

Univerza v Ljubljani
Pedagoška fakulteta
Oddelek za matematiko in računalništvo

Marko Razpet

STIRLINGOVA FORMULA

Študijsko gradivo

Ljubljana, februar 2025

Vsebina

Seznam slik	4
Predgovor	5
Kdo je bil James Stirling?	6
Oznake	7
Nekaj integralov	7
Wallisova formula	9
Logaritemska vrsta	10
Eulerjevi integrali	11
Bernoullijevi polinomi in števila	13
Euler–Maclaurinova formula	20
Izpeljave Stirlingove formule	22
Prva izpeljava	22
Druga izpeljava	26
Tretja izpeljava	30
Četrta izpeljava	32
Peta izpeljava	34
Šesta izpeljava	38
Sedma izpeljava	39
Osma izpeljava	41

Deveta izpeljava	42
Deseta izpeljava	43
Enajsta izpeljava	46
Primeri uporabe Stirlingove formule	50
Zaključek	56
Viri	57

Seznam slik

1	Grafa funkcij $x \mapsto \psi_1(x)$ in $x \mapsto \psi_2(x)$	16
2	K razvoju Euler–Maclaurinove sumacijske formule.	22
3	Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s trapezi.	26
4	Zgornji in spodnji približek krivulje $y = \ln x$ na intervalu $[k, k + 1]$. .	27
5	Graf funkcije $x \mapsto \ln \Gamma(a + x)$	33
6	Graf funkcije $\eta \mapsto \psi(\eta) = \eta - \ln(1 + \eta)$	34
7	Grafa funkcije $\eta \mapsto \chi(\eta)$ in $\xi \mapsto \varphi(\xi)$	35
8	Grafa funkcije $y \mapsto g_n(y)$ za $n = 9$ (modra) in $n = 100$ (zelena) ter graf funkcije $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ (rdeča).	39
9	Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s pravokotniki.	44
10	Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s pravokotnikom, trikotnikom in trapezom.	47

Predgovor

Faktorijela ali fakulteta naravnega števila n , ki jo označujemo z $n!$, je opredeljena kot produkt prvih n zaporednih naravnih števil. Z rastočim n število $n!$ zelo hitro narašča in slej ko prej preseže še tako veliko naravno število. Faktorijelo srečamo tudi v kombinatoriki. Če se vprašamo, na koliko različnih načinov lahko postavimo n različnih predmetov v vrsto, je odgovor preprost: na $n!$ načinov. Za $n = 20$ dobimo velikansko, 19-mestno število

$$20! = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000,$$

ki ga že kar težko povemo z besedami. Število $25!$ je že 26-mestno, $100!$ je 158-mestno, $1000!$ pa 2568-mestno. To so nepredstavljivo velika števila, nikoli največja. Zato so matematiki dolgo časa iskali način, kako bi $n!$ vsaj približno izračunali za velike n . Našli so približek, ki se izraža kar z elementarnimi funkcijami. In tu priskoči na pomoč znamenita Stirlingova formula. Vanjo je vključeno število π , to je razmerje med obsegom in premerom kroga, pa tudi število

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

in eksponentna funkcija $x \mapsto e^x$. V izpeljavah je neobhodno potrebna tudi njena inverzna funkcija $x \mapsto \ln x$. Srečali pa se bomo tudi s funkcijama $x \mapsto \sin x$ in $x \mapsto \operatorname{tg} x$.

Ogledali si bomo nekaj njenih v matematični literaturi objavljenih izpeljav, ki večinoma bazirajo na metodah matematične analize. Na koncu bo sledilo tudi nekaj primerov uporabe v matematiki.

Za razumevanje gradiva je potrebno solidno znanje univerzitetne matematike, predvsem infinitezimalnega računa ter teorije zaporedij in vrst.

Kdo je bil James Stirling?

James Stirling (1692–1770) je bil škotski matematik, znan predvsem po prispevkih k matematični analizi, teoriji verjetnosti in približkih v matematiki. Njegovo najbolj znano delo vključuje tako imenovano *Stirlingovo formulo*, ki je pomembna v teoriji faktorijel in asimptotičnih približkih. Stirlingova formula podaja učinkovito aproksimacijo za faktorijelo naravnega števila, in sicer $n!$.

Rodil se je leta 1692 v škotskem mestu Garden (danes del okrožja Stirling). Študiral je na Univerzi v Glasgowu in kasneje na Univerzi v Oxfordu, vendar ni dokončal študija zaradi političnih razmer in svoje povezave s škotskimi jakobiti.

Jakobiti so bili pripadniki političnega in verskega gibanja v Veliki Britaniji in na Irskem, ki so v 17. in 18. stoletju podpirali povrnitev dinastije Stuart na prestol. Ime *jakobiti* izhaja iz latinske oblike imena Jakob – Jacobus, saj so podpirali kralja Jakoba II. in njegove potomce.

Večino svojega življenja je preživel v Angliji in celinski Evropi, kjer je sodeloval z drugimi znanstveniki. Leta 1730 je izdal svoje najpomembnejše delo *Methodus Differentialis*, v katerem je obravnaval asimptotične vrste, interpolacijo in diferencialne enačbe. Ukvarjal se je tudi z uporabo matematike pri fizikalnih problemih, vključno s proučevanjem nihanj in hidrostatike.

Stirlingova formula je postala ključna v razvoju teorije verjetnosti, še posebej pri aproksimacijah v kombinatoriki in statistiki. Njegovo delo je vplivalo na številne poznejše matematike, kot sta na primer Pierre-Simon Laplace in Carl Friedrich Gauß.

Čeprav je bil v svojem času cenjen, so nekateri njegovi dosežki postali

široko prepoznavni šele po njegovi smrti. Njegovo ime je ovekovečeno v matematični literaturi, predvsem zaradi Stirlingove formule.

Oznake

1. Faktorialne funkcije (tudi faktorialne) se izražajo kot produkti končno mnogo števil, pri čemer ta števila sestavljajo aritmetično zaporedje. Navedimo samo tri primere.

Za nenegativna cela števila n je:

$$n! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 1, & n = 1, \\ 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n, & n \geq 2. \end{cases}$$

$$(2n)!! = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n = 1, \\ 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n), & n \geq 2. \end{cases}$$

$$(2n-1)!! = \begin{cases} 1, & n = 1, \\ 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1), & n \geq 2. \end{cases}$$

Veljata preprosti enakosti:

$$(2n)! = (2n)!!(2n-1)!!, \quad (2n)!! = 2^n n!.$$

Nekaj integralov

V matematiki sta pomembna integrala

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx, \quad J_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n x \, dx,$$

kjer je n nenegativno celo število.

Substitucija $y = \pi/2 - x$ nas prepriča, da je $I_n = J_n$ za vsak n . Očitno je $I_0 = \pi/2$ in $I_1 = 1$. Za $n > 1$ dobimo z metodo delne integracije:

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^{n-1} x \sin x dx = \\ &= -\sin^{n-1} x \cos x \Big|_0^{\pi/2} + (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x \cos^2 x dx = \\ &= (n-1) \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x (1 - \sin^2 x) dx = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n. \end{aligned}$$

Začetek in konec računa nam dasta $nI_n = (n-1)I_{n-2}$ in od tod imamo rekurzivno zvezo

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

Razlikovati je treba primera, ko je n sodo število, denimo $2m$, in ko je n liho število, denimo $2m+1$. Za rezultat dobimo

$$I_{2m} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x dx = \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$I_{2m+1} = \int_0^{\pi/2} \sin^{2m+1} x dx = \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!}. \quad (2)$$

Pri I_{2m} je v zapisu rezultata $m > 0$, pri I_{2m+1} pa $m \geq 0$.

Pri izpeljavi Stirlingove formule naletimo tudi na integral

$$I = \int_0^{\pi} \ln \sin x dx.$$

Kako ga izračunamo, čeprav ne poznamo ustreznega nedoločene integrala? Najprej upoštevamo simetričnost funkcije $\sin$ na intervalu $(0, \pi)$ glede na točko $\pi/2$, nato vpeljemo novo spremenljivko t z relacijo $x = 2t$:

$$I = 2 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x dx = 4 \int_0^{\pi/4} \ln \sin 2t dt = 4 \int_0^{\pi/4} \ln(2 \sin t \cos t) dt =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/4} \ln 2 \, dt + 4 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 4 \int_0^{\pi/4} \ln \cos t \, dt.$$

V zadnji integral vpeljemo novo spremenljivko u z relacijo $t = \pi/2 - u$ in dobimo:

$$\begin{aligned} I &= \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi/4} \ln \sin t \, dt + 4 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \ln \sin u \, du = \\ &= \pi \ln 2 + 4 \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = \pi \ln 2 + 2I. \end{aligned}$$

Iz dobljene zveze $I = \pi \ln 2 + 2I$ dobimo končni rezultat:

$$\int_0^{\pi} \ln \sin x \, dx = -\pi \ln 2. \quad (3)$$

Včasih zadoščata tudi integrala

$$\int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2 \quad \text{in} \quad \int_0^{1/2} \ln \sin \pi x \, dx = -\frac{1}{2} \ln 2. \quad (4)$$

Wallisova formula

Za $x \in (0, \pi/2)$ velja relacija

$$\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x,$$

iz katere z uporabo integralov (1) in (2) sledi

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} x \, dx < \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-1} x \, dx.$$

Upoštevamo rezultata (1) in (2), da dobimo relacijo

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!},$$

iz katere sledi

$$\frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{2} < \frac{1}{2n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2.$$

Za razliko skrajnih dveh izrazov dobimo

$$\frac{1}{2n} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 - \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 = \frac{1}{2n(2n+1)} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2 < \frac{\pi}{4n}.$$

Ko $n \rightarrow \infty$, skrajna izraza konvergirata proti $\pi/2$, kar pomeni

$$\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n+1} \left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right]^2. \quad (5)$$

To je znamenita *Wallisova formula*. Utemeljil jo je angleški matematik in klerik John Wallis (1616–1703).

Iz Wallisove formule dobimo kot posledico še

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}. \quad (6)$$

Logaritemska vrsta

Znan je razvoj v geometrijsko vrsto

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1}, \quad -1 < t < 1.$$

Za $-1 < x < 1$ dobimo z integracijo

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} t^{n-1} \right\} dt$$

razvoj

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \int_0^x t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n.$$

Dobljena vrsta konvergira tudi za $x = 1$ po Leibnizevem kriteriju za alternirajoče ali izmenične vrste, in sicer velja

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2. \quad (7)$$

Leibnizev kriterij pove, da alternirajoča vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (a_n > 0)$$

konvergira, čim je $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Osnovna logaritemska vrsta je potemtakem

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad (-1 < x \leq 1). \quad (8)$$

Z zamenjavo $x \rightarrow -x$ takoj dobimo še

$$\ln(1-x) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n, \quad (-1 \leq x < 1). \quad (9)$$

Oba razvoja odštejemo in dobimo:

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = \ln(1+x) - \ln(1-x) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} x^{2k+1}, \quad (-1 < x < 1). \quad (10)$$

Eulerjeva integrala

Marsikateri integral lahko hitro izračunamo, če obvladamo Eulerjeva integrala oziroma funkciji gama (Γ) in beta (B), ki sta definirani takole:

$$\Gamma(p) = \int_0^{\infty} x^{p-1} e^{-x} dx, \quad (p > 0),$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad (p > 0, q > 0).$$

Najvažnejše, kar je treba pri tem vedeti, je naslednje:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p), \quad \Gamma(n+1) = n!, \quad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}, \quad B(p, q) = B(q, p).$$

Pri tem je n nenegativno celo število. Nadalje veljata zvezi:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad \Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi}, \quad (0 < p < 1).$$

Do Eulerjevih integralov pogosto pridemo s primerno substitucijo v določen integral.

