\pi}{6}$.

560. a) $-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y - 10 = 0, p = 10$.

Podnožje normale daju nam relacije $x = p \cos \omega$ i $y = p \sin \omega$ tj.

$$x = 10 \left(-\frac{4}{5}\right) = -8, y = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6,$$

pa je podnožje $P(-8, 6)$.

b) $p = 7, P\left(-\frac{28}{5}, -\frac{21}{5}\right)$.

561. Iz normalnih oblika jednačina datih pravih određuju se njihova odstojanja od koordinatnog početka

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \text{ i } p_2 = \frac{13}{\sqrt{13}}$$

i da se koordinatni početak ne nalazi između njih. Tražena prava ima odstojanje od koordinatnog početka.

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} = \frac{7}{\sqrt{13}},$$

pa je njena jednačina $3x - 2y - 7 = 0$.

562. $4x - 3y - 27 = 0$.

563. $12x + 3y - 2 = 0$.

564. $4x - 10y + 1 = 0$.

565. $h_c = \frac{25\sqrt{17}}{17}$.

566. $\sqrt{10}$.

567. $3x - 4y + 10 = 0, x = 2$.

568. $x + 2y = 4$.

569. $y = 0: 2x + 3y + 4 = 0; y + 4 = 0;$

$$2x + 3y = 0; x + 2y + 2 = 0; y + x = 0; \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{8}.$$

570. $B(3,6:5,6); D(2,4:6,4)$.

571. $P = 6$.

572. $4x - 3y - 80 = 0, y = -8, 4x - 3y = 0$

573. $x - y + 3 = 0$, $x + y + 3 = 0$ (ugao pod kojim zrak pada jednak je uglu pod kojim se on odbija).

574. $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

575. $11x + 3y = 31$, $11x - 3y = 31$.

576. $7x - 3y - 9 = 0$, $3x - 7y - 1 = 0$.

577. $m^2 - 302m + 1485 = 0$, $m_1 = 5$, $m_2 = 297$.

578. Rešavanjem sistema jednačina datih stranica dobija se teme $C(6, 4)$. Ako je $M(x_1, y_1)$ podnožje visine, onda iz uslova $CM = 2\sqrt{5}$ dobijamo jednačinu $(x - 6)^2 + (y - 4)^2 = 20$, koja sa jednačinom visine određuje dva rešenja $M(10, 6)$ i $M(2, 2)$. Prva stranica je normalna na visinu, pa će biti njene jednačine:

$$2x + y - 26 = 0 \text{ ili } 2x + y - 6 = 0$$

Dva rešenja:

1° $A(6, 4)$; $B(0, 6)$; $C(3, 0)$.

2° $A(6, 4)$; $B(12, 2)$; $C(9, 8)$.

579. a) $A(4, 6)$, $d = 5$; b) $A_1(64, 36)$, $d = 65$.

580. Ako je $k_1 = -\frac{n}{m}$, $k_2 = 2$, onda je

$$(1) \quad \frac{2 + \frac{n}{m}}{1 - \frac{2n}{m}} = 1 \text{ ili } m + 3n = 0.$$

$$(2) \quad \text{Dругу jednačinu dobijamo iz uslova da prava sadrži tačku } M(2, 1) \quad 2n + m - nm = 0.$$

Rešavanjem sistema jednačina (1) i (2) dobijamo

$$m = -1, n = \frac{1}{3}.$$

Za $k_2 = -\frac{n}{m}$ i $k_1 = 2$ dobijamo još jedno rešenje

$$m = \frac{7}{3}, n = 7.$$

581. Tražena tačka se nalazi u preseku prave $x - y - 3 = 0$ i simetrale ugla između pravih $7x - y - 1 = 0$ i $x + y - 5 = 0$.

Jednačine simetrale pomenutog ugla su:

$3x + y - 9 = 0$ i $x - 3y + 7 = 0$, pa su njihove presečne tačke sa datom pravom $M(3, 0)$ i $M(8, 5)$.

582. Jednačina prave kroz tačku $M(8, 1)$ je $y - 1 = k(x - 8)$.

Pošto ona čini sa datim pravama jednake uglove, imamo:

$$k + \frac{7}{6} = \frac{-9}{2} - k \quad \text{ili} \quad \frac{k + \frac{7}{6}}{1 - \frac{7k}{6}} = \frac{\frac{-9}{2} - k}{1 - \frac{9k}{2}} \quad \text{ili} \quad 34k^2 + 51k - 34 = 0,$$

odakle je

$$k_1 = \frac{1}{2}.$$

$k_2 = -2$, pa je jednačina tražene prave:

$$x - 2y - 6 = 0 \text{ ili } 2x + y - 17 = 0.$$

583. $M(1, 4)$.

584. Ako je vrh trougla u C imamo jedno rešenje: $C(2, 3)$. Ako je vrh u A postoje dva rešenja:

$C_1(\sqrt{11} - 2, \sqrt{11} - 1)$ i $C_2(-2 - \sqrt{11}, -1 - \sqrt{11})$. Vrh trougla ne može biti u tački B . U tom slučaju ne postoje realna rešenja.

585. Teme C se nalazi u preseku simetrale osnovice i prave paralelne sa osnovicom na rastojanju 5 od osnovice. Jednačina osnovice AB je $4x + 3y - 12 = 0$, a jednačina njene simetrale $6x - 8y - 7 = 0$.

Postoje dve prave i to

$4x + 3y - 37 = 0$ i $4x + 3y + 13 = 0$, koje su paralelne sa osnovicom na rastojanju $d = 5$. Njihove presečne tačke sa simetralom su:

$$C_1\left(\frac{11}{2}, 5\right) \text{ i } C_2\left(-\frac{5}{2}, -1\right).$$

586. $A_1(2, -1)$, $B_1(5, 3)$, $C_1(6, 0)$.

587. $A_1(4, -3)$, $B_1(13, 0)$, $C_1(8, -5)$.

588. Tražena prava $y = kx$ ima sa datim pravama preseke

$$M_1\left(\frac{5}{k-2}, \frac{5k}{k-2}\right) \text{ i } M_2\left(\frac{10}{k-2}, \frac{10k}{k-2}\right).$$

pa je

$$\sqrt{\left(\frac{10}{k-2} - \frac{5}{k-2}\right)^2 + \left(\frac{10k}{k-2} - \frac{5k}{k-2}\right)^2} = 10;$$

odavde je $k_1 = \frac{1}{3}$ i $k_2 = -3$.

Tražene prave su $3x + y = 0$ i $x - 3y = 0$.

589. $3x + 4y - 1 = 0$, $7x + 24y - 61 = 0$.

590. $2x + 7y - 5 = 0$.

591. $C(-1, 4)$, ako trougao obilazimo u pozitivnom smeru;

$$C\left(\frac{25}{7}, -\frac{36}{7}\right),$$

ako ga obilazimo u negativnom smeru.

592. Stranica BC normalna je na visini h_a , pa je njena jednačina

$$x + 7 = +\frac{1}{3}(x - 2) \text{ ili}$$

$$BC: x - 3y - 23 = 0.$$

Neka su koordinate središta duži AB , $M(x_o, y_o)$ a koordinate temena $A(x_1, y_1)$, tada je

$$x_o = \frac{2 + x_1}{2} \text{ i } y_o = \frac{y_1 - 7}{2}.$$

$x_o + 2y_o + 7 = 0 \wedge 3x_o + y_o + 11 = 0$, odakle sledi da je $x_o = -4$, $y_o = 1$, tj. $A(-4, 1)$. Dalje se lako dobija $AB: 4x + 3y + 13 = 0$, $AC: 7x + 9y + 19 = 0$.

593. $B(9, -2)$, $A(-12, 1)$, $BC: x + y - 7 = 0$,

$$CA: x - 5y + 20 = 0, AB: x + 7y + 5 = 0.$$

594. $x - 5y + 3 = 0$, $(1, 5)$, $(-3, 0)$, $(2, 1)$.

595. $x + y - 12 = 0$; $(0, 0)$; $(4, 8)$, $(2, 10)$.

596. Ako prvoj težišnoj liniji pripada teme (x_1, y_1) , a drugoj (x_2, y_2) , onda možemo postaviti sledeći sistem jednačina:

$$4x_1 + 5y_1 = 0 \wedge x_2 - 3y_2 = 0,$$

$$4 \cdot \frac{x_2 + 2}{2} + 5 \cdot \frac{y_2 - 5}{2} = 0 \wedge \frac{x_1 + 2}{2} - 3 \cdot \frac{y_1 - 5}{2} = 0.$$

Rešenje sistema daje tačke $(-5, 4)$ i $(3, 1)$. Jednačine stranica su:

$$3x + 8y - 17 = 0, 6x - y - 17 = 0,$$

$$9x + 7y + 17 = 0.$$

597. $x + 7y - 6 = 0$, $x - y - 6 = 0$.

$$7x + y - 10 = 0.$$

598. $x + 3y - 13 = 0$.

599. Tačka $S\left(-\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$ je preseka dijagonala. Stranice su:

$$AD: 3x - 4y + 32 = 0, CD: 4x + 3y - 24 = 0,$$

$$BC: 3x - 4y + 7 = 0,$$

$$AB: 4x + 3y + 1 = 0, \text{ dijagonala}$$

$$AC: x + 7y - 31 = 0.$$

600. Jednačine stranica su:

$$2x - 5y + 3 = 0 \text{ i } 2x - 5y - 26 = 0.$$

$$\text{a dijagonale } 7x - 3y - 33 = 0.$$

601. $9x + 12y + 20 = 0$, $5x - 12y + 36 = 0$.

602. Iskoristiti osobinu romba da su rastojanja suprotnih stranica jednaka.

$$\text{Dva rešenja: } y = 0, y = 5 \text{ i } 20x + 21y - 20 = 0.$$

$$20x + 21y - 165 = 0.$$

603. $2x + 3y - 19 = 0$, $8x - 11y - 7 = 0$.

$$2x + 3y + 27 = 0, 8x - 11y + 39 = 0.$$

604. $2x + y - 1 = 0$, $2x - y + 1 = 0$.

$$6x - 3y + 19 = 0, 6x + 3y - 19 = 0.$$

605. Transformišemo jednačinu pramena u oblik

$$(3 + 2k)x + (1 - k)y - 1 - 9k = 0.$$

Da bi data prava pripadala pramenu, treba da postoji takva vrednost parametra k za koji je

$$\frac{3 + 2k}{1} = \frac{1 - k}{3} = \frac{-1 - 9k}{13}.$$

Takva vrednost za k postoji i to $k = -\frac{8}{7}$.

606. Transformišemo jednačinu pramena u oblik

$$(k + 2)x + 1(1 - 2k)y + 4 - 3k = 0$$

Na osnovu pretpostavke sledi

$$\frac{(2 + k)2 - 3(1 - 2k) + 4 - 3k}{\sqrt{(2 + k)^2 + (1 - 2k)^2}} = \sqrt{10},$$

$$\text{odakle je } k_1 = 1 \text{ i } k_2 = -\frac{9}{10}.$$

Tražene prave su $3x - y + 1 = 0$ i $11x + 28y + 67 = 0$.

607. Iz jednačine $\frac{10k-1}{k+2} = \pm \frac{10k-1}{1-3k}$ sledi

$$k_1 = \frac{1}{10}, k_2 = -\frac{1}{4}, k_3 = \frac{3}{2},$$

pa imamo tri prave i to: $3x + y = 0$, $x + y + 2 = 0$ i $x - y - 4 = 0$.

608. Sve prave pramena prolaze kroz centar; za $k=0$ imamo pravu $2x + 3y + 5 = 0$,

za $k=1$ pravu $5x + 2y + 7 = 0$.

Rešenje sistema $2x + 3y + 5 = 0 \wedge 5x + 2y + 7 = 0$

određuju centar pramena $A(-1, -1)$, a to je i teme trougla. Stranice AB i AC su normalne na date visine;

Jednačine stranica su:

$$4x + y + 5 = 0, x - 2y - 1 = 0 \text{ i } 2x + 5y - 11 = 0.$$

609. Iz jednačine pramena $2x + 7y - 8 + k(3x + 2y + 5) = 0$ određujemo koeficijent pravca prave pramena

$$k_1 = -\frac{2+3k}{7+2k},$$

dok je koeficijent pravca prave $2x + 3y - 7 = 0$

$$k_2 = -\frac{2}{3}.$$

$$\text{Zamenom u obrazac } \operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2},$$

gde je

$\operatorname{tg} \varphi = 1$ dobijamo dve vrednosti za k i to $k_1 = 1$ i

$k_2 = -\frac{33}{7}$, za koje se dobijaju odgovarajuće prave iz pramena:

$$x - 2y + 2 = 0, 2x + y - 6 = 0.$$

610. Rešenje daje sistem

$$\frac{5+3m}{1+2n} = \frac{m-3}{n+1} = \frac{4m+2}{2n+1} \quad (n \neq \pm \frac{1}{2}, n \neq -1).$$

Sledi da je $m=25$, $n=-3$, a tražena prava je $5x - 2y - 7 = 0$.

611. $BC: 5x - y - 5 = 0$,

$$AC: x - y + 3 = 0 \text{ i } h_c: 3x - y - 1 = 0.$$

612. $x - 3y - 3 = 0$, $3x - 2y - 16 = 0$,
 $x + 4y - 10 = 0$, $5x - 8y - 6 = 0$.

613. $9x + 2y - 85 = 0$, $7x - 6y - 51 = 0$,
 $5x - 8y - 6 = 0$.

$$614. 14x + 7y - 16 = 0.$$

$$615. \text{ a) } 2x - 3y + 4 = 0; \quad \text{ b) } 3x - 11y - 7 = 0;$$

$$\text{ c) } 3x + 2y - 7 = 0; \quad \text{ d) } 45^\circ \text{ i } 90^\circ \text{ c) } T(\frac{7}{3}, 0).$$

$$616. 2x - y + 3 = 0, 2x - y - 7 = 0, \\ x + 2y - 1 = 0, x + 2y - 11 = 0, \\ 3x + y - 8 = 0, \text{ i } x - 3y + 4 = 0.$$

$$617. 3x - y + 3 = 0 \text{ i } x + 3y - 19 = 0.$$

$$618. x - 3y + 8 = 0, 5x - 3y - 32 = 0, \\ 5x - 9y + 4 = 0, x + 6y - 13 = 0.$$

619. Simetrale stranica AC i AB su redom $x + 2y + 1 = 0$ i $7x - y - 8 = 0$, a njihov presek, tačka $S(1, -1)$ je centar opisanog kruga. Jednačine su $h_a: x - 3y + 1 = 0$ i $h_c: 7x - y - 13 = 0$, a njihov presek je tačka $O(2, 1)$, ortocentar trougla. Težište trougla je tačka $T(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3})$.

Jednačina prave koja sadrži tačku S, T i O ima jednačinu $2x - y - 3 = 0$ (Ojlerova prava).

$$620. A(2, 0), B(1, \sqrt{3}).$$

621. Neka tačka $M(x, y)$ pripada traženom skupu tačaka.

Tada je $|MA| = |MB|$. Pošto je

$$|MA| = \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2}$$

$$|MB| = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}, \text{ uslov je } |MA| = |MB|$$

$$\text{postaje } \sqrt{(x-2)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-4)^2 + (y-6)^2}$$

$$x + y - 8 = 0.$$

Skup tačaka sa postavljenim uslovom je prava koja je simetrala duži AB .

$$622. 6x - 13y = 0 \text{ i } 2x - y = 0.$$

$$623. 2x - 2y + 3 = 0.$$

$$624. 39x - 9y - 4 = 0.$$

$$625. 2x + 7y + 22 = 0.$$

$$7x + 2y - 13 = 0, x - y + 2 = 0.$$

$$626. 4x - 3y - 1 = 0 \text{ ili } 6x - 8y + 9 = 0.$$

627. $x - 7y + 32 = 0$, $x - y + 2 = 0$.

628. $x - y = a$.

632. $BC: 7x + y - 20 = 0$.

$AC: 461x + 98y + 740 = 0$.

$AB: 29x - 28y + 110 = 0$.

633. $B(4, 7)$ i $C(6, -3)$.

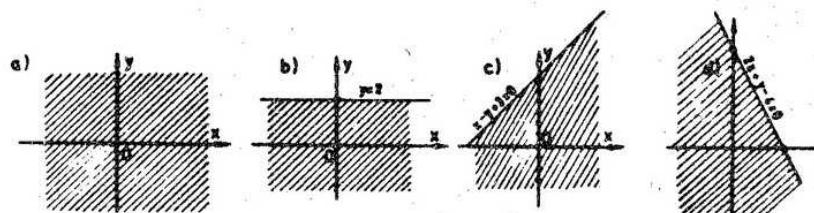
634. $C \left(\frac{5}{2}, \frac{5}{2} \right) \vee C_1 \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$.

635. $m = \frac{1}{2}$, $P = 14$.

636. $x - y - 1 = 0$, $3x - y + 3 = 0$.

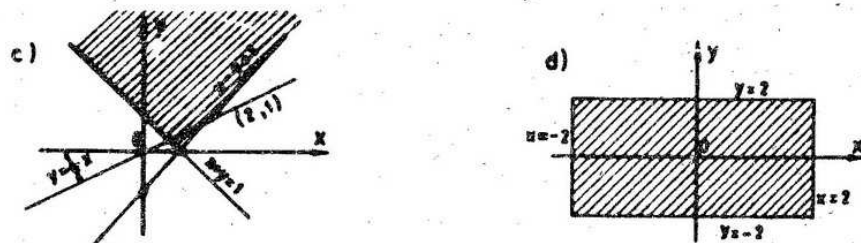
7.3. GRAFIČKA INTERPRETACIJA SISTEMA LINEARNIH NEJEDNAČINA SA DVE NEPOZNATE. REŠAVANJE PROBLEMA LINEARNOG PROGRAMIRANJA

637. Šrafirane oblasti prikazane su na sl. 30 a-d.



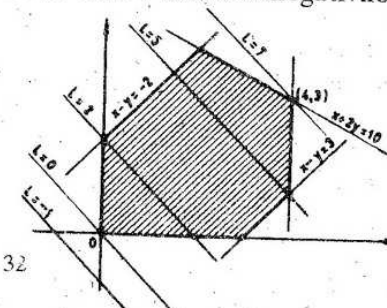
Slika 30

638. Na sl. 31 prikazane su šrafirane oblasti pod c) i d).



Slika 31

639. Konstruišimo najpre skup dopustivih rešenja. Da bismo to postigli, konstruišimo grafike pravih: $x - y = 3$, $x = 4$, $x + 2y = 10$ i $x - y = -2$ i ispitajmo da li koordinatni početak zadovoljava odgovarajuće nejednačine ili ne. Zamenom $x = 0$ i $y = 0$ dobijamo da su sve date nejednačine tačne. Prema tome, skup dopustivih rešenja je šrafirana oblast na sl.32, pri čemu su uzeti i uslovi nenegativnosti rešenja ($x \geq 0$ i $y \geq 0$).

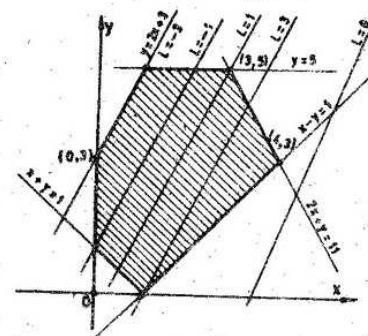


Slika 32

Funkcija cilja je $L = x + y$.

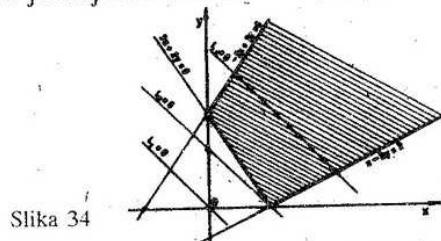
Varirajući L dobijemo familiju pravih. Od svih pravih koje seku skup dopustivih rešenja treba odrediti onu kod koje je L maksimalno. Kako L raste, grafik prave $x + y = L$ se translatorno pomera sleva nadesno. Ekstremum (maksimum) funkcije biće dostignut kada prava $x + y = L$ sadrži tačku $(4, 3)$. Tada je $\max L = 7$. Da smo tražili minimum, on bi bio dostignut za onu pravu koja sadrži tačku $(0, 0)$. Prema tome, bilo da tražimo maksimum bilo minimum, dobijemo tačno jedno rešenje.

640. Konstruišimo najpre prave $x - y = 1$, $2x + y = 11$, $y = 5$ i $x + y = 1$, i ispitajmo tačnost odgovarajućih nejednakosti u tački $O(0, 0)$. Zamenom $x = 0$ i $y = 0$ dobijamo da su prve četiri nejednačine tačne a da peta nije. Skup dopustivih rešenja šrafiran je na sl. 33. Na istoj slici prikazane su i neke od pravih $2x - y = L$ ($L \in R$). Kako L opada zdesna ulevo minimalna vrednost se dobije za pravu $2x - y = 3$, pa je $\min L = -3$. Tačke iz skupa dopustivih rešenja, koje sadrži prava $2x - y = -3$, su sve tačke duži, čije su krajnje tačke $(0, 3)$ i $(1, 5)$. Prema tome, u ovom slučaju problem nema jedinstveno rešenje, već ima beskonačno mnogo. (sl.33).



Slika 33

641. Funkcija L_1 ima najmanju vrednost $L_1 = 2$ za $x = 2$ i $y = 0$, dok najveću vrednost nema (sl.34). Slično se zaključuje da funkcija L_2 nema najmanju vrednost, a da je najveća $\max L_2 = -1$ za $x = 0$ i $y = 0$.



Slika 34

642. a) $\max L = 33$ za $x = 2, y = 5$; b) $\max L = 28$ za $x = 6, y = 2$;
c) $\min L = 33$; d) nema rešenja; e) $\max L_1 = 46, \min L_2 = 20$.

7.4. KRUŽNICA

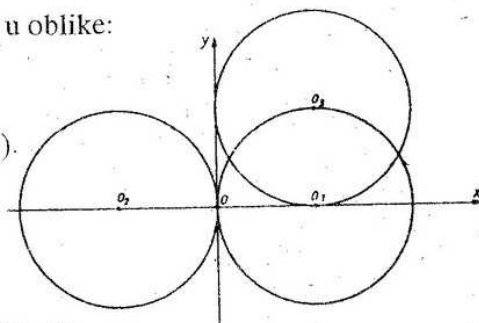
643. a) $C(1, 4), r = 5$; b) $C(-3, 2), r = 5$.

644. Date jednačine se transformišu u oblike:

$$(x - 4)^2 + y = 16;$$

$$x + (y - 4)^2 = 16;$$

$$(x - 4)^2 + (y - 4)^2 = 16 \text{ (sl. 35)}.$$



Slika 35

645. $r = 4$.

646. Zadatak ima četiri rešenja i to:

a) $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 25 = 0$;

b) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 25 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 10x + 10y + 25 = 0$;

d) $x^2 + y^2 - 10x + 10y + 25 = 0$.

647. a) $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 20$;

b) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 12 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$.

648. $x^2 + y^2 - 14y + 4 = 0$.

649. $x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$.

650. Rešavanjem sistema

$$2x + y - 15 = 0 \wedge x - 3y + 17 = 0,$$

nalazimo da se centar nalazi u tački $C(4, 7)$. Pošto je poluprečnik

$$r = AC = \sqrt{(9 - 4)^2 + (-5 - 7)^2} = 13, \text{ tražena jednačina kružnice biće}$$

$$(x - 4)^2 + (y - 7)^2 = 169.$$

651. Pošto simetrala tetive AB sadrži centar kružnice, koordinate centra određuju se rešavanjem jednačine ove simetrale i jednačine date prave. Jednačina simetrale koja je normalna na tetivu AB i sadrži njenu sredinu $S(2, 3)$, biće

$$y - 3 = -3(x - 2) \text{ ili } 3x + y - 9 = 0.$$

Sistem jednačina:

$$3x + y - 9 = 0 \wedge x - 2y - 3 = 0,$$

ima rešenje $x = 3, y = 0$, pa je traženi centar tačka

$C(3, 0)$. Poluprečnik kružnice

$$r = CA = \sqrt{(5 - 3)^2 + (4 - 0)^2} = 5.$$

Dakle, tražena jednačina kružnice je:

$$(x - 3)^2 + y^2 = 20 \text{ ili}$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 11 = 0.$$

652. Pošto kružnica dodiruje apscisnu osu imamo

$$q = r = 5.$$

Zamenom ove vrednosti u opštu jednačinu kružnice, dobijamo

$$(x - p)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

Ako tačka $A(5, 2)$ pripada kružnici, njene koordinate moraju zadovoljavati poslednju jednačinu, te imamo

$$(5 - p)^2 + (2 - 5)^2 = 25 \Rightarrow p_1 = 1 \vee p_2 = 9.$$

Dobijena rešenja pokazuju da postoje dve kružnice, poluprečnika 5, koje dodiruju apscisnu osu, a sadrže tačku A .

Njihove jednačine su:

$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 25 \text{ i}$$

$$(x - 9)^2 + (y - 5)^2 = 25.$$

653. Podimo od opšte jednačine kružnice u razvijenom obliku

$$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0,$$

i odredimo parametre d , e i f iz uslova da kružnica sadrži date tri tačke. Zamenjujući tekuće koordinate koordinatama datih tačaka A , B i C za određivanje parametara d , e i f , dobićemo sledeći sistem jednačina:

$$25 + 36 + 5d + 6e + f = 0 \wedge$$

$$9 + 4 - 3d + 2e + f = 0 \wedge$$

$$4 + 1 - 2d - e + f = 0, \text{ odakle } d = -4, e = -4 \text{ i } f = -17.$$

Tražena jednačina kružnice biće:

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 17 = 0.$$

Centar je $(2, 2)$, a poluprečnik $r=5$ (nacrtati sliku).

$$654. x^2 + y^2 - 12x - 8y + 36 = 0.$$

$$655. 7x^2 + 7y^2 + 56x - 50y + 112 = 0.$$

$$656. k = -\frac{1}{5}.$$

$$657. k_1 = 10 \vee k_2 = -2.$$

$$658. k_1 = 4 \vee k_2 = 0.$$

$$659. a) x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0;$$

$$b) x^2 + y^2 + 8x - 9 = 0;$$

$$c) (x-2)^2 + (y-1)^2 = 25.$$

$$660. m_1 = \frac{27}{5}, m_2 = 1.$$

$$661. A(3, 0), B(-4, 0), C(0, 4), D(0, -3).$$

$$662. a) 3x - y - 2 = 0; b) x - 7y - 6 = 0.$$

$$663. d = \sqrt{10}, \alpha = 90^\circ.$$

$$664. \text{ Na kružnici postoje dve tačke, } A_1(-1, -2) \text{ i } A_2(-1, -4).$$

Jednačina prve tetive je $x - 3y - 5 = 0$, a presečna tačka je $(2, -1)$; jednačina druge tetive je $x - 3y - 15 = 0$, a presečna tačka $(3, -4)$; jednačina treće tetive je $3x + y + 5 = 0$, a presečna tačka je $(0, -5)$; jednačina četvrte tetive je $3x + y - 5 = 0$, a presečna tačka je $(3, -4)$.

$$665. 3x^2 + 3y^2 + 20x - 24y + 48 = 0.$$

$$666. x^2 + y^2 - 18x - 8y + 71 = 0.$$

$$667. B(-4, 1), C(8, 5).$$

$$668. \frac{a}{A} = \frac{b}{B} = \frac{c}{C}.$$

$$669. (x+3)^2 + (y+1)^2 = 25.$$

$$670. \text{ Iz sistema jednačina}$$

$$(3-p)^2 + (4-q)^2 = r^2 \wedge$$

$$(4-p)^2 + (5-q)^2 = r^2 \wedge$$

$$p^2 + q^2 = 50,$$

dobićemo dva rešenja i to:

$$(x-7)^2 + (y-1)^2 = 25 \text{ i}$$

$$(x-1)^2 + (y-7)^2 = 13.$$

$$671. \text{ Ako je } r \text{ poluprečnik kružnice, } t \text{ dužina tetive i } d \text{ centralna razdaljina date prave, onda je}$$

$$r^2 = \left(\frac{t}{2}\right)^2 + d^2 = 9 + \left(\frac{6+5+18}{\sqrt{29}}\right)^2 = 38.$$

Tražena kružnica ima jednačinu

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38.$$

$$672. a) \text{ Kružnice se dodiruju spolja, ako je njihova centralna razdaljina } CC = r + r_1. \text{ U ovom slučaju je}$$

$$CC_1 = 4\sqrt{2}, \text{ a } r_1 = 2, \text{ pa je } r = 3\sqrt{2}.$$

Jednačina tražene kružnice je

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 11 = 0.$$

$$b) \text{ Kružnice se dodiruju iznutra, ako } CC_1 = r - r_1 \text{ pa je}$$

$$r - \sqrt{2} = 4\sqrt{2}. \text{ Tražena kružnica je određena jednačinom}$$

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y - 21 = 0.$$

$$673. \text{ Iz sistema}$$

$$(2-p)^2 + q^2 = r^2 \wedge (p+2)^2 + (q-8)^2 = 10 - r \wedge q = r,$$

dobijamo jednačinu tražene kružnice

$$x^2 + y^2 - 4x - 10y + 4 = 0.$$

Ako uzmemo za treću jednačinu gornjeg sistema

$$q = -r, \text{ tada je tražena kružnica}$$

$$9x^2 + 9y^2 + 36x + 10y + 36 = 0.$$

$$674. (x-12)^2 + (y-9)^2 = 100.$$

$$675. \text{ Iz sistema}$$

$$r^2 - q^2 = 9 \wedge (8-p)^2 + (7-q)^2 = r^2,$$

nalazimo dva rešenja;

$$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 25 \text{ i } (x-12)^2 + (y-4)^2 = 25.$$

676. Središte date kružnice je $C(-2, 4)$, a poluprečnik $r = 5$; parametri p, q i r tražene kružnice zadovoljavaju sistem
 $(p + 2)^2 + (q - 4)^2 = (r + 5)^2 \wedge p = \pm r \wedge q = 10$,
 odakle nalazimo
 $x^2 + y^2 - 5x - 20y + 100 = 0$ i
 $\left(x + \frac{15}{14}\right)^2 + (y - 10)^2 = \left(\frac{15}{14}\right)^2$.
677. a) Tačka je van kružnice; b) tačka pripada kružnici; c) tačka je u kružnici.
678. a) Prava seče kružnicu;
 b) prava i kružnica nemaju zajedničkih tačaka;
 c) prava dodiruje kružnicu u tački $M(6, 4)$.
679. Pošto je $C_1C_2 = \sqrt{17}$, $r_1 + r_2 = 3 \Rightarrow C_1C_2 > 3$,
 kružnice su spoljašnje – nemaju zajedničkih tačaka.
680. Pošto je $r_1 + r_2 = 2 + 3 = 5$, $C_1C_2 = 5$, kružnice se dodiruju spolja u tački $M(4, 7)$.
681. Kružnice se dodiruju iznutra u tački $M(4, 3)$.
682. Kružnice se seku u tačkama $M(4, 2)$ i $N(3, -1)$.
683. Kružnice su spoljašnje i nemaju zajedničkih tačaka jer je
 $r_1 = 5$, $r_2 = 2$; $C_1C_2 = \sqrt{5}$.
684. Kružnice su koncentrične,
 $C_1(2, 1) \equiv C_2(2, 1)$.
685. Iz uslova dodira $r^2(k^2 + 1) = n^2$ dobijamo $k = \pm 2$.
686. $m = -3 \pm 2\sqrt{5}$.
687. a) $4x - 3y - 24 = 0$ i $4x - 3y + 26 = 0$;
 b) $4x - 3y + 26 = 0$ i $4x - 3y - 24 = 0$.
688. $4x + 3y - 29 = 0$ i $4x + 3y + 21 = 0$.
689. a) $x + y \pm 6 = 0$;
 b) $x + y - 3 = 0$ i $x + y - 15 = 0$.
690. Jednačina pramena sa centrom u A glasi
 $y + 6 = k(x - 2)$ ili $kx - y - 6 - 2k = 0$.
 Iz pramena dobijamo one prave koje dodiruju datu kružnicu, tj.
 koje zadovoljavaju uslov

$$r^2 = \frac{(Ap + Bq + C)^2}{A^2 + B^2}$$
.

Zamenom odgovarajućih vrednosti imamo:

$$25 = \frac{(k - 7)^2}{k^2 + 1} \Leftrightarrow 12k^2 + 7k - 12 = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{3}{4} \vee k_2 = -\frac{4}{3}.$$

Tražene tangente su:

$$3x - 4y - 30 = 0 \text{ i } 4x + 3y + 10 = 0.$$

691. Tražena prava ima jednačinu $\frac{x}{6} + \frac{y}{n} = 1$; zatim analogno prethodnom zadatku dobijamo pravu
 $3x - y - 18 = 0$.
692. $3x - y + 2 = 0$.
693. $2x + y - 4 = 0$ i $2x + y - 24 = 0$.
694. a) Pošto tačka M pripada datoj pravoj, onda je
 $-3 - 7y + 59 = 0 \Rightarrow y = 8$ tj. $M(-3, 8)$;
 zatim treba napisati jednačinu pramena sa centrom u tački
 $M(-3, 8)$ i odrediti onu pravu pramena, koja je tangenta datoj
 kružnici i na kraju odrediti ugao koji grade tangenta i data prava.
 Dobiće se da je $\alpha = 45^\circ$ ili $\alpha = 135^\circ$.
 b) $\alpha = 45^\circ$ ili $\alpha = 135^\circ$.
695. $P = 12,5$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$.
696. $P = 2,5$; $\alpha = \frac{\pi}{2}$; $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$.
697. a) $P = 12,5$; b) $x^2 + y^2 + 9x - 7y + 20 = 0$;
 c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; d) $x - 7y + 29 = 0$.
698. a) $P = 2,5$; b) $x^2 + y^2 - 5x + 5y + 10 = 0$;
 c) $\alpha = \frac{\pi}{4}$; d) $3x + y - 5 = 0$.
699. $3x + 4y + 7 = 0$, $3x + 4y - 43 = 0$.
 $4x - 3y - 24 = 0$ i $4x - 3y + 26 = 0$.
 Dodirne tačke su: $A(-1, -1)$, $B(6, 0)$, $C(5, 7)$,
 $D(-2, 6)$.
 Jednačine stranica novog kvadrata su:
 $x - 7y - 6 = 0$; $7x + y - 42 = 0$;
 $x - 7y + 44 = 0$ i $7x + y + 8 = 0$.

700. a) $C_1 = -1 \vee C_2 = -11$;

b) $B_1 = -1 \vee B_2 = 1$;

c) $A_1 = A_2 = -3$.

701. $q_1 = 8 \vee q_2 = 2$.

702. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ i $(x^2 - 48)^2 + (y - 1)^2 = 39^2$.

703. Iz sistema

$$5p - 7q - 8 = 0 \wedge r^2(4 + 1) = (q - 2p)^2 \wedge$$

$$r^2 \left(\frac{1}{4} + 1 \right) = (q - \frac{1}{2}p + 3)^2,$$

sljede dva rešenja i to:

a) $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 5$ i $(x + \frac{17}{6})^2 + (x + \frac{19}{6})^2 = \frac{5}{4}$.

b) $(x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 25$ i $(x - 7)^2 + (y - 19)^2 = 225$.

c) $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 27 = 0$ i $x^2 + y^2 - 24x - 18y + 207 = 0$.

704. $x^2 + y^2 - 10x - 16y + 69 = 0$ i

$$x^2 + y^2 - 11y + 29 = 0.$$

705. a) $x^2 + y^2 = 5$;

b) $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 13 = 0$;

c) $x^2 + y^2 + 10x - 10y + 30 = 0$.

706. a) iz uslova $r^2 = \frac{(Ap+Bq+C)^2}{A^2+B^2}$ da prava $Ax + By + C = 0$ dodiru-
je kružnicu

$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ dobija se sistem od tri jednačine sa tri nepoznate.

$$(2p - q + 1)^2 = 5r^2 \wedge (p - 2q + 8)^2 = 5r^2 \wedge$$

$$(p + 2q + 8)^2 = 5r^2,$$

čija su rešenja:

$$p_1 = 8, p_2 = -8, p_3 = 7, p_4 = -3;$$

$$q_1 = -5, q_2 = 15, q_3 = 0, q_4 = 0;$$

$$r_1 = 2\sqrt{5}, r_2 = 6\sqrt{5}, r_3 = 3\sqrt{5}, r_4 = \sqrt{5}.$$

Oдавde slede jednačine traženih kružnica:

$$x^2 + y^2 + 16x + 10y + 69 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0.$$

$$x^2 + y^2 + 16x - 30y + 109 = 0.$$

$$x^2 + y^2 - 14x + 4 = 0.$$

b) $x^2 + y^2 - 6x + 4 = 0.$

$$x^2 + y^2 - 16x + 10y + 69 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 14y + 4 = 0 \text{ i}$$

$$x^2 + y^2 - 30x + 16y + 109 = 0.$$

707. a) $x - y\sqrt{3} + 6 = 0$ i $x + y\sqrt{3} + 6 = 0$;

b) $4x - 3y + 30 = 0$ i $3x + 4y - 15 = 0$;

c) $3x - 4y + 25 = 0$ i $4x + 3y - 25 = 0$;

d) $2x - y + 8 = 0$ i $2x + y - 8 = 0$.

708. a) Napisati jednačine tangenti iz tačke P na datu kružnicu, zatim odrediti ugao koji zaklapaju tangente $\varphi = 60^\circ$.

709. $\varphi = 60^\circ$

710. Treba odrediti ugao između date prave i tangente u zajedničkoj tački date prave i date kružnice.

a) $\varphi = 90^\circ$; b) $\varphi = 45^\circ$; c) $\varphi = 45^\circ$.

711. a) Ugao pod kojim se seku date kružnice je ugao između tangenti u zajedničkim tačkama. Rešavanjem sistema

$$x^2 + y^2 - 5x + 5 = 0 \wedge x^2 + y^2 = 5,$$

dobijamo zajedničke tačke kružnica

$$A(2, 1), B(2, -1).$$

Jednačina pramena sa centrom u tački A ima oblik

$$y - 1 = k(x - 2) \Rightarrow y = kx + 1 - 2k.$$

Odrediti onu pravu pramena koja je tangenta kružnice $x^2 + y^2 = 5$.

Iz uslova $r^2(k^2 + 1) = n^2$, imamo:

$$5(k^2 + 1) = (1 - 2k)^2 \Rightarrow k = -2,$$

tj. koeficijent tangente je $k = -2$, zatim odrediti i koeficijent pravca pramena, koja je tangenta kružnice

$$(x - \frac{5}{2})^2 + y^2 = \frac{5}{4}.$$

Iz uslova $r^2(k^2 + 1) = (kp - q + n)^2$ imamo da je

$$\frac{5}{4}(k^2 + 1) = (\frac{5k}{2} - 2k + 1)^2 \Rightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Pošto ugaoni koeficijenti prave tangente i druge tangente zadovoljavaju uslov normalnosti, ugao između tangenti je $\alpha = 90^\circ$. Dakle, kružnice se seku pod uglom od 90° (tj. kružnice su ortogonalne).

b) $\varphi = 45^\circ$ ili $\varphi = 135^\circ$; c) $\varphi = 60^\circ$ ili $\varphi = 120^\circ$

712. $\varphi = 60^\circ$.

713. Kružnice su ortogonalne ako je ispunjen uslov $C_1C_2^2 = r_1^2 + r_2^2$; zaista je $(b - a)^2 + (-a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2$.

714. Tražena kružnica ima jednačinu $(x - p)^2 + y^2 = r^2$; uslov da ona bude ortogonalna sa datom kružnicom zadovoljava uslov $(p + 3)^2 + 16 = r^2 + 36$. Uslov da data tačka pripada kružnici glasi: $(-1 - p)^2 + 4 = r^2$, odakle dobijamo $p = 4$, $r = \sqrt{29}$. Tražena jednačina glasi

$$(x - 4)^2 + y^2 = 29.$$

715. Iz sistema

$$(p - 3)^2 + (q - 4)^2 = 25 + r^2 \wedge$$

$$(-2 - p)^2 + (-6 - q)^2 = r^2 \wedge 3p - 2q - 12 = 0,$$

sledi da je $p = 2$, $q = -3$, $r = 5$. Jednačina tražene kružnice glasi

$$(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25.$$

$$716. (x - 4)^2 + (y + 1)^2 = 25.$$

$$717. x^2 + y^2 - 10x - 6y + 17 + k(x^2 + y^2 - 8x - 4y + 11) = 0.$$

$$718. (x - 7)^2 + (y - 5)^2 = 45.$$

719. Jednačina kružnice koja prolazi kroz presek datih kružnica je:

$$x^2(1 + k) + y^2(1 + k) - x(13 + 6k) - y(1 + 2k) + 30 - 15k = 0.$$

Koordinate centra su:

$$p = \frac{13 + 6k}{2 + 2k}, q = \frac{1 + 2k}{2 + 2k}.$$

Pošto koordinate centra pripadaju pravoj $3x - 10y - 30 = 0$, smenom tekućih koordinata u jednačini prave sa ovim koordinatama dobijamo vrednost parametra $k = -\frac{1}{2}$.

Ako zamenimo u obrascima za koordinate centra dobijamo $p = 12$, $q = 0$. Tražena jednačina kružnice glasi:

$$x^2 + y^2 - 20x + 75 = 0.$$

720. Iz jednačine datog pramena nalazimo

$$p = q = \frac{3 - \lambda}{1 + \lambda}, r^2 = 2 \left(\frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^2 + 2.$$

Zamenom u uslov dodira imamo:

$$\frac{10}{9} \left(2 \left(\frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} \right)^2 + 2 \right) = \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} - \frac{3 - \lambda}{1 + \lambda} - 2 \right)^2$$

$$\text{odakle nalazimo } \lambda_1 = 7 \text{ i } \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Rešenja su

$$\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \left(y + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{10}{4} \text{ i } (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 10.$$

721. a) Iz sistema

$$125(k^2 + 1) = (10k + n)^2 \wedge 45(k^2 + 1) = n^2$$

dobijamo

$$k = \pm \frac{1}{2}, n = \pm \frac{15}{2},$$

pa su tražene tangente

$$y = \pm \frac{1}{2}x \pm \frac{15}{2};$$

$$\text{b) } y = \pm \frac{1}{3}x \pm 5 \text{ i } y = \pm 3x \pm 5;$$

$$\text{c) } y = \pm \frac{1}{2}x \pm 3.$$

722. Neka je $C(x, y)$ ma koja tačka traženog geometrijskog mesta. Po pretpostavci je

$$CA = CB \Rightarrow \sqrt{(x - 4)^2 + (y - 2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x + 6)^2 + (y + 4)^2} \Rightarrow 5x + 3y + 8 = 0.$$

Traženo geometrijsko mesto tačaka je (prava) simetrala duži AB .

723. Traženo geometrijsko mesto je prava normalna na datu pravu u tački $M(-4, 1)$ i ona ima jednačinu $4x + 3y + 13 = 0$.

$$724. \left(x - \frac{5}{6} \right)^2 + y^2 = \frac{25}{36}.$$

$$725. (x + 3)^2 + (y + 3)^2 = 72.$$

726. Izaberimo koordinatni sistem tako da se pozitivni delovi koordinatnih osa poklapaju sa kracima datog ugla. Neka su krajevi date duži $A(a, 0)$, $B(0, b)$, a središte duži $M(x, y)$. Po pretpostavci imamo:

$$x = \frac{a}{2}, y = \frac{b}{2}, a^2 + b^2 = l^2, x^2 + y^2 = \left(\frac{l}{2} \right)^2$$

tj. tačka M opisuje kružnu liniju.

727. Neka je $M(X, Y)$ središte ma koje tetive PQ . Tačka Q pripada kružnici, pa su njene koordinate $Q(x, y)$. Po pretpostavci imamo

$$X = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow x = 2X,$$

$$Y = \frac{a + y}{2} \Rightarrow y = 2Y - a.$$

Pošto su (x, y) tekuće koordinate date kružnice, imamo

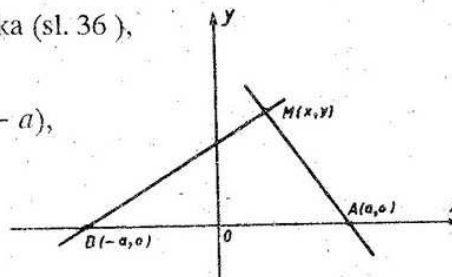
$$(2X)^2 + (2Y - a)^2 \Rightarrow X^2 + (Y - \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4},$$

tj. traženo geometrijsko mesto tačaka je kružnica sa središtem u tački $(0, \frac{a}{2})$ i poluprečnikom $r = \frac{a}{2}$.

728. Neka je $M(x, y)$ presečna tačka (sl. 36),
onda su jednačine pravih

$$y = -\frac{1}{m}(x + a) \text{ i } y = m(x - a),$$

odakle je $x^2 + y^2 = a^2$,
tj. traženo geometrijsko
mesto tačaka je kružnica.



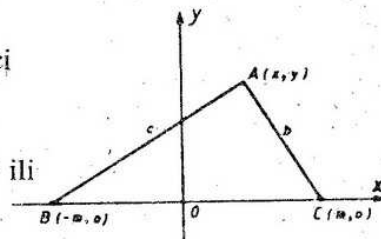
Slika 36

729. Neka je koordinatni početak sredina
stranice i neka stranica a pripada
apscisnoj osi (sl. 37). Po pretpostavci
imamo

$$b^2 + c^2 = 2n^2, \text{ tada je}$$

$$(x - m)^2 + y^2 + (x + m)^2 + y^2 = 2n^2 \text{ ili}$$

$$x^2 + y^2 = n^2 - m^2.$$



Slika 37

730. Za apscisnu osu uzimamo pravu koja sadrži tačke A i B , a za koordinatni početak tačku C . Ako je $M(x, y)$ tačka traženog skupa, imaćemo da je

$$\frac{\frac{y}{x+m} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{y^2}{x(x+m)}} = \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{x-n}}{1 + \frac{y^2}{x(x-n)}}, \text{ odakle je}$$

$$(m - n)x^2 + (m - n)y^2 - 2mnx = 0.$$

731. Ugao pod kojim se vidi kružnica iz tačke M je ugao između tangenti konstruisanih iz te tačke. U ovom slučaju tangente su normalne tj. $k_1 k_2 = -1$. Ako iz sistema

$$r^2(k^2 + 1) = n^2 \wedge y = kx + n,$$

eliminišemo n dobićemo jednačinu

$$k^2(r^2 - x^2) + 2kxy + r^2 - y^2 = 0.$$

Ovo je kvadratna jednačina po k , pa je

$$k_1 k_2 = \frac{r^2 - y^2}{r^2 - x^2} \text{ (Vieta).}$$

Pošto je $k_1 k_2 = -1$, to je

$$\frac{r^2 - y^2}{r^2 - x^2} = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2r^2.$$

732. Jednačina stranice

$$AC: 2x - y + 4 = 0, \text{ a } BC: 2x + y - 4 = 0.$$

Neka su koordinate ma koje tačke geometrijskog mesta (X, Y) .
Po pretpostavci imamo

$$\frac{2X + Y - 4}{-\sqrt{5}} \cdot \frac{2X - Y + 4}{\sqrt{5}} = Y^2,$$

odakle nalazimo jednačinu traženog geometrijskog mesta u obliku
 $X^2 + (Y + 1)^2 = 5$.

733. $x^2 + y^2 - ax = 0$.

734. $x^2 + (y + 3)^2 = 5$.

735. Jednačina prave koja sadrži centar kružnice $C(1, 2)$ i normalna je na datu pravu glasi $4x - 3y + 2 = 0$. Ova prava seče kružnicu u tačkama $A(-2, -2)$ i $B(4, 6)$. Pošto su rastojanja ovih tačaka od date prave redom jednaka 4 i 14, tražena tačka je $A(-2, -2)$.

736. $y = 2, 4x - 3y - 10 = 0, 3x + 4y - 5 = 0, x = 1$.

737. $x^2 + (y - 4)^2 = 16$.

738. Sečice konstruisane iz tačke A na datu kružnicu su tangente kružnice koncentrične datoj poluprečnika $r^2 = 50 - \left(\frac{10}{2}\right)^2 = 25$.
Njihove jednačine su $y + 5 = 0$ i $3x + 4y - 25 = 0$.

739. Iskoristimo jednačinu pramena datih kružnica

$$x^2 + y^2 + 2x - 99 + k(x^2 + y^2 - 4x - 6y - 21) = 0, \text{ ili}$$

$$(1) (1 + k)x^2 + (1 + k)y^2 + 2(1 - 2k)x - 6ky - 99 - 21k = 0.$$

Da bismo iz skupa svih kružnica (1) koje sadrže presečne tačke datih kružnica izdvojili onu čiji je centar na ordinatnoj osi, potrebno je da je ispunjen uslov

$$p = 0 \Rightarrow 1 - 2k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{2}.$$

Zamenom u (1) dobija se kružnica traženih osobina
 $x^2 + y^2 - 2y - 40 = 0$.

740. Da bi pramen kružnice

$$x^2 + y^2 - 18x - 12y + 92 + k(x^2 + y^2 + 10x - 8y - 86) = 0,$$

sadržao tačku $A(1, 0)$ sledi $k = 1$.

Tražena kružnica je $x^2 + y^2 - 4x - 10y + 3 = 0$.

741. $x^2 + y^2 + 6x - 23 = 0$.

742. $(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 169$.

743. $B(-\sqrt{3}, -1), C(\sqrt{3}, -1)$.

744. Iskoristiti uputstvo zadatka 738. Jednačine traženih sečica su

$$x - y - 1 = 0 \text{ i } 17x - 7y - 67 = 0.$$

745. $x^2 + y^2 - 3x + 2y + 23 = 0.$

746. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0.$

747. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 45 = 0.$

748. a) $5x - 12y - 6 = 0$ i $x - 6 = 0$;

b) $3x - 2y - 14 = 0.$

749. Ako je $\vec{MA} = \vec{MO} + \vec{OA}$ i $\vec{MB} = \vec{MO} + \vec{OB}$ onda je

$$\vec{MA} \cdot \vec{MB} = (\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) \text{ (sl.38)}.$$

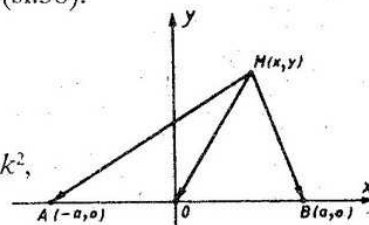
(1) $(\vec{MO} + \vec{OA}) \cdot (\vec{MO} + \vec{OB}) = k^2.$

Jednačina (1) može se transformisati u oblik

(2) $(-xi - yj - ai) \cdot (-xi - yj + aj) = k^2,$

odakle sledi da je

$$x^2 + y^2 = a^2 + k^2.$$



Slika 38

Dakle, traženo geometrijsko mesto tačaka je kružnica, sa središtem u koordinatnom početku, poluprečnika $\sqrt{a^2 + k^2}.$

7.5. ELIPSA

750. Ako je $a = 8$, a $e^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow b^2 = 39$, tražena jednačina glasi

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{39} = 1.$$

751. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{27} = 1.$

752. $x^2 + 3y^2 = 15.$

753. $d = 4.$

754. $9x^2 + 25y^2 = 225.$

755. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1.$

756. $\left(-\frac{15}{4}, \pm \frac{\sqrt{63}}{4}\right).$

757. $d = 4\sqrt{3}.$

758. $d = \sqrt{2(a^2 + b^2)}.$

759. $\left(\pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i $(0, -1)$

760. $M(-5, 7).$

761. Tražene tačke su presečne tačke elipse i kružnice koja prolazi kroz žiže elipse, a središte joj se nalazi u koordinatnom početku $(\pm\sqrt{15}; \pm 1).$

762. $x^2 + 4y^2 = 16.$

763. Označimo koordinate tačke $M(x, y)$. Po pretpostavci je:

$$3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 9 - x \Rightarrow \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1,$$

tj. tačka M pri svom kretanju opisuje elipsu.

764. Napisati jednačinu stranice trougla koja ima ugaoni koeficijent $k = \tan 30^\circ$ i odrediti presečne tačke sa elipsom.

$$\left(\frac{2}{7}, \pm \frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

765. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{4} = 1.$

766. $\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{9} = 1; F_1(-5, 0); F_2(5, 0); r_2 = 9, r_1 = 3.$

767. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$

769. Tačke A i E pripadaju elipsi; B i G su u elipsi; tačke C i D su van elipse.

770. Jednačine potega su:

$$x = 8 \text{ i } 9x - 40y + 72 = 0.$$

$$r_1 = 3, 6; r_2 = 16, 4.$$

771. Dve elipse su konfokalne ako im se poklapaju žiže.

Jednačina tražene elipse je

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{54} = 1.$$

772. $\left(\frac{\pm ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \frac{\pm ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right).$

773. $M(6, 5).$

774. a) $\varphi = 90^\circ$; b) $\varphi = 60^\circ$.

775. $r_{1,2} = \frac{1}{12} \sqrt{463 \pm 120\sqrt{7}}$.

776. $8 - \sqrt{(x+2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} - 2$
ili $21x^2 + 25y^2 = 525$.

777. Jednačine stranica trougla su $AC: x - y - 2 = 0$,

$AB: y - 2 = 0$, $BC: x + y + 2 = 0$. Neka su koordinate ma koje tačke traženog geometrijskog mesta $M(X, Y)$. Tada su odstojanja tačke M od stranice trougla

$$ML = \frac{X - Y - 2}{\sqrt{2}}, \quad MN = \frac{X + Y + 2}{\sqrt{2}},$$

$$MP = 2 - Y,$$

a jednačina traženog geometrijskog mesta glasi:

$$\left(\frac{X - Y - 2}{\sqrt{2}} \right)^2 + \left(\frac{X + Y + 2}{2} \right)^2 + (2 - Y)^2 = 12$$

$$\text{ili } \frac{X^2}{4} + \frac{Y^2}{2} = 1.$$

780. $9X^2 + 25Y^2 = 9r^2$.

779. Iz uslova da prava dodiruje elipsu $a^2k^2 + b^2 = n^2$ dobija se:
 $16a^2 + 9 = 25 \Rightarrow a = \pm 1$.

780. Presečne tačke su: $A(4, 2)$ i $B(1, -3)$. Jednačine tangenti su:
 $2x + 3y - 14 = 0$ i $x - 9y - 28 = 0$.

781. Iz sistema

$$x_1^2 + y_1^2 = 17 \text{ i } 2x_1^2 + 3y_1^2 = 35,$$

$$\text{dobija se: } x_1 = \pm 4, y_1 = \pm 1.$$

Jednačine tangenti su:

$$8x + 3y - 35 = 0, \quad 8x - 3y - 35 = 0,$$

$$8x - 3y + 35 = 0, \quad 8x + 3y + 35 = 0.$$

782. a) $8x + 3y \pm 35 = 0$, b) $x + y \pm 9 = 0$.

783. Traženi ugao se naslazi između date prave i prave koja sadrži tačku $P(14, 1)$ i dodiruje elipsu $y - 1 = k(x - 14) \Rightarrow y = kx + 1 - 14k$.

Pri tome mora da bude ispunjen uslov: $100k^2 + 25 = (1 - 14k)^2$, (tj. uslov da prava dodiruje elipsu), odakle sledi da je
 $24k^2 - 7k - 6 = 0$,

$$\text{odakle je } k = \frac{2}{3} \text{ i } k = -\frac{3}{8}.$$

$$\text{Tražena prava je } 2x - 3y - 25 = 0 \text{ ili } 3x + 8y - 25 = 0.$$

Traženi ugao je

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\frac{2}{3} - \frac{11}{10}}{1 + \frac{33}{10}} = \frac{7}{43} \Rightarrow \alpha_1 = \arctg \frac{7}{43} \text{ ili}$$

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{\frac{5}{11} + \frac{3}{8}}{1 - \frac{45}{88}} = 1 \Rightarrow \alpha_2 = 45^\circ.$$

784. Neka je jednačina tražene tangente $y = kx + n$.

Prema uslovu zadatka je

$$\frac{k - \frac{1}{5}}{1 + \frac{k}{5}} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{2},$$

a takođe je

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \Rightarrow 28 \cdot \frac{9}{4} + \frac{28}{3} = n^2 \Rightarrow n = \pm \sqrt{\frac{217}{3}},$$

pa su jednačine tangenti

$$y = \frac{3}{2}x \pm \sqrt{\frac{217}{3}}, \text{ ili } \frac{\frac{1}{5} - k}{1 + \frac{k}{5}} = 1 \Rightarrow k = -\frac{2}{3}, \text{ pa je}$$

$$n^2 = 28 \cdot \frac{4}{9} + \frac{28}{3} = \frac{196}{3} \Rightarrow n = \pm \frac{14}{3},$$

a jednačine tangenti su

$$y = -\frac{2}{3}x \pm \frac{14}{3}.$$

785. $x^2 + 4y^2 = 20$.

786. $\varphi = 90^\circ$.

787. $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{25} = 1$.

788. Tangente su $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}x + 4$ i $y = \pm \frac{\sqrt{7}}{4}x - 4$, odakle se lako zaključuje da je dobijeni četvorougao romb.

789. Jednačine tangenti glase

$$x + 5 = 0 \text{ i } 3x + 10y - 25 = 0.$$

790. a) Iz uslova da prava dodiruje elipsu imamo sistem

$$a^2 + b^2 = 64 \wedge a^2 + ab^2 = 256 \Leftrightarrow a^2 = 40 \wedge b^2 = 24.$$

$$\text{Jednačina elipse: } \frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

b) Iz sistema

$$16a^2 + 25b^2 = 625 \wedge 81a^2 + 400b^2 = 5625 \Leftrightarrow a^2 = 25, b^2 = 9.$$

$$\text{Jednačine elipse: } 9x^2 + 25y^2 = 225.$$

791. Presečne tačke se dobijaju rešavanjem sistema:

$$(x - 5\sqrt{3})^2 + y^2 = 100 \wedge x^2 + 3y^2 = 75 \Rightarrow M(0,5) \text{ i } N(0,-5).$$

Jednačina tangente elipse u tački $M(0,5)$ je $y = 5$, a tangenta kružnice

$$x\sqrt{3} - y + 5 = 0; \text{ prema tome } k_1 = 0, k_2 = \sqrt{3}, \text{ pa je}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{3} - 0}{1 + 0 \cdot \sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \alpha = 60^\circ.$$

792. Jednačine tangenti:

$$3x - 8y + 50 = 0 \text{ i } 2x + 3y - 25 = 0,$$

a površina $P = 50$.

793. Iz sistema

$$a^2 + 4b^2 = 729 \wedge 49a^2 + 16b^2 = 6561 \Rightarrow a^2 = 81, b^2 = 162;$$

elipsa ima jednačinu

$$\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{162} = 1.$$

Presek tangenti je tačka $A(15,6)$, a dodirne tačke $B(3,12)$ i $C(7,-8)$. Površina trougla je $P = 108$.

794. Neka je zajednička tangenta $y = kx + n$. Da bi prava dodirivala elipsu, mora da je ispunjen uslov $n^2 = a^2k^2 + b^2 \Rightarrow 64k^2 + 36 = n^2$, a da bi dodirivala i kružnicu, mora da je ispunjen uslov

$$(kp - q + n)^2 = r^2(k^2 + 1) \Rightarrow 32k^2 - n^2 + 4n + 28 = 0.$$

Na osnovu prethodnog, imamo

$$n^2 - 8n - 20 = 0 \Leftrightarrow n_1 = 10 \vee n_2 = -4, \text{ a } k = \pm 1.$$

Prema tome, zajedničke tangente su

$$x - y + 10 = 0 \text{ i } x + y - 10 = 0.$$

795. Zajedničke tangente su $x - y + 5 = 0$,

$$x - y - 5 = 0, x + y + 5 = 0, x + y - 5 = 0.$$

796. Jednačina pramena sa centrom u tački $M(x_1, y_1)$ glasi

$y - y_1 = k(x - x_1)$. Odredimo onu pravu pramena, koja dodiruje datu elipsu, tj. zadovoljava uslov dodira

$$a^2k^2 + b^2 = n^2 \text{ ili } a^2k^2 + b^2 = (y_1 - kx_1)^2.$$

Posle sređivanja imamo kvadratnu jednačinu po k :

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + y_1^2 - b^2 = 0.$$

Pošto tačka M pripada elipsi, tada postoji samo jedna prava pramena koja je tangenta elipse, tj. diskriminanta gornje jednačine je nula, pa je koeficijent

$$k = \frac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

$$\text{Iz jednačine } b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{a^2y_1^2}{b^2} = a^2 - x_1^2,$$

$$\text{a koeficijent } k = \frac{x_1y_1}{\frac{a^2y_1^2}{b^2}} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}.$$

Zamenom u jednačinu pramena dobijamo traženu tangentu

$$y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1), \text{ ili}$$

$$ayy_1 - a^2y_1^2 = -b^2xx_1 + b^2x_1^2, \text{ tj.}$$

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2.$$

797. Normalni oblik jednačine tangente

$$b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2 \text{ glasi}$$

$$\frac{b^2xx_1 + a^2yy_1 - a^2b^2}{\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2}} = 0.$$

Odstojanja žiže od tangente su

$$d_1 = \frac{-b^2(x_1\sqrt{a^2 - b^2} + a^2)}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}}, \quad d_2 = \frac{-b^2(a^2 - x_1\sqrt{a^2 - b^2})}{\sqrt{b^4x^2 + a^4y^2}},$$

pa je $d_1d_2 = b^2$.

798. Ako je $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ jednačina elipse, x_1 i y_1 koordinate dodirne tačke, onda je jednačina tangente $b^2xx_1 + a^2yy_1 = a^2b^2$.

$$OP_1 = x_1, \quad OP_2 = \frac{a^2b^2}{b^2x_1} = \frac{a^2}{x_1} \text{ tada je } OP_2 \cdot OP_1 = x_1 \cdot \frac{a^2}{x_1} = a^2.$$

799. Pokazati da su krajnje tačke prečnika elipse centralno simetrične u odnosu na središte elipse, zatim iskoristiti jednačinu tangente $b^2x_1 + a^2y_1 = a^2b^2$ itd.

800. Tangente su $x = \pm a$ i $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$, ordinate presečnih tačaka su

$$\frac{b^2(a-x_1)}{ay_1} \text{ i } \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1},$$

a njihov proizvod je b^2 .

801. Tangenta u tački $\left(e, \frac{b^2}{a}\right)$ je $y = -\frac{e}{a}x + a$, a normala

$$y = \frac{a}{e}x - \frac{e^2}{a}.$$

$$P = \frac{e}{a} \sqrt{a^2 - e^2} \cdot \sqrt{a^2 + e^2} = \frac{2a^2 - b^2}{a} \sqrt{a^2 - b^2}.$$

802. Neka su paralelne tangente elipse $y = kx + n$ ($a^2k^2 + b^2 = n^2$).

Normalni oblici ovih jednačina su

$$\frac{kx - y + n}{-\sqrt{k^2 + 1}} = 0 \text{ i } \frac{kx - y - n}{\sqrt{k^2 + 1}} = 0.$$

Odstojanje žiže $F(e, 0)$ je

$$d_1 = \frac{ke + n}{-\sqrt{k^2 + 1}} \text{ i } d_2 = \frac{ke - n}{\sqrt{k^2 + 1}}, \text{ pa je}$$

$$d_1d_2 = \frac{n^2 - k^2e^2}{k^2 + 1} = \frac{a^2k^2 + b^2 - k^2e^2}{k^2 + 1}$$

$$d_1d_2 = \frac{n^2 - k^2e^2}{k^2 + 1} = \frac{a^2k^2 + b^2 - k^2e^2}{k^2 + 1} =$$

$$= \frac{a^2k^2 + b^2 - a^2k^2 + b^2k^2}{k^2 + 1} = \frac{b^2 + b^2k^2}{1 + k^2} = b^2.$$

803. Dodirne tačke su $B(-6, 2)$, $D(6, 2)$; a četvrto teme je $C(0, -4)$ i $P = 72$; četvorougao je kvadrat.

804. $\varphi = 90^\circ$.

805. $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$.

806. Neka je tražena tetiva AB : $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$;

tada je

$$x_1 + x_2 = 2, y_1 + y_2 = 2, 4x_1^2 + 9y_1^2 = 36 \text{ i } 4x_2^2 + 9y_2^2 = 36.$$

Razlika poslednje dve jednačine daje:

$$4(x_2 - x_1)((x_2 + x_1) + 9(y_2 - y_1)(y_2 + y_1)) = 0 \text{ ili } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{4}{9}.$$

Dakle, koeficijent pravca tetive AB je $k = -\frac{4}{9}$, a njena jednačina

$$y - 1 = -\frac{4}{9}(x - 1) \Rightarrow 4x + 9y - 13 = 0.$$

807. $32x + 25y - 89 = 0$.

808. $x - 2y - 2 = 0$; $A(8, 3)$; $B(-6, -4)$.

809. Presečne tačke tangenti su

$$A\left(a, \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1}\right) \text{ i } B\left(-a, \frac{b^2(a+x_1)}{ay_1}\right),$$

a fokus $(e, 0)$, koeficijenti pravca

$$K_{AF} = \frac{b^2(a-x_1)}{ay_1(a-e)}, K_{BF} = -\frac{b^2(a+x_1)}{ay_1(a+e)};$$

$K_{AF} \cdot K_{BF} = -1$, što je trebalo dokazati.

810. Jednačine stranica: $y = \pm 3$, $y = \pm x + 9$; koordinate dodirnih tačaka $(0, \pm 3)$ i $(\pm 8, 1)$; koordinate temena $(\pm 6, 3)$ i $(\pm 12, -3)$; $P = 108$.

811. Prava $y = kx + n$ je tangenta date elipse, ako je $a^2b^2 + b^2 = n^2$.

Ako eliminišemo n , dobićemo jednačinu

$$k^2(a^2 - x^2) + 2kxy + b^2 - y^2 = 0.$$

Na osnovu Vijetovih pravila, koreni k_1 i k_2 ove jednačine zadovoljavaju uslov $k_1 \cdot k_2 = \frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2}$.

Po pretpostavci imamo $k_1k_2 = -1$, odakle sledi da je traženo geometrijsko mesto tačaka kružnice $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$.

812. Ako označimo koordinate krajnjih tačaka date duži sa $A(m, 0)$, $B(0, n)$, tada je $m^2 + n^2 = a^2$. Pošto tačka M deli duž AB u odnosu 1:2 imamo

$$x = \frac{m + 0 \cdot \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}}, y = \frac{0 + \frac{1}{2}n}{1 + \frac{1}{2}}$$

ili $m = \frac{3}{2}x$, a $n = 3y$, odakle dobijamo da je jednačina traženog geometrijskog mesta elipsa $9x^2 + 36y^2 = 4a^2$.

813. $3x^2 + 28y^2 = 75$.

814. $x = 0, y = 0, 5x + 3y - 15 = 0, 5x - 3y + 15 = 0$.

815. $P = 28,8$.

816. $P = 24$.

817. $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (0, -\sqrt{a^2 - b^2}), (\sqrt{a^2 - b^2}, 0), (0, \sqrt{a^2 - b^2}),$
 $P = 2(a^2 - b^2)$.

818. Dužina tetive AB je $\frac{2b^2}{a}$.

Primedba: polovina ove tetive naziva se parametar elipse i označava se sa p ($p = \frac{b^2}{a}$).

819. Na osnovu pretpostavke, za ma koju tačku $M(x, y)$ traženog skupa,

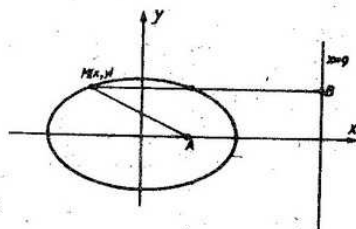
imamo $|MA| : |MB| = \frac{1}{3}$ (sl. 39).

Kako je $|MA| = \sqrt{(x-1)^2 + y^2}$,
 $|MB| = \sqrt{(x-9)^2} = |x-9|$, tada je

$3\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x-9|$.

Kvadriranjem, poslednja jednačina se svodi na oblik

$8x^2 + 9y^2 = 72$. Dakle, traženi skup tačaka je elipsa $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{8} = 1$.



Slika 39

820. $9x^2 + 25y^2 = 225$.

821. Jednačina tangente je $x + y - 9 = 0$, jednačina normale je $x - y - 3 = 0$, a presečne tačke sa koordinatnim osama su $T(9,0), T_1(0,9), N(3,0)$ i $N_1(0,3)$.

Koordinate žiža su $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$.

Jednačina kružnice koja sadrži tačke M, T_1, N_1 glasi

$x^2 + (y-3)^2 = 36$, a kružnica koja sadrži tačke M, N i T $(x-6)^2 + y^2 = 9$.

822. $21x^2 + 25y^2 = 525$.

823. $x + 2y - 8 = 0, x^2 + (y-4)^2 = 20$.

824. $3x^2 + 4y^2 = 48$.

825. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$.

Odavde zaključujemo da je

$C(1, 2), a=3, b=2, F_1(1+\sqrt{5}, 2)$ i $F_2(2-\sqrt{2}, 2)$.

826. Jednačina elipse sa središtem u tački $C(p, q)$, sa osama paralelnim koordinatnim osama, može se napisati u obliku

(4) $b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2px - 2a^2qy + b^2p^2 + a^2q^2 - a^2b^2 = 0$.

Upoređujući jednačinu elipse (4) sa opštom jednačinom krive drugog reda (3), sledi da će jednačina (3) predstavljati elipsu oblika (2) ako i samo ako je $B = 0 \wedge AC > 0$ (koeficijenti A i C istog znaka), $D, E, F \in \mathbb{R}$.

827. a) $C(-2, 2), a = \pm\sqrt{12}, b = \pm 3, F_1(\pm 1, 2),$

$F_2(-5, 2), \frac{(x+2)^2}{12} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1;$

b) $C(4, 0), a = \pm\sqrt{5}, b = \pm 1, F_1(6, 0), F_2(2, 0)$

$\frac{(x-4)^2}{5} + y^2 = 1;$

c) $C(1, -2), a = \pm 2\sqrt{3}, b = \pm 4$, žiže pripadaju pravoj $x = 1$,

$\frac{(x-1)^2}{12} + \frac{(y+2)^2}{16} = 1;$

d) $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$.

828. $\frac{(x-3)^2}{9} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$.

7.6. HIPERBOLA

829. $A(\pm 12, 0), F(\pm 13, 0)$.

830. a) $7x^2 - 9y^2 = 63$; b) $16x^2 - 9y^2 = 144$.

831. $16x^2 - 9y^2 = 1296$.

832. $x^2 - y^2 = 36$.

833. $5x^2 - 8y^2 = 40$.

834. $y = \pm \frac{3}{4}x$.

835. $9x^2 - 16y^2 = 288$.

836. $9x^2 - 16y^2 = 576$.

837. $(0, 0)$ i $(6, \pm 2\sqrt{3})$.

838. $y = \pm \frac{4}{3}(x+5)$.

839. $(\pm\sqrt{6}, \pm\sqrt{2})$.

840. $A(-4, 3)$ i $B\left(-\frac{4}{7}, -\frac{3}{7}\right)$.

841. $x^2 - 3y^2 = 48$.

842. $9x^2 - 7y^2 = 63$.

843. Proizvod odstojanja ma koje tačke hiperbole od asimptota jednak je $\frac{a^2b^2}{a^2 + b^2}$, tj. ne zavisi od koordinata tačke.

844. $P = 6$.

845. $x - 2y - 12 = 0$ i $x + 2y + 8 = 0$.

846. $(\pm\frac{16}{3}\sqrt{3}, \pm 2\sqrt{3})$.

847. Pošto je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x+1}$, a $\operatorname{tg}(180^\circ - 2\alpha) = \frac{y}{x-2}$, s obzirom na obra-

zac $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$, imamo

$$-\frac{y}{x-2} = \frac{2y(x+1)}{(x+1)^2 - y^2} \Leftrightarrow 3x^2 - y^2 = 3 \quad (x > 0),$$

trajektorija kretanja je hiperbola.

848. $3x^2 - y^2 = 12$.

849. Pošto je $K_{AM} = \frac{y}{x-a}$ i $K_{BM} = \frac{y}{x+a}$, imamo jednačinu

$$\frac{y}{x-a} \cdot \frac{y}{x+a} = \frac{b^2}{a^2} \Leftrightarrow b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

traženo geometrijsko mesto je hiperbola.

850. $y = \frac{x}{4}$.

851. Iz sistema $y = kx + n$ i $a^2k^2 - b^2 = n^2$ dobije se jednačina

$$k^2(x^2 - a^2) - 2kxy + y^2 + b^2 = 0: \text{ odavde je}$$

$$k_1k_2 = \frac{y^2 + b^2}{x^2 - a^2}.$$

U slučaju kad su prave normalne.

$k_1k_2 = -1$, tada je

$$\frac{y^2 + b^2}{x^2 - a^2} = -1 \Rightarrow x^2 + y^2 = a^2 - b^2 \quad (a > b).$$

852. $x^2 - y^2 = a^2 - b^2$

853. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ (za $x > 0$).

854. a) $\pm 11x - 9y - 40 = 0$; b) $8x - 3y + 32 = 0$.

855. $k = \pm 2\frac{1}{12}$.

856. $15x + 9y \pm 24 = 0$.

857. $2x \pm \sqrt{2}y - 2 = 0$.

859. a) $9x + 2y + 16 = 0$; b) $4x - y \pm 8\sqrt{2} = 0$.

860. $x + y \pm 1 = 0$.

861. $9\sqrt{2}$.

862. $2x \pm 5y = 0$.

863. Jednačina prave koja je normalna na datu pravu je

$$y = \frac{10}{7}x + n.$$

Da bi dodirivala parabolu, treba da zadovoljava uslov

$$a^2k^2 - b^2 = n^2, \text{ tj.}$$

$$n^2 = \frac{100}{49} \cdot \frac{13}{5} - \frac{13}{7} = \frac{169}{49} \Rightarrow n = \pm \frac{13}{7}.$$

Jednačine tangenti su:

$$10x - 7y + 13 = 0 \text{ i } 10x - 7y - 13 = 0.$$

864. Jednačina hiperbole je $x^2 - 2y^2 = 4$, jednačina tangente

$3x - 4y - 2 = 0$, a ugao između nje i date prave je:

$$\alpha_1 = 45^\circ, \alpha_2 = 135^\circ$$

865. Neka je tražena prava $y = kx + n$. Pošto ona sa datom pravom čini ugao od 45° , imamo:

$$\frac{k + \frac{1}{7}}{1 - \frac{k}{7}} = 1 \Rightarrow k = \frac{3}{4}.$$

Zamenom $k = \frac{3}{4}$ u jednačini

$y = kx + n$ dobijamo $y = \frac{3x}{4} + n$. Kako prava treba da dodiruje hiperbolu, mora da bude zadovoljen uslov

$$n^2 = a^2k^2 - b^2 = 4 \cdot \frac{9}{16} - 2 = \frac{1}{4} \Rightarrow n = \pm \frac{1}{2}.$$

Tražene jednačine su:

$$3x - 4y + 2 = 0, \quad 3x - 4y - 2 = 0.$$

Ako uzmemo da je

$$\frac{-\frac{1}{7} - k}{1 - \frac{k}{7}} = 1 \Rightarrow k = -\frac{4}{3},$$

$$\text{uslov postaje } n^2 = 4 \cdot \frac{16}{9} - 2 = \frac{46}{9} \Rightarrow n = \pm \frac{\sqrt{46}}{3},$$

pa su jednačine tangenti $4x + 3y \pm 46 = 0$.

866. $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1.$

867. $x^2 - 2y^2 = 2.$

868. $x - y - 1 = 0$ i $5x - 7y - 1 = 0.$

869. Presečne tačke su: $(4, 3); (4, -3); (-4, 3)$ i $(-4, -3).$

Jednačine tangenti u tački $(-4, 3)$ su

$$x + y + 1 = 0 \text{ i } x - y + 7 = 0, \varphi = 90^\circ.$$

870. Jedna presečna tačka je $M\left(a\sqrt{\frac{3}{2}}, a\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$

Jednačina pramena u tački M ima oblik

$$y = kx + \frac{a}{2}(\sqrt{2} - k\sqrt{6}).$$

Odredimo one dve prave iz pramena od kojih jedna dodiruje hiperbolu, a druga kružnicu. Iz uslova

$$a^2k^2 - b^2 = n^2 \text{ imamo}$$

$$a^2k^2 - a^2 = \frac{a^2}{4}(2 - 2k\sqrt{12} + 6k^2) \Rightarrow k = \sqrt{3},$$

a iz uslova $r^2(k^2 + 1) = n^2$ imamo

$$2a^2(k^2 + 1) = \frac{a^2}{4}(2 - 2k\sqrt{12} + 6k^2) \Rightarrow k = -\sqrt{3}.$$

Zamenom ove vrednosti u obrazac

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{3}}{1 - 3} = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ.$$

871. $x - y - 1 = 0$ i $x + y + 1 = 0.$

872. $x - y + 2 = 0, x - y - 2 = 0,$
 $x - y - 2 = 0$ i $x + y + 2 = 0.$

873. $2x - 3y \pm 1 = 0$ i $2x + 3y \pm 1 = 0.$

874. $x - 3y \pm 3 = 0$ i $3x + y \pm \sqrt{321} = 0.$

875. Neka tražena tetiva seče hiperbolu u tačkama

$M_1(x_1y_1)$ i $M_2(x_2y_2).$ Tada je

$$x_1^2 - 4y_1^2 = 4 \text{ i } x_2^2 - 4y_2^2 = 4. \text{ Oduzimanjem ovih jednačina dobijamo}$$

$$(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) = 4(y_2 - y_1)(y_2 + y_1) \Rightarrow$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{x_2 + x_1}{4(y_2 + y_1)}.$$

Kako je A sredina duži M_1M_2 , imamo

$$x_1 + x_2 = 6 \text{ i } y_1 + y_2 = -2, \text{ pa predhodna jednačina daje}$$

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{3}{4}.$$

Prema tome, koeficijent pravca tražene prave je

$$k = -\frac{3}{4}.$$

Jednačina tražene prave je

$$y + 1 = -\frac{3}{4}(x - 3), \text{ tj. } 3x + 4y - 5 = 0.$$

876. $20x - 9y - 91 = 0.$

877. Tangenta elipse ima jednačinu $x - y + 3 = 0$; presečne tačke sa hiperbolom su $(5, 8)$ i $(-3, 0).$ Dužina tetive je $8\sqrt{2}.$

878. $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2.$

879. Jednačina pramena sa centrom u tački $M(x_1, y_1)$ glasi

$y - y_1 = k(x - x_1).$ Odredimo onu pravu pramena koja dodiruje datu hiperbolu i zadovoljava uslov dodirom

$a^2k^2 - b^2 = n^2$ ili $a^2k^2 - b^2 = (y_1 - kx_1)^2.$ Posle sređivanja dobijamo kvadratnu jednačinu po k

$$(x_1^2 - a^2)k^2 - 2x_1y_1k + y_1^2 + b^2 = 0.$$

Pošto tačka M pripada hiperboli, postoji samo jedna prava pramena koja je tangenta hiperbole.

U tački M diskriminanta gornje jednačine je nula (što se lako dokazuje), pa je $k = \frac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2}.$

$$k = \frac{x_1y_1}{x_1^2 - a^2}.$$

Iz jednačine

$$b^2x_1^2 - a^2y_1^2 = a^2b^2 \Rightarrow \frac{a^2y_1^2}{b^2} = x_1^2 - a^2,$$

$$\text{a koeficijent } k = \frac{x_1 y_1}{a^2 y_1^2} = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1},$$

zamenom u jednačinu pramena dobijamo traženu tangentu

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1) \text{ ili}$$

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2, \text{ tj.}$$

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2.$$

880. Iz sistema

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2 \wedge y = \frac{b}{a} x \Rightarrow x = \frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 - a b y_1}, y = \frac{a b^3}{b^2 x_1 - a b y_1}.$$

Pošto je

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 - a b y_1} + \frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 + a b y_1} \right) = \frac{a^2 b^2}{2} \cdot \frac{2 b^2 x_1}{b^2 x_1^2 - a^2 b^2 y_1^2} = x_1, \text{ a}$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a b}{b^2 x_1 - a b y_1} + \frac{-a b}{b^2 x_1 + a b y_1} \right) = \frac{a b^3}{2} \cdot \frac{2 a b y_1}{a^2 b^4} = y_1,$$

tvđenje je tačno.