Včasih je koristna tudi *Legendrova formula*. Do nje pridemo razmeroma enostavno:

$$B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx = \int_0^1 (x-x^2)^{p-1} dx = 2 \int_0^{1/2} \left(\frac{1}{4} - \left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \right)^{p-1} dx.$$

Z relacijo $1/2 - x = \sqrt{t}/2$ v zadnji integral uvedemo novo spremenljivko t in dobimo

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 t^{-1/2} (1-t)^{p-1} dt = \frac{1}{2^{2p-1}} B(1/2, p).$$

Našli smo enakost

$$B(1/2, p) = 2^{2p-1} B(p, p), \quad (11)$$

ki jo izrazimo z Eulerjevim integralom Γ :

$$\Gamma(p) \Gamma(p + 1/2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p).$$

To je znamenita *Legendrova formula*, ki velja za $p > 0$.

Uporabnost Eulerjevega integrala Γ ilustrirajmo na primeru integrala

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

Pod integralskim znakom je soda funkcija. V integral vpeljemo novo spremenljivko $x = \sqrt{2}v^{1/2}$, $dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}v^{-\frac{1}{2}} dv$ in dobimo:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx &= 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2^n \sqrt{2} \int_0^{\infty} v^{n-\frac{1}{2}} e^{-v} dv = 2^n \sqrt{2} \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \\ &= 2^n \sqrt{2} \left(n - \frac{1}{2}\right) \left(n - \frac{3}{2}\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = (2n-1)!! \sqrt{2\pi} \end{aligned}$$

za vsako naravno število $n > 1$. Posebej je za $n = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{2\pi}.$$

Imamo naslednja rezultata:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2n-1)!!\sqrt{2\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}. \quad (12)$$

Na tem mestu izračunajmo še Raabejev integral:

$$R = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx.$$

S substitucijo $t = 1 - x$ ugotovimo, da velja tudi

$$R = \int_0^1 \ln \Gamma(1-x) dx.$$

Oba integrala seštejemo in dobimo:

$$\begin{aligned} 2R &= \int_0^1 (\ln \Gamma(x) + \ln \Gamma(1-x)) dx = \int_0^1 \ln(\Gamma(x)\Gamma(1-x)) dx = \\ &= \int_0^1 \ln \frac{\pi}{\sin \pi x} dx = \ln \pi - \int_0^1 \ln \sin \pi x dx. \end{aligned}$$

Uporabimo rezultat v (4) in dobimo:

$$2R = \ln \pi + \ln 2 = \ln(2\pi), \quad R = \frac{1}{2} \ln(2\pi) = \ln \sqrt{2\pi}.$$

Nazadnje imamo rezultat:

$$\int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}. \quad (13)$$

Bernoullijevi polinomi in števila

Do Bernoullijevih števil in polinomov pa navadi pridemo s tako imenovano rodovno funkcijo, ki v razvoju v potenčno vrsto da ta števila oziroma

polinome. Z Bernoullijevimi števili se izražajo razvoji nekaterih funkcij v potenčno vrsto, pa tudi vrednosti $\zeta(2n)$ za naravna števila n , pri čemer je $s \mapsto \zeta(s)$ znamenita Riemannova funkcija.

Vendar je možen tudi drugačen pristop, ki je v nadaljevanju povzet iz dela [8]. Sestavimo tako polinomsko zaporedje

$$B_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$$

pri katerem bo stopnja polinoma $B_n(x)$ enaka n in

$$B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x) \quad \text{ter} \quad \int_0^1 B_n(x) dx = \delta_{n,0} \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Vsako polinomsko zaporedje, v katerem je stopnja člena enaka indeksu, imenujemo *pravilno polinomsko zaporedje*. Zaporedje Bernoullijevih polinomov je torej pravilno.

Ker mora biti $B_0(x)$ konstanta, imamo takoj: $B_0(x) = 1$. Iz pogoja $B'_1(x) = 1$ dobimo $B_1(x) = x + c_1$, konstanto c_1 pa izračunamo iz pogoja $\int_0^1 B_1(x) dx = 0$ in dobimo: $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$. Podobno razvijemo ostale polinome $B_n(x)$. Zapišimo jih nekaj:

$$B_0(x) = 1,$$

$$B_1(x) = x - \frac{1}{2},$$

$$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$$

$$B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x,$$

$$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30},$$

$$B_5(x) = x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.$$

Polinomi $B_n(x), n = 0, 1, 2, \dots$ so *Bernoullijevi polinomi*, imenovani po Jakobu Bernoulliju (1654–1705).

Na krajiščih intervala $[0, 1]$ ima polinom $B_n(x)$ enaki vrednosti razen $B_1(x)$, pri katerem dobimo: $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ in $B_1(1) = \frac{1}{2}$. Za $B_0(x)$ je seveda $B_0(0) = B_0(1) = 1$, za $n > 1$ pa je

$$B_n(1) - B_n(0) = \int_0^1 B'_n(x) dx = (n-1) \int_0^1 B_{n-1}(x) dx = 0.$$

Na kratko lahko to ugotovitev strnemo v zvezo:

$$B_n(1) - B_n(0) = \delta_{n-1,0}.$$

Polinome $B_n(x)$ razvijmo na intervalu $[0, 1]$ v trigonometrične Fourierjeve vrste

$$B_n(x) \sim \frac{1}{2} \alpha_0^{(n)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\alpha_k^{(n)} \cos(2k\pi x) + \beta_k^{(n)} \sin(2k\pi x) \right),$$

pri čemer Fourierjeve koeficiente $\alpha_k^{(n)}$ in $\beta_k^{(n)}$ izračunamo po formulah:

$$\alpha_k^{(n)} = 2 \int_0^1 B_n(x) \cos(2k\pi x) dx \quad \text{in} \quad \beta_k^{(n)} = 2 \int_0^1 B_n(x) \sin(2k\pi x) dx.$$

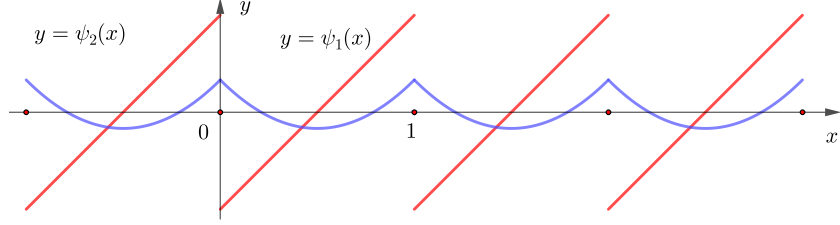
Vsote Fourierjevih vrst naj bodo funkcije $x \mapsto \psi_n(x)$, za katere takoj ugotovimo, da so periodične z osnovno periodo $T = 1$, povsod zvezne, odvedljive pa niso pri vseh celih argumentih x . Izjema je funkcija $x \mapsto \psi_1(x)$, ki ni zvezna pri nobenem celem argumentu x . Na intervalu $[0, 1]$ seveda velja: $\psi_n(x) = B_n(x)$ za vse indekse $n \neq 1$. Za $n = 1$ pa je $\psi_1(x) = B_1(x)$ za $0 < x < 1$. Grafa funkcij $x \mapsto \psi_1(x)$ in $x \mapsto \psi_2(x)$ prikazuje slika 1.

Očitno lahko vzamemo:

$$\alpha_k^{(0)} = 2\delta_{n,0} \quad \text{in} \quad \beta_k^{(0)} = 0 \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Zaradi zveze $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$ je dovolj izračunati Fourierjeve koeficiente za $\psi_1(x)$. Dobimo:

$$\alpha_k^{(1)} = 0 \quad \text{za} \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \text{in} \quad \beta_k^{(1)} = -\frac{1}{k\pi} \quad \text{za} \quad 1, 2, \dots$$



Slika 1: Grafa funkcij $x \mapsto \psi_1(x)$ in $x \mapsto \psi_2(x)$.

Tako imamo naslednjo Fourierjevo vrsto:

$$\psi_1(x) = -\frac{2}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k}.$$

Funkcija $x \mapsto \psi_1(x)$ se razen za cele argumente x ujema s funkcijo $x \mapsto \{x\} = x - [x]$, kjer je $[x]$ celi del realnega števila x . Ker je

$$\psi_2'(x) = 2\psi_1(x) \quad \text{za} \quad 0 < x < 1 \quad \text{in} \quad \int_0^1 \psi_2(x) dx = 0,$$

dobimo najprej

$$\psi_2(x) = 2 \frac{2!}{(2\pi)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^2},$$

nato pa korak za korakom ugotovimo, da se da funkcije $x \mapsto \psi_n(x)$ sodega indeksa n razviti po kosinusi, lihega indeksa pa po sinusih:

$$\psi_{2n}(x) = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\pi x)}{k^{2n}} \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \dots,$$

$$\psi_{2n+1}(x) = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n+1)!}{(2\pi)^{2n+1}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k\pi x)}{k^{2n+1}} \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Na prvi pogled vidimo, da so funkcije $x \mapsto \psi_{2n}(x)$ v točki $x = 0$ za $n \geq 1$ dajo izraziti z Riemannovo funkcijo $s \mapsto \zeta(s)$, ki je za $s > 1$ definirana kot vsota vrste:

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Bernoullijeva števila B_n definirajmo sedaj takole:

$$B_n = B_n(0) \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Za prvih nekaj indeksov hitro najdemo:

$$B_0 = 1, B_1 = -\frac{1}{2}, B_2 = \frac{1}{6}, B_3 = 0, B_4 = -\frac{1}{30}.$$

Ker so funkcije $x \mapsto \psi_n(x)$ za $n \neq 1$ povsod zvezne in se na intervalu $[0, 1]$ ujemajo s polinomi $B_n(x)$, lahko tedaj zapišemo tudi:

$$B_n = \psi_n(0).$$

Torej je za vse lihe n od vključno 3 naprej $B_n = 0$. V primeru sodih indeksov pa imamo

$$B_{2n} = 2(-1)^{n+1} \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) \quad \text{in} \quad \zeta(2n) = (-1)^{n+1} \frac{(2\pi)^{2n}}{2(2n)!} B_{2n} \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \dots,$$

iz česar lahko izračunamo:

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= (-1)^2 \frac{(2\pi)^2}{4} \frac{1}{6} = \frac{\pi^2}{6}, \\ \zeta(4) &= (-1)^3 \frac{(2\pi)^4}{48} \left(-\frac{1}{30}\right) = \frac{\pi^4}{90}. \end{aligned}$$

Ker velja za $n \geq 1$ relacija

$$1 < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6} < 2,$$

to se pravi

$$1 < \zeta(2n) < 2,$$

imamo upoštevanje zvezo med B_{2n} in $\zeta(2n)$ oceno:

$$\frac{2}{(2\pi)^{2n}} < \frac{|B_{2n}|}{(2n)!} < \frac{4}{(2\pi)^{2n}}.$$

Ker so števila B_n z lihim indeksom od vključno 3 naprej enaka 0, imamo zato naslednji rezultat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{B_n}{n!} = 0.$$

Ker je

$$|B_{2n}| > \frac{2(2n)!}{(2\pi)^{2n}},$$

velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |B_{2n}| = \infty.$$

Na intervalu $[0, 1]$ so Bernoullijevi polinomi sodih indeksov takole omejeni:

$$|B_{2n}(x)| \leq B_{2n}.$$

Do te ocene pridemo s sklepom:

$$|B_{2n}(x)| = |\psi_{2n}(x)| \leq 2 \frac{(2n)!}{(2\pi)^{2n}} \zeta(2n) = |B_{2n}|.$$

Rodovna funkcija $(x, z) \mapsto G(x, z)$ v eksponencialni obliki za zaporedje Bernoullijevih polinomov $B_n(x)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, je v splošnem funkcija kompleksnih spremenljivk x in z , ki razvita v potenčno vrsto glede na z generira te polinome:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Podobno vpeljemo rodovno funkcijo $z \mapsto H(z)$ v eksponencialni obliki, v splošnem kompleksne spremenljivke z , za številsko zaporedje B_n , $n = 0, 1, 2, \dots$, ki razvita v potenčno vrsto glede na z generira števila B_n :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Poiščimo eksponencialni obliki za $G(x, z)$ in $H(z)$ za Bernoullijeve polinome oziroma Bernoullijeva števila. Ker je $B_n = B_n(0)$, mora veljati zveza:

$H(z) = G(0, z)$. Naj bo torej najprej:

$$G(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n.$$

Za $n \geq 2$ in $0 \leq x \leq 1$ velja

$$\left| \frac{B_n(x)}{n!} \right| = \left| \frac{\psi_n(x)}{n!} \right| \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \zeta(n) \leq \frac{2}{(2\pi)^n} \frac{\pi^2}{6} < \frac{4}{(2\pi)^n}$$

in zato

$$\left| \frac{B_n(x)}{n!} z^n \right| < 4 \left(\frac{|z|}{2\pi} \right)^n.$$

Zato vrsta za $G(x, z)$ absolutno in enakomerno konvergira za $|z| < 2\pi$ glede na $x \in [0, 1]$. Prav tako konvergira vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B'_n(x)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nB_{n-1}(x)}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{n-1}(x)}{(n-1)!} z^n = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = zG(x, z),$$

in sicer proti $\frac{\partial G}{\partial x}(x, z)$. Torej zadošča $G(x, z)$ parcialni diferencialni enačbi

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x, z) = zG(x, z),$$

ki ima splošno rešitev

$$G(x, z) = c(z)e^{xz},$$

kjer je $c(z)$ odvisna samo od z . Ker je

$$\int_0^1 G(x, z) dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} (x) z^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\int_0^1 B_n(x) dx \right) \frac{z^n}{n!} = 1$$

in po drugi strani

$$\int_0^1 G(x, z) dx = \int_0^1 c(z)e^{xz} dx = c(z) \frac{e^z - 1}{z},$$

imamo izraz za $c(z)$:

$$c(z) = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Pripomniti je treba, da ima $c(z)$ pri $z = 0$ odpravljivo singularnost. Tako smo prišli do rodovnih funkcij:

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n$$

in

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n.$$

Vrsti konvergirata za $|z| < 2\pi$, to se pravi na odprtem krogu radija 2π s središčem v točki 0 v kompleksni ravnini. Ta krog sega do najbližje singularnosti funkcije $c(z)$. Vse singularnosti so v točkah $z = 2m\pi i$, kjer je m poljubno celo število. Za $m = 0$ pa imamo, kot je bilo rečeno, odpravljivo singularnost.

Euler–Maclaurinova formula

Pristop do Euler–Maclaurinove formule je povzet iz dela [8]. Funkcije $x \mapsto \psi_n(x)$ in števila B_n , vpeljana na začetku, bomo uporabili v Euler–Maclaurinovi formuli, ki na zanimiv in včasih uporaben način povezuje vsoto in integral.

Privzemimo, da je funkcija $x \mapsto f(x)$ integrabilna in zadostikrat zvezno odvedljiva na intervalu $[p, q]$, kjer sta p in q celi nenegativni števili in $p < q$. Najprej imamo za celo število $k \in [p, q]$:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \int_k^{k+1} f(x) \psi_0(x) dx = \int_k^{k+1} f(x) \psi_1'(x) dx.$$

Z delno integracijo dobimo:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = f(k+1) \psi_1(k+1-0) - f(k) \psi_1(k+0) - \int_k^{k+1} f'(x) \psi_1(x) dx.$$

Ker je $\psi_1(k+1-0) = B_1 = \frac{1}{2}$ in $\psi_1(k+0) = -B_1 = -\frac{1}{2}$, imamo:

$$\int_k^{k+1} f(x) dx = \frac{1}{2}f(k) + \frac{1}{2}f(k+1) - \int_k^{k+1} f'(x)\psi_1(x) dx.$$

Formula povezuje točno vrednost integrala in njegov približek, dobljen po trapezni formuli. S seštevanjem dobimo splošnejšo formulo:

$$\frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q) = \int_p^q f(x) dx + \int_p^q f'(x)\psi_1(x) dx.$$

Z večkratno delno integracijo pa dobimo Euler–Maclaurinovo formulo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q) = \\ = \int_p^q f(x) dx + \sum_{k=1}^n \frac{B_{2k}}{(2k)!} [f^{(2k-1)}(q) - f^{(2k-1)}(p)] + R_n, \end{aligned} \quad (14)$$

kjer je

$$\begin{aligned} R_n = -\frac{1}{(2n)!} \int_p^q f^{(2n)}(x)\psi_{2n}(x) dx = -\frac{1}{(2n+1)!} \int_p^q f^{(2n)}(x)\psi'_{2n+1}(x) dx = \\ = \frac{1}{(2n+1)!} \int_p^q f^{(2n+1)}(x)\psi_{2n+1}(x) dx. \end{aligned}$$

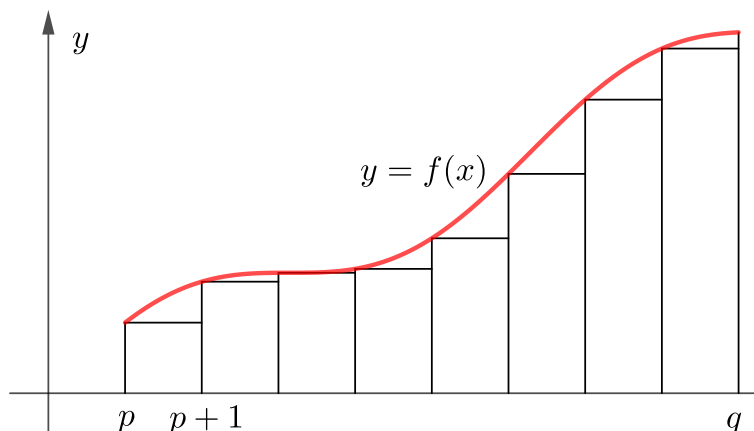
Izkaže se, da je R_n oblike

$$R_n = \pm \vartheta_n \frac{B_{2n}}{(2n)!} [f^{(2n+1)}(q) - f^{(2n+1)}(p)],$$

kjer je število ϑ_n med 0 in 1, če imata odvoda $f^{(2n-1)}(x)$ in $f^{(2n+1)}(x)$ na intervalu $[p, q]$ isti predznak. Obstajajo pa tudi druge oblike za R_n pri drugačnih pogojih, ki jih mora izpolnjevati funkcija $x \mapsto f(x)$.

Z uporabo Euler–Maclaurinove formule lahko na primer najdemo zvezo z Euler–Mascheronijevo konstanto in izpeljemo Stirlingovo formulo.

Euler–Maclaurinova formula za pozitivno funkcijo f izraža razliko med ploščino lika pod grafom funkcije f na intervalu $[p, q]$ in skupno ploščino trapezov, ki so temu liku prirejeni, kot je prikazano na sliki 2.



Slika 2: K razvoju Euler–Maclaurinove sumacijske formule.

Ploščine trapezov so po vrsti:

$$\frac{1}{2}(f(p) + f(p+1)), \frac{1}{2}(f(p+1) + f(p+2)), \dots, \frac{1}{2}(f(q-1) + f(q)).$$

Njihova skupna ploščina pa je približek za integral funkcija f na intervalu $[p, q]$:

$$\frac{1}{2}f(p) + f(p+1) + \dots + f(q-1) + \frac{1}{2}f(q).$$

Ta izraz pa imamo v Euler–Maclaurinovi formuli.

Izpeljave Stirlingove formule

Prva izpeljava

Najprej bomo porabili izpeljavo, ki je bila objavljena v [5]. Je šolski primer dobre in korektne izpeljave, ki je primerna za študente matematike. V

razvoj (10) vstavimo $x = 1/(2n+1)$, kjer je n poljubno naravno število.

Zagotovo je $0 < x < 1$. Dobimo:

$$\ln \frac{1 + \frac{1}{2n+1}}{1 - \frac{1}{2n+1}} = \ln \frac{n+1}{n} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k+1}} = \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Enakost prepišemo v obliko

$$\left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \frac{1}{(2n+1)^{2k}}.$$

Vsota vrste na desni strani prejšnje enakosti je manjša kot vsota vrste

$$1 + \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^{2k}} = 1 + \frac{1}{3} \frac{\frac{1}{(2n+1)^2}}{1 - \frac{1}{(2n+1)^2}} = 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Zadnja vrsta je geometrijska z začetnim členom in kvocientom $1/(2n+1)^2$.

Našli smo relacijo

$$1 < \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < 1 + \frac{1}{12n(n+1)}.$$

Ker je eksponentna funkcija $x \mapsto e^x$ naraščajoča, lahko zapišemo:

$$e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} < e^{1 + \frac{1}{12n(n+1)}}. \quad (15)$$

Sedaj vpeljemo zaporedje s splošnim členom

$$a_n = \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Izračunajmo

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}}}{\frac{(n+1)!e^{n+1}}{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{e} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}.$$

Zaradi (15) velja

$$1 < \frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{12n(n+1)}} = \frac{e^{\frac{1}{12n}}}{e^{\frac{1}{12(n+1)}}}.$$

Zaporedje s splošnim členom a_n je padajoče in pozitivno in ima končno pozitivno limito a . Velja pa tudi relacija

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a_{n+1} e^{-\frac{1}{12(n+1)}},$$

kar pomeni, da je zaporedje s splošnim členom $a_n e^{-\frac{1}{12n}}$ naraščajoče in ima prav tako za limito a , ker $e^{-\frac{1}{12n}} \rightarrow 1$, ko $n \rightarrow \infty$. Lahko iz vsega tega zaključimo, da velja:

$$a_n e^{-\frac{1}{12n}} < a < a_n e^{-\frac{0}{12n}}.$$

Če vpeljemo funkcijo $x \mapsto f_n(x) = a_n e^{-\frac{x}{12n}}$, potem velja

$$f_n(1) < a < f_n(0).$$

Ker je f_n zvezna funkcija spremenljivke x , obstaja tako število $\vartheta_n \in (0, 1)$, da velja $a = f_n(\vartheta_n) = a_n e^{-\frac{\vartheta_n}{12n}}$. To se pravi, da za neko število $\vartheta_n \in (0, 1)$ lahko zapišemo:

$$a_n = \frac{n! e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = a e^{\frac{\vartheta_n}{12n}}.$$

To pa pomeni, da lahko izrazimo

$$n! = a n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{\frac{\vartheta_n}{12n}}.$$

Poiskati moramo še konstanto a . V ta namen uporabimo Wallisovo formulo v obliki (6):

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2n+1} \cdot \frac{a(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n} e^{\frac{\vartheta_{2n}}{24n}}}{a^2 2^{2n} n^{2n} e^{-2n} n e^{\frac{\vartheta'_n}{6n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2(2n+1)}{n}} \cdot \frac{1}{a} e^{\frac{\vartheta_{2n}}{24n} - \frac{\vartheta'_n}{6n}} = \frac{2}{a}.$$

Pri tem sta števili ϑ_{2n} in ϑ'_n med 0 in 1. Iz enačbe

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} = \frac{2}{a}$$

dobimo nazadnje $a = \sqrt{2\pi}$ in Stirlingovo formulo

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta_n}{12n}}, \quad \vartheta_n \in (0, 1). \quad (16)$$

Navadno vzamemo približek

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n},$$

za katerega je absolutna napaka Δ lahko precejšnja, relativna napaka δ pa je vedno majhna (tabela 1). Velja asimptotična formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

n	$n!$	n -ti približek	$ \Delta_n $	$ \delta_n $
10	3628800	$3.5986956 \cdot 10^6$	$3.0104381 \cdot 10^4$	0.0083
15	1307674368000	$1.3004307 \cdot 10^{12}$	$7.2436458 \cdot 10^9$	0.0055
20	2432902008176640000	$2.4227868 \cdot 10^{18}$	$1.0115161 \cdot 10^{16}$	0.0041

Tabela 1: Učinkovitost Stirlingove formule.