881. Presečne tačke asimptota $y = \pm \frac{b}{a} x$ hiperbole i njene tangente

$$b^2 x x_1 - a^2 y y_1 = a^2 b^2$$

$$\text{su } A \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 - a b y_1}, \frac{a b^3}{b^2 x_1 - a b y_1} \right) \text{ i } B \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 + a b y_1}, \frac{-a b^3}{b^2 x_1 + a b y_1} \right).$$

Površina trougla je data jednačinom

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 - a b y_1} \cdot \frac{-a b^3}{b^2 x_1 + a b y_1} + \frac{a^2 b^2}{b^2 x_1 + a b y_1} \cdot \frac{-a b^3}{b^2 x_1 - a b y_1} \right)$$

ili

$$P = \frac{1}{2} \left(\frac{-a b}{b^2 (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)} + \frac{-a b}{b^2 (b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2)} \right) = \frac{a^3 b^5}{a^2 b^4} = a b.$$

882. Neka je $M(x_1, y_1)$ ma koja tačka hiperbole, jednačine pravih koje sadrže tačku M , a paralelne su sa asimptotama $y = \pm \frac{b}{a} \cdot x$ hiperbole glase:

$$y - y_1 = \pm \frac{b}{a} \cdot (x - x_1).$$

Temena paralelograma su: $O(0, 0)$, $M(x_1, y_1)$ i presečne tačke asimptota sa pravama paralelnim njima.

$$A \left(\frac{a y_1 + b x_1}{2b}, \frac{a y_1 + b x_1}{2a} \right), B \left(\frac{b x_1 - a y_1}{2b}, \frac{b x_1 - a y_1}{2a} \right),$$

$$\text{a površina paralelograma } P = \frac{1}{2} a b.$$

883. Ako je tangenta $y = kx + n$, tada je $d_1 = \frac{ke + n}{k^2 + 1}$ i

$$d_2 = -\frac{n - ke}{k^2 + 1}, \text{ pa je}$$

$$d_1 d_2 = -\frac{n^2 - k^2 e^2}{k^2 + 1} = \frac{a^2 k^2 - b^2 - k^2 (a^2 + b^2)}{k^2 + 1} = b^2.$$

885. Neka apscisna osa sadrži tačke A i B , a koordinatni početak neka se nalazi u središtu duži AB , onda je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{3+x}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{y}{3-x}$,

$$\frac{y}{3+x} \cdot \frac{y}{3-x} = -4 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

Teme C opisuje hiperbolu.

886. Analogno prethodnom zadatku dobije se da je traženo geometrijsko mesto hiperbola

$$\frac{x^2}{c^2} - \frac{y^2}{k^2 c^2} = 1.$$

887. Neka je tražena tačka $M(x_1, y_1)$. Koeficijenti pravca potega su

$$\frac{y_1}{x_1 + e} \text{ i } \frac{y_1}{x_1 - e}.$$

Iz uslova normalnosti i uslova da tačka M pripada hiperboli imamo sistem

$$y_1^2 = e^2 - x_1^2 \wedge b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2 = a^2 b^2 \Rightarrow$$

$$x_1 = \pm a \sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}, y_1 = \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$$888. \frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{8} = 1.$$

$$889. \sqrt{5}.$$

$$890. \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1.$$

891. Proveravanjem se utvrđuje da data prava ne seče hiperbolu. Prava $3x + 2y + C = 0$; gde $C \in R$, paralelna je datoj pravoj. Odredimo C tako da ta prava bude tangenta hiperbole. Ako se y eliminiše iz sistema $3x + 2y + C = 0 \wedge 3x^2 - 4y^2 = 72$, dobija se jednačina $6x^2 + 6Cx + 72 + C^2 = 0$. Ova jednačina ima dvostruko rešenje ako je $C^2 = 144 \Leftrightarrow C = 12 \vee C = -12$.

Za $C = 12$ tangenta je $3x + 2y + 12 = 0$ koja dodiruje hiperbolu u tački $A(-6, 3)$, a za $C = -12$ tangenta je $3x + 2y - 12 = 0$ koja dodiruje hiperbolu u tački $B(6, -3)$.

Rastojanje tačke A od date prave je $\sqrt{13}$, a tačke B je $\frac{11}{\sqrt{13}}$. Prema tome, najbliža je tačka $A(-6, 3)$.

892. $(x - 1)^2 + y^2 = 18$.

893. $\left(\pm \frac{4\sqrt{217}}{25}, \pm \frac{96}{25} \right)$.

894. $x^2 - y^2 = a^2$.

895. $\alpha = 90^\circ \cdot d = \sqrt{481}$.

896. $b = 2, \lambda = -1$.

897. Za $e > a$ hiperbola
 $b^2a^2 - a^2b^2 = a^2b^2(e^2 - a^2 = b^2)$.

Za $e < a$ elipsa
 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2(a^2 - e^2 = b^2)$.

898. $\left(\pm a\sqrt{\frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}}, \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$.

900. Dužina tetive je $\frac{b^2}{a^2}$.

Primerba: Polovina ove tetive naziva se parametar hiperbole i označava se sa p ($p = \frac{b^2}{a^2}$).

901. $3x^2 - y^2 = 3$.

903. Jednačina (6) predstavlja hiperbolu sa centrom u proizvoljnoj tački i osama paralelnim koordinatnim osama, ako je $B = 0, AC < 0$ (A i C različitog znaka) i $D, E, F \in R$.

904. $\frac{(x-3)^2}{144} - \frac{(y-2)^2}{25} = 1$.

905. a) $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{25} = 1, 3x - 2y - 8 = 0,$

$3x - 2y - 4 = 0;$

b) $\frac{(x-1)^2}{2} - \frac{(y-2)^2}{1} = 1;$

c) $C(-5, 1), a = \pm 8, b = \pm 6,$

$3x + 4y + 11 = 0, 3x - 4y + 19 = 0.$

906. a) $5(x + 1)^2 - 7(x + 2)^2 = 13;$

b) $\frac{(x-1)^2}{2} - (y-2)^2 = 1;$

c) $3(x - 1)^2 - 4(x + 1)^2 = 8.$

907. $x - y = 0, x - y + 2 = 0$

908. $a = 6, b = 3, C(1, 0)$ ili $C(21, 0)$.

909. $\alpha = 45^\circ$.

7.7. PARABOLA

910. $y^2 = 8x$.

911. $y^2 = 16x$.

912. $y = 10x, F\left(\frac{5}{2}, 0\right)$.

913. 10.

914. $12x - 5y - 24 = 0$.

915. $x + y + 1 = 0; 8$.

916. $4p\sqrt{3}$.

917. $(3, \pm 3\sqrt{2})$.

918. $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$.

919. $y = -\sqrt{3}(x + 1); \frac{16}{3}$.

920. $y^2 = -3x$.

921. $y = 2x + 3$.

922. $3\sqrt{5}$.

923. $P = 108\sqrt{3}$.

924. Parabola $y^2 = 4ax$ i prava $y = 0$.

925. Prava: $y = 2$.

926. $y^2 = 5(2x - 1)$.

927. $y^2 = px$.

928. $Y^2 = \frac{p}{2}X$.

929. $Y^2 = \frac{2pm^2X}{(m+n^2)}$.

930. Iz jednačina $y = kx + n$ i $p = 2kn$ sledi $2k^2x - 2yk + p = 0$, a odavde je $k_1k_2 = \frac{p}{2x}$.

Pošto treba da bude ispunjen uslov normalnosti $k_1k_2 = -1$, i sledi

$$\frac{p}{2x} = -1, \text{ a odavde}$$

$$x = -\frac{p}{2}.$$

Dakle, traženo geometrijsko mesto je direktrisa.

931. Neka je sedište jedne od traženih kružnica

$S(x, y)$, onda je $SA = SB$;

$$SA = SC - AC = \sqrt{(x+5)^2 + y^2} - 3, \quad SB = 2 - x, \text{ pa je}$$

$$\sqrt{(x+5)^2 + y^2} = 2 - x \text{ ili } y^2 = -20x, \text{ a to je parabola.}$$

932. a) $3x - 2\sqrt{3}y + 6 = 0$; b) $2x + 2y + 5 = 0$.

933. $y^2 = 9x$.

934. $4x - 4y + 15 = 0$.

935. a) $6x \pm 1 = 0$; b) $4x \pm \sqrt{2}y + 2 = 0$.

936. a) $x - 3y + 9 = 0$; b) $3x - y + 1 = 0$.

937. $x - y + 1 = 0$ i $x + 2y + 4 = 0$.

938. Jednačina tangente je $x + y + 4 = 0$, a tačka $M(4, -8)$.

939. $x - 2y + 12 = 0$ i $3x + 2y + 4 = 0$.

940. Jednačine tangenti glase

$$2x - y + 2 = 0 \text{ i } x + y + 4 = 0.$$

Koordinate dodirnih tačaka su $M(4, -8)$ i $N(1, 4)$. Ugao između tangenti iznosi $71^\circ 34'$, a njegov uporedni $108^\circ 26'$. Površina trougla iznosi 27.

941. Jednačina tetive je $2x + y - 4 = 0$; dodirne tačke $M(1, 2)$ i $N(4, -4)$; tangente

$$x - y + 1 = 0 \text{ i } x + 2y + 4 = 0.$$

942. Iz uslova da prava $y = kx + n$ dodiruje datu parabolu i datu kružnicu dobijamo sistem jednačina.

$$9k^2 - 2km - n^2 + 10 = 0 \wedge nk - 1 = 0.$$

Rešenje sistema je:

$$k_1 = \frac{1}{3}, \quad k_2 = -\frac{1}{3} \text{ i } n_1 = 3, \quad n_2 = -3.$$

Jednačine zajedničkih tangenti su:

$$x - 3y + 9 = 0 \text{ i } x + 3y + 9 = 0.$$

943. Jednačine zajedničkih tangenti su:

$$x = 0, \quad 3x - 4y + 12 = 0 \text{ i } 3x + 4y + 12 = 0.$$

944. Jednačine zajedničkih tangenti su:

$$2x - y + 1 = 0, \quad 2x + y + 1 = 0, \quad x - 2y + 8 = 0 \text{ i } x + 2y + 8 = 0.$$

945. $x - y + 5 = 0$ i $x + y + 5 = 0$.

946. a) $\varphi = 45^\circ$.

b) $4x + 2y + 1 = 0$.

c) Kružnica sadrži tačke $A(4, 4)$, $B(9, -6)$ i $C(-6, -1)$; jednačina kružnice:

$$x^2 + y^2 - 3x + 7y - 48 = 0.$$

d) $\alpha = 45^\circ$.

947. Krive se seku u tačkama $M(8, 8)$ i $N(8, -8)$. Jednačine tangenti u tački M su: $x + 3y - 32 = 0$ (kružnice) i $x - 2y + 8 = 0$ (parabole), a ugao između njih $\varphi = 45^\circ$ (135°).

948. Jednačine zajedničkih tangenti su:

$$x - 7y + 49 = 0, \quad x + y + 1 = 0 \text{ i } x - y + 1 = 0; \text{ njihove presečne tačke su } A(7, 8), \quad B(-7, 6) \text{ i } C(-1, 0).$$

$$\text{Jednačina tražene kružnice: } x^2 + y^2 - 14y - 1 = 0.$$

949. Krajnje tačke tetive su $A(9, 6)$ i $B(1, -2)$. Jednačine tangenti u tim tačkama su:

$$x - 3y + 9 = 0 \text{ i } x + y + 1 = 0.$$

Njihova presečna tačka je $C(-3, 2)$.

Jednačina tražene kružnice je:

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y - 15 = 0.$$

950. Jednačine tangenata su:

$$x + y + 2 = 0 \text{ i } 2x - y - 8 = 0.$$

Koordinate dodirnih tačaka $A(-4, 2)$ i $C(8, 8)$.

$$\text{Jednačine kružnice } x + y - 6x - 32 = 0.$$

$$\text{Dužine stranica } AB = 6\sqrt{2}, AC = BC = 6\sqrt{5}.$$

951. Koordinate presečnih tačaka su:

$$x_{1,2} = \frac{2(a^2 + 1) + 2\sqrt{2a^2 + 1}}{a^2}, y = \frac{-2 \pm \sqrt{2a^2 + 1}}{a},$$

pa je površina trougla:

$$12 = \frac{2(a^2 + 1) + 2\sqrt{2a^2 + 1}}{a^2} \cdot \frac{-2 + 2\sqrt{2a^2 + 1}}{a} + \\ + \frac{2(a^2 + 1) - 2\sqrt{2a^2 + 1}}{a^2} \cdot \left(-\frac{-2 - 2\sqrt{2a^2 + 1}}{a} \right), \text{ ili}$$

$3a = 2 \cdot \sqrt{2a^2 + 1}$, odakle je $a = \pm 2$. Prema tome, postoje dve prave:

$$2x + y - 4 = 0 \text{ i } 2x - y - 4 = 0.$$

Njihove presečne tačke sa parabolom su

$$(4, 4), (1, -2) \text{ i } (1, 2), (4, -4).$$

Jednačine tangenti u tim tačkama su:

$$x - 2y + 4 = 0, x + y + 1 = 0,$$

$$x - y + 1 = 0 \text{ i } x + 2y + 4 = 0.$$

Prve dve tangente seku se u tački $(-2, 1)$, a druge dve u $(-2, -1)$.

952. a) Jednačina tetive je $y = x - \frac{3}{2}$, njene krajnje tačke su $x = \frac{9 \pm 6\sqrt{2}}{2}$,

$$y = 3 \pm 3\sqrt{2}, \text{ njena dužina je } M_1M_2 = 12.$$

b) Jednačine tangenti su

$$2x - 2y(1 + \sqrt{2}) + 9 + 6\sqrt{2} = 0 \text{ i}$$

$$2x - 2y(1 - \sqrt{2}) + 9 - 6\sqrt{2} = 0.$$

Njihova presečna tačka je $S(-\frac{3}{2}, 3)$.

Njene koordinate zadovoljavaju jednačinu direktrise $x = -\frac{3}{2}$.

$$\text{Pošto je } k_1k_2 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} \cdot \frac{1}{1 - \sqrt{2}} = -1$$

ugao između tangenti je 90° .

953. Tetiva koja sadrži žižu $F(0, \frac{p}{2})$ gradi ugao od 45° sa Ox osom i ima jednačinu $y - \frac{p}{2} = x$, a koordinate njenih krajnjih tačaka su

$$x_{1,2} = p \pm p\sqrt{2}, y_{1,2} = \frac{3p \pm 2p\sqrt{2}}{2}; \text{ njena dužina } d \text{ je data izrazom}$$

$$d^2 = (2p\sqrt{2})^2 + (2p\sqrt{2})^2 = 16p^2 \Rightarrow d = 4p.$$

Tetiva koja sadrži žižu $F(0, \frac{p}{2})$ i gradi ugao od 60° sa osom Ox ima jednačinu $y - \frac{p}{2} = \sqrt{3}x$, a koordinate krajnjih tačaka su

$$x_{1,2} = p\sqrt{3} \pm 2p, y_{1,2} = \frac{7p}{2} \pm 2p\sqrt{3};$$

njena dužina d dobija se iz jednačine

$$d^2 = (4p)^2 + (4p\sqrt{3})^2 = 64p^2 \Rightarrow d = 8p.$$

954. Jednačina tetive koja sadrži žižu parabole je

$$y = k(x - \frac{p}{2}),$$

a koordinate njenih presečnih tačaka sa parabolom su

$$x_{1,2} = \frac{p(k^2 + 2) \pm 2p\sqrt{k^2 + 1}}{2k^2} \text{ i } y_{1,2} = \frac{p \pm p\sqrt{k^2 + 1}}{k}.$$

Dužina tetive je

$$\left(\frac{p(k^2 + 2) + 2p\sqrt{k^2 + 1} - p(k^2 + 2)}{2k^2} + \frac{2p\sqrt{k^2 + 1} + 1}{2k^2} + \right. \\ \left. + \frac{p + p\sqrt{k^2 + 1} - p + p\sqrt{k^2 + 1}}{k} \right)^2 = 16p^2$$

ili posle sređivanja $3k^4 - 2k^2 - 1 = 0$, odakle je

$$k^2 = 1 \text{ i } k^2 = -\frac{1}{3}, \text{ tj. } k = \pm 1, \text{ pa jednačina tetive } 2x - 2y - p = 0$$

ili $2x + 2y - p = 0$, i nagnuta je prema osi parabole pod uglom $\alpha = 45^\circ$, a koeficijent pravca tangenti parabole u tim tačkama su:

$$k_{1,2} = \frac{k}{1 \pm \sqrt{k^2 + 1}} = \frac{1}{1 \pm \sqrt{2}}.$$

$$k_1k_2 = -1 \Rightarrow \alpha = 90^\circ.$$

955. Presečne tačke prave sa parabolom su:

$$x = \frac{p - kn \pm \sqrt{p^2 - 2pnk}}{k^2}, y_{1,2} = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - 2knk}}{k}.$$

Koeficijenti pravca tangenti u tim tačkama su

$$k_{1,2} = \frac{kp}{p \pm \sqrt{p^2 - 2knp}}$$

Prema uslovu zadatka je $\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} = 1$ odakle je

$$\frac{kp}{p - \sqrt{p^2 - 2knp}} - \frac{kp}{p + \sqrt{p^2 - 2knp}} = 1 + \frac{k^2 p^2}{p^2 - (p^2 - 2knp)}$$

ili $\left(\frac{2n + kp}{2}\right)^2 + 2knp = p^2$; za $p=2$ poslednja jednačina se svodi na

$$\left(\frac{n + k}{2}\right)^2 + nk = 1.$$

956. Jednačina prave paralelne sa datom pravom je $y = 4x + n$, a da bi dodirivala parabolu, treba da postoji uslov $256 + 8n = 0$, odakle $n = -32$, pa je jednačina tangente $4x - y - 32 = 0$, a njena dodirna tačka $M(16, 32)$.

Temena trougla su: $F(0, 2)$, $A(8, 0)$, $M(16, 32)$, $P = 136$. Jednačine stranica:

$$FA: x + 4 - 8 = 0, AM: 4x - y - 32 = 0 \text{ i}$$

$$MF: 15x - 8y + 16 = 0.$$

Jednačina opisane kružnice je

$$(x - 8)^2 + (y - 17)^2 = 289.$$

957. Iz uslova da prava $y = kx + n$ dodiruje elipsu i parabolu imamo da je $\frac{9a^2}{25} + b^2 = 25$ i $p = 2kn$, odnosno iz sistema

$$9a^2 + 25b^2 = 625 \wedge a^2 - b^2 = 0 \Rightarrow a = 5, b = 4, p = 6.$$

Jednačine tražene elipse i parabole su

$$16x^2 + 25y^2 = 400 \text{ i } y^2 = 12x.$$

Dodirne tačke su: $M_1(-3, \frac{16}{5})$, $M_2(\frac{25}{3}, 10)$.

Koeficijenti pravca pravih FM i FM su:

$$k_1 = -\frac{8}{15} \text{ i } k_2 = \frac{15}{8}.$$

958. Da bi prave dodirivale parabolu, moraju biti ispunjeni uslovi $p = 6: pk = 4$, a da prave obrazuju ugao od 45° , treba da bude ispunjen uslov

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{k} = 1 - \frac{1}{k\lambda},$$

odakle se dobijaju dva rešenja:

$$k_1 = 2, \lambda_1 = 3, p_1 = 2 \text{ i } k_2 = -\frac{1}{3}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, p_2 = -12.$$

Jednačine traženih linija su:

$$a) x - 3y + 9 = 0, x + 2y + 4 = 0 \text{ i } y^2 = 4x.$$

$$b) 2x + y - 3 = 0, 3x - y - 2 = 0 \text{ i } y^2 = -24x.$$

959. Dve tangente: $4x - 2y + 3 = 0$ i $x + 2y + 12 = 0$.

960. Tangenta u tački $A(\frac{1}{4}, 1)$ ima jednačinu

$4x - 2y + 1 = 0$. Traženi ugao $\varphi = \frac{\pi}{4}$. Dodirna tetiva ima jednačinu $4x - 7y + 6 = 0$. Tangenta paralelna sa ovom tetivom ima jednačinu

$$16x - 28y + 49 = 0.$$

961. a) Presečne tačke su $A(9, -6)$ i $B(4, 4)$, a jednačine tangenti u tim tačkama su

$$x + 3y + 9 = 0 \text{ i } x - 2y + 4 = 0, \text{ a ugao između njih je } \varphi = \frac{\pi}{4};$$

$$b) x^2 + y^2 - 3x + 7y - 48 = 0; \quad c) \alpha = \frac{\pi}{4}.$$

962. Jednačine tangenti parabole su:

$$\text{u tački } A(1, 2) \text{ je } x - y + 1 = 0;$$

$$\text{u tački } B(1, -2) \text{ je } x + y + 1 = 0$$

$$\text{i u tački } C(49, 14) \text{ je } x - 7y + 49 = 0.$$

Koordinate temena trougla su: $M(-7, 6)$, $N(-1, 0)$, $P(7, 8)$.

Jednačina opisane kružnice je $x^2 + y^2 - 14y - 1 = 0$.

Jednačina upisane kružnice je $(x + 1)^2 + (y - 4)^2 = 8$.

963. a) $y^2 = 4x$; b) $x - 3y + 9 = 0$ i $x + 3y + 9 = 0$;
c) $\alpha = 45^\circ$; d) $P = 33$.

964. a) Jednačina hiperbole je $3x^2 - 4y^2 = 12$; koordinate dodirne tačke $A(-4, 3)$;

b) Jednačina parabole je $y^2 = 4x$.

Tačka dodira je $B(1, -2)$.

c) Jednačina kružnice je $2x^2 + 2y^2 - 8y - 1 = 0$.

Tačka dodira $C(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

$$d) \frac{-4 + 1}{2} = -\frac{3}{2}, \frac{3 - 2}{2} = \frac{1}{2}.$$

965. Jednačina pramena sa centrom u tački $M(x_1, y_1)$ glasi
 $y - y_1 = k(x - x_1)$.
 Odredimo onu pravu pramena koja dodiruje parabolu i zadovoljava uslov dodira
 $p = 2kn$, ili $p = 2k(y_1 - kx_1)$.
 Kvadratna jednačina $2kx^2 - 2yk + p = 0$ ima jedinstveno rešenje po k , $k = \frac{y_1}{2x_1}$, jer je njena diskrimanta nula. Kako je $y_1^2 = 2px_1$, to je $k = \frac{p}{y_1}$, pa tražena tangenta je
 $y - y_1 = \frac{p}{y_1}(x - x_1) \Rightarrow yy_1 = p(x + x_1)$.
966. Jednačinu tangente $yy_1 = p(x + x_1)$ pretvorimo u segmentni oblik
 $\frac{x}{-x_1} + \frac{y}{\frac{px_1}{y_1}} = 1$.
 Odsečak na apscisnoj osi jednak je apscisi dodirne tačke, a odsečak na ordinatnoj osi, $\frac{px_1}{y_1} = \frac{\frac{y_1^2}{2}}{y_1} = \frac{y_1}{2}$, polovini ordinate dodirne tačke.
967. Jednačina tangente u tački $M(x_1, y_1)$ glasi $yy_1 = p(x + x_1)$.
 Koordinate tačke P dobijaju se iz sistema
 $yy_1 = p(x + x_1) \wedge x = -\frac{p}{2}, P\left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{y_1}(x_1 - \frac{p}{2})\right)$,
 a koordinate tačke Q iz sistema
 $yy_1 = p(x + x_1) \wedge x = \frac{p}{2}, Q\left(\frac{p}{2}, \frac{p}{y_1}(x_1 + \frac{p}{2})\right)$;
 $FQ = \frac{p}{y_1}(x_1 + \frac{p}{2})$, a $FP = \sqrt{p^2 + \frac{p^2}{y_1^2}\left(x - \frac{p}{2}\right)^2} =$
 $= \sqrt{\frac{p^2}{y_1^2}(y_1^2 + x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4})} = \frac{p}{y_1} \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} =$
 $\frac{p}{y_1}(x_1 + \frac{p}{2})$; tj. $FQ = FP$.

968. Kružnica $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = 4p^2$ sa datom parabolom ima zajedničku tačku $A\left(\frac{3p}{2}, p\sqrt{3}\right)$.
 Ugao između tangenti na paraboli i kružnici, u tački A , je $\varphi = 60^\circ$.
969. $B^2p = 2AC$.
970. Jednačina tangente u tački $M(x_1, y_1)$ glasi $yy_1 = p(x + x_1)$, a jednačina prave koja sadrži žižu parabole normalno na ovu tangentu glasi
 $y = \frac{y_1}{p}\left(x - \frac{p}{2}\right)$.
 Zajednička tačka tangente i ove prave ima koordinate $\left(0, \frac{y_1}{2}\right)$, tj. pripada tangenti u temenu parabole.
971. Kružnica $\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = p^2$ sa datom parabolom ima zajedničku tačku $A\left(\frac{p}{2}, \pm p\right)$. Ugao između tangenti u tački A na paraboli i kružnici iznosi $\varphi = 45^\circ$.
972. Krajnje tačke parametra parabole $y^2 = 2px$ imaju koordinate $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ i $N\left(\frac{p}{2}, -p\right)$, a jednačine tangenti su $2x - 2y + p = 0$ i $2x + 2y + p = 0$.
 Ugao koji obrazuju tangente je $\varphi = 90^\circ$.
973. $(0, 0), (3, 6)$.
975. $y - 2 = 0$.
976. $x - y + 1 = 0, x - 2y + 4 = 0, \alpha = 45^\circ$.
977. a) $2x - y + 2 = 0, 2x + y + 2 = 0$;
 b) $A(-4, -6), B(-4, 6), C(1, 4), D(1, -4)$;
 c) $P = 50$; d) $\alpha = 90^\circ$.
978. $(x - 9)^2 - y^2 = 45$.
979. $x^2 + (y - 4)^2 = 20$.
980. Tetiva koja je dva puta veća od parametra gradi ugao sa osom parabole od 45° ili 135° . Druga tetiva gradi ugao od 60° ili 120° . Ugao između tetiva je 135° .

981. $4x - 6y + 9 = 0$, $P = \frac{15}{7}$.

982. $y^2 = 12x$, $x^2 + (y - 9)^2 = 18$.

983. $(x - 3)^2 + y^2 = 36$, $\alpha = 45^\circ$.

984. $A(9, -6)$, $B(4, 4)$, $C(-6, -1)$, $\angle A = \angle C = 45^\circ$,
 $x^2 + y^2 - 3x + 7y - 48 = 0$.

985. a) $y^2 = 8x$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$; b) $(x - 3)^2 + \left(y - \frac{11}{2}\right)^2 = \frac{125}{4}$;
 c) $\varphi = \arctan \sqrt{6}$.

986. a) Parabola $y^2 = 2qx$ ($q > 0$) je konfokalna sa datom hiperbolom ako im se žiže poklapaju. Stoga je $e = \frac{q}{2} \Leftrightarrow q = 2e$, pa jednačina parabole ima oblik $y^2 = 4ex$.

b) Jednačina hiperbole ima oblik

$b^2xx_0 - a^2yy_0 = a^2b^2$, gde je (x_0, y_0) dodirna tačka. Za $x_0 = -e$ i $y_0 = -p$, jednačina tangente postaje $ex - ay + a^2 = 0$. Zajednička tačka ove tangente i parabole je rešenje sistema

$$y^2 = 4ex \wedge ex - ay + a^2 = 0 \Rightarrow B\left(\frac{a^2}{e}, 2a\right).$$

c) Koeficijenti radijus vektora su

$$K_{AF} = \frac{p}{2e} = \frac{b^2}{2ae}, \quad K_{BF} = \frac{2a}{\frac{a^2}{e} - e} = -\frac{2ae}{b^2}.$$

Pošto je zadovoljen uslov normalnosti, oni su uzajamno normalni.

987. $xy = 15$.

968. a) $T(2, 3)$, $F(3, 3)$, $d: x - 1 = 0$;

b) $T(2, 2)$, $F(-\frac{1}{4}, 2)$, $d: 4x - 17 = 0$;

c) $T(1, 1)$, $F(1, -1)$, $d: y - 3 = 0$;

d) $T(-6, 2)$, $F(-6, 4)$, $d: y = 0$;

e) $T(2, 1)$, $F(3, 1)$, $d: x - 1 = 0$;

f) $T(2, -1)$, $F(2, -2)$, $d: y = 0$.

989. $p = 2$, $\beta = 4$, $\alpha = -4$.

7.8. GEOMETRIJSKO TUMAČENJE REŠENJA SISTEMA JEDNAČINA I NEJEDNAČINA PRVOG I DRUGOG STEPENA SA DVE NEPOZNATE (PRIMENA ANALITIČKE GEOMETRIJE)

992. $(3, -3)$ $(8, 2)$.

993. $(2, \pm 3, 5)$.

994. $(1, \pm 0, 87)$.

995. $(\pm 1, \pm 3)$, $(3, 1)$.

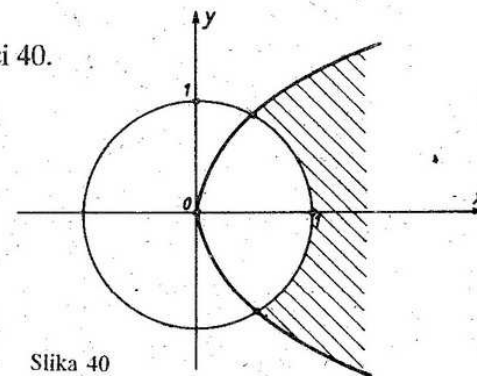
996. $(1, 4)$; $(-3, 2)$.

997. $(\pm 2, \pm 3)$, $(\pm 3, \pm 5)$.

998. $(\pm 4, \pm 3)$, $(\pm 3, 4)$.

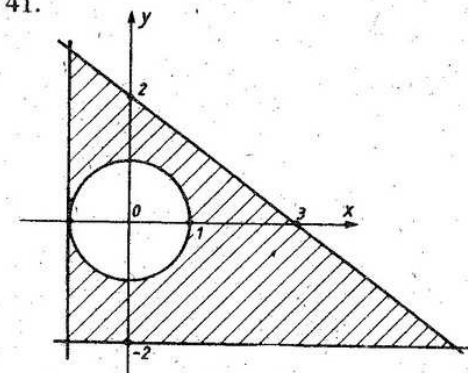
999. $(\pm 3, \pm 5)$, $(\pm 5, \pm 3)$.

1000. Rešenje je prikazano na slici 40.



Slika 40

1007. Rešenje je prikazano na slici 41.



Slika 41

1008. Iz $y + \frac{1}{2} > |x^2 - 2x| \geq 0$ i $2 - y |x + 1| \geq 0$ sledi

$$y + \frac{1}{2} > 0 \text{ i } 2 - y > 0. \text{ Odatavde } -\frac{1}{2} < y < 2 \Rightarrow y = 0 \vee y = 1 (y \in \mathbb{Z}).$$

$$1. \text{ Za } y=0 \Rightarrow -|x^2-2x| + \frac{1}{2} > 0 \wedge |x-1| < 2.$$

Ovaj sistem zadovoljen je za (0, 0) i (2, 0).

$$2. \text{ Za } y=1 \Rightarrow |x^2-2x| < \frac{3}{2} \wedge |x-1| < 1.$$

Ovaj sistem je zadovoljen za (1, 1).

1009. Mogućim slučajevima

$$1. \quad x+2 > 0 \wedge y-2 > 0,$$

$$2. \quad x+2 > 0 \wedge y-2 < 0,$$

$$3. \quad x+2 < 0 \wedge y-2 > 0,$$

$$4. \quad x+2 < 0 \wedge y-2 < 0,$$

odgovaraju respektivno relacije:

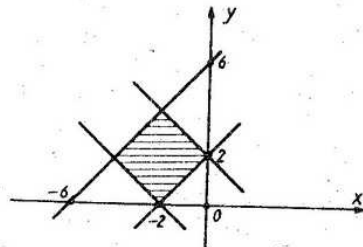
$$1. \quad -6 < x-y < -2,$$

$$2. \quad -2 < x+y < 2,$$

$$3. \quad -2 < x+y < 2,$$

$$4. \quad -6 < x-y < -2.$$

Osenčena oblast na slici 42 je rešenje nejednačine.



Slika 42

1010. leva strana nejednakosti je oblik a^b , gde je

$$a = |x+y| \geq 0, \quad b = -x+y+1.$$

Data nejednakost je ispunjena ako je

$$1. \quad a \geq 1 \wedge b \leq 0;$$

$$2. \quad a \leq 1 \wedge b \geq 0, \text{ sa izuzetkom slučaja } a = 0, b = 0.$$

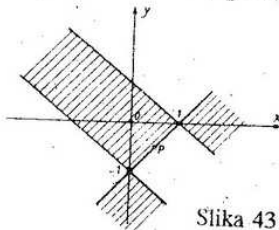
Na osnovu toga dobija se

$$1. \quad |x+y| \geq 1 \wedge -x+y+1 \leq 0;$$

$$2. \quad |x+y| \leq 1 \wedge -x+y+1 \geq 0,$$

pri čemu je isključena tačka $P\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}\right)$.

Skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju uslove 1 i 2, odnosno rešenje polazne nejednakosti, prikazan je na slici 43 (šrafirana oblast).



Slika 43

VIII. GLAVA

8. MATEMATIČKA INDUKCIJA. NIZOVI

8.1. MATEMATIČKA INDUKCIJA

$$1011. \quad 1^\circ T(1) \text{ je istinito jer je } 1 = \frac{1 \cdot 2}{2} = 1.$$

2° U skupu prirodnih brojeva važi implikacija

$$1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

$$\text{Po pretpostavci je } 1+2+3+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Dodavši $k+1$ svakoj strani jednakosti imamo

$$1+2+3+\dots+k+(k+1) = \frac{1(k+1)}{2} + (k+1) =$$

$$= \frac{k^2+k+2k+2}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

čime je dokaz završen.

1012. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno,

$$1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1+1)}{6} = 1.$$

Dokažimo da u skupu prirodnih brojeva važi implikacija

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} \Rightarrow 1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}.$$

Ako levoj i desnoj strani pretpostavke dodamo $(k+1)^2$, dobijamo:

$$1^2+2^2+3^2+\dots+k^2+(k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2+7k+6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6},$$

čime je dokaz završen.

1013. Analogno prethodnom zadatku.

1014. Analogno 1012. zadatku.

1015. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno,

$$\frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{3}.$$

Dokažimo da je tačna implikacija

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{k}{2k+1} \Rightarrow \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Ako dodamo svakoj strani pretpostavke član

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}, \text{ imamo}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots$$

$$+ \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} =$$

$$= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2 + 3k + 1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3}.$$

Kraj dokaza.

1016. Za $n = 1$ tvrđenje je tačno, jer je

$$1^3 = \left(\frac{1(1+1)}{2} \right)^2 = 1.$$

Dokažimo da:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 \Rightarrow$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + (k+1)^3 = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Dodavši svakoj strani pretpostavke $(k+1)^3$, imamo

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + k^3 + (k+1)^3 = \left(\frac{k(k+1)}{2} \right)^2 + (k+1)^3 =$$

$$= (k+1)^2 \frac{(k^2 + 4k + 4)}{4} = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4} = \left(\frac{(k+1)(k+2)}{2} \right)^2.$$

Kraj dokaza.

1017. Analogno prethodnom zadatku.

1018. Za $n = 1$, $1 \cdot 3 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 7)}{6} = 1 \cdot 3$ tvrđenje je tačno.

Dokažimo da je tačna za svako k i implikacija.

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} \Rightarrow$$

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + (k+1)(k+3) = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}.$$

Po pretpostavci je

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) = \frac{k(k+1)(2k+7)}{6}.$$

Dodavši $(k+1)(k+3)$ svakoj strani jednakosti, imamo

$$1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 5 + \dots + k(k+2) + (k+1)(k+3) =$$

$$= \frac{k(k+1)(2k+7)}{6} + (k+1)(k+3) =$$

$$= \frac{(k+1)(2k^2 + 13k + 18)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+9)}{6}.$$

Što znači da je identitet tačan za svako n prirodno.

1019. Za $n = 1$, $1 = 2 - 1 = 1$ tvrđenje je tačno. Dokažimo da je tačna i implikacija

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} = 2^k - 1 \Rightarrow 1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1.$$

Ako dodamo levoj i desnoj strani pretpostavke 2^k , imamo

$$1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{k-1} + 2^k = 2^k - 1 + 2^k = 2 \cdot 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1.$$

1020. Za $n = 1$, $1 = (1-1)^0 \frac{1(1+1)}{2} = 1$ tvrđenje je tačno. Dokažimo da je tačna i implikacija.

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^k k^2 = (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} \Rightarrow$$

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^k (k+1)^2 = (-1)^k \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Dodajmo levoj i desnoj strani pretpostavke

$(-1)^k (k+1)^2$, onda je

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - \dots + (-1)^{k-1} k^2 + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} + (-1)^k (k+1)^2 =$$

$$= (-1)^{k-1} (k+1) \left(\frac{k}{2} - k - 1 \right) = \frac{(-1)^{k-1} (k+1)(k+2)(-1)}{2} =$$

$$= \frac{(-1)^k (k+1)(k+2)}{2}.$$

1021. 1. $T(1)$ je tačno, jer je $3^2 - 1 = 8 \equiv 0 \pmod{8}$.
 2. Za sve prirodne brojeve važi: ako je $3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.
 Po pretpostavci $3^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$, tako da postoji prirodan broj x takav da je $3^{2k} - 1 = 8x$, ili $3^{2k} = 1 + 8x$.
 Pomnožimo obe strane ove jednakosti sa $3^2 = 9$.
 Dobijamo $3^{2k+2} = 9 + 8(9x)$ ili $3^{2k+2} = 1 + (8 + 8(9x)) = 1 + 8(1 + 9x)$.
 I tako $3^{2k+2} - 1 = 8(1 + 9x)$, ili $3^{2k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{8}$.

1022. Označimo dati broj sa $f(n) = 3 \cdot 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ za $n = 1$.
 $f(1) = 3 \cdot 125 + 16 = 391 \equiv 0 \pmod{17}$.
 Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{17}$.
 Pošto je $f(k+1) = 3 \cdot 5^{2(k+1)+1} + 2^{3(k+1)+1} = 3 \cdot 5^{2k+3} + 2^{2k+1} = 3 \cdot 5^{2k+1} \cdot 5^2 + 2^{3k+1} \cdot 2^3 = 25 \cdot 3 \cdot 5^{2k+1} + 8 \cdot 2^{3k+1} = 25(3 \cdot 5^{2k+1} + 2^{3k+1}) - 17 \cdot 2^{3k+1} = 25f(k) - 17 \cdot 2^{3k+1} \equiv 0 \pmod{17}$,
 jer je prvi član razlike deljiv sa 17 po pretpostavci, a drugi je očigledno deljiv sa 17, pa je implikacija tačna za $f(n)$ $n \in N$.

1023. Neka je $f(n) = 11^{n+2} + 12^{2n+1}$,
 $f(1) = 11^3 + 12^3 = 3059 \equiv 0 \pmod{133}$.
 Dokažimo tačnost implikacije $f(k) \equiv 0 \pmod{133} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{133}$.
 Kako je $f(k+1) = 11^{k+3} + 12^{2k+3} = 11 \cdot 11^{k+2} + 12^2 \cdot 12^{2k+1} + 11 \cdot 11^{k+2} + 144 \cdot 12^{2k+1} = 11(11^{k+2} + 12^{2k+1}) + 133 \cdot 12^{2k+1} = 11f(k) + 133 \cdot 12^{2k+1} \equiv 0 \pmod{133}$,
 jer je prvi član sume deljiv sa 133 po pretpostavci, a drugi očigledno deljiv sa 133, čime je dokazana implikacija.

1024. Neka je $f(n) = 2^{2n+1} - 9n^2 + 3n - 2$.
 Za $n = 1$, $f(1) = 2^3 - 9 + 3 - 2 = 0 \equiv 0 \pmod{54}$.
 Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{54} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{54}$.

Pošto je

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2^{2k+3} - 9(k+1)^2 + 3(k+1) - 2 = \\ &= 2^{2k+1} \cdot 4 - 9k^2 - 18k - 8 = \\ &= 4(2^{2k+1} - 9k^2 + 3k - 2) + 27k^2 - 27k = 4f(k) + 27k(k-1) = \\ &= 4f(k) + 27 \cdot 2p = 4f(k) + 54p, \text{ jer je } k(k-1) = 2p \text{ (paran broj), a } f(k+1) \equiv 0 \pmod{54}, \\ &\text{pošto je prvi sabirak deljiv sa 54 po pretpostavci, a drugi očigledno, samim tim je dokazana i implikacija.} \end{aligned}$$

1025. Neka je $f(n) = 3^{2n+2} - 8n - 9$. Ako je $n = 1$, $f(1) = 3^4 - 8 - 9 = 64 \equiv 0 \pmod{64}$.
 Dokažimo da je tačna i implikacija $f(k) \equiv 0 \pmod{64} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{64}$.
 $f(k+1) = 3^{2k+4} - 8k - 17 = 9(3^{2k+2} - 8k - 9) + 64(k+1) = 9f(k) + 64(k+1)$.
 Dakle, $f(k+1) \equiv 0 \pmod{64}$, jer je prvi član $9f(k)$ deljiv po pretpostavci sa 64, a drugi očigledno.

1026. Ako je $f(n) = 7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{57}$,
 $f(1) = 7^3 + 8^3 = 855 \equiv 0 \pmod{57}$. Dokažati tačnost implikacije $f(k) \equiv 0 \pmod{57} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{57}$.
 Kako je $f(k+1) = 7^{k+3} + 8^{2k+3} = 7 \cdot 7^{k+2} + 64 \cdot 8^{2k+1} = 64(7^{2k+1} + 8^{2k+1}) - 57 \cdot 7^{k+2} = 64 \cdot f(k) - 57 \cdot 7^{k+2}$,
 zaključak se izvodi jednostavno.

1027. Ako je $f(n) = 3^{3n+2} + 5 \cdot 2^{3n+1}$, onda je $f(1) = 3^5 + 5 \cdot 2^4 = 323 \equiv 0 \pmod{19}$. Dokažimo implikaciju $f(k) \equiv 0 \pmod{19} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{19}$.
 $f(k+1) = 3^{3(k+1)+2} + 5 \cdot 2^{3(k+1)+1} = 3^{3k+5} + 5 \cdot 2^{3k+4} = 27(3^{3k+2} + 5 \cdot 2^{3k+1}) - 19 \cdot 5 \cdot 2^{3k+1} = 27f(k) - 95 \cdot 2^{3k+1}$.
 Dakle $f(k+1) \equiv 0 \pmod{19}$, jer je član $27 \cdot f(k)$ deljiv sa 19 po pretpostavci, a drugi $95 \cdot 2^{3k+1}$ očigledno, pa je implikacija tačna.

1028. 1° $T(1)$ je tačno, jer je $2 \geq 1 + 1$.
 2° Za sve prirodne brojeve ako je $2^k > 1 + k \Rightarrow 2^{k+1} > 1 + (k+1)$. Po pretpostavci je $2^k > 1 + k$.
 Množenjem obe strane ove nejednakosti sa 2 dobijamo $2^{k+1} \geq 2 + 2k$.
 Pošto je $2k > k$, gde $k \in N$, imamo $2^{k+1} \geq 2 + 2k > 2 + k = 1 + (k+1)$, što je trebalo dokazati.

1029. 1° $T(-1)$ je tačno, jer je $-2 - 9 - 13 + 25 = 1 > 0$.
 2° Za sve cele brojeve $k \geq -1$, ako je
 $2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 > 0 \Rightarrow 2(k+1)^3 - 9(k+1)^2 + 13(k+1) + 25 > 0$.
 Dokaz: za $n = k + 1$, $2n^3 - 9n^2 + 13n + 25 =$
 $= 2(k+1)^3 - 9(k+1)^2 + 13(k+1) + 25 =$
 $= 2k^3 - 3k^2 + k + 31 = 2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 + 6(k-1)^2$.
 Po pretpostavci $2k^3 - 9k^2 + 13k + 25 > 0$, a izraz $6(k-1)^2$ je očigledno pozitivan.

1030. Za $n = 2$ imamo da je $(1+h)^2 = 1 + 2h + h^2 > 1 + 2h$, jer je $h^2 > 0$.

Dokažimo implikaciju

$$(1+h)^k > 1 + kh \Rightarrow (1+h)^{k+1} > 1 + (k+1)h.$$

Pomnožimo li obe strane pretpostavke sa $1+h > 0$, dobićemo

$$(1+h)^{k+1} (1+h) = 1 + (k+1)h + nh^2 > 1 + (k+1)h,$$

tj. implikacija je tačna, čime je tvrđenje dokazano.

1031. Za $n = 5$ nejednakost je tačna. Dokažimo da je tačna implikacija

$$2^k > k^2 \Rightarrow 2^{k+1} > (k+1)^2.$$

$$2^{k+1} > 2k^2 \geq k^2 + 5k, \text{ jer je } k \geq 5.$$

$$\text{Iz nejednakosti } 2^{k+1} > k^2 + 4k + k > k^2 + 2k + 1 \text{ sledi } 2^{k+1} (k+1)^2.$$

1032. Za $n = 2$ data nejednakost važi. Dokažimo da važi i implikacija

$$\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k} \leq \sqrt{(p+q)^k} \Rightarrow \sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}} \leq \sqrt{(p+q)^{k+1}}.$$

$$\text{Pošto je } \sqrt{p^{k+1}} + \sqrt{q^{k+1}}$$

$$= \sqrt{p^k} \sqrt{p} + \sqrt{q^k} \sqrt{q} \leq \sqrt{p^k} \sqrt{p+q} + \sqrt{q^k} \sqrt{p+q} =$$

$$= (\sqrt{p^k} + \sqrt{q^k}) \cdot \sqrt{p+q} \leq \sqrt{(p+q)^k} \sqrt{p+q} = \sqrt{(p+q)^{k+1}} \text{ dokaz je završen.}$$

1033. Za $n = 1$ identitet je tačan, jer je

$$\cos \frac{r}{2} = \frac{\sin x}{2 \sin \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}} = \cos \frac{x}{2}.$$

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \Rightarrow$$

$$\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \sin \frac{x}{2^{k+1}}}.$$

Množenjem leve i desne strane pretpostavke sa $\cos \frac{x}{2^{k+1}}$, imamo
 $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2^2} \cdot \cos \frac{x}{2^3} \dots \cos \frac{x}{2^k} \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{\sin x}{2^k \sin \frac{x}{2^k}} \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}} =$

$$\frac{\sin x \cdot \cos \frac{x}{2^{k+1}}}{2^k \cdot 2 \sin \frac{x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} = \frac{\sin x}{2^{k+1} \cdot \sin \frac{x}{2^{k+1}}},$$

što znači da je implikacija tačna, pa je tvrđenje tačno za svako n koje je prirodan broj.

1034. Za $n = 1$ imamo $\sin x = \frac{\sin^2 x}{\sin x} = \sin x$ i identitet je tačan.

Pokažimo da je tačna i implikacija

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k-1)x = \frac{\sin kx}{\sin x}.$$

$$\Rightarrow \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k+1)x = \frac{\sin^2 (k+1)x}{\sin x}.$$

Ako se doda levoj i desnoj strani pretpostavke $\sin (2k+1)x$, sledi da je

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin (2k-1)x + \sin (2k+1)x =$$

$$= \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin (2k+1)x = \frac{\sin^2 kx}{\sin x} + \sin (2k+1)x$$

$$= \frac{\sin^2 kx + \sin (2k+1)x \sin x}{\sin x} =$$

$$= \frac{\sin^2 kx + \frac{1}{2} \cdot (\cos 2kx - \cos (2k+2)x)}{\sin x} =$$

$$= \frac{2 \sin^2 kx + \cos^2 kx - \sin^2 kx - \cos (2k+2)x}{2 \sin x}$$

$$= \frac{1 - \cos (2k+2)x}{2 \sin x} = \frac{2 \sin^2 (k+1)x}{2 \sin x} = \frac{\sin^2 (k+1)x}{\sin x}.$$

Dakle, implikacija je tačna, pa je identitet tačan za svako n prirodno.

1035. Analogno prethodnom zadatku.

1036. Za $n = 1$, $\sin x = \frac{\sin x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}$, identitet je tačan.

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin kx = \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} \Rightarrow$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin (k+1)x = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \sin \frac{(k+1)x}{2}}{\sin \frac{x}{2}}.$$

Ako se doda levoj i desnoj strani pretpostavke $\sin (k+1)x$, dobija se

$$\begin{aligned} \sin x + \sin 2x + \sin 3x + \dots + \sin kx + \sin (k+1)x &= \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2}}{\sin \frac{x}{2}} + \sin (k+1)x = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \sin \frac{kx}{2} + 2 \sin \frac{k+1}{2}x \cos \frac{k+1}{2}x \sin \frac{x}{2}}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \left(\sin \frac{kx}{2} + 2 \cos \frac{k+1}{2}x \cdot \sin \frac{x}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{\sin \frac{k+1}{2}x \left(\sin \frac{kx}{2} + \sin \frac{k+2}{2}x - \sin \frac{kx}{2} \right)}{\sin \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{k+2}{2}x \sin \frac{k+1}{2}x}{\sin \frac{x}{2}}. \end{aligned}$$

Implikacija je tačna.

1037. Analogno prethodnom zadatku.

1038. Za $n = 1$ imamo

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} &= \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{2}{\operatorname{tg} 2x} = \\ \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{2}{\frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}} &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \\ = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \\ &= \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \operatorname{tg} x + \frac{1}{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \end{aligned}$$

Tvrđenje je tačno.

Dokažimo implikaciju

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \frac{x}{2} - 2 \operatorname{ctg} 2x \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} = \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{ctg} 2^{k+1}x - 2 \operatorname{ctg} 2x.$$

Dodajmo levoj i desnoj strani pretpostavke $\frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}}$.

Tada je

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} x + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \frac{1}{2^2} \operatorname{tg} \frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^k} \operatorname{tg} \frac{x}{2^k} + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} &= \\ = \frac{1}{2^k} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^k} - \operatorname{ctg} 2x + \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(2 \operatorname{ctg} \frac{x}{2^k} + \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \operatorname{tg} \frac{x}{2^{k+1}} \right) \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \frac{\cos \left(\frac{2x}{2^{k+1}} - \frac{x}{2^{k+1}} \right)}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}} \cos \frac{x}{2^{k+1}}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \left(\operatorname{ctg} \frac{2x}{2^{k+1}} + \frac{1}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}}} \right) - 2 \operatorname{ctg} 2x &= \\ = \frac{1}{2^{k+1}} \cdot \frac{\cos \frac{2x}{2^{k+1}} + 1}{\sin \frac{2x}{2^{k+1}}} - 2 \operatorname{ctg} 2x = \frac{1}{2^{k+1}} \operatorname{ctg} \frac{x}{2^{k+1}} - 2 \operatorname{ctg} 2x, \end{aligned}$$

čime je tvrđenje dokazano.

1039. Za $n = 1$ imamo $\cos x + i \sin x = \cos x + i \sin x$, formula je tačna.

Dokažimo tačnost implikacije $(\cos x + i \sin x)^k = \cos kx + i \sin kx \Rightarrow$
 $(\cos x + i \sin x)^{k+1} = \cos (k+1)x + i \sin (k+1)x.$

Ako pomnožimo obe strane pretpostavke sa $\cos x + i \sin x$, imamo

$$\begin{aligned} (\cos x + i \sin x)^{k+1} &= (\cos kx + i \sin kx) (\cos x + i \sin x) = \\ &= \cos kx \cos x + i \sin kx \cos x + \sin kx \cos x + i \sin kx \sin x = \\ &= \cos kx \cos x - \sin kx \sin x + i \sin kx \cos x + \sin kx \cos x = \\ &= \cos (kx + x) + i \sin (kx + x) = \cos (k+1)x + i \sin (k+1)x. \end{aligned}$$

Implikacija je tačna, pa je i Moavrova formula tačna za svako n prirodno.

1040. Za $n = 1$,

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{x-1} + \frac{4}{1-x^4} = \frac{-(1-x)(1+x^2)+4}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} =$$

$$= \frac{-(x-1)(x^2+2x+3)}{(1-x)(1+x)(1+x^2)} = \frac{x^2+2x+3}{(1+x)(1+x^2)},$$

tvrdjenje je tačno. Dokažimo da je tačna implikacija

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+x^4} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+1}}{1-x^{2^{k+1}}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}}.$$

Ako dodamo levoj i desnoj strani pretpostavke $\frac{2^{k+2}}{1+x^{2^{k+1}}}$, dobija se

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \dots + \frac{2^k}{1+x^{2^k}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^k}{1-x^{2^{k+1}}} + \frac{2^{k+1}}{1+x^{2^{k+2}}} = \frac{1}{x-1} + \frac{2 \cdot 2^{k+1}}{1-x^{2 \cdot 2^{k+1}}} =$$

$$= \frac{1}{x-1} + \frac{2^{k+2}}{1-x^{2^{k+2}}},$$

što je trebalo dokazati.

1041. Za $n = 1$,

$$a_2 = 3a_1 - 2a_0 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 = 5 = 2^2 + 1, \text{ i tvrdjenje je tačno.}$$

Dokažimo implikaciju

$$a_k = 2^k + 1 \Rightarrow a_{k+1} = 2^{k+1} + 1. \text{ Kako je}$$

$$a_{k+1} = 3a_k - 2a_{k-1} = 3(2^k + 1) - (2^{k-1} + 1) =$$

$$= 3 \cdot 2^k + 3 - 2^k - 2 = 2 \cdot 2^k + 1 = 2^{k+1} + 1.$$

Implikacija je tačna.

1042. Analogno prethodnom zadatku.

1043. Za $n = 1$,

$$\frac{a_1 - \sqrt{b}}{a_1 + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a + \frac{b}{a} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a^2 - 2a\sqrt{b} + b}{a^2 + 2a\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^2,$$

tvrdjenje je tačno. Dokažimo implikaciju

$$\frac{a_k - \sqrt{b}}{a_k + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^k} \Rightarrow \frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}$$

Kako je

$$\frac{a_{k+1} - \sqrt{b}}{a_{k+1} + \sqrt{b}} = \frac{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) - \sqrt{b}}{\frac{1}{2} \left(a_k + \frac{b}{a_k} \right) + \sqrt{b}} = \frac{a_k^2 - 2a_k\sqrt{b} + b}{a_k^2 + 2a_k\sqrt{b} + b} = \left(\frac{a_k - \sqrt{b}}{a_k + \sqrt{b}} \right)^2 =$$

$$= \left(\frac{(a - \sqrt{b})^{2^k}}{a + \sqrt{b}} \right)^2 = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2 \cdot 2^k} = \left(\frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \right)^{2^{k+1}}$$

Implikacija je tačna.

1044. Iz rekurentnog obrasca imamo

$$a_3 = (\alpha + \beta) a_2 - \alpha \beta a_1 =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^3 - \beta^3)}{\alpha - \beta} - \alpha \beta (\alpha + \beta) = \frac{\alpha^4 - \beta^4}{\alpha - \beta}.$$

Pretpostavimo da je za neku vrednost $n = k$, a i za sve manje vrednosti od k , tačan odnos

$$a_k = \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta}.$$

Dokažimo da je ovaj obrazac tačan i za a_{k+1} .

Stvarno:

$$a_{k+1} = (\alpha + \beta) a_k - \alpha \beta a_{k-1} =$$

$$= (\alpha + \beta) \cdot \frac{\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}}{\alpha - \beta} - \alpha \beta \frac{\alpha^k - \beta^k}{\alpha - \beta} =$$

$$= \frac{(\alpha + \beta)(\alpha^{k+1} - \beta^{k+1}) - \alpha \beta (\alpha^k - \beta^k)}{\alpha - \beta} = \frac{\alpha^{k+2} + \beta^{k+2}}{\alpha - \beta},$$

dakle, matematičkom indukcijom smo utvrdili da je opšti član niza

$$a_n = \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}.$$

1045. Za $n = 2$, $2^{2^2} = 2^4 = 16$, tvrdjenje je tačno.

Dokažimo da je tačna i implikacija

$$(2^{2^k} - \text{poslednja cifra } 6) \Rightarrow (2^{2^{k+1}} - \text{poslednja cifra } 6).$$

Kako je $2^{2^{k+1}} = 2^{2^k \cdot 2} = (2^{2^k})^2$, ovaj broj završava sa 6 jer broj koji završava sa 6 i njegov kvadrat imaju tu osobinu.

1046. Za $n = 1, f(1) = 3^2 - 1 = 8 \equiv 0 \pmod{2^{1+2}}$.

Dokažimo implikaciju

$$f(k) \equiv 0 \pmod{2^{k+2}} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{k+3}}.$$

Kako je

$$f(k+1) = 3^{2^{k+1}} - 1 = 3^{2^k \cdot 2} - 1 = (3^{2^k})^2 - 1 = (3^{2^k} - 1)(3^{2^k} + 1),$$

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{2^{k+3}}$, jer je $3^{2^k} - 1 \equiv 0 \pmod{2^{k+2}}$ po pretpostavci, a $3^{2^k} + 1 \equiv 0 \pmod{2}$.

s obzirom da je $3^{2^k} + 1$ uvek paran broj, čime je dokazana tačnost implikacije.

$f(k)$ nije deljivo sa 2^{n+3} , jer nije tačna induktivna hipoteza.

1047. Za $n = 1, f(1) = 2^3 + 1 = 9 \equiv 0 \pmod{3^{1+1}}$.

Dokažimo da je

$$f(k) \equiv 0 \pmod{3^{k+1}} \Rightarrow f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}.$$

Kako je

$$\begin{aligned} f(k+1) &= 2^{3^{k+1}} + 1 = 2^{3^k \cdot 3} + 1 = (2^{3^k})^3 + 1 = \\ &= (2^{3^k} + 1)^3 - 3(2^{3^k})^2 - 3 \cdot 2^{3^k} = (2^{3^k} + 1)^3 - 3 \cdot 2^{3^k}(2^{3^k} + 1), \end{aligned}$$

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}$, jer je

$f(k+1) \equiv 0 \pmod{3^{k+2}}$, a $(2^{3^k} + 1)^3 = f(k)f^2(k)$, a to je deljivo sa 3^{k+2} , drugi član razlike se može napisati u obliku $3 \cdot 2^{3^k}$, $f(k)$ a to je deljivo sa 3^{k+2} .

1062. Za $n = 2, \frac{a_1 + a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, tvrđenje je tačno.

Neka je

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k},$$

$$\text{tada je } \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k + a_{k+1}}{k+1} =$$

$$k \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{k} + a_{k+1} \geq \frac{k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k} + a_{k+1}}{k+1}$$

Ako se uvedu smene

$$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k = x^{k(k+1)}, a_{k+1} = y^{k+1}, \text{ tada je}$$

$$\begin{aligned} & \frac{k \cdot \sqrt[k]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_k} + a_{k+1}}{k+1} - \sqrt[k+1]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_{k+1}} = \\ & \frac{kx^{k+1} + y^{k+1}}{k+1} - x^k y = \frac{kx^{k+1} + y^{k+1} - kx^k y - yx^k}{k+1} = \\ & = \frac{kx^k(x-y) - y(x^k - y^k)}{k+1} = \frac{(x-y)(kx^k - yx^{k-1} - y^2x^{k-2} \dots y^k)}{k+1} = \\ & = \frac{(x-y)(x^k - yx^{k-1} + x^k y^{k-2} + \dots + x^k - y^k)}{k+1} = \\ & = \frac{(x-y)^2(x^{k-1} + x^{k-2}(x+y) + x^{k-3}(x^2 + xy + y^2) + \dots + (x^{k-1} + x^{k-2}y + \dots + y^{k-1}))}{k+1} > 0, \end{aligned}$$

što znači da je $\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_k}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \dots a_n}$.

Znak jednakosti važi ako je $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$.

1063. Za $n = 2, \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} = \frac{14}{24} > \frac{13}{24}$.

Pretpostavimo da je, za $n = k$,

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k} > \frac{13}{24}.$$

Dokažimo da je

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2(k+1)} > \frac{13}{24}.$$

Neka je

$$S_k = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \dots + \frac{1}{2k}, \text{ a}$$

$$S_{k+1} = \frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+3} + \dots + \frac{1}{2(k+1)}. \text{ Razlika}$$

$$S_{k+1} - S_k = \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{2k+2} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{2(k+1)(2k+1)} > 0,$$

$$S_{k+1} - S_k > 0 \Rightarrow S_{k+1} > S_k \Rightarrow S_{k+1} > \frac{13}{24}.$$

1064. Za $n = 2$,

$$2(a^2 + b^2) > (a+b)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 > 2ab \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2} > \sqrt{a^2 b^2},$$

tvrđenje je tačno.

Pretpostavimo da je

$$(1) \quad 2^{k-1} (a^k + b^k) > (a + b)^k.$$

Dokažimo da je

$$(2) \quad 2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) > (a + b)^{k+1}.$$

Ako pomnožimo (1) sa $a + b > 0$, dobija se

$$2^{k-1} (a^k + b^k) (a + b) > (a + b)^{k+1}.$$

Da bismo dokazali (2), dovoljno je dokazati da je

$$2^k (a^{k+1} + b^{k+1}) 2^{k-1} (a^k + b^k) (a + b) \Rightarrow$$

$$2a^{k+1} + 2b^{k+1} > a^{k+1} + a^k b + ab^k + b^{k+1} \Rightarrow$$

$$a^{k+1} + b^{k+1} > a^k b + ab^k \Rightarrow (a^k - b^k) (a - b) > 0.$$

Ako je $a > 0$, oba činioca su pozitivna, pa je i gornji proizvod pozitivan. Ako je $a < b$ oba činioca su negativna, pa je proizvod takođe negativan. Time je dokaz završen.

1065. Za $n = 2$, $2^{2^2} - 1 = 2^4 - 1 = 15$, što je deljivo sa 15, i tvrdjenje je tačno.

Pretpostavimo da je $15 \mid 2^{2^k} - 1$, dokažimo da je $15 \mid 2^{2^{k+1}} - 1$. Kako je $2^{2^{k+1}} - 1 = (2^{2^k})^2 - 1 =$

$$= (2^{2^k} + 1) (2^{2^k} - 1),$$

s obzirom na pretpostavke, ovaj proizvod je deljiv sa 15. Time je dokaz završen.

1066. Ako u datu jednakost stavimo $n = 1$ i $n = 2$, dobijamo sistem

$$2(a+b) = 1 \wedge 6(2a+b) = 7, \text{ iz koga sledi da je}$$

$$a = \frac{2}{3} \text{ i } b = -\frac{1}{6}.$$

Prema tome, dobijamo jednakost

$$(1) \quad \sum_{k=1}^n k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.$$

Ova formula važi za $n = 1$ i $n = 2$. Primenom matematičke indukcije dobićemo da važi za svako n . Pretpostavimo da je jednakost (1) tačna. Ako levoj i desnoj strani dodamo $(n+1)(2n+1)$ imamo

$$\sum_{k=1}^{n+1} k(2k-1) = \frac{n(n+1)(4n-1)}{6} + (n+1)(2n+1)$$

$$= \frac{(n+1)}{6} (4n^2 - 11n + 6) = \frac{(n+1)(n+2)(4n+3)}{6}.$$

1067. Analogno prethodnom zadatku $A = -1$, $B = -2$, $C = 2$.

$$1068. \text{ a) } a_n = \frac{n+2}{n+1}, \quad \text{ b) } a_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

$$\text{ c) } a_n = a^n - 1; \quad \text{ d) } a_n = (-1)^{n-1}; \quad \text{ c) } a_n = \frac{n}{n!}.$$

Rešenje ovog zadatka nije jednoznačno, opšti član pod a) može biti, na primer,

$$a_n = \frac{n+2}{n+1} + (n-1)(n-2)(n-3)(n-4) \sin^2 n.$$

1069. Niz je monotono rastući ako je $a_n < a_{n+1}$ ili

$$a_n - a_{n+1} < 0. \text{ Za dati niz imamo}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{3n}{3n+1} - \frac{3n+3}{3n+4} = \frac{-3}{(3n+1)(3n+4)} < 0,$$

što znači da je dati niz monotono rastući.

1070. Niz je monotono opadajući ako je $a_n > a_{n+1}$ ili

$$a_n - a_{n+1} > 0. \text{ Za dati niz imamo}$$

$$a_n - a_{n+1} = \frac{n}{2n-1} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{4n^2-1} > 0.$$

Dati niz je opadajući.

1074. $a_1 = 2$; $a_2 = a_1 + 1$; $a_3 = a_1 + 1 + 2$; $a_4 = a_1 + 1 + 2 + 3$; $a_5 = a_1 + 1 + 2 + 3 + 4$; $a_6 = a_1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5$.

Naslućujemo da je $a_n = a_1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1)$, što se indukcijom može dokazati.

1075. Uslov $a_n > 50$ je ispunjen za $n > 7$, tj. članovi $a_8, a_9, \dots$

$$1076. \text{ Opšti član niza } (b_n) \text{ je } b_n = \frac{\frac{n+1}{3^n}}{\frac{n}{3^n}} = \frac{n+1}{3n};$$

$$b_1 = \frac{2}{3}, b_2 = \frac{1}{2}, b_3 = \frac{4}{9}, b_4 = \frac{5}{12}, b_5 = \frac{6}{15}, b_6 = \frac{7}{18}.$$

$$1077. a_{25} = \frac{25 \cdot 26}{2}, a_{100} = \frac{100 \cdot 101}{2},$$

$$a_{n-3} = \frac{(n-3)(n-2)}{2}, a_{n+2} = \frac{(n+2)(n+3)}{2}.$$

1078. $a_1 = 5, a_2 = 5, a_3 = 5, a_4 = 5, a_5 = 5$. Takođe je

$a_{100} = 5, a_{n-3} = 5, a_{n+1} = 5$. Svi članovi ovog niza su 5. Za ovakav niz kaže se da je konstantan.

1079. $a_1 = 2 = 3 \cdot 1 - 1, a_2 = 5 = 3 \cdot 2 - 1, a_3 = 8 = 3 \cdot 3 - 1,$

$a_4 = 11 = 3 \cdot 4 - 1, a_5 = 14 = 3 \cdot 5 - 1, a_6 = 17 = 3 \cdot 6 - 1.$

Na osnovu ovoga naslućujemo da će opšti član datog niza biti $a_n = 3n - 1.$

1080. a) $1, \frac{7}{4}, \frac{13}{8}, \frac{7}{5}, \frac{19}{12}, \frac{10}{12}, \frac{10}{7}, \frac{25}{16}, \frac{13}{9}, \frac{31}{20},$

b) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, 0, \frac{1}{6}, 0, \frac{1}{8}, 0, \frac{1}{10},$

c) $2, 0, -\frac{4}{3}, 0, \frac{6}{5}, 0, -\frac{8}{7}, 0, \frac{10}{9}, 0.$

1081. a) $-5, 0, 5, 10, 15, 20;$ b) $2, -2, 2, -2, 2, -2.$

1085. Ako je $a_n = r^n$, tada rekurentna formula postaje

$r^{n+1} = 3r^n - 2r^{n-1} \Leftrightarrow r^2 - 3r + 2 = 0.$

To je $a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 (1)^n.$

Za $n = 0$, odnosno $n = 1$, dobijemo

$C_1 + C_2 = 2 \wedge 2C_1 + C_2 = 3 \Leftrightarrow C_1 = 1, C_2 = 1.$

Opšti član niza je $a_n = 2^n + 1^n = 2^n + 1.$

b) $a_n = 2^n - 1.$

1086. Dovoljno je posmatrati sledeća četiri slučaja:

1) $a \leq 2a_1 \leq a;$ 2) $0 \leq a_1 \leq a_0 \leq 2a_1;$

3) $0 \leq a_1 \leq 2a_0;$ 4) $0 < 2a_0 \leq a_1.$

Neka je $a_0 = 0$ i $a_1 = b.$

$a_0 \ a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4 \ a_5 \ a_6 \ a_7 \ a_8 \ a_9 \ a_{10}$

1) $a, b, b-a, a-2b, 2a-3b, a-b, 2b-a, -b, a-b, a, b,$

2) $a, b, b-a, a-2b, b, 3b-a, 2b-a, -b, a-b, a, b,$

3) $a, b, b-a, -a, 2b-a, 3a-b, a, b-2a, a-b, a, b,$

4) $a, b, b-a, -a, 2a-b, b-a, 2b-3a, b-2a, a-b, a, b.$

Oдавде zaključujemo da je dati niz periodičan sa periodom 9, $a_{n+9} = a_n$ za svako $n.$

1087. Pošto je $x_3 = 6 = 3!, x_4 = 24 = 4!$ i $x_5 = 120 = 5!,$

može se naslutiti da je $x_n = n!.$

Dokaz indukcijom $x_1 = 1!, x_2 = 2!.$

Pretpostavimo da je $x_k = k!$ i $x_{k-1} = (k-1)!$

Tada je

$x_{k+1} = k(x_k + x_{k-1}) = k(k! + (k-1)!) =$

$k(k-1)!(k+1) = (k+1)!,$ čime je dokaz završen.

1088. a) Za $n = 1, a_1 + (1-1)d = a_1,$ jednakost je tačna. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n=k, a_k = a_1 + (k-1)d,$ pa dokažemo da je tačan i za $n=k+1.$ Treba dokazati da je

$a_{k+1} = a_1 + ((k+1)-1)d = a_1 + kd.$

Dokaz:

$a_{k+1} = a_k + d = a_1 + (k-1)d + d = a_1 + kd.$

Prema tome obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

b) Za $n = 1, S_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1,$ zbir od jednog člana jednak je samom članu. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n = k,$

$S_k = \frac{k}{2}(a_1 + a_k).$

Treba dokazati da važi za $n = k+1,$ odnosno da je

$S_{k+1} = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$

Dokaz:

$S_{k+1} = S_k + a_{k+1} = \frac{k}{2}(a_1 + a_k) + a_{k+1} =$

$= \frac{k}{2}(a_1 + a_1(k-1)d) + a_{k+1} = \frac{k}{2}(2a_1 + kd) - \frac{kd}{2} + a_1 + kd =$

$= \frac{k}{2}(2a_1 + kd) + \frac{2a_1 + kd}{2} = \frac{k}{2} + \frac{1}{2}(2a_1 + kd) =$

$= \frac{k+1}{2}(a_1 + (a_1 + kd)) = \frac{k+1}{2}(a_1 + a_{k+1}).$

Obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

1089. $a_{13} = -50.$

1090. $7, 8\frac{1}{2}, 10, 11\frac{1}{2}, \dots$

1091. a) $a_n = 45, d = 3;$

b) $a_n = -16, d = -4.$

1092. a) $a_1 = 9, d = 2;$

b) $a_1 = 0, d = 7.$

1093. a) $n = 10, S_n = 265;$

b) $n = 26, S_n = 604,5.$

1094. a) $n = 52, a_n = 143;$

b) $n = 10, a_n = 47.$

1095. a) $8, 5, 2, -1, -4, \dots;$

b) $\frac{73}{11}, \frac{52}{11}, \frac{31}{11}, \frac{10}{11}, \dots$

1096. Iz sistema jednačina $a_1 = 9 \wedge a_9 = -6$ dobija se

$a = 18, d = -3.$ Ako se zamene dobijene vrednosti u (3), proizilazi da je $n = 4$ ili $n = 9.$

1097. a) $a_1 = 2, d = 1, n = 5$; b) $a_1 = 5, d = 5, n = 6$.

1098. Iz uslova zadatka dobijaju se jednakosti:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 36 \wedge a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 482.$$

Odatle sledi sistem

$$a + d = 12 \wedge 3a^2 + 5d^2 + 6ad = 482, \text{ čija su rešenja}$$

$d = \pm 5, a_1 = 7$ ili $a_1 = 17$, te je traženi niz

7, 12, 17, 22, ... ili 17, 12, 7, 2, -3, -8, ...

1099. Iz uslova $a_1 = 5, d = 4$. Zamenom ovih vrednosti u

(3) i posle sređivanja dobija se jednačina

$$2n^2 + 3n - 10877 = 0.$$

Koreni jednačina su $n_1 = 73$ i $n_2 = -74,5$. Odgovara samo n_1 , jer broj članova progresije je ceo pozitivan broj.

1100. Iz uslova sledi sistem

$$a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + (a_1 + 3d) = 26 \wedge$$

$$\wedge a_1(a_1 + d)(a_1 + 2d)(a_1 + 3d) = 880.$$

Posle sređivanja, iz prve jednačine je $a_1 = \frac{13 - 3d}{2}$.

Zamenom u drugu jednačinu sređivanjem izraza u zagradi dobija se

$$\frac{13 - 3d}{2} \cdot \frac{13 - d}{2} \cdot \frac{13 + d}{2} \cdot \frac{13 + 3d}{2} = 880.$$

Prvi i četvrti i drugi i treći član proizvoda predstavljaju razliku kvadrata brojeva 13 i $3d$, 13 i d .

Dobija se jednačina

$$9d^4 - 1690d^2 + 14481 = 0, \text{ čija su rešenja}$$

$$d' = 3, d'' = -3, d''' = \frac{1609}{3} \text{ i } d^{IV} = -\frac{1609}{3}.$$

Iz jednačine $a = \frac{13 - 3d}{2}$ dobijaju se odgovarajuća rešenja:

$$a_1' = 2, a_1'' = 11,$$

$$a_1''' = \frac{13 - \sqrt{1609}}{2} \text{ i } a_1^{IV} = \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}.$$

Odatle slede četiri niza:

$$1) 2, 5, 8, 11, 14, \dots$$

$$2) 1, 8, 5, 3, -1, \dots$$

$$3) \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \frac{39 - \sqrt{1609}}{2}, \frac{39 + \sqrt{1609}}{2}, \frac{13 + \sqrt{1609}}{2}, \dots$$

$$4) 13 + \frac{\sqrt{1609}}{2}, \frac{39 + \sqrt{1609}}{6}, \frac{39 - \sqrt{1609}}{6}, \frac{13 - \sqrt{1609}}{2}, \dots$$

$$1101. a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{1}{4}(a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}).$$

Ako sve članove izrazimo preko a , i d , dobijamo jednačinu

$$5a_1 + 10d = \frac{1}{4}(5a_1 + 35d). \text{ Pošto je } a_1 = 1, \text{ dobija se da je}$$

$d = -3$. Traženi niz je 1, -3, -6, -9, ...

$$1102. a_1 = 1, d = 3.$$

1103. Iz uslova zadatka sledi

$$\frac{2a_1 + (m-1)d}{2} \cdot m : \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n = m^2 : n^2.$$

Posle sređivanja je $(2-d)(n-m) = 0$, a odavde $n-m \neq 0$, $2-d = 0 \Rightarrow d = 2$, a traženi niz glasi 1, 3, 5, 7, 9, ...

$$1104. 2, 4, 6, 8, \dots$$

$$1105. \text{ Iz uslova sledi } \frac{m}{2}(2a_1 + (m-1)d) = n, \frac{n}{2}(a_1 + (n-1)d) = m,$$

$$\text{ odakle dobijamo: } d = \frac{2(m+n)}{mn}, a_1 = \frac{m^2 + (n-1)(m+n)}{mn}.$$

Smenom u obrazac

$$S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(2a_1 + (m+n-1)d) \text{ dobijamo:}$$

$$a) S_{m+n} = -(m+n);$$

$$b) \text{ analogno } S_{m-n} = \frac{(m-n)(2n+m)}{m}.$$

1106. Iz $a_1 + d(m-1) = n$, $a_1 + d(n-1) = m$ dobija se

$$d = -1, a_1 = m + n - 1, \text{ pa je } S_{m+n} = \frac{m+n}{2}(m+n-1).$$

1107. a) Iz $a_1 + d(p-1) = q$ i $a_1 + d(q-1) = p$ sledi

$$d = -1 \text{ i } a_1 = p + q - 1.$$

Primenom obrasca (1) nalazimo da je $a = p + q - n$.

b) iz sistema

$$a_1 + (m+n-1)d = A \wedge a_1 + (m-n-1)d = B \text{ sledi}$$

$$a_1 = \frac{An - Am + Bm + Bn + A - B}{2n}, d = \frac{A - B}{2n}.$$

Primenom obrasca (1) dobijamo

$$a_m = \frac{A+B}{2}, a_n = \frac{2An - Am + Bm}{2n}.$$

1108. $(n+1)(2n-1)$.

1109. 4905.

1110. n^2 .

1111. $\frac{((n+1)a - (n-1)b) \cdot n}{2}$.

1112. Iz zahteva $S_n = 3n^2$ ili $\frac{(2a_1 + d(n-1))n}{2} = 3n^2$,

pošto je $n \neq 0$, sledi

$$2a_1 + d \cdot n - d = 6n \text{ ili } 2a - d = (6-d)n \quad (1)$$

Kako je $n \neq 0$, jednačina (1) je ekvivalentna sistemu

$$6-d=0 \wedge 2a-d=0, \text{ tj. } d=6; a=\frac{d}{2}=3;$$

traženi niz je 3, 9, 15, 21, ...

1113. Primenom obrasca (3) dobija se:

$$S_1 = \frac{2a_1 + d(n_1-1)}{2} n_1 \Rightarrow \frac{S_1}{n_1} = a_1 + \frac{d}{2}(n_1-1),$$

$$S_2 = \frac{2a_1 + d(n_2-1)}{2} n_2 \Rightarrow \frac{S_2}{n_2} = a_1 + \frac{d}{2}(n_2-1).$$

$$S_3 = \frac{2a_1 + d(n_3-1)}{2} n_3 \Rightarrow \frac{S_3}{n_3} = a_1 + \frac{d}{2}(n_3-1).$$

Ako se pomnože poslednje tri jednačine redom sa $(n_2 - n_3)$, $(n_3 - n_1)$ i $(n_1 - n_2)$, pa se saberu, dobija se

$$\begin{aligned} \frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = \\ = a_1((n_2 - n_3) + (n_3 - n_2) + (n_1 - n_2)) + \\ + \frac{d}{2}(n_1 - 1)(n_2 - n_3) + (n_2 - 1)(n_2 - n_1) + (n_3 - 1)(n_1 - n_2). \end{aligned}$$

Posle sređivanja na desnoj strani izrazi su jednaki nuli (ovi u zagradi), pa je

$$\frac{S_1}{n_1}(n_2 - n_3) + \frac{S_2}{n_2}(n_3 - n_1) + \frac{S_3}{n_3}(n_1 - n_2) = 0.$$

1114. Da bi niz bio aritmetički, treba da je

$$d = (a^2 + x^2) - (a + x)^2 = (a - x)^2 - (a^2 + x^2) = -2ax.$$

što znači da je niz aritmetički sa diferencijom

$$d = -2ax. \text{ Ako se primeni obrazac (3), dobija se}$$

$$S_n = \frac{(2(a+x)^2 - 2ax(n-1))a}{2} = (a^2 + (3-n)ax + x^2)n.$$

1115. Članovi $a_2, a_4, a_6, \dots, a_{20}$ obrazuju aritmetički niz sa diferencijom $2d$, a broj članova je $n = 10$. Ako se primeni obrazac (3), dobija se

$$\frac{(2 \cdot a_2 + 9 \cdot 2d)10}{2} = 250, \quad a_2 + 9 = 25.$$

Zamenom $a_2 = a_1 + d$ dobija se:

$$a + 10d = 25 \quad (a).$$

Analogno iz progresije $a_1, a_3, a_5, \dots, a_{19}$

$$a + 9d = 22 \quad (b).$$

Iz (a) i (b) sledi da je $a = -5$, a $d = 3$, pa je

$$a_{10} = a_1 + 9d = 22 \text{ i } a_{11} = a_1 + 10d = 25.$$

1116. Brojeve koje treba odrediti obrazuju aritmetički niz sa razlikom $d = 2$. Ako je prvi član a , progresija je:

$a, a+2, a+4, a+6$. Brojevi između njih su $a+1, a+3$ i $a+5$. Iz postojećeg zahteva u zadatku je

$$a^2 + (a+2)^2 + (a+4)^2 + (a+6)^2 = (a+1)^2 + (a+3)^2 + (a+5)^2 + 48.$$

Posle svodenja se dobija jednačina $a^2 + 6a - 27 = 0$.

Odatle je $a = 3$ ili $a = -9$.

Brojevi su 3, 5, 7, 9, ili -9, -7, -5, -3.

1117. a) Zbir desno predstavlja S_n aritmetičkog niza 3, 7, 11, ..., a taj zbir je 210. Ako se zamene vrednosti

a, d, S_n u (3) dobija se

$$\frac{6 + (n-1)4}{2} \cdot n = 210.$$

Posle očiglednih transformacija dobija se jednačina

$$2n^2 + n - 210 = 0, \text{ čija su rešenja } n = 10 \text{ i } n = -\frac{21}{2}.$$

Drugo rešenje ne dolazi u obzir, jer je broj članova ceo pozitivan.

$$x = a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$x = 3 + (10-1)4$$

$$x = 3 + 36 = 39.$$

b) $x = 73$.