Opazimo, da se z rastočim n absolutna napaka večja, relativna pa manjša.

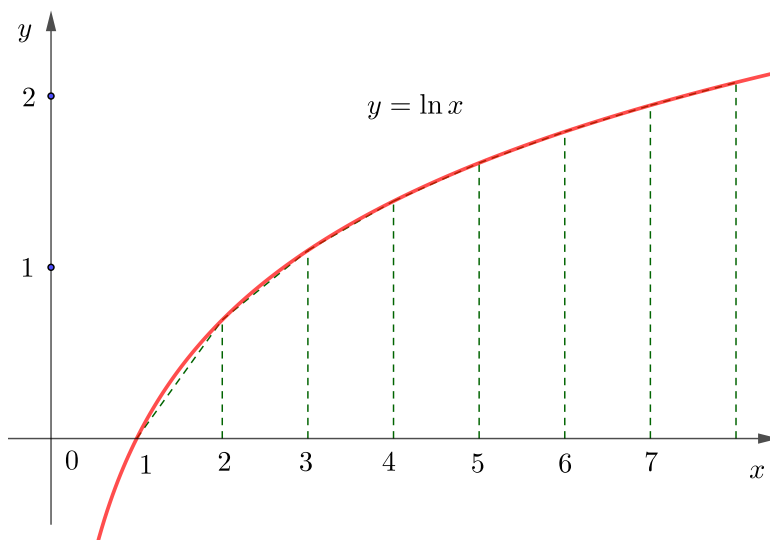
Do rezultata

$$n! \approx a n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

je prišel že Abraham de Moivre (1667–1754). Da je $a = \sqrt{2\pi}$, je ugotovil James Stirling. Zato formulo (16) pogosto poimenujejo po obeh.

Druga izpeljava

Oglejmo si še izpeljavo Stirlingove formule, ki jo najdemo v [8], pa tudi v [3]. Ta temelji na geometrijski razlagi, ki uporablja graf logaritemske funkcije. Uporablja dva trapezna približka, notranjega in zunanjega, za ploščino lika pod krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k, k+1]$, kjer je k naravno število.



Slika 3: Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s trapezi.

Ploščina S_n lika pod krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[1, n]$ je

$$S_n = \int_1^n \ln x \, dx = (x \ln x - x) \Big|_1^n = n \ln n - n + 1, \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Spodnji trapezni približek T_n za to ploščino pri delitvi intervala $[1, n]$ na podintervale $[1, 2], [2, 3], \dots, [n-1, n]$ je

$$T_n = \frac{1}{2}(\ln 1 + \ln 2) + \frac{1}{2}(\ln 2 + \ln 3) + \frac{1}{2}(\ln 3 + \ln 4) + \dots + \frac{1}{2}(\ln(n-1) + \ln n).$$

Ker je $\ln 1 = 0$ dobimo z združevanjem členov:

$$T_n = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln n - \frac{1}{2} \ln n = \ln n! - \ln \sqrt{n}.$$

Za zgornji trapezni približek vzemimo trapeze, ki so zgoraj omejeni s tangentami na krivuljo $y = \ln x$ v točkah $x_k = k + \frac{1}{2}$ za $k = 1, 2, \dots$. Enačba tangente v točki x_k je

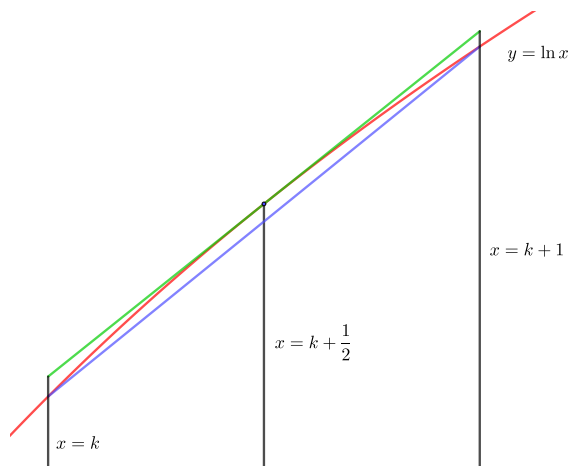
$$y = \frac{1}{k + \frac{1}{2}} \left(x - k - \frac{1}{2} \right) + \ln \left(k + \frac{1}{2} \right).$$

Ordinati te tangente v točkah k in $k + 1$ sta

$$\ln \frac{2k+1}{2} - \frac{1}{2k+1} \quad \text{in} \quad \ln \frac{2k+1}{2} + \frac{1}{2k+1}.$$

Ploščina trapeza pod tangento pa je

$$\ln \frac{2k+1}{2} = \ln \left(k + \frac{1}{2} \right).$$



Slika 4: Zgornji in spodnji približek krivulje $y = \ln x$ na intervalu $[k, k + 1]$.

Naj bo $a_k = S_k - T_k$. Očitno je $a_k > 0$ za $k > 1$ in $a_1 = 0$. Oglejmo si

$$a_{k+1} - a_k = (S_{k+1} - S_k) - (T_{k+1} - T_k), \quad k \geq 1.$$

Pri tem pomeni $S_{k+1} - S_k$ ploščino lika pod krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k, k+1]$, $T_{k+1} - T_k$ pa ploščino trapeza pod tetivo med točkama $(k, \ln k)$ in $(k+1, \ln(k+1))$ nad intervalom $[k, k+1]$. Očitno je $S_{k+1} - S_k > T_{k+1} - T_k >$ (slika 4) in s tem $S_{k+1} - T_{k+1} > S_k - T_k$, to se pravi $a_{k+1} - a_k > 0$, kar pomeni, da je zaporedje $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ monotonno naraščajoče.

Razlika $a_{k+1} - a_k$ je ploščina lika med krivuljo $y = \ln x$ in tetivo nad intervalom $[k, k+1]$ in ta je manjša kot ploščina lika med tangento in tetivo nad intervalom $[k, k+1]$, kar pomeni

$$\begin{aligned} a_{k+1} - a_k &< \ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k+1)) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln\left(k + \frac{1}{2}\right) - \ln k \right) - \frac{1}{2} \left(\ln(k+1) - \ln\left(k + \frac{1}{2}\right) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k+1}\right). \end{aligned}$$

Torej

$$a_{k+1} - a_k < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2k+2}\right).$$

Iz dobljene relacije dobimo s seštevanjem po k od n do $n+m-1$, kjer sta n in m poljubni naravni števili, relacijo

$$a_{m+n} - a_n < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2(n+m)}\right), \quad (*)$$

v posebnem primeru $n = 1$ pa

$$a_{m+1} < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2(m+1)}\right) < \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$$

To pa pomeni, da je zaporedje $(a_k)_{k=1}^{\infty}$ navzgor omejeno. Ker je tudi naraščajoče, ima limito:

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n.$$

Če v (*) pri fiksnem n poženemo m preko vseh meja, dobimo

$$a - a_n < \frac{1}{2} \ln\left(1 + \frac{1}{2n}\right) = \ln \sqrt{1 + \frac{1}{2n}} < \ln\left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

Ker je

$$a_n = S_n - T_n = n \ln n - n + 1 - \ln n! + \ln \sqrt{n},$$

dobimo

$$\ln n! = n \ln n - n + \ln \sqrt{n} + 1 - a_n$$

in z antilogaritmiranjem

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-a_n}.$$

Zaporedje $(e^{1-a_n})_{n=1}^{\infty}$ je monotonno padajoče in ima limito

e^{1-a} . Zato je očitno $0 < e^{1-a} < e^{1-a_n}$ za vsak indeks n . Iz tega sledi relacija

$$1 < \frac{e^{1-a_n}}{e^{1-a}} = e^{a-a_n} < e^{\ln(1+\frac{1}{4n})} = 1 + \frac{1}{4n},$$

iz te pa relacija

$$e^{1-a} < e^{1-a_n} < e^{1-a} \left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

To pomeni, da velja relacija

$$e^{1-a} n^n e^{-n} \sqrt{n} < n! < e^{1-a} n^n e^{-n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{4n}\right).$$

Obstaja neko število θ_n , tako da velja

$$n! = e^{1-a} n^n e^{-n} \sqrt{n} \left(1 + \frac{\theta_n}{4n}\right).$$

Tako kot pri prvi izpeljavi Stirlingove formule tudi sedaj lahko z uporabo Wallisove formule (6) poiščemo konstanto e^{1-a} , ki je enaka $\sqrt{2\pi}$. Nazadnje imamo

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{\theta_n}{4n}\right), \quad (0 < \theta_n < 1).$$

Tretja izpeljava

V članku [1] najdemo podobno izpeljavo. Namesto tangente na krivuljo $y = \ln x$ v točki $k + 1/2$ uporablja tangenti v točkah k in $k + 1$ in vzame povprečje ploščin trapezov pod tema tangentama nad intervalom $[k, k + 1]$. Tangenti imata enačbi

$$y = \ln k + \frac{1}{k}(x - k) \quad \text{in} \quad y = \ln(k + 1) + \frac{1}{k + 1}(x - k - 1),$$

ploščini trapezov pod njima nad intervalom $[k, k + 1]$ pa sta

$$\ln k + \frac{1}{2k} \quad \text{in} \quad \ln(k + 1) - \frac{1}{2(k + 1)}.$$

Povprečje teh dveh ploščin je

$$\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k + 1)) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right)$$

in je večje kot ploščina lika pod krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k, k + 1]$.

Vse to velja za vsako naravno število k . Pri tem smo namreč uporabili sklep: če je $\alpha < \beta_1$ in $\alpha < \beta_2$, potem je $2\alpha < \beta_1 + \beta_2$ in zato $\alpha < (\beta_1 + \beta_2)/2$.

S primerjavo ploščin likov pod sekanto, krivuljo in povprečja pod tangentama dobimo relacijo

$$\frac{1}{2}(\ln k + \ln(k + 1)) < \int_k^{k+1} \ln x \, dx < \frac{1}{2}(\ln k + \ln(k + 1)) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right).$$

S seštevanjem po k od 1 do $n - 1$ dobimo

$$\ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n - \ln \sqrt{n} < \int_1^n \ln x \, dx < \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln n - \ln \sqrt{n} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right),$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\ln n! - \ln \sqrt{n} < n \ln n - n + 1 < \ln n! - \ln \sqrt{n} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Drugače zapisano:

$$-\frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \ln n! - \ln \sqrt{n} - n \ln n + n - 1 < 0.$$

z antilogaritmiranjem dobimo

$$e^{-\frac{1}{4}(1-\frac{1}{n})} < \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} e} < 1.$$

Zaporedje s splošnim členom

$$c_n = \int_1^n \ln x \, dx - \ln n! + \ln \sqrt{n} = \ln \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n} e}{n!} < \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{4}$$

pomeni razliko med ploščino lika pod krivuljo $y = \ln x$ in vsoto ploščin trapezov T_n . Ta razlika je pozitivna in z rastočim n narašča in je navzgor omejena z $1/4$. Zato obstaja končna limita c tega zaporedja. Zato obstajata tudi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{n} e}{n!} = e^c \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} e} = e^{-c}.$$

Velja torej:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{1-c}} = 1.$$

Če označimo $\alpha = e^{1-c}$ in

$$\gamma_n = \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n} \alpha},$$

potem je

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{n} \alpha \gamma_n, \quad \text{kjer je} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n = 1.$$

Konstanto α dobimo z uporabo Wallisove formule (6): $\alpha = \sqrt{2\pi}$. Nazadnje imamo

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \gamma_n.$$

Obstajajo še druge izpeljave Stirlingove formule. Večinoma so oblike

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \gamma_n,$$

pri čemer je $(\gamma_n)_{n=1}^{\infty}$ neko pozitivno zaporedje, ki konvergira proti 1.