1118. Pošto su a, b i c uzastopni članovi aritmetičke progresije, onda je

$$b = \frac{a+c}{2}.$$

Da bi izrazi bili tri uzastopna člana aritmetičke progresije, mora da je

$$b \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right) = \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \right).$$

Ako zamenimo vrednost b u prvom izrazu, dobija se:

$$\frac{a+c}{2} \cdot \frac{a+c}{ac} = \frac{1}{2} \left(a \left(\frac{2}{a+c} + \frac{1}{c} \right) + c \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{a+c} \right) \right).$$

Posle sređivanja izraza u zagradama dobijamo

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \left(\frac{2ac + a^2 + ac}{c(a+c)} + \frac{ac + c^2 + 2ac}{(a+c)a} \right),$$

zatim

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3 + 3a^2 + 3ac^2 + c^3}{(a+c)ca} \text{ ili}$$

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+c)^3}{(a+c)ac}, \text{ za } a+c \neq 0,$$

$$\frac{(a+c)^2}{2ac} = \frac{(a+c)^2}{2ac}.$$

1119. S obzirom da su a, b i c članovi aritmetičkog niza, onda je $2b = a + c$. Da bi rešenja kvadratne jednačine bila realna, mora da je $b^2 - ac \geq 0$.

Zamenom vrednosti za b dobija se $\frac{(a+c)^2}{4} - ac^2 \geq 0$.

Posle očigledne transformacije je $\frac{(a-c)^2}{4} \geq 0$.

Izraz na desnoj strani je uvek pozitivan, što je trebalo dokazati.

1120. Analogno zadatku 1118.

1121. Koristeći osobinu da je svaki član aritmetička sredina susedna dva člana, dobija se

$$2(x^2 + 1)^2 = (x^2 - 2x - 1)^2 + (x^2 + 2x - 1)^2.$$

Ako se desna strana kvadrira, dobija se

$$2(x^2 + 1)^2 = x^4 + 4x^2 + 1 - 4x^3 - 2x^2 + 4x + x^3 + 4x^2 + 1 + 4x^3 - 2x^2 - 4x \text{ ili}$$

$$2(x^2 + 1)^2 = 2x^4 + 4x^2 + 2, \text{ odakle je } (x^2 + 1)^2 \equiv (x^2 + 1)^2.$$

Znači, tvrđenje je tačno.

1122. Uslov daje jednakost $2 \log_m x = \log_k x + \log_n x$.

Ako se svedu logaritmi na istu osnovu, tj. primeni

identitet $\log_a N = \frac{\log_k N}{\log_k a}$, dobija se

$$2 \frac{\log_k x}{\log_k m} = \frac{\log_k x}{\log_k k} + \frac{\log_k x}{\log_k n} \text{ ili } 2 \log_k n = \log_m (1 + \log_k n),$$

$$\log_k n^2 = \log_k m (\log_k k + \log_k n) = \log_k (kn) \log_k m.$$

Odatle je $n^2 = (kn)^{\log_k m}$.

1123. Ako se primeni obrazac (4), diferencija novog niza je

$$d = \frac{14-2}{8+1} = \frac{3}{2}.$$

Traženi niz je

$$2, 3\frac{1}{2}, 5, 6\frac{1}{2}, 8, 9\frac{1}{2}, 11, 12\frac{1}{2}, 14, 16\frac{1}{2}, \dots$$

1124. Za traženi niz je $a_1 = 0, a_{r+2} = 12$. Ako primenimo obrasce (1) i (3), dobijamo sistem

$$\frac{r+2}{2} (r+1)d = 150 \wedge (r+1)d = 12,$$

odavde je

$$d = \frac{1}{2}, r = 23.$$

1125. Razlika traženog niza je

$$d = \frac{B-A}{k+1}.$$

$$A, \frac{B+Ak}{k+1}, \frac{2B+A(k-1)}{k+1}, \frac{3B+A(k-2)}{k+1},$$

$$\frac{AB+A(k-3)}{k+1}, \dots, \frac{(k+1)B+A(k-k)}{k+1}.$$

Zbir niza je:

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2} \left(2A + (k+2-1) \cdot \frac{B-A}{k+1} \right).$$

$$S_{k+2} = \frac{k+2}{2} \left(2A + \frac{(k+1)(B-A)}{k+1} \right).$$

$$S_{k+2} = \frac{(k+2)(A+B)}{2}.$$

1126. $S_8 = 100$.

1127. Neka je broj interpoliranih brojeva r . Tada niz ima $r+2$ članova, gde je $a = 1, a_{r+2} = 31$. Iz obrasca za interpolaciju dobija se d . Za traženi niz

$$d = \frac{30}{r+1},$$

a prvi interpolirani broj je $a_2 = 1 + d$, dok je poslednji

$$a_{r+1} = 31 - d = \frac{31r+1}{r+1}.$$

Pretposlednji je $a_r = 31 - 2d$, $a_r = \frac{31r - 29}{r + 1}$.

Zbir interpoliranih brojeva je

$$\frac{1 + d + 31 - d}{2} r = 16r.$$

Najveći interpolirani brojevi su a_{r+1} i a_r , pa je iz uslova zadatka

$$4 \left(\frac{31r + 1}{r + 1} + \frac{31r - 29}{r + 1} \right) = 16r \text{ ili}$$

$$2r^2 - 29r + 14 = 0, \text{ odakle je } r = 14.$$

$$1128. a_n = 0, S_n = \frac{n - 1}{2}.$$

1129. Iz uslova zadatka $a_1 = (x - 7)^2$, $a_3 = (x + 1)^2$,

$$a_2 = \frac{(x - 7)^2 + (x + 1)^2}{2} = x^2 - 6x + 25.$$

Da bi se odredila vrednost za x , da je $a_2 = 20$, treba da je $x^2 - 6x + 25 = 20$. Odatle se za x dobijaju dve vrednosti: $x = 5$ i $x = 1$. Traženi niz je 4, 20, 36, ...

Iz jednačine $\frac{n}{2} (8 + (n - 1) 16) = 760$ sledi da je $n = 20$.

1130. Ako označimo stranice trougla sa a : $a + d$; $a + 2d$, dobija se sistem

$$a + (a + d) + (a + 2d) = 3h$$

$$a^2 + (a + d)^2 = (a + 2d)^2,$$

čija su rešenja za a : $a = \frac{3h}{4}$, odgovarajuće rešenje za d : $d = \frac{h}{4}$, te su stranice trougla

$$\frac{3h}{4}, h, \frac{5h}{4}.$$

1131. Iz sistema

$$a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 = 50 \wedge$$

$$\wedge 2((a + d) + (a + d)(a + 2d) + a(a + 2d)) = 94$$

nalazimo $a_1 = 3$, $d = 1$ ili $a_1' = 5$, $d' = -1$.

Dimenzije su 3 cm, 4 cm, 5 cm.

1132. Niz je r, a, b, c ili 4, $4 + d$, $4 + 2d$, $4 + 3d$. Ako se primeni poznati nam obrazac $r = \frac{P}{S}$, dobija se

$$4 = \sqrt{\frac{(2 + 2d)(2 + d)2}{6 + 3d}},$$

odakle je $d = 11$.

Stranice trougla su 15, 26 i 37, a površina 156 cm^2 .

1133. Iz sistema

$$a \pi (a + 2d) = 375 \pi \wedge a(a + d) = 300, \text{ sledi}$$

$$a = 15, d = 5, \text{ zapremina je } 1500\pi \text{ cm}^3.$$

1134. Iz sistema

$$a_1 + (n - 1) 3 = 44 \wedge \frac{n}{2} (2a_1 + (n - 1) 3) = 158.$$

Posle eliminacije a_1 , dobija se jednačina $3n^2 - 91n + 316 = 0$.

A odavde rešenje je $n = 4$, znači taj mnogougao je četvorougao.

1135. Iz jednačine $a^2 + (a + 3)^2 = (a + 6)^2$ dobija se $a = 9 \text{ cm}$, $b = 12 \text{ cm}$ i $c = 15 \text{ cm}$.

1136. Neka su a, b i c merni brojevi stranica pravouglog trougla a, b i c su članovi aritmetičkog niza, ako je $2b = a + c$. Da bi trougao bio pravougli, mora da je $a^2 + b^2 = c^2$ ili

$$a^2 + b^2 = 4b^2 - 4ab + a^2 \Leftrightarrow b(3b - 4a) = 0.$$

Odavde je $b = 0$ ili $b = \frac{4a}{3}$.

Prvo rešenje ne odgovara zadatku (jer stranica trougla ne može biti 0).

Za c dobijamo $c = \frac{5a}{3}$. Ako je a ma koji broj, brojevi $a, \frac{4}{3}a, \frac{5}{3}a$,

obrazuju aritmetički niz sa $d = \frac{a}{3}$. Istovremeno je $a^2 + b^2 = c^2$, što znači, za svaku vrednost broja a dobijamo jedan pravougli trougao sa traženom osobinom.

1137. Ako jedna stranica trougla ima merni broj a , a razlika progresije je d , druge dve stranice biće $a + d$ i $a + 2d$, a obim $a + 3d$. Onda bi moralo biti $a + (a + d) + (a + 2d) = a + 3d \Leftrightarrow 3a + 3d = a + 3d$, odakle je

$$2a = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Takav trougao ne postoji.

1138. Ako uglove trougla označimo sa $\alpha - d$, α i $\alpha + d$, onda je

$$(\alpha - d) + \alpha + (\alpha + d) = 180^\circ,$$

$$\sin(\alpha - d) + \sin \alpha + \sin(\alpha + d) = \frac{3 + \sqrt{3}}{2}.$$

Iz prve jednačine sledi da je $\alpha = 60^\circ$, a iz druge sledi

$$\sin(60^\circ - d) + \sin 60^\circ + \sin(60^\circ + d) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{Oдавde } \sin(60^\circ - d) + \sin(60^\circ + d) = \frac{3}{2} \text{ ili}$$

$$2 \sin \frac{60^\circ - d + 60^\circ + d}{2} \cos \frac{60^\circ - d - 60^\circ - d}{2} = \frac{3}{2},$$

$$\text{odakle sledi } \cos d = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow d = 30^\circ.$$

Uglovi trougla su 30° , 60° , 90° .

$$1139. \frac{n}{2}(6 + (n - 1)) + \frac{n}{2}\left(2 \cdot \frac{3}{2} + 6(n - 1)\right) = 360^\circ.$$

Sledi $n' = 10$ a $n'' < 0$.

$$1140. \text{ Iz } \frac{n}{2}(2 \cdot 5(n - 1)) + \frac{n}{2}(2 \cdot 100 + (n - 1)(-10)) = 450,$$

sledi $n^2 + 41n - 180 = 0$, odakle je $n' = 4$ i $n < 0$.

$$1141. \text{ Iz jednačina } a_{21} = 4,9 + 20 \cdot 9,8 \text{ i}$$

$$S_{21} = \frac{21}{2}(2 + 4,9 + 20 \cdot 9,8),$$

sledi da je put u 21. $a_{21} = 200,9$ m, a put za 21 $S_{21} = 2160,9$ m.

$$1142. \text{ Ako primenimo obrazac (3), dobija se}$$

$$\frac{n}{2}(2 \cdot 4,9 + (n - 1)9,8) = 4410.$$

Oдавde $n = 30$ s.

$$1143. \text{ Primenom obrasca (1), dobija se}$$

$$646,8 + (n - 1)(-9,8) = 0. \text{ Odatle je } n = 67 \text{ s.}$$

$$1144. \text{ Analogno prethodnom zadatku dobija se } n = 160 \text{ s.}$$

$$1145. \text{ Pošto je slobodan pad } a_1 = 4,9, d = 9,8, n = 10.$$

Primenom obrasca (3)

$$S_{10} = \frac{10}{2}(2 \cdot 4,9 + (10 - 1)9,8),$$

odavde je $S_{10} = 490$ m.

1146. Ako se formiraju tražene razlike, dobija se

$$f(x + 1) - f(x) = (x + 1)^2 - x^2 = 2x + 1$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = (x + 2)^2 - (x + 1)^2 = 2x + 3,$$

$$f(x + 3) - f(x + 2) = (x + 3)^2 - (x + 2)^2 = 2x + 5.$$

Pošto je

$$2x + 3 = \frac{(2x + 1)(2x + 5)}{2} = \frac{4x + 6}{2} = 2x + 3,$$

tvđenje je tačno!

$$1148. \text{ a) } f(x + 1) - f(x) = 2x - 2,$$

$$f(x + 2) - f(x + 1) = 2x,$$

$$f(x + 3) - f(x + 2) = 2x + 2.$$

Da bi funkcije činile aritmetički niz, mora biti

$$2x = \frac{(2x - 2) + (2x + 2)}{2} = 2x,$$

tj. zahtev je ispunjen.

$$\text{b) Iz jednačine } \frac{5}{2}(4x - 4 + 4 \cdot 2) = 60 \text{ sledi da je}$$

$x = 5$; progresija je 8, 10, 12, ...

$$\text{c) Iz } \frac{n}{2}(16 + (n - 1)2) > 120 \text{ sledi } n^2 + 7n - 120 > 0,$$

odavde $n > 8$, što znači da treba sabrati najmanje 9 članova da zbir bude veći od 120.

$$1149. \text{ Iz jednačine}$$

$$a + (m - 1)d + a(n - 1) = a + (m + n - 1)d$$

sledi $d = a$, pa je tražena progresija $a, 2a, 3a, \dots$

$$1150. \text{ Ako jednačine}$$

$$a = a_1 + (n - 1)d,$$

$$b = a_1 + (p - 1)d,$$

$$c = a_1 + (q - 1)d$$

pomnožimo redom sa $p - q$, $q - n$ i $n - p$, pa ih saberemo dobijemo:

$$a(p - q) + b(q - n) + c(n - p) =$$

$$= (a_1 + dn - d)(p - q) + (a_1 + dp - d)(q - n) + (a_1 + dq - d)(n - p).$$

Pošto je izraz na desnoj strani identičan nuli, sledi

$$a(p - q) + b(q - n) + c(n - p) = 0.$$

1151. a) Prema uslovu da je niz aritmetički, imamo

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d.$$

Ako je $d \neq 0$, izraz na levoj strani relacije (1)

možemo napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} &= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) \frac{1}{d} + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) \frac{1}{d} + \dots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \right) \cdot \frac{1}{d} \\ &= \frac{1}{d} \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} \right) = \frac{a_n - a_1}{a_1 a_n d} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{a_1 a_n d} = \frac{n-1}{a_1 a_n}. \end{aligned}$$

Dobili smo ono što je trebalo dobiti i dokazati.

b) Ako je

$$(2) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \frac{1}{a_3 a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}$$

($n \geq 3$), pokažimo da brojevi a_1, a_2, a_3 , obrazuju aritmetički niz. Neka je $n = 3$, tada je

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} = \frac{a_3 + a_1}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2(a_1 + d)}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{2}{a_1 a_3}.$$

Odatve je

$$\frac{1}{a_1 a_2} - \frac{1}{a_1 a_3} = \frac{1}{a_1 a_3} - \frac{1}{a_2 a_3} \Rightarrow \frac{a_3 - a_2}{a_1 a_2 a_3} = \frac{a_2 - a_1}{a_1 a_2 a_3},$$

$$\text{tj. } a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = d.$$

Da bi tvrdjenje bilo dokazano, dovoljno je pokazati da iz (2) sleduje

$$a_n - a_{n-1} = a_{n-1} - a_{n-2} \quad (n \geq 4).$$

Ako u (2) umesto n stavimo $n-1$ i $n-2$, dobijamo redom

$$(3) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} = \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}},$$

$$(4) \quad \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-3} a_{n-2}} = \frac{n-3}{a_1 a_{n-2}}.$$

Oduzimanjem (3) od (2) i (4) od (3) dobijamo redom

$$\frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n} - \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} = \frac{na_{n-1} - a_{n-1} - na_n + 2a_n}{a_1 a_{n-1} a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2} a_{n-1}} = \frac{n-2}{a_1 a_{n-1}} - \frac{n-3}{a_1 a_{n-2}} = \frac{na_{n-2} - 2a_{n-2} - na_{n-1} + 3a_{n-1}}{a_1 a_{n-2} a_{n-1}},$$

$$\frac{1}{a_{n-1} a_n} - \frac{1}{a_1 a_n} = \frac{(n-2)(a_{n-1} - a_n)}{a_1 a_{n-1} a_n},$$

$$\frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_1 a_n - 1} = \frac{(n-2)(a_{n-2} - a_{n-1})}{a_1 a_{n-2} a_n - 1}.$$

Odatve sledi $a_1, -a_{n-1} = (n-2)(a_{n-1} - a_n)$,

$a_1 - a_{n-1} = (n-2)(a_{n-2} - a_{n-1})$, što dovodi do jednakosti

$a_{n-1} - a_n = a_{n-2} - a_{n-1}$, koju je trebalo dokazati.

1152. Kako $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ čine aritmetički niz, važe jednakosti

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = d. \text{ Na osnovu identiteta}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_1}} = \frac{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}}{d},$$

a analogno se dobijaju:

$$\frac{1}{\sqrt{a_3} + \sqrt{a_2}} = \frac{\sqrt{a_3} - \sqrt{a_2}}{d}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_4} + \sqrt{a_3}} = \frac{\sqrt{a_4} - \sqrt{a_3}}{d},$$

$$\dots \dots \dots \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a_{n-1}}} = \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_{n-1}}}{d}.$$

Sumiranjem dobijenih jednakosti dobijamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2} + \sqrt{a_3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}} + \sqrt{a_n}} &= \frac{\sqrt{a_n} - \sqrt{a_1}}{d} = \\ &= \frac{a_n - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{a_1 + (n-1)d - a_1}{d(\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n})} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1} + \sqrt{a_n}}, \end{aligned}$$

što je trebalo dokazati.

1153. Neka su traženi brojevi $a, a+d, a+2d$ i neka je prvi deljiv sa d , tj. $a = dk$, tada je

$$\frac{a(a+d)(a+2d)}{6d} = \frac{dk(dk+d)(dk+2d)}{6d} = \frac{k(k+1)(k+2)}{6}.$$

Pošto su $k, k+1, k+2$ tri uzastopna prirodna broja, jedan od njih je deljiv sa 2, jedan sa 3, a njihov proizvod sa 6.

1154. Pošto je

$$a_1 = \frac{x-1}{x}, \quad a_n = \frac{1}{x} \text{ i } n = x-1,$$

tada je

$$S = \frac{x-1}{2} \left(\frac{x-1}{x} + \frac{1}{x} \right) = \frac{x-1}{2}.$$

1155. a) Tražena suma se dobija ako se u identitetu

$$3x^3 + 3x + 1 = (x + 1)^3 - x^3 \text{ zameni redom}$$

$x = 1, 2, 3, \dots, n$ i dobijene jednakosti sumiraju:

$$3(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) + 3(1 + 2 + 3 + \dots + n) + n =$$

$$(n + 1)^3 - 1 \text{ ili } 3S_2 + 3S_1 + n = (n + 1)^3 - 1, \text{ gde su } S_1 \text{ i } S_2 \text{ suma } n \text{ brojeva prirodnog niza i suma njihovih kvadrata.}$$

Zamenom $S_1 = \frac{(n+1)n}{2}$ u poslednju jednakost dobija se

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Da bismo našli sumu kubova prvih n brojeva prirodnog niza, treba zameniti u identitetu:

$$4x^3 + 6x^2 + 4x + 1 = (x + 1)^4 - x^4, x = 1, 2, 3, \dots, n.$$

Ako se sumiraju dobijene jednakosti, sledi da je

$$4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n = (n + 1)^4 - 1. \text{ Zamenom}$$

$$S_1 = \frac{(n+1)n}{2} \text{ i } S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

u poslednju jednakost sledi da je

$$S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2.$$

1156. Ako se označi zbir prvih n članova traženog niza sa

$$S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}, \text{ a zbir sledećih } k_n \text{ članova}$$

$$S' = \frac{a_{n+1} + a_{(n+1)k}}{2} \cdot kn.$$

$$\text{Neke je } S : S' = m, \text{ tj. } \frac{a_1 + a_n}{a_{n+1} + a_{(k+1)n}} = m, \text{ ili}$$

$$\frac{2a + (n-1)d}{2a + (n-1)d} = m.$$

$$2a + nd + ((k+1)^n - 1)d = m(2a + nd).$$

Odatle je posle sređivanja

$$(2a_1 - d)(mk - 1) - nd((k+2)mk - 1) = 0.$$

Poslednji izraz, po uslovu zadatka, ne zavisi od n , ako je koeficijent uz n jednak nuli, tj.

$$(k+2)mk - 1 = 0.$$

$$\text{Odatle je } m = \frac{1}{k(k+2)}.$$

Izraz (1) posle zamene n dobija sledeći oblik:

$$(2a_1 - d) \frac{k+1}{k+2} = 0.$$

gde je drugi činilac različit od nule i zato je

$$2a_1 - d = 0, \text{ tj. } d = 2a_1. \text{ Traženi aritmetički niz ima oblik: } a_1, 3a_1, 5a_1, 7a_1, \dots$$

1157. Data jednakost može se transformisati u ovu jednakost:

$$(a_1 - a_2)(a_1 + a_2) + (a_3 - a_4)(a_3 + a_4) + \dots$$

$$+ (a_{2k-1} - a_{2k})(a_{2k-1} + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) \text{ ili}$$

$$-d(a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2).$$

Iz identiteta

$$(1) \quad -dk(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2),$$

pa iz jednakosti $d = a_{2k} - a_{2k-1}$ dobija se

$$d = a_{2k} - (a_1 + (2k-2)d), \text{ odakle je } -d = \frac{a_1 - a_{2k}}{2k-1}.$$

Zamenom dobijene vrednosti za $-d$ u (1) dobija se

$$\frac{k}{2k-1} (a_1 - a_{2k})(a_1 + a_{2k}) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) \text{ ili}$$

$$\frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2) = \frac{k}{2k-1} (a_1^2 - a_{2k}^2), \text{ što je trebalo dokazati.}$$

1158. U opštem slučaju k -ta vrsta ima oblik

$$k, k+1, k+2, \dots, 2k-1, \dots, 3k-2.$$

Ovaj niz je aritmetički gde je $a_1 = k, a_n = 3k-2$ i

$n = 2k-1$, te je zbir vrste

$$S_n = \frac{k + 3k - 2}{2} (2k - 1) = (2k - 1)^2; \text{ što je trebalo dokazati.}$$

$$1159. \text{ Iz } \binom{n}{1} + \binom{n}{3} = 2 \binom{n}{2} \Leftrightarrow n + \frac{n(n-1)(n-2)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-1)}{2}.$$

Imamo $n^2 - 9n + 14 = 0$, odavde $n = 7$ ili $n = 2$.

Drugi koren odgovara zadatku, jer za $n = 2$ binomni razvoj nema četvrti član.

$$1160. \text{ Iz } \binom{n}{4} + \binom{n}{6} = 2 \cdot \binom{n}{5}, \text{ posle deljenja sa } \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

sledi $n^2 - 21n + 98 = 0$, odakle je $n = 14$ ili $n = 7$.

$$\begin{aligned}
 1161. \quad \frac{1}{\sqrt{c} + \sqrt{a}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{\frac{a+c}{2}} + \sqrt{c}} + \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{\frac{a+c}{2}}} \right) = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}} + \frac{2}{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{a+c} + \sqrt{2c}}{a-b} + \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a+c}}{a-c} \right) = \\
 &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{c}}{a-c} = \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{c}}.
 \end{aligned}$$

$$1163. x = \log_2 5.$$

1164. a) Neka je $x^2 = y$, tada je

$$y_1 + y_2 = 3m + 2 \text{ i } y_1 y_2 = m^2. \text{ Za } y_1 > y_2 \text{ aritmetički niz je } -\sqrt{y_1}, -\sqrt{y_2}, \sqrt{y_2}, \sqrt{y_1}.$$

Iz osobine aritmetičkog niza imamo

$$2\sqrt{y_2} = y_1 - \sqrt{y_2} \Rightarrow y_1 = 9y_2.$$

Iz sistema

$$y_1 + y_2 = 3m + 2 \wedge y_1 y_2 = m^2 \wedge y_1 = 9y_2 \text{ sledi da je}$$

$$m = 6 \text{ ili } m = -\frac{6}{13}$$

$$b) m = 7 \text{ ili } m = -\frac{17}{9}.$$

$$1165. a) x = 3; b) x = 2.$$

1166. Postoje četiri takve progresije. Jedna od njih je 6, 12, 18, 24. Odrediti ostale.

$$1167. 2, 5, 8, \dots \text{ ili } 23, 20, 17, \dots$$

$$1168. -2, 5, 12, \dots \text{ ili } 12, 5, -2, \dots$$

$$1169. 3, 5, 7, \dots, -\frac{29}{5}, -\frac{11}{5}, \frac{7}{5}, \dots$$

1171. a) Za $n = 1$, $a_1 - a_1 \cdot q^{1-1} = a_1$, tvrdjenje je tačno. Pretpostavimo da obrazac važi na $n = k$, tj. $a_k = a_1 q^{k-1}$. Dokažimo da je obrazac tačan i za $n = k + 1$, odnosno $a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$.

Dokaz: Prema definiciji geometrijskog niza $a_{k+1} = a_k \cdot q$ ili s obzirom na pretpostavku $a_{k+1} = a_1 q^{(k+1)-1}$, što je trebalo dokazati.

b) Za $n = 1$, $S = a_1 \frac{q-1}{q-1} = a_1$, tj. suma od jednog člana jednaka je njemu samom. Pretpostavimo da je obrazac tačan za $n = k$, $S_k = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1}$.

Dokažimo ispravnost obrasca i za $n = k + 1$, odnosno

$$S_{k+1} = a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
 S_{k+1} &= S_k + a_{k+1} = a_1 \frac{q^k - 1}{q - 1} + a_1 q^k = \frac{a_1 q^k - a_1 + a_1 q^{k+1} - a_1 q^k}{q - 1} = \\
 &= a_1 \frac{q^{k+1} - 1}{q - 1}.
 \end{aligned}$$

Obrazac je tačan za svako n (prirodan broj).

1172. Ovde je $a_1 = 1$, $q = 3$, $n = 10$. Ako se primeni obrazac (1), dobija se $a_{10} = 1 \cdot 3^9 = 19683$.

1173. Kako je $a_6 = a_1 q^5$, to je $q^5 = \frac{a_6}{a_1} = 1024$, odakle je

$$q = \sqrt[5]{1024} = 4.$$

1174. Kako je $a_n = a_1 q^{n-1}$, to ćemo, kad zamenimo poznate veličine, dobiti jednačinu $4096 = 1 \cdot 2^{n-1}$. Zadatak se sveo na rešavanje ove jednačine (eksponecijalne). Broj 4096 rastavimo na činioce kao 2^{12} . Prema tome, gornja jednačina se svodi na eksponencijalnu jednačinu $2^{12} = 2^{n-1}$, čije su osnova i leve i desne strane jednake, pa će biti $12 = n - 1$. Odatle je $n = 13$.

1175. Ako se primeni obrazac (2), dobija se

$$S_{10} = \frac{3(2^{10} - 1)}{2 - 1} = 3 \cdot (2^{10} - 1) = 3(1024 - 1) = 3069.$$

1176. Primenom obrasca (2), dobija se

$$8190 = a_1 \frac{(2^{12} - 1)}{2 - 1}, \text{ odakle je } a_1 = 2.$$

$$1177. 16400 = \frac{5(3^n - 1)}{3 - 1} \Leftrightarrow 32800 = 5(3^n - 1), \\ 6560 = 3^n - 1 \Leftrightarrow 3^n = 6561 \Leftrightarrow 3^n = 3^8 \Leftrightarrow n = 8.$$

1178. Ako date veličine zamenimo u obrascima (1) i (2), dobije se sistem jednačina:

$$a_1 \cdot 2^{n-1} = 112 \wedge \frac{a_1(2^n - 1)}{2 - 1} = 217.$$

Iz prve jednačine će biti

$$a_1 = \frac{112}{2^{n-1}} = \frac{112}{2^n \cdot 2^{-1}} = \frac{224}{2^n}.$$

Ako se ova vrednost zameni u drugu jednačinu, dobiće se

$$\frac{224}{2^n}(2^n - 1) = 217, 224 - \frac{224}{2^n} = 217, \frac{224}{2^n} = 7,$$

odakle je $2^n = 32, 2^n = 2^5, n = 5$. Dalje je

$$a_1 = \frac{224}{2^n} = \frac{224}{2^5} = 7.$$

$$1179. q = 8.$$

$$1180. 1, 3, 9, 27, \dots \text{ ili } -3, 9, -27, -\dots$$

1181. Iz sistema $a_1 q^4 - a_1 = 15, a_1 q^3 = 6$ sledi

$$\frac{a_1(q^4 - 1)}{a_1 q(q^3 - 1)} = \frac{15}{6} \text{ za } a_1 \neq 0, q \neq 1; \frac{q^2 + 1}{q} = \frac{5}{2} \text{ ili } 2q^2 - 5q - 2 = 4,$$

$$\text{odakle je } q' = \frac{1}{2}, q'' = 2.$$

Odgovarajuća rešenja za a_1 su $a'_1 = -16$ i $a''_1 = 1$.

Nizovi koji zadovoljavaju postavljeni uslov su $-16, -8, -4, -2, \dots$ i $1, 2, 4, 8, \dots$

$$1182. 3, 6, 12, 24, \dots$$

$$1183. \text{ a) } 1, 2, 4, 8, \dots; \quad \text{ b) } 50, 10, 2, \frac{2}{5}, \dots, \text{ ili } 2, 10, 50, 250, \dots;$$

$$\text{ c) } a'_1 = 5 \text{ i } a''_1 = 1280, q' = \pm 4 \text{ ili } q'' = \pm \frac{1}{4}.$$

$$1184. \text{ Iz sistema } a_1 + a_1 q + a_1 q^2 = 112 \wedge a_1 q^3 + a_1 q^4 + a_1 q^5 = 14 \\ \text{ proizlazi da je } q = \frac{1}{2} \text{ i } a_1 = 64.$$

1185. Iz sistema

$a_1 - a_1 q = 36 \wedge a_1 q^2 - a_1 q^3 = 4$ sledi da postavljeni uslov zadovoljava progresiju 54, 18, 6, 2 ili 27, -9, 3, -1.

$$1186. \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_4 + a_5 + a_6} = \frac{1}{q^3}, \frac{a_4 + a_5 + a_6}{a_7 + a_8 + a_9} = \frac{1}{q^3}.$$

1187. Neka su a, b i c merni brojevi stranica pravouglog trougla, tako da je $a < b < c$. Ako ovi čine progresiju, mora biti $b^2 = ac$. Pošto je trougao pravougli, $a^2 + b^2 = c^2$. Ako se iz ove dve jednačine izrazi b i c u funkciji od a , dobija se

$$b = \frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}, c = \frac{a}{2}(1+\sqrt{5}).$$

Stranice pravouglog trougla obrazuju geometrijski niz

$$a, \frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})}, \frac{a}{2}\sqrt{2(1+\sqrt{5})},$$

$$\text{ kod koga je količnik } q = \frac{\sqrt{2(1+\sqrt{5})}}{2}.$$

1188. Obrazuju i to: a, a^2, a^3 .

$$1189. 9, 12, 16.$$

$$1190. 18, 6, 2.$$

$$1191. \text{ Iz sistema } \frac{a^3 q^3}{3} = 576 \wedge \frac{a q^2 \sqrt{a^2 + a^2 q^2}}{2} = 120,$$

sledi da je

$$a = 9, q = \frac{4}{3}. \text{ Osnovne ivice su } 9 \text{ i } 12, \text{ visina } 16, \text{ a } P = 780 \text{ m}^2.$$

1192. Iz prve dve jednačine dobije se

$$a_1 q^3 (q^2 - 1) = 216 \wedge a_1 (q^2 - 1) = 8. \text{ Odakle je } q = 3, a_1 = 1. \text{ Za-} \\ \text{menom u treću jednačinu dobiće se}$$

$$40 = \frac{3^n - 1}{2}, \text{ a odavde } 3^n = 81, n = 4.$$

$$1193. q = \pm 8, S_5 = 10043 \text{ ili } 10925.$$

$$1194. a_1 = 5, a_7 = 320.$$

$$1195. q = 3, n = 7.$$

$$1196. a_n = -486, n = 6.$$

$$1197. a_1 = 1, q = 2, n = 10.$$

$$1198. a = -2, q = \pm 2, n = 6.$$

$$1199. a + aq + aq^2 + aq^3 = 9750.$$

$$\frac{aq^3 - a}{aq^2 - aq} = \frac{19}{6}.$$

Iz druge jednačine, za $a \neq 0$, dobija se $\frac{q^3 - 1}{q(q-1)} = \frac{19}{6}$;

za $q \neq 1$, $\frac{q^2 + q + 1}{q} = \frac{19}{6}$. Zatim $6q^2 - 13q + 6 = 0$,

odakle je $q = \frac{3}{2}$ ili $\frac{2}{3}$, $a = 1200$.

Traženi delovi su: 1200, 1800, 2700, 4050.

1200. a) Iz sistema: $a(1 + q^6) = 65 \wedge a^2q^6 = 64$ eliminacijom q^6 dobijamo jednačinu $a^2 - 65a + 64 = 0$, odakle je $a = 64$ i 1. Za q se dobije $q = \frac{1}{2}$ i 2. Rastuća progresija je: 1, 2, 4, 8, 16, ...

b) $1 \cdot q^{n-1} = 1024$, $2^{n-1} = 2^{10}$, $n - 1 = 10$, $n = 11$, 1024 je 11. član niza.

1201. Iz sistema:

$$a + aq + aq^2 = 57 \wedge aq = \frac{6}{13}(a + aq^2) \Leftrightarrow$$

$$a(1 + q + q^2) = 57 \wedge a(6q^2 - 13q + 6) = 0.$$

Iz druge jednačine, za $a \neq 0$, $6q^2 - 13q + 6 = 0$, odakle je

$$q = \frac{3}{2} \text{ ili } \frac{2}{3}.$$

Zamenom u prvu jednačinu $a = 12$ ili 27.

Traženi brojevi su 12, 18, 27.

1202. Iz sistema jednačina:

$$a + aq + aq^2 = 7 \wedge a^2 + a^2q^2 + a^2q^4 = 21 \text{ imamo}$$

$$a(1 + q + q^2) = 7 \wedge a^2(1 + q + q^2) \cdot (1 - q + q^2) = 21,$$

odakle su traženi brojevi: 1, 2 i 4.

1204. Koristiti osobine geometrijske progresije

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} \Rightarrow b^2 = ac, c^2 = bd, bc = ad.$$

$$1206. P_n = a_1 \cdot a_1q \cdot a_1 \cdot q^2 \dots a_1q^{n-1}, P_n = a_1^n q^{1+2+\dots+n-1} = a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

1207. 141 i 423.

$$1208. S_7 = \frac{b^7 - a^7}{b - a}.$$

$$1209. \frac{a}{b^2}, \frac{a}{b^2} \sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{b}, \frac{1}{b} \sqrt{\frac{b}{a}}; \frac{1}{a} \sqrt{\frac{b}{a}}, \frac{b}{a^2}.$$

1210. 4, 16, 64, 156, 1024.

1212. 189.

$$1213. S_n = \frac{b^{n+1}}{a+b} = \left(\left(-\frac{a}{b} \right)^n - 1 \right)$$

$$1214. x = \frac{ac - b^2}{2b - a - c}; -3, 7, 14, 28.$$

$$1215. J, \frac{9}{10}J, \frac{81}{100}J, \dots a_6 = \frac{59049}{100000}J.$$

$$1216. 100, 80, 64, \frac{256}{5}, \dots a_{10} = \frac{1048576}{78125}.$$

$$1217. S_n = \frac{q^n - 1}{q - 1} \text{ ili } S_n = 1 + q + q^2 + \dots + a^{n-1}, \text{ pa je}$$

$$\frac{q^n - 1}{q - 1} = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}, \text{ odakle je}$$

$$q^n - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}).$$

$$\text{Za } n = 2, \quad q^2 - 1 = (q - 1)(1 + q);$$

$$\text{za } n = 3, \quad q^3 - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2);$$

$$\text{za } n = 4, \quad q^4 - 1 = (q - 1)(1 + q + q^2 + q^3) \text{ itd.}$$

$$1218. S_n = \frac{a^n - b^n}{a - b} \text{ ili } S_n = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}, \text{ odakle je}$$

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}, \text{ tj.}$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1}).$$

$$\text{Za } n = 2 \text{ dobija se } a^2 - b^2 = (a - b)(a + b),$$

$$\text{za } n = 3, a - b = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \text{ itd.}$$

$$1219. S_1 = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}, S_2 = a_{n+1} \frac{q^n - 1}{q - 1}, S_3 = a_{2n+1} \frac{q^n - 1}{q - 1},$$

$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a_1 q^n \frac{(q^n - 1)}{q - 1}}{\frac{q - 1}{a_1 (q^n - 1)}} = q^n, \frac{S_3}{S_2} = \frac{a_1 q^{2n} \frac{q^n - 1}{q - 1}}{a_1 q^n \frac{q^n - 1}{q - 1}} = q^n.$$

1220. Ako tražene brojeve označimo (a ovi obrazuju geometrijski niz) sa a, aq i aq^2 , brojevi koji obrazuju aritmetički niz su $a + 1, aq + 6$ i $aq + 3$. Iz postavljenih uslova u zadatku sledi sistem
 $a + aq + aq^2 = 26 \wedge 2(aq + 6) = (a + 1) + (aq^2 + 3)$,
 odakle je $a = 2, q = 3$.

Geometrijski niz je 2, 6, 18, a aritmetički 3, 12, 21.

1221. Koristeći osobine aritmetičkog i geometrijskog niza i postavljeni uslov zadatka, dobija se sistem:

$$(a+d-7)^2 = (a-2)(a+2d-9) \wedge (a+2d-9)^2 = (a+d-7)(a+3d-5).$$

Aritmetički niz: 5, 13, 21, 29, a geometrijski niz: 3, 6, 12, 24.

1222. Iz sistema:

$$2(aq+6) = (a+5) + (aq^2+9) \wedge 2(aq^2+9) = (aq+6) + (aq^3+15)$$

dobija se $a = 8$ i $q = \frac{3}{2}$, odakle je geometrijski niz: -8, -12, -18, -27;
 a aritmetički niz: -3, -6, -9, -12.

1223. a) Iz sistema:

$$a + (a+d) + (a+2d) = 3k \wedge \left(a + d + \frac{k}{5}\right)^2 = a(a+2d+k) \text{ sledi}$$

$$a = \frac{3}{5}k, d = \frac{2}{5}k, \text{ pa je aritmetički niz } \frac{3}{5}k, k, \frac{7}{5}k;$$

$$\text{a geometrijski niz } \frac{3k}{5}, \frac{6k}{5}, \frac{12k}{5}.$$

b) $n = 5$.

1224. Iz jednačine $(a+3d)^2 = a(a+24d)$ sledi $d = 2a$.

Aritmetički niz je $a; 3a; 5a; 7a; \dots$, a geometrijski niz je $a; 3a; 5a; 7a; \dots$

1225. Geometrijski niz je: a, aq i aq^2 . Za aritmetički niz $a_1 = a, a_2 = aq$ i $a_7 = aq^2$. Odakle je

$$d = a_2 - a_1 = a(q-1) \text{ i } 6a = a_7 - a_1 = a(q^2 - 1).$$

Ako se eliminiše d , dobija se $q^2 - 1 = 6(q-1)$, za $a \neq 0$. Iz ove jednačine je $q' = 5$ ili $q'' = 1$.

Jednačina $a + aq + aq^2 = 93$ daje odgovarajuća rešenja $a' = 3$ i $a'' = 31$. Brojevi su 3; 15; 75; ili 31; 31; 31.

1226. Analogno kao u prethodnom zadatku:

$$3d = a(q-1) \wedge 24d = a(q^2 - 1). \text{ Dobija se jednačina}$$

$$q^2 - 8q + 7 = 0, \text{ za } a \neq 0. \text{ Odakle je } q' = 7, q'' = 1.$$

$$\text{Iz jednačine } a - aq + aq^2 = 114 \text{ sledi } a' = 2 \text{ i } a'' = 38.$$

Traženi brojevi su 2, 14, 98, ili 38, 38, 38.

1227. Ako a, b, c čine aritmetički, a x, y i z geometrijski niz, tada je

$$b = \frac{a+c}{2}, ay^2 = xz.$$

Zamenom ove vrednosti u datu jednakost dobija se

$$x^{\frac{(a+c)}{2} - c} \cdot (xz)^{\frac{1}{2}(c-a)} \cdot z^{a - \frac{(a+c)}{2}} = 1 \text{ ili}$$

$$x^{\frac{(a-c)}{2}} \cdot x^{\frac{(c-a)}{2}} \cdot z^{\frac{(c-a)}{2}} \cdot z^{\frac{(a-c)}{2}} = 1,$$

$$\text{tj. } x^0 \cdot z^0 = 1 \cdot 1 = 1.$$

1228. Rešenje sistema

$$a + d = 14 \wedge b + c = 12 \wedge b^2 = ac \wedge b + d = 2c$$

daje tražene brojeve

$$a = 2, b = 4, c = 8 \text{ i } d = 12 \text{ ili } \frac{25}{2}, \frac{15}{2}, \frac{9}{2}, \frac{3}{2}.$$

1229. Iz sistema

$$\theta_2 - \theta_0 = \theta_3 - \theta_2 = \frac{\pi}{2} - \theta_3 \wedge \frac{\rho_2}{\sqrt{2}} = \frac{\rho_3}{\rho_2} = \frac{4}{\rho_3}$$

$$\text{sledi } \theta_2 = \frac{\pi}{6}, \theta_3 = \frac{\pi}{3} \text{ a } \rho_2 = 2, \rho_3 = 2\sqrt{2}. \text{ Traženi brojevi su:}$$

$$a = \sqrt{2} (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ), \quad b = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right),$$

$$c = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \quad d = 4 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

1230. a) $x = \frac{(1+q)^2}{2}$ iz uslova $r \neq 1$. Ako je $q = 1$, zadatak je neodređen.

b) $d = q(1-q^2)$, aritmetički niz je rastući ako je

$$0 < q < 1. \text{ Tada je } \frac{1}{2} < x < 2.$$

$$\text{Poseban slučaj: } x = \frac{9}{4}, d = \frac{3}{8}, a_1 = \frac{1}{64}.$$

1231. Neka su traženi brojevi $a; aq; aq^2; aq^3$. Iz postavljenog uslova je:

$$\log a + \log aq + \log a + \log aq^2 = \log aq^3 = 18$$

$\wedge \log_3 a + \log_3 q - \log_3 a = 1$, odakle je $q = 3$. Ako se zameni q u prvoj i izvrše naznačene operacije, sledi $\log_3 a = 3, a = 27$.

Brojevi sa postavljenim osobinama su: 27, 81, 243, 729.

1232. Polazeći od uslova $\frac{a_5}{a_1} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{a_2}{a_6} = \dots = \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = q$,

lako se dobija da je $\frac{a_2 + a_4 + \dots + a_{2n}}{a_1 + a_3 + \dots + a_{2n-1}} = q$.

1233. Ako se podele jednakosti $a_m = a_1 q^{m-1}$ i

$a_n = a_1 q^{n-1}$, sledi da je $\frac{k}{l} = q^{m-n}$ ili $q = \sqrt[m-n]{\frac{k}{l}}$, a $a_1 = \sqrt[m-n]{\frac{k^{m-1}}{l^{n-1}}}$.

Zamenom q i a_1 u obrazac $a_p = a_1 q^{p-1}$ sledi da je: $a_p = \sqrt[m-n]{\frac{k^{p-m}}{l^{p-n}}}$.

1234. Pošto je: $1 = \frac{10-1}{9}$, $11 = \frac{10^2-1}{9}$, ... $\frac{10^n-1}{9}$.

Sumiranjem se dobija:

$$S_n = \frac{1}{9} (10 + 10^2 + 10^3 + \dots + 10^n - n) = \frac{1}{9} \left(\frac{10(10^n-1)}{9} - n \right).$$

1235. Ako pomnožimo obe strane jednakosti (1) sa x , dobija se:

(2) $xS_{n+1} = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \dots + (n+1)x^{n+1}$.

Oduzimanjem (2) od (1) sledi da je:

$(x-1)S_{n+1} = -1(1+x+x^2+x^3+\dots+x^n) + (n+1)x^{n+1}$,

odakle je

$$S_{n+1} = \frac{(n+1)x^{n+1}}{x-1} - \frac{x^{n+1}-1}{(x-1)^2}.$$

1236. Ako je niz geometrijski, tada je:

$(x^2 + x_1^2 q^2 + \dots + x_1^2 q^{2(n-1)}) \cdot (x_1^2 q^2 + x_1^2 q^2 + x_1^2 q^4 + \dots + x_1^2 q^{2(n-2)}) =$
 $= (x_1^2 q + x_1^2 q^3 + \dots + x_1^2 q^{2n-3})^2$ ili

$$\frac{x_1^2 (q^{n-1} - 1)}{q-1} \cdot \frac{x_1^2 q^2 (q^{n-1} - 1)}{q-1} = x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right)^2,$$

odakle je

$$x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-1} - 1}{q-1} \right)^2 = x_1^4 q^2 \left(\frac{q^{n-2} - 1}{q-1} \right)^2.$$

1237. $S_n' = \frac{q^{n-1} + q^{n-2} + q^2 + 1}{a_1^2 q^{n-1}} = \frac{a_1 (q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1)}{a_1^2 q^{n-1}} = \frac{S_n}{a_1 q^{n-1}}$

ili

(1) $a_1^2 q^{n-1} = \frac{S_n}{S_n'}$. Proizvod

(2) $a_1 a_2 a_3 \dots a_n = a_1^2 q^{\frac{n(n-1)}{2}}$ (zadatak 1206).

Stepenovanjem leve i desne strane jednačine (1) sa $\frac{n}{2}$ sledi

$$a_1^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} = \left(\frac{S_n}{S_n'} \right)^{\frac{n}{2}},$$

te je na osnovu (2), traženi proizvod

$$a_1 a_2 a_3 \dots a_n = \left(\frac{S_n}{S_n'} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

1238. Koristiti se osobinom $a_1 a_n = 12^2$, $n = 5$.

1239. 4, 8, 16, i 16, 8, 4.

1240. 2, 4, 8, 16.

1241. 2, 5, 8, 11.

1242. 2, 4, 6, 8.

1243. 17, 14, 11.

1244. $S_{20} = 100$.

1245. Neka je $a_m = \sqrt{2}$, $a_k = 3$, $a_p = 5 + \sqrt{2}$, ili

$a_1 + (m-1)d = \sqrt{2}$, $a_1 + (k-1)d = 3$,

$a_1 + (p-1)d = 5 + \sqrt{2}$.

Eliminacijom a_1 i d iz poslednje tri jednačine dobija se

$$\frac{8 - 5\sqrt{2}}{2} = \frac{k-m}{p-k}.$$

Ova jednakost je nemoguća, jer je leva strana iracionalna, a desna racionalna.

1247. Kako je $\frac{5}{6} = \frac{6-1}{6} = 1 - \frac{1}{6}$, $\frac{11}{12} = \frac{12-1}{12} = 1 - \frac{1}{12}$,

itd ..., onda je

$$S_n = n - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

1248. 2, 6, 18 ili 18, 6, 2.

1250. Iz sistema

$a_l = a_1 + (l-1)d \wedge a_k = a_1 + (k-1)d$

$a_m = a_1 + (m-1)d \wedge a_n = a_1 + (n-1)d$ lako se dobija da je

$a_1 - a_k = (l-k)d$,

$$(1) \quad a_m - a_l = (m-l)d, \quad a_n - a_m = (n-m)d.$$

Na osnovu pretpostavke zadatka, imamo $a_1 = a_k q$,

$$(2) \quad a_m = a_1 q, \quad a_n = a_m q, \quad a_l^2 = a_k \cdot a_m.$$

Iz (1) i (2) lako se dobija da je

$$(m-l)^2 = (k-l)(m-n).$$

$$1251. \quad 0, 5, 10, 20, i \frac{75}{4}, \frac{45}{4}, \frac{15}{4}, \frac{5}{4}.$$

$$1252. \quad 5, 15, 45, 75 i 80, 40, 20, 0.$$

$$1254. \quad d = 20; q = \pm 3.$$

$$1255. \quad d = 0, q = \pm 1 \text{ ili } d = 3, q = \pm 2.$$

$$1256. \quad 1, 3, 9 \text{ ili } \frac{1}{9}, -\frac{5}{9}, \frac{25}{9}.$$

$$1257. \quad S_{19} = 190.$$

$$1258. \quad q = \frac{1}{2}.$$

$$1259. \quad 18, 24, 32.$$

$$1260. \quad \text{Geometrijski niz: } 2, 6, 8, \dots$$

$$\text{Aritmetički niz: } -3, 0, 3, \dots$$

$$1261. \quad a) \frac{1}{5}, 1, 5 \text{ i obrnuto; } b) \frac{18 + \sqrt{299}}{5}, -1, \frac{18 - \sqrt{299}}{5} \text{ i obrnuto.}$$

$$1262. \quad x = 10 \text{ ili } x = 0, 1. \text{ U oba slučaja progresija je } 1, 5, 25, \dots, \text{ pa je } a_x = a_{10} = 5^9.$$

$$1263. \quad a) \text{ Ako su stranice trougla } a, b = aq, c = aq^2, \text{ koristeći uslov } |b-a| < c < b+a, \text{ dobije se traženi uslov.}$$

$$b) \quad q = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}}.$$

$$1264. \quad a) x = 1, \text{ niz: } 8, 22, 36, \dots;$$

$$b) x = 5 \vee x_2 = -95 \text{ nizovi su: } 10, 20, 40, \dots \text{ ili } -90, 120, -160, \dots$$

$$1265. \quad \text{Aritmetički niz: } 20, 15, 10, 5.$$

$$\text{Geometrijski niz: } 3, 6, 12, 24.$$

$$1266. \quad A : 2, 5, 8, \dots; G : 3, 6, 12, \dots \text{ ili}$$

$$A : \frac{25}{2}, \frac{79}{6}, \frac{83}{6}, \dots; G : \frac{2}{3}, \frac{25}{3}, \frac{625}{6}, \dots$$

$$1267. \quad G : 7, 21, 63, \dots \text{ ili } 63, 21, 7, \dots$$

$$A : 32, 48, 64, \dots; \text{ ili } 88, 48, 8, \dots$$

$$a_7 = 5103 \text{ ili } a_7 = \frac{7}{81}.$$

8.5. DIFERENCNE JEDNAČINE

$$1268. \quad \text{Smenom } x_n = t^n \text{ dobijamo karakterističnu jednačinu date diferencne jednačine } t^{n+1} - 5t^n = 0. \text{ Njeno rešenje je } t = 5.$$

Opšte rešenje date diferencne jednačine je $x_n = C_1 5^n$ i predstavlja geometrijski niz sa prvim članom C_1 i količnikom 5.

$$1269. \quad x_n = C_1 \cdot 3^n.$$

$$1270. \quad x_n = C_1 (-1)^n.$$

$$1271. \quad \text{Primedba. Partikularno rešenje diferencne jednačine dobija se iz opšteg rešenja izračunavanjem proizvoljnih konstanti } C_1, C_2, \dots \text{ iz zadatih početnih uslova. Opšte rešenje je}$$

$$x_n = C_1 \cdot 2^n, \text{ za } x_1 = 1, C_1 = \frac{1}{2}, \text{ pa je partikularno rešenje } x_n = 2^{n-1}.$$

$$1272. \quad x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n.$$

$$1273. \quad x_n = C_1 + C_2 \cdot 3^n.$$

$$1274. \quad x_n = C_1 \left(\frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \right)^n + \left(\frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right)^n.$$

$$1275. \quad x_n = C_1 (1 + 2i)^n + C_2 (1 - 2i)^n.$$

$$1276. \quad \text{Primedba. Ako karakteristična jednačina diferencne jednačine ima dvostruko rešenje } t_1 = t_2 = t, \text{ tada je njeno opšte rešenje } x_n = (C_1 + n \cdot C_2) t^n. \text{ Ako je rešenje trostruko, opšte rešenje ima oblik } x_n = (C_1 + n \cdot C_2 + n^2 C_3) t^n.$$

Za datu jednačinu $t_1 = t_2 = 3$, pa je njeno opšte rešenje

$$x_n = (C_1 + n \cdot C_2) 3^n.$$

$$1277. \quad x_n = C_1 (i\sqrt{3})^n + C_2 (-i\sqrt{3})^n.$$

$$1278. \quad x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + C_3 \cdot 4^n.$$

$$1279. \quad x_n = C_1 + C_2 (-1)^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1280. \quad x_n = C_1 \cdot i^n + C_2 (-i)^n + C_3 \cdot 3^n.$$

$$1281. \quad x_n = C_1 + n \cdot C_2 \cdot 2^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1282. \quad x_n = (C_1 + n C_2) (-4)^n + C_3 (-2)^n.$$

$$1283. x_n = (C_1 + nC_2 + n^2C_3) 2^n.$$

$$1284. x_n = C_1 + nC_2 + n^2C_3.$$

$$1285. x_n = (C_1 + nC_2 + n^2C_3) (-1)^n.$$

$$1286. \text{ Opšte rešenje je } a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n, \text{ a partikularno } a_n = 5 \cdot 2^n - 3^{n+1}.$$

$$1287. a_n = 3^n.$$

$$1288. x_n = n \cdot 2^n.$$

$$1289. x_n = 2^n + 3^n - 4^n.$$

$$1290. x_n = 2^n + 1.$$

$$1291. x_n = 2^n - 1.$$

1292. Pošto jednačina $x^2 - 6x + 9 = 0$ ima dvostruki koren, smenom

$$a_n = b_n + n\alpha \text{ dobija se}$$

$$b_{n+2} - 6b_{n+1} + 9b_n - 4\alpha = -4.$$

Izračunati α tako da je $-4\alpha = -4$, ili $\alpha = 1$. Opšta rešenja su

$$b_n = (C_1 + nC_2) 3^n, a_n = n + (C_1 + nC_2) 3^n, \text{ a partikularno}$$

$$a_n = n + (1-n) 3^n.$$

1293. Neka je $a_n = b_n + \alpha$, tada je

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n + \alpha - 5\alpha + 6\alpha = 4. \text{ Odredimo } \alpha \text{ tako da je}$$

$$\alpha - 5\alpha + 6\alpha = 4 \Leftrightarrow \alpha = 2, \text{ tada je}$$

$$b_{n+2} - 5b_{n+1} + 6b_n = 0, \text{ odavde sledi da je}$$

$$a_n = C_1 \cdot 2^n + C_2 \cdot 3^n + 2.$$

8.6. GRANIČNA VREDNOST BESKONAČNOG NIZA

$$1294. a) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 1; b) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{\frac{12\varepsilon + 17}{\varepsilon}};$$

$$c) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{3\varepsilon}; d) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{27\varepsilon^3}}.$$

$$1295. a = \frac{3}{2}; b) n_0(\varepsilon) = 124.$$

1296. Uputstvo. Opšti član napiši u obliku

$$\frac{1}{n^2} (1+2+\dots+n) \text{ itd.}$$

$$a) a = \frac{1}{2}; b) n_0(\varepsilon) = \frac{1}{2\varepsilon} = 5000.$$

$$1297. n_0(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} - 2;$$

$$a) n_0 = 8; b) n_0 = 98; c) n_0 = 998; d) n_0 = 9998.$$

$$1298. a) 15; b) 1; c) \frac{1}{3}; d) 2; e) \frac{4}{3}; f) 3; g) -\frac{5}{2}.$$

$$1299. n_0 = 2777.$$

$$1300. a = \frac{4}{3}, n_0 = 24.$$

$$1301. a_n = 1 - \frac{1}{10^n}; a = 1, n_0 = 4.$$

$$1302. a = \frac{3}{4}, n_0 = 18.$$

1303. Iskoristićemo poznatu jednakost

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Granična vrednost datog niza smenom $\frac{3}{n} = \frac{1}{h}$ može se transformisati postupno.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{h}\right)^{3h} = \lim_{h \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{h}\right)^h\right)^3 = e^3.$$

$$1304. a) c^{-1}; b) c^{-0.5}; c) c; d) c^{-3}; e) e^{-1.5}; f) -2; g) 3.$$

$$1305. \text{ Uočimo razliku } \frac{1}{3} a_n - a_n = \left(\frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^3} + \dots + \frac{n}{3^{n+1}}\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{3^n}\right), \text{ ili } -\frac{2}{3} a_n = -\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^2}\right) + \left(\frac{2}{3^3} - \frac{3}{3^3}\right) + \dots + \left(\frac{n-1}{3^n} - \frac{n}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}}, \text{ odavde}$$

$$(1) - \frac{2}{3} a_n = -\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}} = S_n + \frac{n}{3^{n+1}}.$$

Zbir S_n u zagradi je zbir geometrijskog niza, pa je

$$S_n = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right).$$

Tada (1) postaje

$$-\frac{2}{3} a_n = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) + \frac{n}{3^{n+1}} \Rightarrow a_n = \frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = \frac{n}{2 \cdot 3^n}, \text{ pa je}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \frac{n}{2 \cdot 3^n}\right) = \frac{3}{4}.$$

$$1306. \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

1307. Ako je $a_n = r^n$, tada data rekurentna formula svodi se na diferencnu jednačinu

$$2r^n = r^{n+1} + r^{n-2} \Leftrightarrow 2r^2 - r - 1 = 0,$$

odakle nalazimo $r_1 = -\frac{1}{2}, r_2 = 1$.

Pa je $a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$ ili $a_n = 1^n$.

Opšte rešenje diferencne jednačine je

$$a_n = C_1 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + C_2 \cdot 1^n.$$

Za $n = 0$, odnosno $n = 1$ dobijemo sistem

$$C_1 + C_2 = a \wedge -\frac{1}{2}C_1 + C_2 = b, \text{ pa je}$$

$$C_1 = \frac{2}{3}(a - b), C_2 = \frac{a + 2b}{3}.$$

Granična vrednost niza $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{a + 2b}{3}$.

$$\text{Dakle } a_n = \frac{a + 2b}{3} + (-1)^n \frac{2(a - b)}{3 \cdot 2^n}$$

$$1308. a) \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + \sqrt[3]{n^4 - n^6}) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2)^3 + (\sqrt[3]{n^4 - n^6})^3}{n^4 + n^2 \sqrt[3]{n^4 - n^6} + \sqrt[3]{(n^4 - n^6)^2}} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^4 \left(1 + \sqrt[3]{\frac{1}{n^2 - 1}} + \sqrt[3]{\left(\frac{1}{n^2 - 1}\right)^2}\right)} = \frac{1}{3}.$$

$$b) \frac{1}{3}, \quad c) 0.$$

$$1309. a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{2n}{n+3} - \frac{2(n-1)}{(n-1)+3} = \frac{6}{(n+2)(n+3)}.$$

Niz je ograničen: $0 < a \leq \frac{1}{2}$, pa je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, tj. konvergira.

$$1310. \text{ Kako je } a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{1 - 3^n}{2 \cdot 3^n} - \frac{1 - 3^{n-1}}{2 \cdot 3^{n-1}} = -\frac{1}{3^n},$$

opšti član niza je eksponencijalna funkcija, što znači da je geometrijski. Niz je monotono rastući, ograničen, $-\frac{1}{3} \leq a < 0$.

1311. a) $a_n = S_n - S_{n-1} = 19n - 99$. Opšti član je linearna funkcija od n , pa je niz aritmetički:
 $a_1 = -80, d = 19$.

b) Iz jednačine $a_{n+1} = 2S_n$ sledi samo jedno celo pozitivno rešenje
 $n = 10$.

1312. a) $a_n = \frac{1}{5^{n-1}}$, niz konvergira.

$$b) S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} - 5}{4 \cdot 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5}{4} \left(1 - \frac{1}{5^n}\right) = \frac{5}{4}.$$

$$1313. a) a_n = \frac{4}{2^n}; b) S = 4.$$

1314. Pošto je

$$a_3 = a_1 + a_2,$$

$$a_4 = a_1 + a_2 + a_3 = 2a_3,$$

$$a_5 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2a_4$$

$$\dots \dots \dots a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} = 2a_{n-1},$$

proizlazi da je niz $a_3, a_4, a_5, \dots, a_n, \dots$ geometrijski sa količnikom $q=2$.

$$a_{11} = a_3 q^8 \text{ ili } 512 = a_3 \cdot 2^8 \Rightarrow a_3 = 2.$$

Kako je $a_3 = a_1 + a_2$, a članovi niza su celi pozitivni brojevi, to iz

$$a_1 + a_2 = 2 \Rightarrow a_1 = a_2 = 1$$

$$a_{14} = a_3 q^{11} = 2 \cdot 2^{11} = 4096.$$

8.7. BESKONAČNI RED

$$1315. a) a = 1, q = -\frac{1}{3}, S = \frac{a}{1-q} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4};$$

$$b) S = 21, c) S = \frac{3\sqrt{6}}{2}; d) \frac{16 + 11\sqrt{2}}{7}.$$

$$1316. a_1 = 10, q = \frac{1}{5} \text{ ili } a_1 = 15, q = -\frac{1}{5}.$$

$$1317. \text{ Iz } a = 2(aq + dq^2 + dq^3 + \dots) = 2 \frac{aq}{1-q} \text{ sledi } q = \frac{1}{3}.$$

$$1318. \frac{5}{26} + \frac{5}{26^2} + \frac{5}{26^3} + \dots$$

1319. Leva i desna strana date jednakosti predstavljaju geometrijske opadajuće redove. Posle njihovog sumiranja sledi da je

$$a) 2 \equiv 2; b) 3 \equiv 3.$$

1320. a) $S = \frac{1}{1 - \cos x}$; b) $S = \frac{1}{1 + \sin x}$; c) $S = \frac{1}{1 - \operatorname{tg} x}$; d) $S = \frac{x}{(2x-4)}$;
 e) Dati red se može napisati u obliku
 $(x + x^3 + x^5 + \dots) + 2(x^2 + x^4 + \dots)$, odavde $S = \frac{x(1+2x)}{1-x^2}$;

f) $S = \frac{2+3x}{1-x^2}$; g) $S = \frac{4-3x}{1-x^2}$.

1321. a) $S = \frac{6}{3-2x} = \frac{6}{3\left(1-\frac{2x}{3}\right)} = \frac{2}{1-\frac{2x}{3}}$, odavde je $a = 2$ i $q = \frac{2x}{3}$.

Geometrijski niz čiji dati zbir S glasi

$$2 + \frac{4x}{3} + \frac{8x^2}{9} + \frac{16x^3}{27} + \dots;$$

b) $\frac{3}{3-x} = 1 + \frac{x}{3} + \frac{x^2}{9} + \frac{x^3}{27} + \dots;$

c) $\frac{1}{1+2x} = 1 - 2x + 4x^2 - 8x^3 + 16x^4 - \dots;$

d) $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$

1322. $63 + \frac{63}{8} + \frac{63}{8^2} + \frac{63}{8^3} + \dots$ ili $63 - \frac{63}{8} + \frac{63}{8^2} - \frac{63}{8^3} + \dots$

1323. a) Dati izraz može se napisati u obliku:

$$3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n+1}}} \dots$$

$$5^{\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}} = \sqrt[3]{45}, \text{ jer je:}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^5} + \dots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \dots \right) = \frac{2}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \dots \right) = \frac{1}{3};$$

b) 2.

1324. Ovaj razlomak možemo predstaviti kao zbir članova jednog beskonačno opadajućeg geometrijskog reda, i to ovako:

$$0,777\dots = 0,7 + 0,07 + 0,007 + \dots + \frac{7}{10} + \frac{7}{100} + \frac{7}{1000} + \dots$$

Količnik ove progresije je $q = \frac{1}{10}$, a prvi član je $a = \frac{7}{10}$.

$$S = \frac{\frac{7}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{\frac{7}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{7}{9}, \text{ odavde } 0,777\dots = \frac{7}{9},$$

1325. Dati razlomak se može napisati i ovako:

$$0,3444\dots = 0,3 + 0,04 + 0,004 + 0,0004 + \dots \text{ ili}$$

$$0,3444\dots = \frac{3}{10} + \frac{4}{100} + \frac{4}{1000} + \frac{4}{10000} + \dots$$

Geometrijski red u zagradi ima količnik $q = \frac{1}{10}$, a prvi član $a = \frac{4}{100}$,

pa će prema obrascu $S = \frac{a}{1-q}$ zbir biti $S = \frac{\frac{4}{100}}{\frac{9}{10}} = \frac{4}{90}$, a vrednost

$$\text{razlomka } 0,3444 = \frac{3}{10} + \frac{4}{90} = \frac{31}{90}.$$

1326. a) $\frac{5}{9}$; b) $2\frac{71}{99}$; c) $\frac{7}{18}$; d) $1\frac{817}{1986}$; e) $\frac{142}{825}$; f) $\frac{1}{7}$.

1327. a) Opšti član reda može se rastaviti na dva prosta razlomka u obliku

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Neka je $k = 1, 2, 3, 4, \dots, n$, tada poslednji izraz dobija ovaj oblik:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} = 1 - \frac{1}{2}; \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}; \dots$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Ako se ove vrednosti sumiraju, dobija se da je suma prvih n članova reda

$$S_n = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Ako broj članova neograničeno raste, tada je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 = S.$$

Suma reda je $S = 1$.

b) Analogno prethodnom zadatku

$$S_n = \frac{1}{2} \left(\left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) \right) =$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

$$S = \frac{1}{2}.$$

c) $S = \frac{1}{4}$; d) $S = \frac{3}{4}$.

1328. Stranica prvog trougla ABC je a , neka je a_1 stranica drugog trougla $A_1B_1C_1$; a stranica trougla ABC itd. (sl. 44).

Stranica drugog trougla je $a_1 = \frac{a}{2}$, trećeg $a_2 = \frac{a}{4}$, itd. Obimi tih trouglova su $O_1 = 3a$; $O_2 = \frac{3a}{2}$; $O_3 = \frac{3a}{4}$ itd.

Kako je $\frac{O_2}{O_1} = \frac{\frac{3a}{2}}{3a} = \frac{1}{2}$; $\frac{O_3}{O_2} = \frac{\frac{3a}{4}}{\frac{3a}{2}} = \frac{1}{2}$, onda će obimi svih trouglova

da obrazuju geometrijski red: $3a$; $\frac{3}{2}a$; $\frac{3}{4}a$; ... čiji je prvi član $3a$, a količnik $q = \frac{1}{2}$.

Prema tome, zbir $S = \frac{3a}{1 - \frac{1}{2}} = 6a$. Površine tih trouglova su

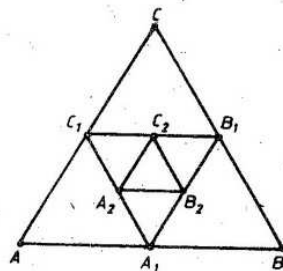
$$P_1 = a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad P_2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2}{16} \cdot \sqrt{3}; \quad P_3 = \frac{a^2}{64} \cdot \sqrt{3} \text{ itd.}$$

Kako je $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4}$, to će površine ovih trouglova obrazovati geometrijski konvergentni red:

$$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{16} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{64} \dots$$

Zbir površina svih trouglova je:

$$S = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{3}.$$



Slika 44

1329. Neka su $r_1, r_2, r_3, \dots$ poluprečnici kružnica a $a_1, a_2, a_3, \dots$ stranice trouglova (sl. 45.) Poluprečnik opisane kružnice oko prvog trougla je $r = \frac{a_1\sqrt{3}}{3}$, odakle je $a_1 = r\sqrt{3}$, a poluprečnik upisane kružnice je

$$r_1 = \frac{a_1\sqrt{3}}{6}. \text{ Odatle je } a_1 = 2r_1\sqrt{3}; \text{ a kako je } a = r\sqrt{3}, \text{ to je } r\sqrt{3} = 2r_1\sqrt{3} \text{ ili } r_1 = \frac{r}{2}.$$

Na taj način smo dobili poluprečnik druge kružnice. Ako primenimo na drugu i treću kružnicu i drugi i treći trougao isti postupak, dobija se:

$$a_2 = \frac{r\sqrt{3}}{4}, r_2 = \frac{r}{4}; a_3 = \frac{r\sqrt{3}}{8}; r_3 = \frac{r}{8} \dots$$

Obimi i površine trouglova su:

$$O_1 = 3a_1 = 3r\sqrt{3}; O_2 = 3a_2 = \frac{3r\sqrt{3}}{2}; O_3 = 3a_3 = \frac{3r\sqrt{3}}{4}, \dots$$

$$P_1 = \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(r\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{4},$$

$$P_2 = \frac{a_2^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{16};$$

$$P_3 = \frac{a_3^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3r^2\sqrt{3}}{64}.$$

$$\text{Kako je } \frac{O_2}{O_1} = \frac{O_3}{O_2} = \frac{1}{2}, \frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4},$$

onda će obimi obrazovati geometrijski beskonačni konvergentni red.

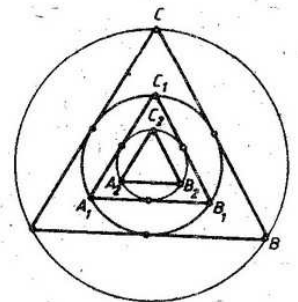
$$3r\sqrt{3} + \frac{3r\sqrt{3}}{2} + \frac{3r\sqrt{3}}{4} + \dots$$

a površine

$$\frac{3r^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{16} + \frac{3r^2\sqrt{3}}{64} + \dots$$

Traženi zbirovi su

$$S = \frac{3r\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{2}} = 6r\sqrt{3}; \quad S = \frac{\frac{3r^2\sqrt{3}}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = r^2\sqrt{3}.$$



Slika 45

Obimi kružnica i površine krugova su

$$O_1 = 2r\pi; O_2 = 2\frac{r}{2}\pi = r\pi; O_3 = 2 \cdot \frac{r}{4}\pi = \frac{r\pi}{2}, \dots$$

$$P_1 = r^2\pi; P_2 = \frac{r^2\pi}{4}; P_3 = \frac{r^2\pi}{16}, \dots$$

Pošto je $\frac{O_2}{O_1} = \frac{O_3}{O_2} = \frac{1}{2}$ i $\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_3}{P_2} = \frac{1}{4}$,

odgovarajući geometrijski redovi su

$$2r\pi + r\pi + \frac{r\pi}{2} + \dots$$

$$r^2\pi + \frac{r^2\pi}{4} + \frac{r^2\pi}{16} + \dots$$

Zbir obima svih kružnica je $S = \frac{2r\pi}{1 - \frac{1}{2}} = 4r\pi$;

a zbir površina $S = \frac{r^2\pi}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4r\pi}{3}$.

1330. Stranice kvadrata su $a, \frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{2\sqrt{2}}, \dots$

Zbir površina svih kvadrata je

$$S_p = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2, \text{ a zbir obima}$$

$$S_o = 4a + \frac{4a}{\sqrt{2}} + 2a + \frac{4a}{2\sqrt{2}} + \dots = \frac{4a}{1 - \frac{1}{2}} = 4(2 + \sqrt{2})a.$$

1331. Tražene površine obrazuju geometrijski konvergentni niz

$$6r^2\pi, \frac{3r^2\pi}{2}, \frac{3r^2\pi}{8}, \dots$$

Za zbir površina se dobija $S = \frac{6r^2\pi}{1 - \frac{1}{4}} = 8r^2\pi$.

1332. 1° Stranice kvadrata su $a, \frac{a\sqrt{2}}{2}, \frac{a}{2}, \frac{a\sqrt{2}}{4}, \dots$

Zbir obima

$$S = 4a + 2a\sqrt{2} + 2a + a\sqrt{2} + \dots = \frac{4a}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} = 4a(2 + \sqrt{2}),$$

$$\text{a zbir površina } S = a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{8} + \dots = \frac{a^2}{1 - \frac{1}{2}} = 2a^2.$$

$$2^0 1 = 16^2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 \Leftrightarrow n = 9,$$

1333. Količnik progresije je $q = a \frac{\sqrt{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primenom obrasca za konvergentni beskonačni geometrijski red dobija se

$$S = \frac{4a}{2 - \sqrt{2}} \text{ ili } 8 = \frac{4a}{2 - \sqrt{2}}, \text{ odatle } a = 2(2 - \sqrt{2}).$$

$$1334. \text{ Iz jednačine } \frac{1}{1 - \cos^2 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{1 - \cos^2 \alpha} = \frac{2}{3}$$

sledi da je $\cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = 60^\circ$. Traženi zbir je $S = 2$.

$$1335. \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{8} + \frac{27a^2\sqrt{3}}{32} + \dots = 6a^2\sqrt{3};$$

$$\frac{3a^2\pi}{4} + \frac{9a^2\pi}{16} + \frac{27a^2\pi}{64} + \dots = 3a^2\pi.$$

$$1336. \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3a^2\sqrt{3}}{16} + \frac{9a^2\sqrt{3}}{64} + \dots = a^2\sqrt{3},$$

$$1337. a^3 + \frac{a^3\sqrt{3}}{9} + \frac{a^3}{\sqrt{27}} + \dots = \frac{3a^3(9 + \sqrt{3})}{26},$$

$$\frac{a^3\pi}{4} + \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} + \frac{a^3\pi}{162} + \dots = \frac{a^3\pi(9 + \sqrt{3})}{26},$$

$$\frac{a^3\pi}{6} + \frac{a^3\pi\sqrt{3}}{54} + \frac{a^3\pi}{162} + \dots = \frac{a^3\pi(9 + \sqrt{3})}{52}.$$

1338. Poluprečnici krugova su

$$r_1 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha}, r_2 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \cdot \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha}$$

$$r_3 = \frac{a \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^2 \dots$$

Zbir obima krugova je

$$O = \frac{2a\pi \cos \alpha}{1 + \sin \alpha} \left(1 + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} + \dots \right) = a\pi \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$\text{Zbir površina svih krugova je } P = \frac{a^2\pi \cos^2 \alpha}{4 \sin \alpha}.$$

1339. Pošto je dati red geometrijski, konvergentan je ako

$$|q| < 1, \text{ ovde je taj uslov ispunjen, tj. } \left| \frac{1}{7^x + 1} \right| < 1.$$

Zbir reda je 7 za $x = -1$.

$$1340. x \in \left(-\frac{1}{2}, +\infty \right); x = 6.$$

$$1341. x \in \left(\frac{1}{8}, 8 \right), x = \frac{1}{2}.$$

1342. Za $n = 1$, $K_1 = K \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K + \frac{Kp}{100}$ obrazac je tačan jer je interes za jednu godinu $\frac{Kp}{100}$.

Iz pretpostavke da obrazac važi za $n = k$ tj.

$$K_k = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \text{ treba dokazati da važi i za } n = k + 1$$

$$K_{k+1} = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}$$

Dokaz: Suma K_k naraste za godinu dana uz $p\%$ na vrednost

$$K_{k+1} = K_k + \frac{K_k p}{100} = K_k \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^k \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^{k+1}$$

Obrazac je tačan za svako n prirodan broj.

1343. Pošto je $K = 500\,000$ din., $n = 2,5$ god., $q = 1 + \frac{6,5}{100} = 1,065$ tada je $K_{2,5} = 500\,000 \cdot 1,065^{2,5}$ ili
 $\log K_{2,5} = \log 500\,000 + 2,5 \log 1,065 = 5,69897 + 0,06837 = 5,76737$
 odakle je $K_{2,5} = 585\,250$ din.

1344. $K_n = 992\,240$ din, $n = 15$, $q = 1,05$ to je $K = \frac{K_n}{q^n} = \frac{992\,240}{1,05^{15}}$

logaritmovanjem dobijamo

$$\log K = \log 992\,240 - 15 \log 1,05 = 5,67877 \text{ odakle je } K = 477\,270 \text{ din.}$$

1345. U obrascu $K_n = Kq^n$ zamenom $K_n = 770\,960$, $K = 437\,400$ i $q = 1,065$ dobija se $770\,960 = 437\,400 \cdot 1,066^n$.

Preko logaritmovanja imamo $\log 770\,960 = \log 437\,400 + n \log 1,065$ odakle je n

$$n = \frac{\log 770\,960 - \log 437\,400}{\log 1,065} = \frac{0,24615}{0,02735} = 9.$$

1346. Zamenom datih vrednosti u obrascu $K_n = Kq^n$ dobijamo $466\,350 = 362\,500q^4$. Ako se logaritmuje

$$\log 466\,350 = \log 362\,500 + 4 \log q \text{ ili}$$

$$\log q = \frac{\log 466\,350 - \log 362\,500}{4} = 0,02735$$

Odakle je $q = 1,065$.

Iz jednačine $q = 1 + \frac{p}{100}$ sledi da je $p = 6,5\%$.

1347. U ovom slučaju je $k = 4\,000\,000$, $n = 10$, $p = 4$. Na kraju prve godine K se smanjuje za $\frac{Kp}{100}$ tako da ostaje

$$K_1 = K - K \frac{p}{100} = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)$$

na kraju druge godine se K_1 smanjuje za $\frac{K_1 p}{100}$ i ostaje

$$K_2 = K_1 \left(1 - \frac{p}{100}\right) = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)^2 \text{ na kraju } n\text{-te godine dobija se}$$

$$K_n = K \left(1 - \frac{p}{100}\right)^n$$

Stoga je $K_{20} = 4\,000\,000 \cdot 0,96^{20} = 1\,767\,900$ din.

1348. U ovom slučaju imamo $2K = Kq^{2n}$ ili $2 = 1,035^{2n}$ odakle logaritmovanjem nalazimo $2n = \frac{\log 2}{\log 1,035} = 20,15$.

ili $n \approx 10$ godina i 27 dana.

1349. U ovom slučaju je $K = 297\,800$, $p = 5,5$, $n = 8$, te će primenom obrasca $K_n = Kq^n$, posle 8 godina broj stanovnika u tom gradu biti $K_n = 297\,800 \cdot 1,055^8 = 457\,000$.

1350. 204540 m^3 .

1351. 23 god. 13 dana.

1352. $p = 4,5\%$, $38\,000 \text{ m}^3$.

1353. 20 godina.

1354. $5,076\%$.

1355. $4,1528\%$.

1356. $5,2\%$.

1357. U ovom primeru je $K_n = Kq^n$, gde je $q = 1 - \frac{p}{110}$.

$$K_n = \frac{3}{5} K, n = 5, \text{ odakle je } p = 9,7\%.$$

1358. a) 121 550 din. b) 122 010 dinara.

1359. U ovom slučaju je

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n, K'_n = K \left(1 + \frac{p}{200}\right)^{2n} \text{ odnos}$$

$$K_n : K'_n = \left(1 + \frac{p}{104}\right) : \left(1 + \frac{p}{200}\right)^2.$$

Pokazuje da je za ulagača korisnije polugodišnje obračunavanje.

1360. U ovom primeru je

$$K_n = K \left(1 + \frac{p}{200}\right)^n \text{ i } K_n = K \left(1 + \frac{p'}{200}\right)^{2n} \text{ pošto je}$$

$$K \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = K \left(1 + \frac{p'}{200}\right)^{2n}$$

Izlazi da je $p' = 20 (\sqrt{100+p} - 10)$.

IX. GLAVA

9. KOMPLEKSNI BROJEVI

9.2. TRIGONOMETRIJSKI OBLIK KOMPLEKSNOG BROJA

$$1361. R_e(z) = \frac{13}{10}, I_m(z) = \frac{19}{100}.$$

$$1362. R_e(z) = -\frac{24}{169}, I_m(z) = -\frac{10}{169}, |z| = \frac{2}{13}.$$

$$1363. f(3+2i) = 29 - 8i; f(3-2i) = 29 + 8i.$$

$$1364. f(2+3i) = 0, f(-2+i) = 0.$$

$$1365. \text{ Za } n=2 \text{ i } z = 1+i, z^2 + \bar{z}^2 = 0, z^2 - \bar{z}^2 = 4i;$$

$$\text{ Za } n=2 \text{ i } z = 2+i, z^2 + \bar{z}^2 = 6, z^2 - \bar{z}^2 = 8i;$$

$$\text{ Za } n=3 \text{ i } z = 1+i, z^2 + \bar{z}^3 = -4, z^3 + \bar{z}^3 = 4i \text{ itd.}$$

$$1366. \text{ a) } \frac{2}{3}i; \quad \text{ b) } -\frac{2}{5} + \frac{1}{5}i.$$

$$1367. \text{ Iskoristiti da je } z = x+iy \text{ a } w = a+bi.$$

$$1368. \text{ a) } z = 3-5i; \quad \text{ b) } z = 2+i.$$

$$1369. z = 1+0,5i.$$

$$1370. \text{ a) } z = 2+i; \quad \text{ b) } \bar{z} = 4+6i.$$

$$1371. \text{ a) } z = \frac{3}{4} + i; \quad \text{ b) } z = \frac{3}{2} - 2i.$$

$$1372. \text{ a) } z = 0, z = 1 \text{ i } z = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}); \quad \text{ b) } z = 0, z = \pm 1 \text{ i } z = \pm i.$$

$$1373. z = \pm(1+i).$$

$$1374. z = 3+4i.$$

$$1375. \text{ a) } z = -1-i; \quad \text{ b) } z = 1-i.$$

$$1376. z_1 = -1 \text{ ili } z_1 = -1-2i.$$

$$1377. z = -0,5(1+i).$$

$$1378. z = 6+17i \text{ ili } z = 6+8i.$$

1379. $z = \pm (1-i)$.