Četrta izpeljava

V učbeniku [14] je izpeljana Stirlingova formula z uporabo funkcije

$$a \mapsto \varphi(a) = \int_0^1 \ln \Gamma(a+x) dx, \quad (a \geq 0),$$

in njenega odvoda

$$\varphi'(a) = \int_0^1 \frac{\Gamma'(a+x)}{\Gamma(a+x)} dx.$$

Izpeljava uporablja tudi geometrijsko razlago.

Najprej se da najti izraz za $\varphi(a)$:

$$\varphi'(a) = \ln(\Gamma(a+x))|_0^1 = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a.$$

Zato je po integraciji

$$\varphi(a) = a \ln a - a + C,$$

pri čemer je C integracijska konstanta. Ker je

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \varphi(a) = \lim_{a \rightarrow 0+0} (a \ln a - a + C) = C$$

in je po drugi strani

$$\lim_{a \rightarrow 0+0} \varphi(a) = \int_0^1 \ln \Gamma(x) dx = \ln \sqrt{2\pi}$$

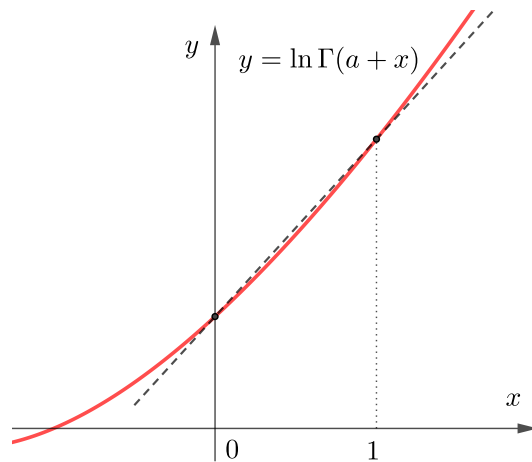
zaradi (13), mora biti $C = \ln(2\pi)$ in s tem

$$\varphi(a) = a \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi}.$$

Oglejmo si graf funkcije $x \mapsto \ln \Gamma(a+x)$ pri konstantnem a na intervalu $[0, 1]$.

Sekanta skozi točki $(0, \ln \Gamma(a))$ in $(1, \ln \Gamma(a+1))$ ima smerni koeficient

$$k = \ln \Gamma(a+1) - \ln \Gamma(a) = \ln \frac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(a)} = \ln a.$$



Slika 5: Graf funkcije $x \mapsto \ln \Gamma(a + x)$.

Enačba te sekante je

$$y = \ln \Gamma(a) + x \ln a,$$

ploščina S_a trapeza pod njo nad intervalom $[0, 1]$ pa je

$$S_a = \frac{1}{2} \ln \Gamma(a) + \frac{a}{2} \ln \Gamma(a + 1) = \ln \Gamma(a) + \frac{1}{2} \ln a.$$

Očitno je ploščina S_a nekoliko večja, denimo za $\varepsilon_a > 0$, kot ploščina lika pod grafom nad intervalom $[0, 1]$. Velja potemtakem

$$\ln \Gamma(a) + \frac{1}{2} \ln a = \varphi(a) + \varepsilon_a = a \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi} + \varepsilon_a.$$

Pri tem se z rastočim a razlika ε_a manjša proti 0. Izkaže se, da je $\varepsilon_a = \vartheta_a / (12(a - 1))$, kjer je $0 < \vartheta_1 < 1$. Iz zgornje enakosti dobimo, če na obeh straneh dodamo $\ln \sqrt{a}$:

$$\ln \Gamma(a + 1) = a \ln a - a + \ln \sqrt{2\pi a} + \varepsilon_a.$$

Po antilogaritmiranju dobimo

$$\Gamma(a + 1) = a^a e^{-a} \sqrt{2\pi a} e^{\varepsilon_a}$$

in za naraven n Stirlingovo formulo:

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\varepsilon_n}.$$

Peta izpeljava

V [12] se je avtor dokaza Stirlingove formule lotil povsem drugače. Kot vemo, velja za nenegativna cela števila n . formula

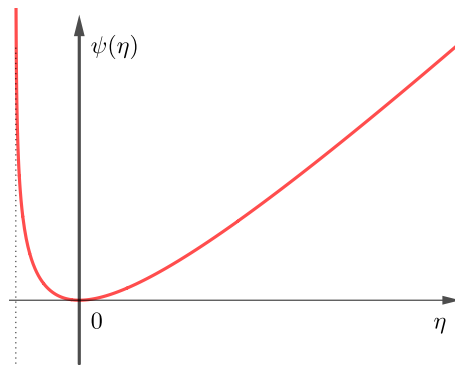
$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx,$$

ki je ni težko preveriti z integracijo po delih. Vpeljemo funkcijo

$$t \mapsto F(t) = \Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x} dx, \quad (t > -1).$$

V posebnem primeru je $F(n) = n!$. Podintegralska funkcija $x \mapsto x^t e^{-x} = e^{t \ln x - x}$ za $t > 0$ doseže pri $x = t$ največjo vrednost $t^t e^{-t} = e^{t \ln t - t}$. Če ta faktor izpostavimo pred integralni znak, dobimo:

$$F(t) = t^t e^{-t} \int_0^\infty e^{-t \ln t + t} e^{t \ln x - x} dx = t^t e^{-t} \int_0^\infty e^{-(x-t) + t \ln(\frac{x}{t})} dx.$$



Slika 6: Graf funkcije $\eta \mapsto \psi(\eta) = \eta - \ln(1 + \eta)$.

V ta integral vpeljemo novo spremenljivko η z relacijo $x - t = \eta t$ in dobimo:

$$F(t) = t^{t+1} e^{-t} \int_{-1}^{\infty} e^{-(\eta - \ln(1+\eta))t} d\eta.$$

Sedaj si moramo ogledati funkcijo $\eta \mapsto \psi(\eta) = \eta - \ln(1 + \eta)$ za $\eta > -1$. Njen graf je na sliki 6. Očitno je $\psi(0) = 0$, $\psi'(\eta) = \eta/(\eta + 1)$ in $\psi''(\eta) = 1/(\eta + 1)^2$. V točki $\eta = 0$ ima minimum. Funkcija ψ je nenegativna in ni povratno enolična. Vsekakor pa lahko uvedemo spremenljivko ξ , tako da velja

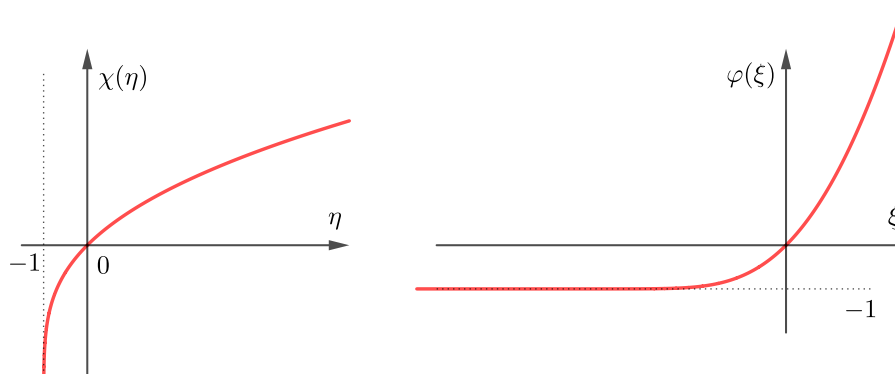
$$\eta - \ln(1 + \eta) = \frac{\xi^2}{2}. \quad (**)$$

S tem bi lahko zapisali

$$F(t) = t^{t+1} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} \frac{d\eta}{d\xi} d\xi = t^{t+1} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} \varphi'(\xi) d\xi.$$

Iz relacije (**) definiramo

$$\chi(\eta) = \begin{cases} +\sqrt{2(\eta - \ln(1 + \eta))}, & \eta > 0; \\ -\sqrt{2(\eta - \ln(1 + \eta))}, & -1 < \eta \leq 0. \end{cases}$$



Slika 7: Grafa funkcije $\eta \mapsto \chi(\eta)$ in $\xi \mapsto \varphi(\xi)$.

Kot bomo videli, bomo potrebovali inverzno funkcijo $\xi \mapsto \varphi(\xi)$, tako da bo $\chi(\varphi(\xi)) = \xi$ za vsak $\xi \in \mathbb{R}$ in $\varphi(\chi(\eta)) = \eta$ za vsak $\eta \in (-1, \infty)$. Zagotovo velja: $\chi(0) = \varphi(0) = 0$ in $\chi'(0) = \varphi'(0) = 1$.

V enačbi $(**)$ je skrita funkcija $\xi \mapsto \varphi(\xi)$, ki bi jo dobili, če bi to enačbo znali razrešiti na $\eta = \varphi(\xi)$. Poiščimo jo v okolici točke $\xi = 0$ obliki potenčne vrste:

$$\varphi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots \quad (***)$$

Pri tem je očitno $a_0 = 0$ in $a_1 = 1$. Enačbo $(**)$ odvajamo na ξ in dobimo:

$$\left(1 - \frac{1}{1+\eta}\right) \frac{d\eta}{d\xi} = \frac{\eta}{1+\eta} \frac{d\eta}{d\xi} = \xi,$$

kar lahko zapišemo v obliki

$$\varphi(\xi)\varphi'(\xi) = \xi + \xi\varphi(\xi).$$

Uporabimo $(***)$, okrajšamo ξ in dobimo

$$(1 + a_2\xi + a_3\xi^2 + \dots)(1 + 2a_2\xi + 3a_3\xi^2 + \dots) = 1 + (\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3 + \dots).$$

Vrsti na levi strani zmnožimo in primerjamo koeficiente pred potencami spremenljivke ξ in dobimo neskončen sistem enačb:

$$3a_2 = 1$$

$$4a_3 + 2a_2^2 = a_2$$

$$5a_4 + 5a_2a_3 = a_3$$

$$6a_5 + 6a_2a_4 + 3a_3^2 = a_4$$

$$7a_6 + 7a_2a_5 + 7a_3a_4 = a_5$$

$$\vdots$$

Korak za korakom, od zgoraj navzdol dobimo koeficiente:

$$a_2 = \frac{1}{3}, a_3 = \frac{1}{36}, a_4 = -\frac{1}{270}, a_5 = \frac{1}{4320}, a_6 = \frac{1}{17010}, a_7 = -\frac{139}{5443200},$$

$$a_8 = \frac{1}{204120}, a_9 = -\frac{571}{2351462400}, \dots$$

S tem imamo

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) &= \xi + \frac{1}{3}\xi^2 + \frac{1}{36}\xi^3 - \frac{1}{270}\xi^4 + \frac{1}{4320}\xi^5 + \frac{1}{17010}\xi^6 - \frac{139}{5443200}\xi^7 + \\ &\quad + \frac{1}{204120}\xi^8 - \frac{571}{2351462400}\xi^9 + \dots, \\ \varphi'(\xi) &= 1 + \frac{2}{3}\xi + \frac{1}{12}\xi^2 - \frac{2}{135}\xi^3 + \frac{1}{864}\xi^4 + \frac{1}{2835}\xi^5 - \frac{139}{777600}\xi^6 + \\ &\quad + \frac{1}{25515}\xi^7 - \frac{571}{261273600}\xi^8 + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \xi^n, \quad (b_n = (n+1)a_{n+1}). \end{aligned}$$

Vrnimo se sedaj k funkciji

$$F(t) = t^{t+1} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t\xi^2}{2}} \varphi'(\xi) d\xi.$$

V integral vpeljemo novo spremenljivko $u = \xi \sqrt{t}$:

$$\begin{aligned} F(t) &= t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \varphi'\left(\frac{u}{\sqrt{t}}\right) du = t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{u^n}{\sqrt{t^n}} \right\} du = \\ &= t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\sqrt{t^n}} \int_{-\infty}^{\infty} u^n e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\}. \end{aligned}$$

V zadnji vrsti so integrali za lihe indekse n enaki 0, zato lahko zapišemo:

$$F(t) = t^{t+\frac{1}{2}} e^{-t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}}{t^n} \int_{-\infty}^{\infty} u^{2n} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right\}.$$

Z upoštevanjem rezultatov (12) dobimo

$$F(t) = t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_{2n}(2n-1)!!}{t^n} \right\}.$$

Zapišimo nekaj začetnih členov:

$$F(t) = t^t e^{-t} \sqrt{2\pi t} \left\{ 1 + \frac{1}{12t} + \frac{1}{288t^2} - \frac{139}{51840t^3} - \frac{571}{2488320t^4} + \dots \right\}.$$

Za $t = n$, ker je n naravno število, dobimo

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left\{ 1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} - \frac{139}{51840n^3} - \frac{571}{2488320n^4} + \dots \right\}.$$

Kot vidimo, je šlo brez uporabe Wallisove formule (6).