1380. $z = \frac{1}{4} \pm i$.

1381. $z = 2 \pm 2i$.

1382. $x = y = 1$.

1383. $(\pm 3, \pm 1)$ i $(\pm \sqrt{2} \pm 2\sqrt{2})$

1384. $(6, 9)$ i $(-9, -6)$.

1385. $(2, 1)$ i $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2})$.

1386. Kako je

$$\alpha = \frac{a\alpha^2 + b\alpha}{a + b\alpha^2} = \frac{a\alpha^3 + b\alpha^2}{a\alpha + b\alpha^3} = \frac{a + b\alpha^2}{\alpha(a + b\alpha^2)} = \frac{1}{\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha^3} = \alpha^2,$$

tada je $R_e(z) = -0,5$; $I_m(z) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1387. U prethodnom zadatku dokazali smo da je $\alpha^3 = 1$ i $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, pa je $\alpha^2 = -(\alpha + 1)$. Tada imamo
 $(\alpha - \alpha^2 + 2\alpha^3)(2 - \alpha + \alpha^2) = (\alpha + \alpha + 1 + 2)(2 - \alpha - \alpha - 1) =$
 $(2\alpha + 3)(1 - 2\alpha) = 2\alpha + 3 - 4\alpha^2 - 6 = 6\alpha + 7 - 6\alpha = 7$, odnosno vrednost datog izraza iznosi 7.

1389. Kako je $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = \left(\frac{(1+i)^2}{1-i^2}\right)^n = i^n$,

tada je za $n = 4k, 4k+1, 4k+2, 4k+3$ realni deo 1, -1 ili 0, a imaginarni deo takođe 1, -1 ili 0.

1390. Data jednakost je ekvivalentna jednačini

$$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1 \Leftrightarrow i^n = 1, \text{ pa je } n = 4k, k = 0, 1, 2, \dots$$

1391. Kako je

$$f(n+4) = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} + \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^{n+4} = \left(\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2$$

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^2\right)^2 \left(\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n = -f(n), \text{ tada je}$$

$$f(n+4) + f(n) = -f(n) + f(n) = 0.$$

1394. Kako je $(1+i)^4 - (1-i)^4 = ((1+i)^2)^2 - ((1-i)^2)^2 = 0 \in \mathbb{R}$, z je realan broj.

1395. Iskoristiti da je

$$(1+i)^6 = ((1+i)^2)^3 = -8i, \text{ a } (1-i)^6 = ((1-i)^2)^3 = 8i.$$

Tada je $z = -\frac{1}{4}i \in I$.

1396. 2^{24} .

1398. a) Dati izraz napisati u obliku

$$((\sqrt{2} + i)^2)^3 + ((\sqrt{2} - i)^2)^3.$$

1399. Iskoristiti $((i\sqrt{3} - 1)^3)^3 - ((i\sqrt{3} + 1)^3)^3$.

1400. Ako se iskoristi da je $(1+i)^{100} = ((1+i)^2)^{50}$, $(1+i)^{98} = ((1+i)^2)^{49}$ i $((1-i)^2)^{48} = (1+i)^{96}$ dobija se da je $-3 \cdot 2^{50} = -3 \cdot 2^{50}$.

1402. $|z| = 1$.

1403. Neka je $\sqrt{a+bi} = x+iy$, gde su x i y realni brojevi. Na osnovu definicije korena (kvadratni koren iz kompleksnog broja je kompleksan broj) imamo $(x+iy)^2 = a+bi \Leftrightarrow x^2 - y^2 = a \wedge 2xy = b$. Rešenja sistema su

$$x = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}+a}{2}} \text{ i } y = \pm \sqrt{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{2}},$$

čime je dokaz završen.

1404. a) $\pm(2+i)$; b) $\pm(1+4i)$.

1405. a) $\pm(3+4i)$; b) $(\pm p+q) + ((p-q)i)$.

1406. U prethodnom zadatku smo videli da kvadratni koren u skupu kompleksnih brojeva ima dve vrednosti. Zato formula za rešavanje kvadratne jednačine $az^2 - bz + c = 0$, gde su a, b i c kompleksni brojevi ($a \neq 0$), ima oblik

$$z_{1,2} = -b + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (ispred kvadratnog korena uzimamo samo znak +).}$$

$$z_{1,2} = \frac{4 - 6i + \sqrt{-60 + 32i}}{2}, \sqrt{-60 + 32i} = \pm(2+8i),$$

$$z_1 = 3-i, z_2 = 1-7i.$$

1407. $z_1 = 1-i, z_2 = 0,5(1-3i)$.

1408. $z_1 = 2-i, z_2 = 1+3i$.

1409. $z_1 = \frac{2-i}{3}, z_2 = \frac{1+2i}{2}$.

1410. $z_1 = 3+2i, z_2 = -\frac{1-i}{3}$.

1411. a) Skup tačaka koje zadovoljavaju datu relaciju u ravni pripadaju kružnici $(x-3)^2 + y^2 = 25$;
b) elipsa $36x^2 + 100y^2 = 225$.
1412. a) $y^2 = 2x + 1$; b) $x^2 + (y+1)^2 = 4$.
1413. a) $4x + 2y + 3 = 0$.
b) Postoji samo jedan kompleksni broj $z = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$.
1414. Oblast kojoj pripadaju tačke z je
a) kružni prsten: $4 \leq x^2 + y^2 \leq 25$;
b) $3 \leq x^2 + (y+1)^2 \leq 25$.
1415. a) $y \leq 3$; b) $x + y < 1$.
1416. a) Isečak, ograničen polupravama $l_1 = \{(x, y) \mid y = 0, x \geq 0\}$,
 $l_2 = \{(x, y) \mid y = x \geq 0\}$, (poluprava l_1 ne pripada isečku);
b) Isečak, ograničen polupravama $l_1 = \{(x, y) \mid y = x\sqrt{3}, x \geq 0\}$, i
 $l_2 = \{(x, y) \mid y = -x\sqrt{3}, x \geq 0\}$.
1417. $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$; $z_2 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$;
 $z_3 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right)$.
1418. $z_1 = 4 (\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ)$; $z_2 = 3 (\cos \pi + i \sin \pi)$; $z_3 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$.
1419. $z_1 = \sqrt{40} (\cos 108^\circ + i \sin 108^\circ)$; $z_2 = 3\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$,
 $z_3 = \cos \pi + i \sin \pi$.
1420. $z_1 = 2 \cos \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$;
 $z_2 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$.
1421. $z = \pm i\sqrt{3}$.
1422. $z_1 = 2$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_4 = -2$, $z_5 = -1 - i\sqrt{3}$,
 $z_6 = 1 - i\sqrt{3}$.
1423. $z_1 = \sqrt{3} + i$, $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_3 = -\sqrt{3} - i$, $z_4 = 1 - i\sqrt{3}$.
1424. $z = -1 \pm 2\sqrt{2} (1+i)$.

1425. $z = z_1 \cdot z_2 = 4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} \right) \right) = -4$.
1426. $z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos (75^\circ - 30^\circ) + i \sin (75^\circ - 30^\circ)) = \frac{1}{2} (1 + i)$.
1427. a) $\frac{z_1}{z_2} = -\frac{1}{2}$; b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1}{6} (\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2-\sqrt{3}})$.
1428. $z^6 = 32 (1 + i\sqrt{3})$.
1429. $z^{20} = -0,5 (1 + i\sqrt{3})$.
1430. $z^{10} = 32i$.
1431. $z^{24} = 1$.
1432. $z^{18} = 1$.
1433. $z^{40} = -0,5 (1 + i\sqrt{3})$.
1434. a) Primenom obrasca
$$z_k = \sqrt[n]{r} (\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

 $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$
dobija se
$$z_k = \sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{\cos 0^\circ + i \sin 0^\circ} = \cos \frac{0 + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{0 + 2k\pi}{3},$$

 $k = 0, 1, 2$. Odavde je
 $z_0 = 1$, $z_1 = 0,5 (-1 + i\sqrt{3})$ i $z_2 = 0,5 (-\sqrt{3} - 1)$.
b) $z_0 = 1 + i$, $z_1 = -1 + i$, $z_2 = -1 - i$, $z_3 = 1 - i$.
c) $z_0 = 0,5 (\sqrt{3} + i)$, $z_1 = i$, $z_2 = 0,5 (-\sqrt{3} + i)$,
 $z_3 = 0,5 (-\sqrt{3} - i)$, $z_4 = -1$, $z_5 = 0,5 (\sqrt{3} - i)$.
1435. a) $z_0 = 0,5 (\sqrt{3} + i)$, $z_1 = 0,5 (-\sqrt{3} + i)$, $z_2 = -i$;
b) $z_0 = 0,5 (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}})$,
 $z_1 = 0,5 (-\sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$,
 $z_2 = -0,5 (\sqrt{2 - \sqrt{2}} + i\sqrt{2 + \sqrt{2}})$,
 $z_3 = 0,5 (\sqrt{2 + \sqrt{2}} - i\sqrt{2 - \sqrt{2}})$.
c) $z_0 = \sqrt{2} (1 + i)$, $z_1 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$,
 $z_2 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$, $z_3 = -\sqrt{2} (1 + i)$,
 $z_4 = \sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$, $z_5 = \sqrt{2 + \sqrt{3}} - i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$.

1438. Dati izraz se svodi na oblik $z_k = \sqrt[4]{(16 (\cos \pi + i \sin \pi))^3}$.
Odatle se dobija da je: $z_0 = 4\sqrt{2}(-1 + i)$, $z_1 = 4\sqrt{2}(1 + i)$,
 $z_2 = 4\sqrt{2}(1 - i)$, $z_3 = 4\sqrt{2}(-1 - i)$.

1439. $z_0 = \sqrt{2}(1 + i)$, $z_1 = -\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}$,
 $z_2 = -\sqrt{2 - \sqrt{3}} - i\sqrt{2 + \sqrt{3}}$.

1440. $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$, $z_1 = -\sqrt{3}i$, $z_2 = -1 - i\sqrt{3}$, $z_3 = \sqrt{3} - i$.

1441. $z_0 = \sqrt{3} + i$, $z_1 = -1 + i\sqrt{3}$, $z_2 = -\sqrt{3} - i$, $z_3 = 1 - i\sqrt{3}$.

1442. a) $z_0 = 0,5(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$,
 $z_1 = 0,5(-\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}})$,
 $z_2 = -0,5(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}})$;

b) $\sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} \right) \right)$, $k = 0, 1, 2, 3$.

1443. Ako se zameni data vrednost za z dati izraz se postupno transformiše na sledeći način:

$$\sqrt[3]{\frac{z-1}{z+1}} = \sqrt[3]{\frac{i}{\sqrt{3}}} = \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)} =$$

$$\frac{1}{\sqrt[6]{3}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} \right) \text{ za } k = 0, 1, 2$$

dobija se $w_0 = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}(\sqrt{3} + i)$, $w_1 = \frac{1}{\sqrt[6]{3}}(-3 + i)$ i $w_2 = -\frac{1}{\sqrt[6]{3}}$.

1444. a) $z_1 = 2$, $z_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{3}$; b) $\pm 2i$, $\pm\sqrt{3} \pm i$.

Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$z^3 = -i \Leftrightarrow z = \sqrt[3]{-i} = \sqrt[3]{\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}}, \text{ odakle se dobija:}$$

$$z_0 = i, z_1 = 0,5(-\sqrt{3} - i), z_2 = 0,5(\sqrt{3} - i).$$

1446. $z_0 = 0,5(\sqrt{3} + i)$, $z_1 = 0,5(-\sqrt{3} + i)$, $z_2 = -i$.

1447. Smenom $z^4 = x$ data jednačina ekvivalentna je jednačinama
 $z^4 = 1 \vee z^4 = -256$. Odavde se dobijaju sva rešenja date jednačine:
 $\pm 1, \pm i, 2\sqrt{2}(1 \pm i), 2\sqrt{2}(-1 \pm i)$.

1448. $\pm 5, \pm 5i, \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i), \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 \pm i)$.

1449. Smenom $z^3 = x$ data jednačina ekvivalentna je jednačinama
 $z^3 = 2 \vee z^3 = -i$. Odavde se dobijaju ova rešenja formulama

$$z = \cos \frac{\frac{3\pi}{2} - 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{2} - 2k\pi}{3}, (k = 0, 1, 2)$$

$$\vee z = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}.$$

1450. $z^3 = 8 \vee z^3 = -i$ itd. (smena $z^3 = x$).

1451. $z_1 = -8 + 8\sqrt{3}i$, $z_2 = -8 - 8\sqrt{3}i$ (zatim iskoristiti rešenje zadatka 1019 i 1020).

1452. $z_1 = -\frac{1}{32} + \frac{\sqrt{3}}{32}i$, $z_2 = -\frac{1}{32} - \frac{\sqrt{3}}{32}i$.

Vrednosti $\sqrt[4]{z_1}$ su: $\pm 0,25(\sqrt{3} + i)$, $\pm 0,25(-1 + i\sqrt{3})$.

Vrednosti $\sqrt[4]{z_2}$ su $\pm 0,25(1 + i\sqrt{3})$, $\pm 0,25(\sqrt{3} - i)$.

1453. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$z^6 = 8i \Leftrightarrow z_k = \sqrt[6]{8 \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)}. \text{ Rešenja su: } \pm (1 - i),$$

$$\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2 + \sqrt{3}} + i\sqrt{2 - \sqrt{3}}), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{2 - \sqrt{3}} + i\sqrt{2 + \sqrt{3}}).$$

1454. Desna strana se potpuno transformiše na sledeći način:

$$\frac{1 + i \operatorname{tg} \alpha}{1 - i \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha} = \cos 2\alpha + i \sin 2\alpha.$$

Data jednačina je tada ekvivalentna nizu ekvivalencija

$$\frac{1 - xi}{1 - xi} = \sqrt[n]{\cos 2\alpha + i \sin 2\alpha} \Leftrightarrow \frac{1 + xi}{1 - xi} = \cos \frac{2(\alpha + k\pi)}{n} + i \sin \frac{2(\alpha + k\pi)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1 + xi}{1 - xi} + 1 = 1 + \cos \frac{2(\alpha + k\pi)}{n} + i \sin \frac{2(\alpha + k\pi)}{n}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1 - xi} = 2 \cos^2 \frac{\alpha + k\pi}{n} + 2i \sin \frac{\alpha + k\pi}{n} \cos \frac{\alpha + k\pi}{n}$$

$$\Leftrightarrow 1 - xi = \frac{1}{\cos \frac{\alpha + k\pi}{n} \left(\cos \frac{\alpha + k\pi}{n} + i \sin \frac{\alpha + k\pi}{n} \right)}$$

$$\Leftrightarrow 1 - xi = \frac{\cos \left(\frac{\alpha + k\pi}{n} - i \sin \frac{\alpha + k\pi}{n} \right)}{\cos \frac{\alpha + k\pi}{n}}$$

$$\Leftrightarrow 1 - xi = 1 - i \operatorname{tg} \frac{\alpha + k\pi}{n} \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} \frac{\alpha + k\pi}{n}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

1455. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\left(\frac{x+i}{x-i}\right)^n = -1 \Leftrightarrow \frac{x+i}{x-i} = \cos \frac{2k+1}{n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{n} \pi.$$

Analogno prethodnom zadatku dobija se niz ekvivalencija:

$$\frac{x+i}{x-i} - 1 = -1 + \cos \frac{2k+1}{n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{n} \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{2i}{x-i} = i \sin \frac{2k+1}{n} \pi - 2 \cos \frac{2k+1}{2n} \pi$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{x-i} = 2 \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \cos \frac{2k+1}{2n} \pi + 2i \sin \frac{2k+1}{n} \pi$$

$$\Leftrightarrow x-i = \frac{1}{\cos \frac{2k+1}{2n} \pi \left(\cos \frac{2k+1}{2n} \pi + i \sin \frac{2k+1}{2n} \pi \right)}$$

$$\Leftrightarrow x-i = \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2n} \pi - i \Leftrightarrow x = \operatorname{ctg} \frac{2k+1}{2n} \pi, k = 0, 1, 2, \dots, (n-1).$$

1456. a) $\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$;

$$\cos^5 \alpha = 16 \cos^5 \alpha - 20 \cos^3 \alpha + 5 \cos \alpha$$

b) $\sin 7\alpha = 7 \sin \alpha - 56 \sin^3 \alpha + 112 \sin^5 \alpha - 64 \sin^7 \alpha$,

$$\cos 7\alpha = 64 \cos^7 \alpha - 112 \cos^5 \alpha + 56 \cos^3 \alpha - 7 \cos \alpha.$$

1458. Jednačina $x + \frac{1}{x} = 2 \cos \alpha$ ekvivalentna je jednačini

$x^2 - 2x \cos \alpha + 1 = 0$. Njena rešenja su $x_{1,2} = \cos \alpha \pm \sqrt{\cos^2 \alpha - 1}$, koja se mogu napisati u obliku $x_{1,2} = \cos \alpha \pm i \sin \alpha$. Dalje nalazimo da je

$$x^n = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha \text{ i } \frac{1}{x^n} = x^{-n} = \cos n\alpha \pm i \sin n\alpha,$$

$$\text{odakle slede tvrdenja: } x^n + \frac{1}{x^n} = 2 \cos n\alpha \text{ i } x^n - \frac{1}{x^n} = 2i \sin n\alpha.$$

1459. $|z| = \left| \frac{1+xi}{1-xi} \right| = \frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$

1460. Neka je $z = a + bi$, $\bar{z} = a - bi$. Kako je $|z| = z \cdot \bar{z} = 1$, odavde imamo

$$z \cdot \bar{z} + z = 1 + z \Leftrightarrow (\bar{z} + 1)z = 1 + z \Leftrightarrow z = \frac{z+1}{1+\bar{z}} = \frac{a+1+bi}{a+1-bi}.$$

Posle skraćivanja razlomka sa $a+1$ ($a+1 \neq 0$) nalazimo da je

$$(1) z = \frac{1+xi}{1-xi}, \text{ gde je } x = \frac{b}{a+1}.$$

Broj $z = -1$ ne može se transformisati na oblik (1) jer jednačina

$$\frac{1+xi}{1-xi} = -1 \text{ nema rešenja.}$$

1461. Neka je $\frac{z-1}{z+1} = bi$; odavde sledi da je $z = \frac{1+bi}{1-bi} \Rightarrow |z| = 1.$

1462. Iskoristiti jednakost $2 \pm 11i = (2 \pm i)^3$. Rezultat $\sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{\bar{z}} = 4.$

1463. Date kompleksne brojeve pretvoriti u njihove trigonometrijske oblike i zatim primeniti Moavrov obrazac.

1464. $x^2 + 4x + 5 = 0.$

1465. Neka je zbir sinusa A a zbir kosinusa B i $z = \cos x + i \sin x$. Tada je

$$B + Ai = (\cos x + \sin x) + (\cos 3x + \sin 3x) + \dots$$

$$+ (\cos (2n-1)x + \sin (2n-1)x) = z + z^3 + \dots + z^{2n-1} =$$

$$= \frac{z(z^{2n} - 1)}{z^2 - 1} = \frac{(\cos x + i \sin x)(\cos 2nx + i \sin 2nx - 1)}{\cos 2x + i \sin 2x - 1} =$$

$$\frac{(\cos x + i \sin x)(2i \sin nx (\cos nx + i \sin nx))}{2i \sin x (\cos x + i \sin x)} =$$

$$= \frac{\sin nx}{\sin x} (\cos nx + i \sin nx).$$

Pošto je $B + iA = \frac{\sin nx \cos nx}{\sin x} + \frac{\sin^2 nx}{\sin x}$, odavde je

$$B = \frac{\sin 2nx}{2 \sin x}, A = \frac{\sin^2 nx}{\sin x}.$$

1466. Kako je

$$S_1 + iS_2 = (1+i)^n = (1+i)^n, \text{ a } (1+i)^n = \left(\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right)^n,$$

koristeći Moavrovu formulu dobija se

$$S_1 + iS_2 = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4} \right). \text{ Izjednačavajući realne i imaginarnе delove ove jednakosti dobija se da je}$$

$$S_1 = 2^{\frac{n}{2}} \cos \frac{n\pi}{4}, S_2 = 2^{\frac{n}{2}} \sin \frac{n\pi}{4}.$$

1467. I način: Kako je $z + \frac{1}{z} = 1$, tada je $z^2 - z + 1 = 0$ ili $z^3 + 1 = 0$.

Odavde je $z^3 = -1$.

Dati izraz se potpuno transformiše na sledeći način

$$z^{142} + \frac{1}{z^{142}} = (z^3)^{47} \cdot z + (z^3)^{47} \cdot \frac{1}{z} = -z - \frac{1}{z} = -\left(z + \frac{1}{z}\right) = -1.$$

II način:

Iz jednačine $z^2 - z + 1 = 0$ dobija se da je

$$z = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right).$$

Tada je primenom Moavrove formule

$$z^{142} + \bar{z}^{142} = 2 \cos \frac{142\pi}{3} = 2 \cos \frac{4\pi}{3} = -2 \cos \frac{\pi}{3} = -1.$$

1469. Primenom binomnog obrasca dobija se

$$(1) (1+i\sqrt{3})^n = 1 - 3\binom{n}{2} + 3^2\binom{n}{4} - \dots + i\sqrt{3}\left(\binom{n}{4} - 3\binom{n}{6} + 3^2\binom{n}{8} - \dots\right)$$

S druge strane, primenom Moavrove formule imamo

$$(2) (1+i\sqrt{3})^n = 2^n \left(\cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3} \right).$$

$$\text{Iz (1) i (2) dobija se } S_1 = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3}, S_2 = \frac{2^n}{\sqrt{3}} \cos \frac{n\pi}{3}.$$

1470. Zamenom u Ojlerovom obrascu

$$(1) e^{ix} = \cos x + i \sin x,$$

x sa $-x$ dobija se obrazac

$$(2) e^{-ix} = \cos x - i \sin x$$

Iz (1) i (2) sledi tvrđenje.

1471. Iskoristiti obrasce dokazane u prethodnom zadatku.

1472. Na osnovu Ojlerove formule imamo da je

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx \text{ i } e^{-inx} = (e^{ix})^n = (\cos x + i \sin x)^n,$$

odakle se dobija

$$(\cos x + i \sin x)^n = \cos nx + i \sin nx.$$

1473. $1 = \cos 2k\pi + i \sin 2k\pi = e^{2k\pi i},$

$$i = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = e^{\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i}$$

$$-2 = 2(\cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi) = 2e^{(2k+1)\pi i}.$$

1474. Primenom Ojlerove formule imamo da je

$$i^i = \left(e^{\left(\frac{k}{2} + 2k\pi\right)i} \right)^i = e^{-\left(\frac{k}{2} + 2k\pi\right)}, \quad (k \in \mathbb{Z}), \quad e^{-\frac{k}{2}}$$

naziva se glavna vrednost od i^i .

1475. a) Smenom $x = y\sqrt[3]{\frac{2}{5}}$ data jednačina svodi se na niz ekvivalentnih jednačina

$$y^3 + 1 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y^2 - y + 1) = 0 \Leftrightarrow y + 1 = 0 \vee y^2 - y + 1 = 0.$$

$$\text{Skup rešenja date jednačine je } \left\{ -\sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2}{5}}, \right\};$$

$$\text{b) } \left\{ \sqrt[3]{\frac{11}{2}}, \frac{(-1+i\sqrt{3})\sqrt{11}}{4} \right\}.$$

$$1476. \text{ a) } \left\{ \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, (-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}; \quad \text{b) } \left\{ -\frac{2c}{3}, \frac{c}{5}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$1477. \left\{ \frac{m+n}{m}, \frac{m+n}{2m}(-1+i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$1478. \text{ a) } \left\{ \pm \frac{3}{2} \pm \frac{3}{2}i \right\}; \quad \text{b) } \left\{ \pm \sqrt[4]{\frac{17}{11}}, \pm \sqrt[4]{\frac{17}{11}}i \right\}.$$

$$1479. \left\{ \pm \frac{2a-c}{b}, \pm \frac{(2a-c)i}{b} \right\}.$$

1480. a) Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x^3 - 27)(x^3 + 27) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 27 = 0 \vee x^3 + 27 = 0.$$

$$\left\{ \pm 3, \frac{3}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$\text{b) } \{ \pm 2i, -i \pm \sqrt{3}, i \pm \sqrt{3} \}.$$

1481. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(8x^3 + 1)(x^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow 8x^3 + 1 = 0 \vee x^3 - 1 = 0.$$

$$\left\{ -\frac{1}{2}, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$1482. \left\{ -\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}, \frac{3 \pm i\sqrt{3}}{8} \right\}.$$

$$1483. \left\{ -\sqrt[3]{\frac{3}{5}}, 4, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{5}{3}}, 2(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$1484. \left\{ \pm 2, 3, \frac{3}{2}(1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$1485. \left\{ \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \pm \frac{(a-b)i}{2} \right\}.$$

$$1486. \left\{ \frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2} \pm \frac{(a-b)i}{2} \right\}.$$

$$1487. \left\{ 1, \frac{1}{38} (11 \pm 21i\sqrt{3}) \right\},$$

$$1488. \left\{ 4, \frac{3 \pm 5i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

9.4. TRINOMNE JEDNAČINE

$$1489. \text{ a) Smena } x^2 = y. \left\{ -2, 1, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, 1 \pm i\sqrt{3} \right\};$$

$$\text{ b) } \{-2a, -a\sqrt{3}, a\sqrt{3}, 2a\}.$$

$$1490. \text{ a) } \left\{ 1, 2, -1 \pm i\sqrt{3}, \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}) \right\}.$$

$$\text{ b) } \{\pm 2, \pm 1, \pm i, 2i\}.$$

$$1491. \text{ a) } \left\{ \pm \frac{a}{b}, \pm \frac{b}{a} \right\}; \text{ b) } \left\{ \pm \frac{b}{c}, \pm \frac{a}{c} \right\}.$$

$$1492. \text{ a) } \left\{ 1, \frac{3}{2}, \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}(-1 \pm i) \right\}; \text{ b) } \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{3}{4}(1 \pm i\sqrt{3}), \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{4} \right\}.$$

$$1493. \text{ a) } \left\{ 2, 3, -1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2} \right\}; \text{ b) } \left\{ \frac{1}{2}, 3, -1 \pm i\sqrt{3}, \frac{-3 \pm 3i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

$$1494. \{\pm 1, \pm 2, \pm i, \pm 2i\}.$$

$$1495. \left\{ \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm i, \pm \frac{1}{2}i \right\}.$$

$$1496. \text{ Smena: } x^2 + 2a^2 + m^2 = y, \left\{ \pm a, \pm \sqrt{2m^2 - a^2} \right\}.$$

$$1497. \left\{ \pm (a^2 - 1), \pm (a + 1) \right\}.$$

$$1498. \left\{ \pm \sqrt{a}, \pm \frac{a}{n}\sqrt{3} \right\}.$$

$$1499. \left\{ \pm \sqrt{2(m \pm 1)}, \pm \sqrt{2m \pm 1} \right\}.$$

$$1500. \left\{ \pm 3a \pm ai\sqrt{3}, \pm 2a, \pm a\sqrt{2} \right\}.$$

$$1501. \{-10, -10^{-1}, 10^{-1}, 10\}.$$

$$1502. \left\{ -\frac{3}{2}, 0, \frac{3}{2}, 3 \right\}.$$

$$1503. \left\{ -1, \frac{5}{3}, \frac{7}{3}, 5 \right\}.$$

$$1504. \left\{ -a \pm \sqrt{\frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}} \right\}.$$

9.5. SIMETRIČNE (RECIPROČNE) JEDNAČINE

1505. Jedan koren date jednačine je $x = -1$. Količnik polinoma $3x^3 + 13x^2 + 13x + 3$ i činioca $x + 1$ daje polinom $3x^2 + 10x + 3$.

Dakle, data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(x+1)(3x^2 + 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow x + 1 = 0 \vee 3x^2 + 10x + 3 = 0.$$

Skup rešenja date jednačine je $\left\{ -1, -\frac{1}{3}, -3 \right\}$.

$$1506. \left\{ -1, \frac{4}{3}, \frac{3}{4} \right\}.$$

$$1507. \left\{ \frac{1}{2}, 1, 2 \right\}.$$

$$1508. \left\{ 1, -\frac{3}{5}, -\frac{5}{3} \right\}.$$

1509. Neka je $x + \frac{1}{x} = z$, tada je $x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2$.

Ako se data jednačina podeli sa x^2 ona je ekvivalentna jednačini

$$6 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) + 5 \left(x + \frac{1}{x} \right) - 38 = 0.$$

S obzirom na uvedenu smenu, data jednačina je ekvivalentna konjukciji $6z^2 + 5z - 50 = 0 \wedge x + \frac{1}{x} = z$.

Kako su $z_1 = \frac{5}{2}$ i $z_2 = -\frac{10}{3}$ rešenja prve jednačine, tada je

$$x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2} \vee x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}.$$

Rešenje ove disjunkcije daje skup rešenja date jednačine

$$\left\{ -3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 2 \right\}.$$

1510. Rešavanje date jednačine svodi se na lanac ekvivalencija

$$12(x^4 - 1) - 25x(x^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 1)(12x^2 - 25x + 12) =$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)(12x^2 - 25x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1 = 0 \vee x+1 = 0 \vee 12x^2 - 25x + 12 = 0.$$

Skup rešenja date jednačine je $\left\{ -1, 1, \frac{3}{4}, \frac{4}{3} \right\}$.

1511. Kako je $x = -1$ koren date jednačine, tada je ona ekvivalentna jednačini

$$(x+1)(12x^2 - 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12) = 0$$

$$\Leftrightarrow x+1 = 0 \vee 12x^4 - 4x^3 - 41x^2 + 4x + 12 = 0.$$

Rešenje poslednje disjunkcije daje skup rešenja date jednačine:

$$\left\{-2, -\frac{1}{2}, -1, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$1512. \left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}.$$

$$1513. \left\{-2, -\sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

1514. Ako se data jednačina podeli sa x^3 , ona je ekvivalentna jednačini

$$x^3 + \frac{1}{x^3} + 4\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) - 6\left(x + \frac{1}{x}\right) - 28 = 0.$$

Iz smene $x + \frac{1}{x} = z$ dobija se da je

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = z^2 - 2, \text{ a } x^3 + \frac{1}{x^3} = z^3 - 3z.$$

Rešavanje date jednačine svodi se na konjukciju

$$z^3 + 4z^2 - 9z - 36 = 0 \wedge x + \frac{1}{x} = z.$$

Skup rešenja date jednačine je

$$\left\{-2, -\sqrt{3}, -2+\sqrt{3}, \frac{3-\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \frac{-3-\sqrt{5}}{2}, \frac{-3+\sqrt{5}}{2}\right\}.$$

$$1515. \left\{-2, -\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

$$1516. \left\{1, \frac{4}{3}, \frac{3}{4}\right\}.$$

$$1517. \left\{\frac{1}{2}, 2, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$1518. \left\{\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 5, 10\right\}.$$

$$1519. \left\{\frac{1}{n}, n, -n \pm \sqrt{n^2 - 1}\right\}.$$

1520. Data jednačina ekvivalentna je simetričnoj jednačini

$$12x^4 - 56x^3 + 89x^2 - 56x + 12 = 0.$$

$$\left\{\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1, \frac{2}{3}\right\}.$$

$$1521. \{-2, -3, i, -i\}.$$

$$1522. \left\{1, 1, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right\}.$$

$$1523. \left\{-1, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{3}, 1\right\}.$$

$$1524. \left\{-3, -\frac{1}{3}, \frac{3 \pm i\sqrt{7}}{4}\right\}.$$

$$1525. \left\{\frac{1}{3}, \frac{3}{4}, \frac{7}{4}, 3\right\}.$$

$$1526. \left\{-1, \frac{4}{9}, \frac{9}{4}\right\}.$$

$$1527. \left\{1, \frac{4}{9}, \frac{9}{4}\right\}.$$

$$1528. \left\{-1, 4, \frac{1}{4}, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

$$1529. \left\{1, 3, \frac{1}{3}, 2, \frac{1}{2}\right\}.$$

$$1530. \left\{-1, -2, -\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right\}.$$

$$1531. \left\{-3, -\frac{1}{3}, -2, -\frac{1}{2}, 1\right\}.$$

$$1532. \left\{-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

$$1533. \left\{-1, 1, 1, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

$$1534. \left\{-3, -\frac{1}{3}, -1, \frac{1}{2}, 2\right\}.$$

$$1535. \left\{1, 1, m, \frac{1}{m}\right\}.$$

$$1536. \left\{-a, -\frac{1}{a}, -m, -\frac{1}{m}\right\}.$$

$$1537. \left\{-1, 1, 3, \frac{1}{3}, i, -i\right\}.$$

$$1538. \left\{-1, 1, 2, \frac{1}{2}, -2 \pm \sqrt{3}\right\}.$$

$$1539. \left\{-1, -i, i, \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}, -2, \pm\sqrt{3}\right\}.$$

1540. Drugi polinom je oblika $Q(x) = x^2 + x + c$, c je realan broj. Na osnovu stava 3 sledi identitet $P(x) = (Q(x))^2$. Ovaj identitet je tačan ako i samo ako je $a = 3$, $b = 1$ i $c = 1$, a polinom $Q(x) = x^2 + x + 1$.

1541. Primedba: Neka je P polinom i a realan broj. Ostatak pri deljenju polinoma P polinomom $x-a$ jednak je $P(a)$, tj. vrednost polinoma P u tački $x = a$. (Ovaj stav naziva se Bezuova teorema – E. Bezout (1730–1783), francuski matematičar).

a) Da bi $x = 2$ bio koren jednačine $P(x) = 0$, polinom $P(x)$ je deljiv sa $x-2$, tj. ostatak količnika $P(x) : (x-2)$ je nula. Na osnovu Bezuovog stava ostatak

$$r = 6 \cdot 2^3 - 7 \cdot 2^2 - 16 \cdot 2 + a.$$

Kako je ostatak $r = 0$, imamo

$$48 - 28 - 32 + a = 0, a = 12.$$

b) Na osnovu definicije količnika imamo

(1) $6x^3 - 7x^2 - 16x + 12 = (x-2)(6x^2 + bx + c)$, gde su b i c realni brojevi.

Jednakost (1) je identitet ako i samo ako je $b = 5$ i $c = -6$. Jedna nula polinoma $P(x)$ je $x_1 = 2$ a druge dve nule su rešenja jednačine

$$6x^2 + 5x - 6 = 0, x_2 = \frac{2}{3} \text{ i } x_3 = -\frac{3}{2}.$$

$$1542. a = -5, b = 30, x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = -\frac{5}{2}.$$

1543. Neka je $x^4 + ax^2 + b = (x-2)^2(x^2 + px + q)$. Odavde, s obzirom na stav 3, sledi $a = -8$, $b = 16$, $p = q = 4$.

$$1544. a = 3 \vee a = -2.$$

$$1545. a = 2, b = -8.$$

1546. Treba iskoristiti stav 3 i identitet

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3).$$

1547. Iskoristiti identitet

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = a(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

$$1548. \text{ Iskoristiti Vietove formule. } x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = -\frac{5}{2}.$$

$$1549. x_1 = a, x = \frac{1}{a}, x_3 = \frac{1}{2}. \text{ (Iskoristiti Vietove formule).}$$

1550. Primedba: Ako jednačina ima rešenje oblika $a+b\sqrt{2}$ ($a, b \in \mathbb{Q}$) tada ista jednačina ima i rešenje $a-b\sqrt{2}$.

Na osnovu ove napomene, ako je $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ rešenje date jednačine, tada je i $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ takođe rešenje iste jednačine. Kako je $(x-x_1)(x-x_2) = (x-2-\sqrt{3})(x-2+\sqrt{3}) = x^2 - 4x + 1$, količnik polinoma $x^3 - 14x^2 + 41x - 10$ polinoma $x^2 - 4x + 1$ je $x-10$. Treće rešenje date jednačine je $x_3 = 10$.

1551. Primedba: Ako je kompleksan broj $a+bi$ nula realnog polinoma, tada je i konjugovano kompleksan broj $a-bi$ takođe nula tog polinoma. Kako je $x_1 = 2+i$ rešenje date jednačine to je na osnovu prethodne primedbe i $x_2 = 2-i$ njeno rešenje. Dalje koristiti uputstvo iz prethodnog zadatka $x_3 = 3+\sqrt{2}$ i $x_4 = 3-\sqrt{2}$.

$$1552. a = 0 \text{ ili } a = -3: \text{ Za } a = 0, x_1 = x_2 = 1, x_3 = -1.$$

$$\text{Za } a = -3, x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-9 \pm \sqrt{85}}{2}.$$

$$1553. x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1+i, x_3 = 1-i, x_1 = \frac{1}{2}, x_{2,3} = \pm \frac{3}{2}.$$

$$1554. x_1 = -2, x_2 = 3, x_{3,4} = \pm 4, x_1 = -2, x_{2,3} = 2 \pm i.$$

$$1555. x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, p = 11, q = -6.$$

$$1556. x_1 = x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = -\frac{5}{3}.$$

$$1557. m = 47.$$

$$1558. x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = \frac{2}{3}, x_3 = \frac{5}{6}.$$

1559. Drugi koren jednačine je $x_2 = -3-i$. Polinom $x^3 + x^2 + ax + b$ podeliti polinomom $(x+3+i)(x+3-i)$ i ostatak izjednačiti sa nulom. $a = -20$, $b = -50$, $x_3 = 5$.

$$1560. m = 3 \text{ ili } m = -2, x_2 = -3, x_3 = 4.$$

$$1561. x_{1,2} = \pm i.$$

$$1562. x_1 = 0, x_2 = -10.$$

$$1563. x = \frac{1}{3}.$$

1564. Kako je $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$, ostaci deljenja datog polinoma sa $x-1$ i $x+2$ jednaki su nuli, tj.

$$1^8 + 2 \cdot 1^7 + 3 \cdot 1^2 + a + b = 0,$$

$$(-2)^8 + 2(-2)^7 + 3 \cdot 2^2 - 2a + b = 0,$$

odakle sledi da je $a = 2$, $b = -8$.

1565. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_{3,4} = \frac{1}{2}(-3 \pm i\sqrt{19})$.

1566. $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_{3,4} = -1 \pm \sqrt{2}$.

1567. $x_1 = 2 - \sqrt{3}$, $x_2 = 2 + \sqrt{3}$, $x_3 = -\frac{3}{2}$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.

1568. Nule polinoma $x^2 - (p+1)x + p$ su $x_1 = 1$ i $x_2 = p$, a to su ujedno i nule prvog polinoma. Ostaci deljenja prvog polinoma sa $x-1$ i $x-p$ su jednaki nuli, pa je tvrđenje tačno.

1569. Kvadratni trinom je oblika $\pm x^2 + mx \pm 2$, gde dolaze u obzir sve kombinacije plusa i minusa. Realni brojevi a , b i m se određuju iz jednakosti $x^4 + ax^3 + bx^2 - 8x + 4 = (\pm x^2 + mz \pm 2)^2$.

1570. $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)(x^2 - x\sqrt{3} + 1)(x^2 + x\sqrt{3} + 1)$.

1571. $p = -\frac{5}{8}$, $q = \frac{3}{8}$.

1572. $x_1 = 2$, $x_2 = -\sqrt[5]{31}$.

1573. $x_1 = 10$, $x_2 = -\frac{41}{2}$.

9.7. SISTEM ALGEBARSKIH JEDNAČINA VIŠEG REDA

1574. $\{(\pm 5, \pm 1), (\pm 1, \pm 5), (\pm 13, \pm 13)\}$.

1575. $\left\{\left(3, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, 3\right), \left(\pm i \frac{3}{2}, \pm i \frac{3}{2}\right)\right\}$.

1576. $\left\{\left(2, \frac{1}{4}\right), \left(\frac{1}{4}, 2\right), \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{63}}{8}, \frac{-1 \pm i\sqrt{63}}{8}\right)\right\}$.