Šesta izpeljava

Avtor v članku [9] v integral

$$n! = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx$$

vpelje novo spremenljivko y z relacijo $x = y\sqrt{n} + n$ in dobi:

$$n! = e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty (n + y\sqrt{n})^n e^{-y\sqrt{n}} dy = n^n e^{-n} \sqrt{n} \int_{-\sqrt{n}}^\infty \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-y\sqrt{n}} dy.$$

Nato vpelje zaporedje funkcij

$$g_n(y) = \begin{cases} \left(1 + \frac{y}{\sqrt{n}} \right)^n e^{-y\sqrt{n}}, & y > -\sqrt{n}; \\ 0 & y \leq -\sqrt{n}. \end{cases}$$

Zato lahko zapiše:

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \int_{-\infty}^\infty g_n(y) dy.$$

Nato pokaže, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$$

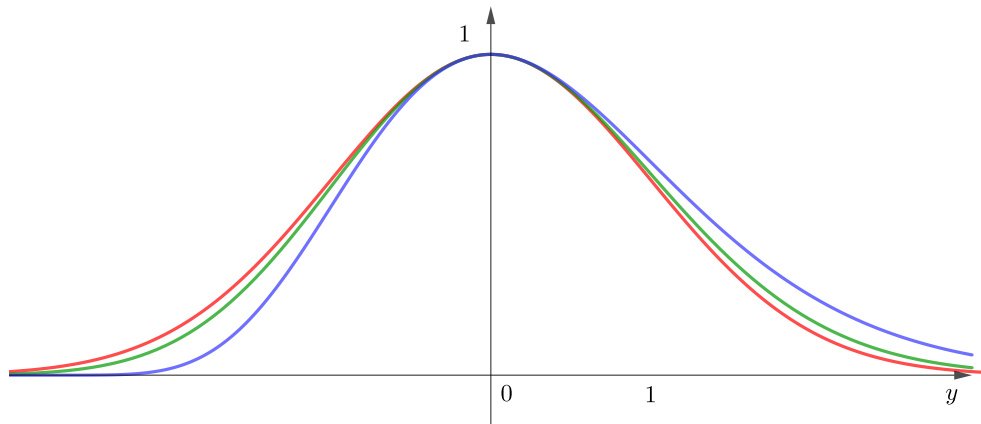
in

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^\infty g_n(y) dy = \int_{-\infty}^\infty \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(y) dy = \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}.$$

Nazadnje zaključimo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Izpeljava je potekala brez Wallisove formule (6).



Slika 8: Grafa funkcije $y \mapsto g_n(y)$ za $n = 9$ (modra) in $n = 100$ (zelena) ter graf funkcije $y \mapsto e^{-\frac{y^2}{2}}$ (rdeča).

Sedma izpeljava

V članku [11] je izpeljana Stirlingova formula na precej zapleten način. Najprej uporabi sicer enostaven račun:

$$\begin{aligned}
 \ln n! &= \sum_{k=1}^n \ln k = \sum_{k=1}^n k \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} k \ln k = n \ln n + \sum_{k=1}^{n-1} k \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} (k-1) \ln k = \\
 &= \ln n^n + \sum_{k=1}^{n-1} k \ln k - \sum_{k=1}^{n-1} k \ln(k+1) = \ln n^n - \sum_{k=1}^{n-1} k (\ln(k+1) - \ln k) = \\
 &= \ln n^n - \sum_{k=1}^{n-1} k \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \ln n^n - \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{[x]}{x} dx = \ln n^n - \int_1^n \frac{[x]}{x} dx.
 \end{aligned}$$

Pri tem pomeni $[x]$ celi del števila x . Vsako realno število lahko zapišemo v obliki $x = [x] + \{x\}$, kjer je $\{x\}$ njegov decimalni del. S tem lahko zapišemo

$$\begin{aligned}
 \ln n! &= \ln n^n - \int_1^n \frac{x - \{x\}}{x} dx = \ln n^n - \int_1^n \frac{x}{x} dx + \int_1^n \frac{\{x\}}{x} dx = \\
 &= \ln n^n - (n-1) + \int_1^n \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{x} dx + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln n^n - n + 1 + \ln \sqrt{n} + \int_0^{n-1} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} dx.
 \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali enakost $\{x+1\} = \{x\}$.

Če je k celo število, potem za $x \in (k, k+1)$ velja $\{x\} - \frac{1}{2} = x - k - \frac{1}{2}$. Zato lahko zapišemo:

$$\int_0^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} dx = \sum_{k=0}^\infty \left(\int_k^{k+\frac{1}{2}} \frac{x - k - \frac{1}{2}}{1+x} dx + \int_{k+\frac{1}{2}}^{k+1} \frac{x - k - \frac{1}{2}}{1+x} dx \right).$$

Po nekaj manipulacijah z indeksom k in integracijsko spremenljivko dobimo:

$$\int_0^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} dx = - \sum_{k=1}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 dx}{(k + \frac{1}{2})^2 - x^2} = - \int_0^{\frac{1}{2}} x \sum_{k=1}^\infty \frac{2x dx}{(k + \frac{1}{2})^2 - x^2}.$$

Sedaj uporabimo razvoj funkcije $x \mapsto \pi \operatorname{tg} \pi x$ na parcialne ulomke:

$$\pi \operatorname{tg} \pi x = \sum_{k=0}^\infty \frac{2x}{(k + \frac{1}{2})^2 - x^2}.$$

Izpeljavo najdemo na primer v [5]. Dobimo:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} dx &= - \sum_{k=1}^\infty \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 dx}{(k + \frac{1}{2})^2 - x^2} = \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{8x^2}{1-4x^2} - \pi x \operatorname{tg} \pi x \right) dx = \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1+2x} - 2 + \frac{1}{1-2x} - \pi x \operatorname{tg} \pi x \right) dx = \ln \sqrt{2} - 1 + \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-2x} - \pi x \operatorname{tg} \pi x \right) dx. \end{aligned}$$

Zadnji integral je treba obravnavati posebej:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{1-2x} - \pi x \operatorname{tg} \pi x \right) dx = \left(-\frac{1}{2} \ln(1-2x) + x \ln \cos \pi x \right) \Big|_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} \ln \cos \pi x dx.$$

Prvi del je pri $x = 0$ enak 0, na zgornji meji $x = \frac{1}{2}$ pa moramo izračunati levo limito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}-0} \left(x \ln \cos \pi x - \frac{1}{2} \ln(1-2x) \right) &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \left(\left(\frac{1}{2} - t \right) \ln \cos \left(\pi \left(\frac{1}{2} - t \right) \right) - \frac{1}{2} \ln 2t \right) = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{2} \ln \frac{\sin \pi t}{2t} - \lim_{t \rightarrow 0+0} t \ln \sin \pi t = \ln \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

Prva limita je posledica $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, drugo pa izračunamo po l'Hôpitalovem pravilu in je enaka 0. Preostali integral je znan:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \cos \pi x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos t \, dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin t \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \ln \sin t \, dt = -\ln \sqrt{2}.$$

Ko vse zložimo skupaj, dobimo:

$$\int_0^{\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} \, dx = \ln \sqrt{2} - 1 + \ln \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \ln \sqrt{2} = \ln \sqrt{2\pi} - 1.$$

Potemtakem je

$$\ln n! = \ln n^n - n + \ln \sqrt{n} + \ln \sqrt{2\pi} - r_n,$$

kjer je

$$r_n = \int_{n-1}^{\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} \, dx.$$

Ker

$$\int_0^{\infty} \frac{\{x\} - \frac{1}{2}}{1+x} \, dx$$

konvergira, je $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$ in $\lim_{n \rightarrow \infty} e^{-r_n} = 1$. Zato je

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{-r_n} \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Kot vidimo, izpeljava poteka brez Wallisove formule (6).

Osma izpeljava

Izpeljavo Stirlingove formule lahko izvedemo tudi precej na hitro. Začnemo z enakostjo

$$n! = \Gamma(n+1) = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx,$$

kjer je n naravno število. V integral vpeljemo novo spremenljivko t z relacijo $x = nt$:

$$n! = n^{n+1} \int_0^{\infty} t^n e^{-nt} \, dt = n^{n+1} \int_0^{\infty} e^{-n(t-\ln t)} \, dt.$$

Funkcija $z \mapsto t - \ln t$ ima lokalni minimum v točki $t = 1$, razvoj v potenčno vrsto okoli nje pa je

$$t - \ln t = 1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 - \frac{1}{3}(t-1)^3 + \dots$$

Če ohranimo kvadratni del tega razvoja, imamo

$$\int_0^\infty e^{-n(t-\ln t)} dt \approx \int_0^\infty e^{-n(1+\frac{1}{2}(t-1)^2)} dt = e^{-n} \int_0^\infty e^{-n\frac{(t-1)^2}{2}} dt.$$

V zadnji integral vpeljemo novo integracijsko spremenljivko s z relacijo $s = (t-1)\sqrt{n}$:

$$\int_0^\infty e^{-n\frac{(t-1)^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds \approx \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}.$$

Na koncu smo uporabili integral iz (12) in dejstvo, da za zelo velike n integracijsko območje srednjega integrala lahko raztegnemo na vso realno os.

Nazadnje imamo:

$$n! \approx n^{n+1} e^{-n} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Deveta izpeljava

Za funkcijo $x \mapsto f(x) = \ln x$, za $x \geq 1$ pri izbiri $p = 1$ in $q = n$ dobimo iz Euler–Maclaurinove formule (14):

$$\frac{1}{2} \ln 1 + \ln 2 + \dots + \ln(n-1) + \frac{1}{2} \ln n = \int_1^n \ln x dx + \int_1^n (\ln x)' \psi_1(x) dx.$$

Iz tega takoj sledi

$$\ln n! = \frac{1}{2} \ln n + n \ln n - n + 1 + \int_1^n \frac{1}{x} \psi_1(x) dx.$$

Ker je $2\psi_1(x) = \psi_2'(x)$, dobimo z delno integracijo in z upoštevanjem zveze $\psi_2(n) = \psi_2(0) = B_2 = \frac{1}{6}$ enakost

$$\ln n! = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln n - n + R_n,$$

kjer je

$$R_n = \frac{11}{12} + \frac{1}{12n} + \frac{1}{2} \int_1^n \frac{1}{x^2} \psi_2(x) dx.$$

Obstaja končna limita

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n$$

in zato tudi končna limita

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n \sqrt{n} e^{-n}} = e^\alpha = \beta.$$

Konstanto β izračunamo z Wallisovo formulo (6). To pomeni, da velja Stirlingova formula

$$n! = c_n n^n e^{-n} \sqrt{2n\pi},$$

kjer je $(c_n)_{n=1}^\infty$ neko pozitivno zaporedje, ki ima limito 1.

Deseta izpeljava

V članku [4] najdemo še eno zanimivo izpeljavo Stirlingove formule, ki se izogne Wallisovi formuli (6). Uporabi pa razvoj v neskončen produkt:

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2}\right). \quad (17)$$

Poleg tega vpelje funkcijo

$$x \mapsto I(x) = \int_0^x \ln x dx = x \ln x - x.$$

Nato za vsako naravno število k definira število a_k , ki pomeni ploščino lika med premico $y = \ln k$ in krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k-1/2, k]$, ter

število b_k ki pomeni ploščino lika med premico $y = \ln k$ in krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k, k + 1/2]$. Števili se izražata takole:

$$a_k = \frac{1}{2} \ln k - \int_{k-1/2}^k \ln x dx = \int_{k-1/2}^k \ln \frac{k}{x} dx,$$

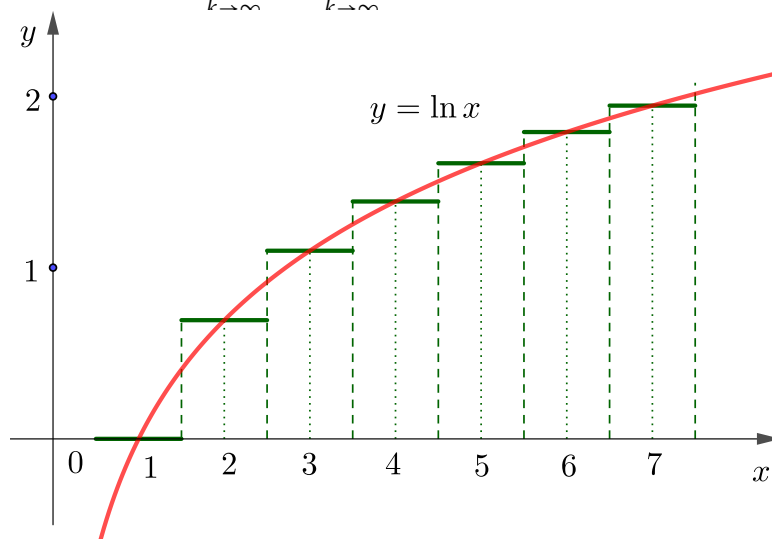
$$b_k = \int_k^{k+1/2} \ln x dx - \frac{1}{2} \ln k = \int_k^{k+1/2} \ln \frac{x}{k} dx,$$

V zadnji integral za a_k vpeljemo novo spremenljivko $t = k - x$, v zadnji integral za b_k pa $t = x - k$ in dobimo:

$$a_k = - \int_0^{1/2} \ln(1 - \frac{t}{k}) dt, \quad b_k = \int_0^{1/2} \ln(1 + \frac{t}{k}) dt.$$

Iz te oblike takoj vidimo, da je

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = 0.$$



Slika 9: Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s pravokotniki.

Ker je $|t|/k < 1$, lahko oba logaritma razvijemo v konvergentni potenčni vrsti in dobimo:

$$-\ln(1 - \frac{t}{k}) - \ln(1 + \frac{t}{k}) = \left(\frac{t^2}{k^2} + \frac{t^4}{2k^4} + \dots \right) \geq 0.$$

To pomeni, da je $a_k > b_k$. Prav tako dokažemo, da je $b_k > a_{k+1}$. Zato po Leibnizevem kriteriju za alternirajoče vrste konvergira vrsta

$$a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + a_3 - b_3 + \dots$$

k neki vsoti S , ki ima n -to delno vsoto S_n . Sedaj s funkcijo I izrazimo a_k in b_k še v obliki

$$a_k = \frac{1}{2} \ln k - I(k) + I(k - 1/2),$$

$$b_k = -\frac{1}{2} \ln k + I(k + 1/2) - I(k).$$

Za razliko $a_k - b_k$ dobimo

$$a_k - b_k = \ln k + I(k - 1/2) - I(k + 1/2).$$

Naprej računamo takole:

$$\sum_{k=1}^n (a_k - b_k) + b_n = \sum_{k=1}^n \ln k + I(1/2) - I(n + 1/2) - \frac{1}{2} \ln n + I(n + 1/2) - I(n).$$

Uredimo člene, pa dobimo:

$$S_n + b_n - I(1/2) = \ln n! - \ln \sqrt{n} - n \ln n + n = \ln \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}}.$$

Z antilogaritmiranjem dobimo najprej

$$\frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = e^{S_n + b_n - I(1/2)},$$

nato pa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = e^{S - I(1/2)}.$$

Desno stran je sedaj treba izraziti natančneje. V ta namen zapišemo $a_k - b_k$ v obliki:

$$a_k - b_k = - \int_0^{1/2} \ln\left(1 - \frac{t}{k}\right) dt - \int_0^{1/2} \ln\left(1 + \frac{t}{k}\right) dt = - \int_0^{1/2} \ln\left(\left(1 - \frac{t}{k}\right)\left(1 + \frac{t}{k}\right)\right) dt =$$

$$= - \int_0^{1/2} \ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt.$$

Iz te oblike sledi

$$S_n - I(1/2) = - \int_0^{1/2} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt - I(1/2) = - \int_0^{1/2} \ln \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) dt - I(1/2).$$

V limiti, ko $n \rightarrow \infty$ velja:

$$\begin{aligned} S - I(1/2) &= - \int_0^{1/2} \ln \frac{\sin \pi t}{\pi t} dt - I(1/2) = \\ &= - \int_0^{1/2} \ln \sin \pi t dt + \frac{1}{2} \ln \pi + I(1/2) - I(1/2). \end{aligned}$$

Uporabimo še integral iz (4):

$$S - I(1/2) = \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} \ln \pi = \ln \sqrt{2\pi}.$$

S tem smo našli

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} = e^{\ln \sqrt{2\pi}} = \sqrt{2\pi}$$

in nazadnje

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}} = 1,$$

kar pomeni

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

Enajsta izpeljava

Podobno izpeljavo kot v [5] najdemo v članku [13]. Sledeč avtorju najprej vpeljemo

$$S_n = \ln n! = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1),$$

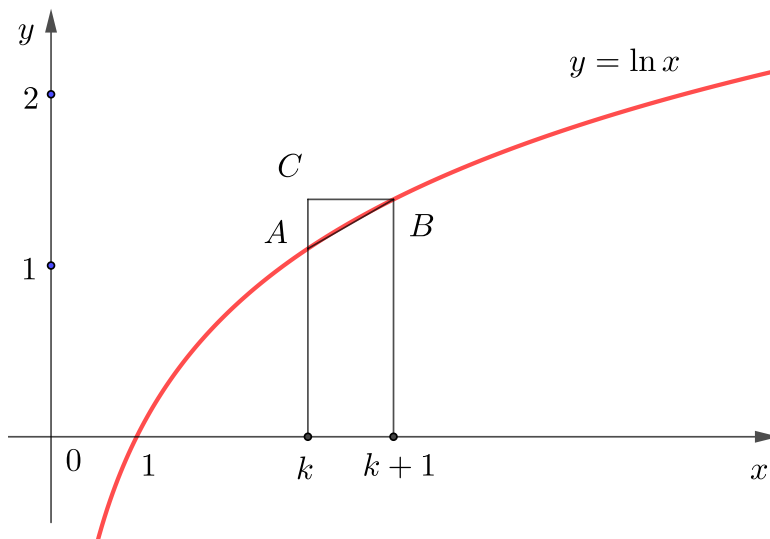
nato pa $\ln(k+1)$ izrazimo na malo bolj zapleten način:

$$\ln(k+1) = A_k + b_k - \varepsilon_k,$$

pri čemer so:

$$\begin{aligned} A_k &= \int_k^{k+1} \ln x \, dx, \\ b_k &= \frac{1}{2}(\ln(k+1) - \ln k), \\ \varepsilon_k &= \int_k^{k+1} \ln x \, dx - \frac{1}{2}(\ln(k+1) + \ln k) \end{aligned}$$

Pravilnost preverimo brez težav. Vsi trije deli imajo svoj preprost geometrijski pomen v zvezi s krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom $[k, k+1]$ (slika 10).



Slika 10: Logaritemska krivulja $y = \ln x$ s pravokotnikom, trikotnikom in trapezom.

Število $\ln(k+1)$ je ploščina pravokotnika pod daljico CB nad intervalom $[k, k+1]$. Število A_k je ploščina lika pod krivuljo $y = \ln x$ nad intervalom

$[k, k+1]$. Število b_k je ploščina trikotnika ABC , število ε_k pa ploščina lika med daljico AB in krivuljo $y = \ln x$. Slednja ploščina je majhna v primerjavi z ostalimi omenjenimi ploščinami.

Nato izrazimo

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \ln(k+1) = \int_1^n \ln x \, dx + \frac{1}{2} \ln n - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k.$$

Izračunajmo integral in dobimo:

$$S_n = n \ln n - n + \frac{1}{2} \ln n + 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k.$$

Z nekaj truda izračunamo

$$\varepsilon_k = (k+1) \ln(k+1) - (k+1) - k \ln k + k - \frac{1}{2} \ln(k+1) - \frac{1}{2} \ln k = \frac{2k+1}{2} \ln \frac{k+1}{k} - 1.$$

Če damo ε_k obliko

$$\varepsilon_k = \ln \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{k+\frac{1}{2}} - 1,$$

takoj vidimo, da je $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_k = 0$.

Za nadaljnjo obravnavo zapišimo:

$$\varepsilon_k = \frac{2k+1}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{2k+1}}{1 - \frac{1}{2k+1}} - 1.$$

Nato uporabimo razvoj (10), v katerega vstavimo $x = \frac{1}{2k+1} < 1$:

$$\varepsilon_k = \frac{2k+1}{2} \cdot 2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)(2k+1)^{2j-1}} - 1 = \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(2j-1)(2k+1)^{2j-2}}.$$

Sledi najprej ocena navzgor z geometrijsko vrsto

$$\varepsilon_k < \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{3(2k+1)^{2j-2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right),$$

nato pa še navzdol z geometrijsko vrsto

$$\varepsilon_k > \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{(3(2k+1))^{2j-2}} = \frac{1}{12} \left(\frac{1}{k + \frac{1}{12}} - \frac{1}{k+1 + \frac{1}{12}} \right).$$

Hitro se dobi iz dobljenih relacij za vsoto vrste

$$B = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k + \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$$

oceno

$$\frac{1}{13} < B < \frac{1}{12}$$

in za vrsto

$$r_n = \sum_{k=n}^{\infty} \varepsilon_k$$

oceno

$$\frac{1}{12n+1} < r_n < \frac{1}{12n}.$$

Očitno je $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0$, medtem ko S_n lahko izrazimo v obliki

$$S_n = \ln n! = n \log n - n + \ln \sqrt{n} + 1 - B + r_n.$$

Po antilogaritmiranju imamo

$$n! = C n^n e^{-n} \sqrt{n} e^{r_n},$$

kjer je $C = e^{1-B}$. To konstanto dobimo z Wallisovo formulo (6) in sicer

$C = \sqrt{2\pi}$. Na koncu imamo spet Stirlingovo formulo

$$n! = n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{r_n},$$

pri čemer je $\frac{1}{12n+1} < r_n < \frac{1}{12n}$. Če razvijemo e^{r_n} v vrsto za $r_n = 1/(12n)$ in ohranimo prve tri člene, dobimo:

$$n! \approx n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} \left(1 + \frac{1}{12n} + \frac{1}{288n^2} \right).$$

Primeri uporabe Stirlingove formule

1. Razvijmo na podlagi Stirlingove formule približno formulo za $\binom{2n}{n}$.

Nato na podlagi rezultata izračunajmo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4n}{2n}}.$$

Kot vemo, lahko $\binom{2n}{n}$ izrazimo s faktorijelno funkcijo:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2}.$$

Uporabimo formulo (16):

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} e^{\frac{\vartheta}{24n}}}{n^{2n} e^{-2n} 2\pi n e^{\frac{\vartheta'}{6n}}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{\frac{\vartheta}{24n} - \frac{\vartheta'}{6n}} = \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}} \cdot e^{\frac{\vartheta''}{6n}}.$$

Pri tem sta števili ϑ in ϑ' med 0 in 1, ϑ'' pa med -1 in $1/4$.

n	$\binom{2n}{n}$	n -ti približek	$ \Delta_n $	$ \delta_n $
5	252	258.368770	6.368770	0.025
10	184756	$1.8707897 \cdot 10^5$	2322.972899	0.013
15	155117520	$1.5641532 \cdot 10^8$	$1.2978059 \cdot 10^6$	0.008

Tabela 2: Učinkovitost približne formule za $\binom{2n}{n}$.