1577. $\{(10, 8), (8, 10)\}$.

1578. $\left\{(1, 2), (2, 1), \left(\frac{3 \pm i\sqrt{19}}{2}, \frac{3 \pm i\sqrt{19}}{2}\right)\right\}$.

1579. $\{(3, 1)(-1, -3)(1 \pm i\sqrt{6}, -1 \pm i\sqrt{6})\}$.

1580. $\{(7, -6), (-4, 5), (2, -1), (-1, 2)\}$.

1581. Smenom $\frac{x}{y} = u$ prva jednačina se svodi na oblik

$$u^2 + \frac{1}{u^2} + u + \frac{1}{u} = \frac{175}{36}.$$

Novom smenom $u + \frac{1}{u} = t$ poslednja jednačina postaje kvadratna

itd. $\left\{\left(\frac{13}{7}, \frac{6}{7}\right), \left(\frac{19}{25}, \frac{-6}{25}\right)\right\}$.

1582. $\left\{(3, 1), (1, 3), \left(\frac{52 \pm 4\sqrt{133}}{19 \pm \sqrt{133}}, \frac{24}{19 \pm \sqrt{133}}\right)\right\}$.

1583. Druga jednačina datog sistema ekvivalentna je jednačini

$$(1) (x+y)^2 - 2xy - z^2 = 61.$$

Iz prve i treće jednačine datog sistema zbir $x+y$ i proizvod xy mogu se izraziti u funkciji nepoznate z tj.

$$(2) x+y = z, xy = z^2.$$

Iz (1) i (2) dobija se kvadratna jednačina po z tj.

$$(7+z)^2 - 2z^2 - z^2 = 61 \Leftrightarrow z^2 - 7z + 6 = 0$$

$$z_1 = 6 \vee z_2 = 1.$$

Dati sistem ekvivalentan je sistemima:

$$(z = 6 \wedge x + y = 13 \wedge xy = 36) \vee (z = 1 \wedge x + y = 8 \wedge xy = 1).$$

Skup rešenja datog sistema je skup uređenih trojki

$$\{(9, 4, 6), (4, 9, 6), (4 + \sqrt{15}, 4 - \sqrt{15}, 1), (4 - \sqrt{15}, 4 + \sqrt{15}, 1)\}$$

1584. Ako se treća jednačina sistema pomnoži sa 2 i doda drugoj jednačini dobija se

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz =$$

$$= 29 + 52 \Leftrightarrow (x+y+z)^2 = 81 \Leftrightarrow x+y+z = 9 \vee x+y+z = -9.$$

Tada je dati sistem ekvivalentan sistemima:

$$(x - y - z = -5 \wedge x + y + z = 9 \wedge xy + xz + yz = 26)$$

$$\vee (x - y - z = -5 \wedge x + y + z = -9 \wedge xy + xz + yz = 26).$$

Rešavanjem ova dva sistema dobija se skup rešenja datog sistema

$$\{(2, 4, 3), (2, 3, 4), (-7, -1 + i\sqrt{11}, -1 - i\sqrt{11}), (-7, -1 - i\sqrt{11}, -1 + i\sqrt{11})\}.$$

1585. Količnik prve i druge, kao, i druge i treće jednačine datog sistema svodi se na oblik

$$\frac{x+y}{z+x} = \frac{3}{2} \text{ i } \frac{y+z}{x+y} = \frac{5}{9} \text{ ili } -x+2y-3z=0, -5x+4y+9z=0.$$

Dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$-x+2y-3z+0 \wedge -5x+4y+9z=0 \wedge (x+y)(y+z)=45.$$

Skup rešenja je: $\{(5, 4, 1), (-5, -4, -1)\}$.

1586. $\{(2, 2, 3)\}$.

1587. $\{(6, 3, 2), (6, 2, 3) (5, 3 \pm \sqrt{3}, 3 \pm \sqrt{3})\}$.

1588. $\left\{ (1, 2, 3), (2, 1, 3), \left(\frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}, \frac{1 \pm i\sqrt{23}}{2}, 5 \right) \right\}$.

1589. $\{(1, 2, 3), (2, 1, 3), (-1, -2, -3), (-2, -1, -3)\}$.

1590. $\{(4, 1, 3), (4, 3, 1), (-4, -2+\sqrt{7}, -2-\sqrt{7}), (-4, -2-\sqrt{7}, -2+\sqrt{7})\}$

1591. $\{(8, 6, 10), (6, 8, 10) (17 \pm i\sqrt{237}, 17 \pm i\sqrt{237})\}$.

1592. $\{(4, 3, 5), (3, 4, 5)\}$.

1593. $\left\{ (6, 3, 2), (3, 6, 2), \left(\frac{9 \pm i\sqrt{3703}}{2}, \frac{9 \pm i\sqrt{3703}}{2}, 21 \right) \right\}$.

1594. $\{(4, 1, -4), (1, 4, -4), (1, -4, 4), (-4, 1, 4), (\pm 4, \pm 4, 1)\}$.
Uputstvo: Kubirati prvu jednačinu i uzeti u obzir drugu i treću itd.

1595. Eliminacijom $y+z$ iz druge dve jednačine sistema dobije se $x(14-x)=45$ itd. Skup rešenja je:

$$\left\{ (9, 3, 2), (9, 2, 3), \left(5, \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2}, \frac{9 \pm \sqrt{57}}{2} \right) \right\}.$$

1596. $\left\{ \left(\pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{5}, \pm \frac{1}{6} \right) \right\}$.

1597. $\left\{ \left(-(a+b), a, -\frac{1}{ab(a+b)} \right), \left(a+b, a, -\frac{1}{ab(a+b)} \right) \right\}$.

1598. $\{(4, -1, 3), (-1, 4, 3)\}$.

1599. $\{(\pm 2, \pm 5, \pm 3)\}$.

1600. $\{(\pm 2, \pm 5, \pm 3)\}$.

1601. $\{(12, 6, 3), (3, 6, 12)\}$.

1602. $\left\{ (0, 0, 0), \left(\pm \frac{1}{6}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{1}{2} \right) \right\}$.

1603. $\left\{ \left(\pm 2, \pm \frac{3}{4}, \pm \frac{5}{4} \right) \right\}$.

1604. $\{(\pm (a+b)^2, \pm (a-b)^2, 0)\}$.

1605. $\{(a^2, b^2, 2ab), (b^2, a^2, 2ab), (ab, ab, a^2+b^2)\}$.

1606. $\left\{ \left(\frac{a-1}{2}, \frac{a+1}{2}, \frac{3-a}{2} \right), \left(\frac{1-a}{2}, -\frac{1+a}{2}, \frac{a-3}{2} \right) \right\}$.

1607. $\{(9, 18, 2, 4), (4, 2, 18, 9)\}$.

1608. $\{(1, -3, -2, 6), (1, -2, -3, 6), (-2, 1, 6, -3), (-2, 6, 1, -2),$

$$\{(6, -2, -3, 1), (6, -3, -2, 1), (-3, 6, 1, -2), (-3, 1, 6, -2)\}.$$

1609. $\{(3+\sqrt{40}, 1-\sqrt{32}, -1-\sqrt{32}, -3+\sqrt{40}),$
 $| (3-\sqrt{40}, 1+\sqrt{32}, -1-\sqrt{32}, -3-\sqrt{40})\}$.

1610. $\{(8, 4, 2, 1), (1, 2, 4, 8)\}$.

X. GLAVA

10. RAZNI ZADACI

1611. a) Teme T parabole ima koordinate $T(\cos \alpha, \sin^2 \alpha - \sin \alpha)$. Iz pretpostavke proizlazi

$$\sin^2 \alpha - \sin \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \vee \alpha = \frac{\pi}{2}; \text{ za } d = 0 \Rightarrow y = x^2 - 2x + 1,$$

$$\text{za } \alpha = \frac{\pi}{2}, y = x^2.$$

b) $\alpha = 0, \alpha = \frac{\pi}{6};$

- c) Ako eliminišemo α iz sistema $x_1 + x_2 = 2 \cos \alpha \wedge x_1 + x_2 = 1 - \sin \alpha$ dobijamo traženu relaciju $(x_1 + x_2)^2 + 4x_1x_2(x_1x_2 - 2) = 0$.

1612. $-2 < m < 0$.

1614. Trinom $Ax^2 + Bx + C$ pozitivan je za svako x ako je tačna konjunkcija

$$A > 0 \wedge B^2 - 4AC < 0.$$

Za dati trinom ova konjunkcija u obliku

$$\left(\sin \alpha + \frac{1}{2} > 0 \right) \wedge \left(2 \sin \alpha - 3 \right)^2 - 4 \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \alpha + \frac{1}{2} > 0 \right) \wedge 4 \left(\sin \alpha - \frac{7}{2} \right) \left(\sin \alpha - \frac{1}{2} \right) < 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\sin \alpha > -\frac{1}{2} \right) \wedge \left(\sin \alpha < \frac{7}{2} \vee \sin \alpha > \frac{1}{2} \right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{7\pi}{6} < \alpha < \frac{11\pi}{6} \right) \wedge \left(\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{5\pi}{6}.$$

1616. a) Teme datog skupa funkcija u funkciji parametra k je $T(k, k^2 - 1)$. Eliminacijom k iz $X = k$ i $Y = k^2 - 1$ dobijamo $Y = X^2 - 1$, pa je traženo geometrijsko mesto minimuma parabola $Y = X^2 - 1$.
- b) Za $k = -1, k = 1$ funkcije datog skupa imaju dvostruke nule, a za $-1 < k < 1$ - dve realne različite nule.

1617. Kako je $y^2 = 1 - x^2$, funkcija čiju minimalnu vrednost treba odrediti je $f(x) = x^6 + (1 - x^2)^3 - 3x^4 - 3x^2 + 1$, tj. $f(x) = 3(x^2)^2 - 3x^2 - 3x^2 + 1$. Njena minimalna vrednost je za:

$$x^2 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

pa je

$$f_{\min} = 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^4 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 1 = \frac{1}{4}.$$

1618. Data jednačina ekvivalentna je jednačini $x^2 + (y - 10)x + y^2 - y = 0$, odakle je $x = \frac{10 - y \pm \sqrt{-3y^2 - 16y + 100}}{2}$.

Kako je $x, y \in [0, 9]$, diskriminanta je pozitivna za $y = 0, 1, 2, 3$, a x je iz intervala $[0, 9]$. Za $y = 3$ je $x = 1 \vee x = 6$. Traženi dvocifreni brojevi su 13 i 63.

1622. $(1 + i)^m = (1 - i)^m \Rightarrow \left(\frac{1 + i}{1 - i} \right)^m = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{(1 + i)^2}{1^2 - i^2} \right)^m = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1 + 2i + i^2}{2} \right)^m = 1 \Leftrightarrow i^m = 1.$$

Poslednja jednakost važi za $m = 4k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

1624. Diskriminanta jednačine (1) $D = p^2 - 4q > 0$ po pretpostavci. Diskriminante D_1 i D_2 jednačine (2) svode se na oblike

$$D_1 = D + 4a_2 \text{ i } D_2 = \frac{3}{4}D + \left(a - \frac{p}{2} \right)^2,$$

pa iz $D > 0$ sledi $D_1 > 0$ i $D_2 > 0$.

1626. a) $2k\pi - \frac{2\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$),

b) $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$),

v) $y = x^2 - 2x + 1 \vee y = -2x^2 - 2x - \frac{1}{2}$.

1627. $V = \frac{1}{24} c^3 \sin 2\alpha \operatorname{tg} \varphi$.

1628. $p > 2$.

1629. $-\frac{5}{4} < m < -1 \vee m > 9$.

1630. $-9 \neq m \neq -1 \vee 0 \neq m \neq 1$.

1634. a) Ako se y eliminiše iz datih funkcija, dobija se jednačina:

$$a(2^x)^2 - (a-b)2^x - b = 0.$$

Ova jednačina ima dvostruko rešenje za

$$D = (a+b)^2 = 0 \Rightarrow a = -b, \text{ pa je tražena tačka } A(0, a+b).$$

b) $B(0, a+b)$ i $C\left(\log^2\left(-\frac{b}{a}\right), 0\right)$, apscisa tačke C je realna ako je $ab < 0$.

1635. $M(2, 3)$.

1636. $(10, 0); (0, 0); (8, 1); (0, 1)$.

1637. a) $1 < x < 2, 3 < x < 4$.

b) $2 < x < 3, 4 < x < 5$.

1638. a) $x^2 - 1; \sqrt{2} - 2$;

b) $x^2 + 1; \sqrt{2} + 2$.

1639. Leva strana date jednakosti postupno se transformiše, uz uslov $z^2 = -1 - z$, na sledeći način.

$$\begin{aligned} (az^2 + bz)(bz^2 + az) &= (z^2(az + b)(bz + a)) \\ &= z^2(abz^2 + a^2z + b^2z + ab) \\ &= (-1 - z)(ab(-1 - z) + a^2z + b^2z + ab) \\ &= (-1 - z)(a^2z + b^2z + ab) \\ &= (-z - z^2)(a^2 + b^2 - ab) = a^2 + b^2 - ab. \end{aligned}$$

1640. $x_1 + x_2 = x_1 \cdot x_2$.

1641. Smenom $\sqrt{x-1} = t$, ($t > 0$) data funkcija se transformiše na oblik $y = |t| + |t-5|$. Funkcija je konstanta $y = 5$ za $0 \leq t \leq 5$, pa je $1 \leq x \leq 26$.

1642. Neka su dati kompleksni brojevi $z_1 = x_1 + y_1 i$ i $z_2 = x_2 - y_2 i$ i ($y_1 \neq 0, y_2 \neq 0$). Iz uslova $z_1 = \bar{z}_2$ imamo ekvivalenciju

$$z_1 = \bar{z}_2 \Leftrightarrow x_1 + y_1 i = x_2 - y_2 i \Leftrightarrow x_1 = x_2 \vee y_1 = -y_2.$$

S obzirom na poslednje jednakosti

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) = 2x_1 + i \cdot 0 = 2x_1,$$

$$z_1 \cdot z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2) = x_1^2 + y_1^2 + i \cdot 0 = x_1^2 + y_1^2.$$

1643. Neka je $z = x + iy$ ($x, y \in R$) a $\bar{z} = x - iy$. Tada dati sistem ekvivalentan je sistemu

$$\begin{aligned} x + iy + x - iy &= 4 \wedge \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x = 2 \wedge x^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x = 2 \wedge y^2 = -3, \text{ što je nemoguće.} \end{aligned}$$

1644. $z_1 = -\frac{1}{2}(1+i), z_2 = \frac{1}{2}(3-5i)$.

1645. Razlika rešenja je $x_1 - x_2 = \sqrt{-m^2 + 6m - 5}$. Razlika rešenja ima maksimalnu vrednost ako i samo ako funkcija $f(m) = -m^2 + 6m - 5$ ima maksimalnu vrednost. Ova funkcija ima maksimalnu vrednost za $m = 3$.

1646. $x \in (-\infty, -3) \cup \left(-2, -\frac{2}{3}\right) \cup (1, \infty)$.

1647. $-4 < a < 0$.

1648. Kako je $\sqrt{3 + \sqrt{8}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}$,
 $a\sqrt{3 - \sqrt{8}} = \sqrt{(1 - \sqrt{2})^2} = |1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$, pa je
 $z_1 = 2 + 2i$.

Pošto je $a = 0,333... = \frac{1}{3}$, onda je $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27} = 3$ pa je $z_2 = 3 + 3i$.

Proporcija $z_2 : z_1 = 3(1+i) : 2(1+i) = 3 : 2$ je tačna.

1649. Smenom $1 - 1986x^2 = z$ data jednačina svodi se na sistem $x = 1 - 1986z^2 \wedge z = 1 - 1986x^2$.

Ako drugu jednačinu ovog sistema oduzmemo od prve, dobijamo $x - z = 1986(x^2 - z^2) \Leftrightarrow (x - z)(1 - 1986(x + z)) = 0 \Leftrightarrow x - z = 0 \vee 1986(x + z) = 1$. Jednačine ovog sistema sa jednačinom $1 - 1986x^2 = z$ daju jednačine

$$(1) 1986x^2 + x + 1 = 0,$$

$$(2) 1986x^2 - x - \frac{1985}{1986} = 0.$$

Rešenja jednačine (1) su $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7945}}{3972}$.

Rešenja jednačine (2) su $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{7941}}{3972}$.

1650. Leva strana nejednakosti je oblika a^b , gde je $a = |x + y| \geq 0, b = -x + y + 1$.

Nejednakost je ispunjena ako je:

$$1^\circ a > 1 \wedge b \leq 0,$$

$$2^\circ a \leq 1 \wedge b \geq 0,$$

$$3^\circ a = 0 \wedge b = 0.$$

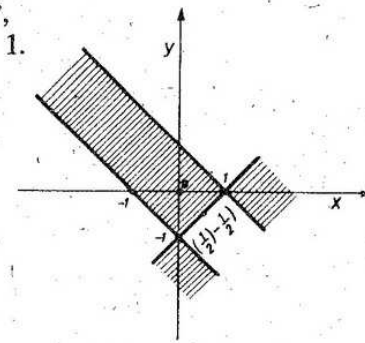
Na osnovu toga proizlazi:

$$1^\circ |x + y| > 1 \wedge -x + y + 1 \leq 0,$$

$$2^\circ |x + y| \leq 1 \wedge -x + y + 1 \geq 0,$$

$$3^\circ x + y = 0 \wedge -x + y + 1 = 0.$$

Skup tačaka čije koordinate zadovoljavaju uslove $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$, tj. polaznu nejednakost, jeste šrafirana oblast na slici 46.



Slika 46

1651. $\frac{5n-3}{6}$.

1652. $x \in [-8, 0] \cup [1, 2]$.

1653. Ako pomnožimo datu jednačinu sa 2 važe ekvivalencije

$$\begin{aligned} 2 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x + 2 \cdot 25^x &= 2 \cdot 6^x + 2 \cdot 10^x + 2 \cdot 15^x \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 4^x - 2(2 \cdot 3)^x + 9^x + 4^x - 2(2 \cdot 5)^x + 25^x + 9^x - 2(3 \cdot 5)^x + 25^x &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (2^x - 3^x)^2 + (2^x - 5^x)^2 + (3^x - 5^x)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Zbir kvadrata jednak je nuli ako i samo ako je svaki sabirak jednak nuli, tj. $2^x = 3^x = 5^x$. Jedino rešenje je $x = 0$.

1654. Neka je $n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \dots \leq n_k$. Tada je

$$n_1 n_{k-1} = n_2 n_{k-2} = \dots = n_k n_1 = n, \text{ pa je } n_1^2, n_2^2, n_3^2, \dots, n_k^2 = n^k.$$

Logaritmovanjem za osnovu k dobijamo

$$2(\log_k n_1 + \log_k n_2 + \log_k n_3 + \dots + \log_k n_k) = k \log_k n$$

1655. $P(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 1$.

1656. Kako su a, b, c, d uzastopni pozitivni članovi aritmetičkog niza, tada je

$$b = a + r, c = a + 2r, d = a + 3r.$$

Ako proizvod sinusa u datoj jednačini transformišemo u razliku, dobija se ekvivalentna jednačina

$$\cos(2a + r)x - \cos(2a + 5r)x = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin(2a + 3r) \cdot \sin 2rx = 0 \Leftrightarrow x_k = \frac{k\pi}{2a + 3r} \vee x_n = \frac{n\pi}{2r}, k, n \in \mathbb{Z}.$$

1657. Leva strana date jednakosti se postupno transformiše na ovaj način:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} 7,5^\circ - \operatorname{ctg} 67,5^\circ + \operatorname{tg} 67,5^\circ - \operatorname{tg} 7,5^\circ &= \\ = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 7,5^\circ \sin 67,5^\circ} + \frac{\sin 60^\circ}{\cos 7,5^\circ \cos 67,5^\circ} &= \\ = \frac{\sin 60^\circ (\cos 67,5^\circ - 7,5^\circ)}{\sin 7,5^\circ \cos 7,5^\circ \sin 67,5^\circ \cos 67,5^\circ} &= \\ = \frac{\sqrt{3}}{\sin 15^\circ \sin 135^\circ} = \frac{2\sqrt{3}}{\cos 120^\circ - \sin 150^\circ} &= 2(3 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

1658. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2^x(4 + 2 + 1 + \dots) = 3^x(27 + 9 + 3 + \dots).$$

Kako su oba geometrijska reda konvergentna, posle određivanja njihovog zbira poslednja jednačina ekvivalentna je jednačini

$$2^{x+4} = 3^{x+4} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x+4} = 1 \Leftrightarrow x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -4.$$

1659. Konvergira za svako x iz intervala $8^{-1} < x < 8$, suma je 0, 5 za $x = 2$.

1660. 3, 5, 7.

1661. Na osnovu pretpostavke, dobija se sistem

$$\frac{a_1(q^4 - 1)}{q - 1} = 130 \wedge \frac{a_1^2(q^8 - 1)}{q^2 - 1} = 5044.$$

Količnik druge i prve jednačine sistema je

$$(1) \frac{a_1(q^4 + 1)}{q + 1} = \frac{194}{5}.$$

Ako se eliminiše a_1 iz prve jednačine sistema i iz jednačine (1), dobija se

$$114(q^2 + q^{-2}) - 97(q + q^{-1}) - 97 = 0.$$

Smenom $q + q^{-1} = x$ poslednja jednačina postaje

$$114x^2 - 97x - 325 = 0.$$

$$\text{Rešenja ove jednačine su } x = \frac{247}{114} \vee x = -\frac{75}{114}.$$

$$\text{Za } x = \frac{247}{114} \text{ dobija se da je } q = \frac{3}{2} \vee q = \frac{2}{3}.$$

Drugo rešenje za x ne daje realna rešenja za q .

Niz je 16, 24, 36, 54, ili 54, 36, 24, 16.

1663. $n > \frac{2(\log k + 1)}{\log k - \log(k-1)}.$

1664. $a_1 = \frac{2ab}{a^2 + b}, q = \frac{a^2 - b}{a^2 + b}.$

1665. Članovi niza se dobijaju iz jednakosti

$$(1) a_1 = \sqrt{2}, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Dovoljno je dokazati da je niz opadajući i ograničen odozgo, da bi bio konvergentan. Kako je

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sqrt{2 + a_n} - a_n = \frac{(\sqrt{2 + a_n} - a_n)(\sqrt{2 + a_n} + a_n)}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2 + a_n} + a_n} > 0, \end{aligned}$$

niz je opadajući. Niz je ograničen odozgo, jer je nejednačina

$$(2) a_n < 2 \text{ ispunjena za svako } n \in \mathbb{N}.$$

Zaista za $n = 1$ (2) je tačno, jer je $a_1 = \sqrt{2} < 2$. Neka je (2) tačno i za $n = k$ ($k \geq 1$), tj. $a_k < 2$. Tada je (2) ispunjeno i za $n = k + 1$, pošto je

$$a_{k+1} = \sqrt{2 + a_k} < \sqrt{2 + 2} = 2. \text{ Na osnovu principa matematičke indukcije (2) je tačno za svako } n \in \mathbb{N} (n \geq 1).$$

Iz (1) posle kvadriranja sledi

$$(3) a_{n+1}^2 - a_n - 2 = 0.$$

Ako uvedemo smenu $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ i u (3) izvršimo granični prelaz, dobija se

$$(4) a^2 - a - 2 = 0.$$

Rešenja jednačine (4) su $a = 2 \vee a = -1$. Pošto je granična vrednost niza pozitivna, onda je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2$.

1666. $\lim a_n = 0,5 (1 + \sqrt{1 + 4a})$.

1667. Ako stavimo da je $a_n = r^n$, tada se rekurentna formula svodi na diferencnu jednačinu

$$r^{n+2} = 5r^{n+1} - 6r^n \Leftrightarrow r^2 - 5r + 6 = 0 \Leftrightarrow r_1 = 3 \vee r_2 = 2.$$

Zato je $a_n = 3^n \vee a_n = 2^n$. Uopšte je $a_n = C_1 \cdot 3^n + C_2 \cdot 2^n$.

Odredimo konstante C_1 i C_2 tako da je $a_1 = 3$ i $a_2 = 1$. Neka je $n = 1$ i $n = 2$, tada je

$$3C_1 + 2C_2 = 3 \wedge 9C_1 + 4C_2 = 1. \text{ Odatle sledi da je } C_1 = -\frac{5}{3} \text{ i } C_2 = 4. \text{ Opšti član niza je}$$

$$a_n = -\frac{5}{3} \cdot 3^n + 4 \cdot 2^n.$$

1668. Analogno prethodnom zadatku

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

1669. Ako iskoristimo poznatu nejednakost $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$, imamo

$$\sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} < \frac{(1+x_1) + (1+x_2)}{2} = 1 + \frac{x_1+x_2}{2}.$$

Logaritmovanjem dobija se

$$\log \sqrt{(1+x_1)(1+x_2)} < \log \left(1 + \frac{x_1+x_2}{2} \right) \Leftrightarrow -\left(\frac{\log(1+x_1) + \log(1+x_2)}{2} \right) > -\log \left(1 + \frac{x_1+x_2}{2} \right),$$

odatle sledi da je

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} > f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right).$$

1670. Tvrdjenje se svodi na dokaz implikacije

$$\operatorname{tg} \frac{\beta}{2} - \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \Rightarrow \cos \beta - \cos \alpha = \cos \gamma - \cos \beta.$$

1671. Data jednakost postupno se svodi na ekvivalentne jednakosti na sledeći način

$$\log \frac{a-b}{2} = \log \sqrt{\frac{ab}{2}} \Leftrightarrow \frac{a-b}{2} = \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

$$a^2 + b^2 = 4ab \Leftrightarrow \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 4.$$

Kako je $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ i $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{a}$, tada je

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha = 4 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 15^\circ, \text{ a } \beta = 75^\circ.$$

1672. Primenom sinusne i konsinusne teoreme imamo

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2abc}, \sin \alpha = \frac{a}{2R}, \text{ pa je}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} R.$$

Analogno

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} R \text{ i } \operatorname{ctg} \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} R.$$

$$\operatorname{ctg} \beta = \frac{1}{2} (\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \gamma) \Leftrightarrow \frac{a^2 + c^2 - b^2}{abc} R =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{abc} R + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{abc} R \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 = \frac{1}{2} (b^2 + c^2 - a^2 + b^2 + a^2 + a^2 - c^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2 + c^2 - b^2 = b^2 \Leftrightarrow b^2 = \frac{1}{2} (a^2 + c^2),$$

čime je dokaz završen.

1673. $x = 0, 5$.

1674. Iz sistema

$$\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2} \wedge \alpha + \beta + \gamma = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}.$$

Ako primenimo kosinusnu teoremu

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$a^2 + c^2 - ac = b^2.$$

Obrnuto, iz date relacije sledi da je $\cos \beta = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3}$,

što sa relacijom $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ daje $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$.

1675. a) $\operatorname{tg} z = -3$;

b) $a = R\sqrt{2}$, $b = \frac{2R}{\sqrt{5}}$, $c = \frac{6R}{\sqrt{10}}$.

1676. $a = \frac{3}{2}d$, $b = \frac{5}{2}d$, $c = \frac{7}{2}d$, $\gamma = 120^\circ$.

1677. $y - 2x - 3 = 0$, $y + 2x + 3 = 0$; $S\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\varphi = 53^\circ 7' 48''$.

1679. $x = -3$.

1680. $x = \sqrt{2^{55} - 1}$.

1681. Da bi data jednačina imala realna rešenja $(-1 \leq \sin x \leq 1, -1 \leq \cos x \leq 1)$ zaključujemo da je:

$((\sin x = 0 \wedge (\cos x = 1 \vee \cos x = -1))$ ili

$((\sin x = 1 \wedge \sin x = -1) \wedge (\cos x = 0))$.

Obe konjunkcije su tačne ako je $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbb{Z}$.

1682. $x_k = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $x_n = n\pi$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

1683. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x = \cos 99x \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos 99x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(50x - \frac{\pi}{8}\right) \sin\left(49x + \frac{\pi}{8}\right) = 0 \Leftrightarrow x_k = \frac{1}{50} \left(\frac{\pi}{8} + k\pi\right)$$

$$\vee x_n = \frac{1}{49} \left(-\frac{\pi}{8} + n\pi\right) \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

1684. Data jednačina ekvivalentna je jednačini

$$\sin 1999x - \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2\sin\left(1000x - \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(999x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(1000x - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \vee \sin\left(999x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x_k = \frac{1}{1000} \left(\frac{5\pi}{6} + k\pi\right) \vee x_n = \frac{1}{999} \left(\frac{\pi}{6} + n\pi\right), \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

1685. Smenom $2^x = t$ ($t > 0$) data jednačina se svodi na:

$$\frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin t}{\cos t} + 2 \frac{\sin 2t}{\cos 2t} \Leftrightarrow \cos^2 2t - \sin^2 2t = 0 \wedge (\sin t, \cos t, \cos 2t \neq 0).$$

Rešenje date jednačine je

$$x_k = \log_2 \left(\frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{4} \right), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

1686. Data jednačina ekvivalentna je sistemu

$$\log_2 \frac{\cos 2x + \cos \frac{x}{2}}{\sin x + \cos \frac{x}{2}} = 0 \wedge (\cos 2x + \cos \frac{x}{2} > 0 \wedge \sin x + \cos \frac{\pi}{2} > 0).$$

Rešenja date jednačine su:

$$x_k = \frac{\pi}{6} + 4k\pi, \quad x_n = \frac{5\pi}{6} + 2n\pi, \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

1687. Kako je za uglove u I i II kvadrantu sinus pozitivan, biće

$$2k\pi < \pi(x+y) < (2k+1)\pi \Leftrightarrow x+y > 2k \wedge x+y < 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Za $k=0$ dobijamo $y > -x \wedge y < 1-x$.

U Dekartovoj ravni to je osenčena

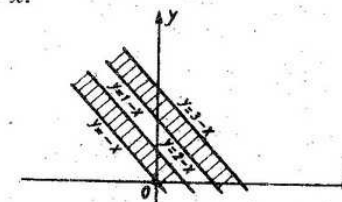
oblast (sl. 47) između pravih

$$y = -x \text{ i } y = 1-x.$$

Za $k=1$ osenčena oblast između

pravih čije su jednačine

$$y = 2-x \text{ i } y = 3-x \text{ itd.}$$



Slika 47

1688. Na osnovu pretpostavke imamo:

$$f(2) = f(1) + a^2$$

$$f(3) = f(2) + a^3$$

$$f(4) = f(3) + a^4$$

$$\dots\dots\dots$$

$$f(n) = f(n-1) + a^n.$$

Ako se saberu prethodne jednakosti, dobija se

$$f(n) = f(1) + a^2 + a^3 + \dots + a^n.$$

Posle sumiranja geometrijske progresije dobija se

$$f(n) = 1 + \frac{a^2(a^{n-1} - 1)}{a - 1}$$

(za $a \neq 1$).

Za $a = 1$ $f(n) = n$.

1691. Data jednakost se postupno transformiše u identične jednakosti

$$2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - 2 \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \frac{\alpha + \beta}{2} - \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \right)^2 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Suma kvadrata u skupu realnih brojeva jednaka je nuli ako je svaki sabirak jednak nuli. Odatle je

$$\sin \frac{\alpha - \beta}{2} = 0 \wedge \cos \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = 0$$

Iz prve jednakosti sledi da je $\alpha = \beta$, koja sa drugom daje jednakost

$$\cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3}.$$

Kako je $\alpha = \beta = \frac{\pi}{3}$, tada je i $\gamma = \frac{\pi}{3}$.

1692. Kako je

$$\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cos k} + \frac{\sin (k - (k-1))}{\cos (k-1) \cos k} =$$

$$= \frac{\sin k \cos (k-1) - \cos k \sin (k-1)}{\cos (k-1) \cos k}$$

to je $\frac{\sin 1}{\cos (k-1) \cos k} = \operatorname{tg} k - \operatorname{tg} (k-1)$. Ako u ovoj jednakosti stavimo $k = 1, 2, \dots, n$, zatim saberemo dobijene jednakosti, dobijamo traženu sumu S .

$$S = (\operatorname{tg} 1 - \operatorname{tg} 0) + (\operatorname{tg} 2 - \operatorname{tg} 1) + (\operatorname{tg} 3 - \operatorname{tg} 2) + \dots$$

$$+ (\operatorname{tg} n - \operatorname{tg} (n-1)) = \operatorname{tg} n.$$

LITERATURA

K. Alendorfer i H. K. Okli, *Principi matematike*, Beograd, 1966.

И. П. Антонов, М. Я. Выголкин, Б. Б. Никитин, А. И. Санкин: *Сборник задач по элементарной математике*, Москва, 1964.

Brkić – Gjumbir – Nikolić: *Najzanimljiviji zadaci s matematičkih natjecanja*, Zagreb, 1969.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka zadataka iz matematike za IV razred usmerenog obrazovanja*, Beograd, 1985.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz algebre za I razred gimnazije*, Beograd, 1970.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz algebre za II razred gimnazije*, Beograd, 1976.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za III razred gimnazije*, Beograd, 1977.

V. T. Bogoslavov: *Zbirka rešenih zadataka iz matematike za IV razred gimnazije*, Beograd, 1978.

C. Breard: *Mathematiques 3e*, Paris, 1962.

C. Breard: *Mathematiques 2e*, Paris, 1969.

A. Combes: *Exercices & problemes de mathematiques*, Paris, 1968.

P. M. Vasić, R. R. Janić, V. T. Bogoslavov: *Zbirka zadataka iz matematike za II razred srednjeg usmerenog obrazovanja*, Beograd, 1978.

P. M. Vasić, R. R. Janić, O. Mitrinović, D. Dj. Tošić: *Matematički priručnik za takmičenje srednjoškolaca i prijemne ispite na fakultetima*, Beograd, 1974.

R. R. Janić D. Dj. Tošić: *Zadaci iz matematike sa prijemnih ispita na tehničkim fakultetima*, Beograd, 1987.

J. Karamata: *Kompleksni brojevi sa primenom na elementarnu geometriju*, Beograd, 1950.

V. Lespinard et R. Pernet: *Algebre classe de premiere A-C-M-M*, Lyon, 1962.

A. De Marko i R. Leso: *Algebra con introduzione all algebra moderna*, Bolonja, 1979.

D. S. Mitrinović: *Matematička indukcija. Binomna formula Kombinatorika*, Beograd, 1970.

D. S. Mitrinović: *Matematika u obliku metodičke zbirke zadataka sa rešenjima I*, Beograd, 1978.

D. S. Mitrinović, D. Mihailović, P. M. Vasić: *Linearna algebra Polinomi Analitička geometrija*, Beograd, 1975.

И. С. Моденов: *Сборник задач по специальному курсу элементарной математики*, Москва, 1964.

SADRŽAJ

PREDGOVOR SEDAMNAESTOM IZDANJU	3
I. GLAVA	
1. POVRŠINA (KVADRATURA) POLIGONA	5
II. GLAVA	
2. POLIEDRI	12
2.1. Prizma i piramida. Ravni presezi prizme i piramide	12
2.2. Površina i zapremina prizme	13
2.3. Površina i zapremina piramide i zarubljene piramide	16
III. GLAVA	
3. KRUG	22
3.1. Dužina kruga i kružnog luka. Površina kruga, kružnog isecika i kružnog odsečka	22
IV. GLAVA	
4. OBRTNA TELA	26
4.1. Valjak	26
4.2. Kupa i zarubljena kupa	28
4.3. Površina lopte, sferne kalote i pojasa. Zapremina lopte, loptinog isecika i odsečka	34
V. GLAVA	
5. DETERMINANTE SA PRIMENOM	39
5.1. Determinante drugog i trećeg reda	39
5.2. Sistemi linearnih jednačina	41
VI. GLAVA	
6. VEKTORI	44
6.1. Vektori u ravni i prostoru	44
VII. GLAVA	
7. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI	51
7.1. Tačka	51
7.2. Prava	54
7.3. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate, rešavanje problema linearnog programiranja	65
7.4. Kružnica	66
7.5. Elipsa	75
7.6. Hiperbola	82
7.7. Parabola	89
7.8. Geometrijsko tumačenje rešenja sistema jednačina i nejednačina prvog i drugog stepena sa dve nepoznate (primena analitičke geometrije)	98

VIII. GLAVA

8. MATEMATIČKA INDUKCIJA, NIZOVI	99
8.1. Matematička indukcija	99
8.2. Beskonačni nizovi	103
8.3. Aritmetički niz	104
8.4. Geometrijski niz	111
8.5. Diferencne jednačine	119
8.6. Granična vrednost beskonačnog niza	121
8.7. Beskonačni red	123
8.8. Složeni interesni račun	126

IX. GLAVA

9. KOMPLEKSNI BROJEVI	128
9.1. Oznake, obrasci i definicije	128
9.2. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja	128
9.3. Binomne jednačine	136
9.4. Trinomne jednačine	137
9.5. Simetrične (recipročne) jednačine	138
9.6. Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva	140
9.7. Sistem algebarskih jednačina višeg reda	143

X. GLAVA

10. RAZNI ZADACI	146
------------------	-----

REŠENJA

I. GLAVA

1. POVRŠINA (KVADRATURA) POLIGONA	157
-----------------------------------	-----

II. GLAVA

2. POLIEDRI	170
2.1. Prizma i piramida. Ravni preseki prizme i piramide	170
2.2. Površina i zapremina prizme	171
2.3. Površina i zapremina piramide i zarubljene piramide	174

III. GLAVA

3. KRUG	180
3.1. Dužina kruga i kružnog luka. Površina kruga, kružnog isečka i kružnog odsečka	180

IV. GLAVA

4. OBRATNA TELA	185
4.1. Valjak	185
4.2. Kupa i zarubljena kupa	186
4.3. Površina lopte, sferne kalote i pojasa. Zapremina lopte, loptinog isečka i odsečka	193

V. GLAVA

5. DETERMINANTE SA PRIMENOM	199
5.1. Determinante drugog i trećeg reda	199
5.2. Sistem linearnih jednačina	200

VI. GLAVA

6. VEKTORI	206
6.1. Vektori u ravni i prostoru	206

VII. GLAVA

7. ANALITIČKA GEOMETRIJA U RAVNI	215
7.1. Tačka	215
7.2. Prava	217
7.3. Grafička interpretacija sistema linearnih nejednačina sa dve nepoznate. Rešavanje problema linearnog programiranja	228
7.4. Kružnica	230
7.5. Elipsa	242
7.6. Hiperbola	251
7.7. Parabola	259
7.8. Geometrijsko tumačenje rešenja sistema jednačina i nejednačina prvog i drugog stepena sa dve nepoznate (primena analitičke geometrije)	269

VIII. GLAVA

8. MATEMATIČKA INDUKCIJA, NIZOVI	271
8.1. Matematička indukcija	271
8.2. Beskonačni nizovi	285
8.3. Aritmetički niz	287
8.4. Geometrijski niz	303
8.5. Diferencne jednačine	313
8.6. Granična vrednost beskonačnog niza	314
8.7. Beskonačni red	317
8.8. Složeni interesni račun	324

IX. GLAVA

9. KOMPLEKSNI BROJEVI	327
9.2. Trigonometrijski oblik kompleksnog broja	327
9.3. Binomne jednačine	337
9.4. Trinomne jednačine	338
9.5. Simetrične (recipročne) jednačine	339
9.6. Polinomi nad poljem kompleksnih brojeva	342
9.7. Sistem algebarskih jednačina višeg reda	344

X. GLAVA

10. RAZNI ZADACI	348
LITERATURA	359

Mr VENE T. BOGOSLAVOV: ZBIRKA REŠENIH ZADATAKA IZ MATEMATIKE 3 – dvadeseto izdanje, 1995. • Izdavač: ZAVOD ZA UDŽBENIKE I NASTAVNA SREDSTVA, Beograd, Obilićev venac 5 • Likovni urednik: TAMARA POPOVIĆ-NOVAKOVIĆ • Grafički urednik: DUŠAN KNEŽEVIĆ • Lektori: DUŠICA TRIFUNOVIĆ, MIROSLAVA RUŽIĆ • Korice: NEBOJŠA JEHLIČKA • Kompjuterska obrada: IBIS-JURIJ LAVROV • Korektori: GORICA MARKOVIĆ, LJILJANA PORČIĆ • Obim: 22¹/₄ • Štamparskih tabaka • Tiraž: 15.000 primeraka • Format 14 x 20 cm • Rukopis predat u štampu septembra 1995. godine • Štampanje završeno septembra 1995. godine • Štampa: DD IP „Vuk Karadžić“ - Paraćin