Približek je potemtakem

$$\binom{2n}{n} \approx \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}},$$

Velja asimptotična formula

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\binom{2n}{n}}{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} = 1.$$

Spet smo naredili tabelo, iz katere je razvidna natančnost približka.

Izračunajmo še limiti. Prva je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{\pi^{1/n} n^{1/n}}} = 4.$$

Pri tem smo upoštevali, da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Drugo lahko izrazimo s prvo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\binom{4n}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[2n]{\binom{4n}{2n}} \right)^2 = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sqrt[m]{\binom{2m}{m}} \right)^2 = 16.$$

2. Izračunajmo vsoto vrste

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right).$$

Najprej zapišemo n -to delno vsoto S_n dane vrste:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \left(k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) = \sum_{k=1}^n \left(\ln \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right)^k \frac{1}{e} \right) = \ln \prod_{k=1}^n \left(\frac{2k+1}{2k-1} \right)^k \frac{1}{e} = \\ &= \ln \frac{3 \cdot 5^2 \cdot 7^3 \cdot \dots \cdot (2n+1)^n}{3^2 \cdot 5^3 \cdot \dots \cdot (2n-1)^n e^n} = \ln \frac{(2n+1)^n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n-1) e^n} = \ln \frac{(2n+1)^n (2n)!!}{(2n)! e^n} = \\ &= \ln \frac{(2n+1)^n 2^n n!}{(2n)! e^n} = \ln \frac{(2n+1)^n 2^n n! e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta}{12n}}}{e^n (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} e^{\frac{\vartheta'}{24n}}} = \ln \frac{(2n+1)^n}{(2n)^n \sqrt{2}} e^{\frac{2\vartheta - \vartheta'}{24n}} = \\ &= \ln \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \frac{e^{\frac{2\vartheta - \vartheta'}{24n}}}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Pri tem sta števili ϑ in ϑ' med 0 in 1. Iz tega sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2n} \right)^n \frac{e^{\frac{2\vartheta - \vartheta'}{24n}}}{\sqrt{2}} = \ln \frac{\sqrt{e}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

Torej je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(k \ln \frac{2k+1}{2k-1} - 1 \right) = \frac{1}{2} (1 - \ln 2).$$

3. Zapišimo asimptotično formulo za $(2n-1)!!$, kjer je n naravno število.

Število $(2n-1)!!$ izrazimo v obliki:

$$\begin{aligned} (2n-1)!! &= \frac{(2n-1)!!(2n)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} e^{\frac{\vartheta}{24n}}}{2^n n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta'}{12n}}} = \\ &= \sqrt{2} (2n)^n e^{-n} e^{\frac{\vartheta''}{12n}}. \end{aligned}$$

Pri tem je $\vartheta'' = \vartheta/2 - \vartheta'$ in $-1 < \vartheta'' < 1/2$. Število ϑ'' je odvisno od n . To se pravi

$$(2n-1)!! = \sqrt{2} (2n)^n e^{-n} e^{\frac{\vartheta''}{12n}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n-1)!!}{\sqrt{2} (2n)^n e^{-n}} = 1.$$

4. Izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!}.$$

Najprej izrazimo

$$\sqrt[n^2]{n!} = (n!)^{\frac{1}{n^2}} = (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta}{12n}})^{\frac{1}{n^2}} = n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}} e^{-\frac{1}{n}} (2\pi)^{\frac{1}{2n^2}} e^{\frac{\vartheta}{12n^3}}.$$

Razen prvega faktorja vsi preostali konvergirajo proti 1, ko $n \rightarrow \infty$. Zato posebej izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}) \ln n}.$$

Limito eksponenta izračunamo po l'Hôpitalovem pravilu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} \right) \ln n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{2n^2}{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{4n^2+4n}{(2n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^2}{4n^2(n+1)} = 0.$$

Zato je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2}} = e^0 = 1$$

in končno

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n^2]{n!} = 1.$$

5. Izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Najprej izrazimo:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \frac{n}{(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta}{12n}})^{\frac{1}{n}}} = \frac{e}{(2\pi)^{\frac{1}{n}} n^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{\theta}{12n^2}}}.$$

V imenovalcu prvi in tretji faktor konvergirata proti 1, ko $n \rightarrow \infty$. Limito srednjega faktorja v imenovalcu pa izračunamo takole:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{2n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{\ln n}{2n}} = 1,$$

ker je po l'Hôpitalovem pravilu:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2n} = 0.$$

Na koncu dobimo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

6. Izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}}.$$

Uporabimo rezultat 3. naloge:

$$\frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \frac{n}{(\sqrt{2}(2n)^n e^{-n} e^{\frac{\vartheta}{12n}})^{\frac{1}{n}}} = \frac{e}{2 \cdot 2^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{\vartheta}{12n^2}}}.$$

Brez težav imamo nazadnje rezultat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{(2n-1)!!}} = \frac{e}{2}.$$

7. Izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n}.$$

Najprej zapišemo:

$$\begin{aligned} \frac{\ln n!}{\ln n^n} &= \frac{\ln(n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta}{12n}})}{n \ln n} = \frac{n \ln n - n + \ln \sqrt{2\pi} + \frac{1}{2} \ln n + \frac{\vartheta}{12n}}{n \ln n} = \\ &= 1 - \frac{1}{\ln n} + \frac{\ln \sqrt{2\pi}}{n \ln n} + \frac{1}{2n} + \frac{\vartheta}{12n^2 \ln n}. \end{aligned}$$

Iz tega izraza je očitno, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n!}{\ln n^n} = 1.$$

8. Dokažimo, da se z rastočim n relativna napaka δ_n približnega izraza $n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}$ za $n!$ manjša.

Ker je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = 1,$$

je za vse dovolj velike n

$$1 - \frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = \frac{n! - n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}}{n!} = \delta_n < \varepsilon$$

za vsak še tako majhen ε . To pomeni, da velja

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n = 0.$$

9. Izračunajmo konvergenčni polmer vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n.$$

Na splošno se konvergenčni polmer R potenčne vrste

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

izračuna po Cauchy-Hadamardovi formuli

$$R = \frac{1}{\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

Pri tem upoštevamo: $1/0 = \infty$ in $1/\infty = 0$. V našem primeru je $c_n = n!/n^n$ in

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\theta}{12n}}}{n^n}} = \\ &= \frac{1}{e} \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2\pi})^{\frac{1}{n}} \sqrt[n]{n^{\frac{1}{n}} e^{\frac{\theta}{12n^2}}} = \frac{1}{e}. \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Konvergenčni radij dane vrste je $R = e$.

Pri tem smo upoštevali, da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Da bi to dokazali, postavimo $a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1$. Potem je

$$n = (1 + a_n)^n = 1 + na_n + \frac{n(n-1)}{2}a_n^2 + \dots + a_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2}a_n^2.$$

Za $n > 2$ je potem

$$0 \leq a_n^2 \leq \frac{2}{n-1},$$

od koder sledi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad \text{in} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Enak rezultat dobimo, če najprej zapišemo

$$n^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{\ln n}{n}},$$

nato pa za limito eksponenta uporabimo l'Hôpitalovo pravilo.

10. Izračunajmo še

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}}.$$

Uporabimo Stirlingovo formulo:

$$\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{4\pi n} e^{\frac{\vartheta}{24n}}}{n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n} e^{\frac{\vartheta'}{12n}}}} = 4e^{-1} 2^{\frac{1}{2n}} e^{\frac{\vartheta}{24n^2} - \frac{\vartheta'}{12n^2}}.$$

Pri tem je $0 < \vartheta < 1$ in $0 < \vartheta' < 1$. Potem brez težav dobimo rezultat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} = \frac{4}{e}.$$

Zaključek

Stirlingova formula je asimptotični približek za $n!$ velikega števila n . Uporablja se jo ne le v matematiki, ampak tudi v teoriji verjetnosti in statistiki.

Pri aproksimaciji binomske porazdelitve je koristna za izpeljavo Gaussove normalne porazdelitve. Koristna je tudi v statistični fiziki in kvantni mehaniki pri aproksimaciji števila mikrostanj. Prav tako je dobrodošla v računalništvu za analizo algoritmov. V matematiki pride prav pri ocenjevanju določenih integralov in pri izpeljavi asimptotskih formul.

Viri

- [1] A. J. Coleman, *A Simple Proof of Stirling's Formula*, The Amer. Math. Monthly, **58** (1951), št. 5, str. 334–336.
- [2] B. P. Demidovič, *Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskemu analizu*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko–teoretičeskoj literatury, Moskva, 1956.
- [3] P. Eymard, J.-P. Lafon, *The Number π* , AMS, Providence, Rhode Island, 2004.
- [4] W. Feller, *A Direct Proof of Stirling's Formula*, The Amer. Math. Monthly, **74** (1967), št. 10, str. 1223–1225.
- [5] G. M. Fihtengol'c, *Kurs diferencial'nogo i integral'nogo isčislenija II*, Nauka, Moskva, 1969.
- [6] I. S. Gradštejn, I. M. Ryžik, *Tablicy integralov, summ, rjadov i proizvedenij*, Gosudarstvennoe izdatel'stvo tehniko–teoretičeskoj literatury, Moskva, 1963.
- [7] F. Križanič, *Temelji realne matematične analize*, DZS, Ljubljana, 1990.

- [8] R. Kurant, *Kurs diferencial'nogo i integral'nogo isčislenija I*, Nauka, Moskva, 1967.
- [9] R. Michel, *On Stirling's Formula*, The Amer. Math. Monthly, **109** (2002), št. 4, str. 388-390.
- [10] P. J. Nahin, *Inside Interesting Integrals*, Springer, Cham (Švica), 2020.
- [11] T. Neuschel, *A Simple Proof of Stirling's Formula*, The Amer. Math. Monthly, **121** (2014), št. 4, str. 350-352.
- [12] F. Paronetto, *La formula di Stirling*,
https://www.math.unipd.it/~fabio/didattica/3astro_fisica/dispense_teorica/appendice_B.pdf (8. 2. 2025)
- [13] H. Robbins, *A Remark on Stirling's Formula*, The Amer. Math. Monthly, **62** (1955), št. 1, str. 24–29.
- [14] I. Vidav, *Višja matematika II*, DZS , Ljubljana, 1951.