Marko Razpet

Spomini na mladost in matematiko

2023

Vsebina

Predgovor

Ak' pa naklonijo nam smrt bogovi,
manj strašna noč je v črne zemlje krili,
ko so pod svetlim soncem sužni dnovi.

(F. Prešeren, Krst pri Savici)

Težko se bo marsikomu sprijazniti, da se je v tej knjigi celo matematika znašla kot tema v sicer skoraj vsakdanjem pogovoru. Pa kaj! Kdor matematike ne razume, je ne mara ali jo celo sovraži, naj brez kakršnekoli škode za njegovo radovednost matematične dele besedila enostavno preskoči. Knjigo sestavljajo nekakšne osebne izpovedi nekega preprostega matematika, ki se je nekoč nekje rodil in hodil ter blodil po tej zemlji. Marsikaj bo povedal, čisto vsega, zlasti tistega, kar nikogar popolnoma nič ne briga, pa seveda ne. Čeprav je že marsikaj zbledelo v njegovem spominu, se bo najraje zadrževal pri svojih prvih dvajsetih letih. Nekateri dogodki in celo besede, ki jih je nekdo izrekel, pa so mu dobro ostali v spominu. Včasih pa nepričakovano znova privrejo na dan. Delo je nastajalo kakih dvajset let. Marsikaj je bilo treba medtem popraviti, dodati ali izpustiti.

Videti je tako, kot da je avtor pisal vse, kar mu je v nekem trenutku padlo na pamet, brez neke stroge urejenosti. Tako in tako pa matematiki pravijo, da se da vsako množico, torej tudi množico vseh stavkov v tej knjigi, dobro urediti. V resnici premišljujemo in bivamo na tem planetu precej neurejeno, zato navidezna zmeda misli ne bi smela biti nikomur v pohujšanje. Ko hodimo in se vozimo naokrog, premišljujemo zdaj o tem, zdaj o onem. Težko je svobodnemu človeku dolgo vztrajati samo pri eni misli, tako kot je odvratno početi kar naprej eno in isto stvar.

Ko se vozimo ali sprehajamo po lepi pokrajini naokrog, nam misli kar same od sebe preskakujejo od ene téme na drugo. Beseda *téma* je grška: samostalnik ϑέμα izhaja iz τίϑημι, kar pomeni *denem, postavim.* Danes pomeni *téma* predvsem osnovni, osrednji predmet neke obravnave ali umetniškega dela. Imamo jo pa tudi v glasbi v pomenu zaokrožene skupina tonov, ki ima v stavku ali skladbi osrednjo vlogo. V šoli, kjer sem prebil veliko ur svojega življenja, prevladuje *učna téma*. V bizantinski državi od 7. do 9. stoletja je bila *téma* obrobna dežela z vojaško oblastjo.

Pogosto bomo namenoma razlagali besede grškega izvora. Evropa je zašla v hudo gospodarsko in finančno, verjetno tudi v moralno in duhovno krizo in moderna Grčija se je pred nekaj leti prva znašla v hudi godlji, malo po svoji, malo po tuji krivdi. Kljub temu ne smemo pozabiti, da se je ravno na grških tleh pred nekaj tisočletji začela evropska civilizacija. Tam najdemo prve evropske filozofe, naravoslovce, literarne ustvarjalce in umetnike. Tam so razvili glasovno pisavo, ki jo še danes uporabljajo, tam so prirejali prve olimpijske igre, po njihovih božanstvih, polbožanstvih in junakih se imenujejo nekatere zvezde in ozvezdja in še bi lahko naštevali. Dali so nam osnove politične kulture, takšne in drugačne. Iz naziva za staro grško mestno državico *polis*, πόλις, smo dobili besedo *politika*, iz *demos*, δῆμος, *ljudstvo*, in κρατέω, *imam moč in oblast, vladam*, pa besedo *demokracija*. Ne pozabimo, pri Grkih ne najdemo samo demokracije, ampak tudi *tiranijo*. Ta beseda pa izhaja iz besede τύραννος, kar pomeni *neomejen vladar, samodržec, samosilnik, trinog*.

Nekaj besed je v delu napisanih tudi z arabskimi in hebrejskimi pismenkami, nekaj v indijskem devanagari, nekaj v cirilici, v gotici pa samo kakšna osamela črka. To nam omogoča sodobna tehnologija. Marsikoga izvor besed figo briga. Takemu ni pomoči. Njemu je beseda le beseda, s katero opleta, ko se mu zdi potrebno. Avtor je v mladosti spoznal precej ljudi, tudi s Cerkljanske, ki so se pogosto spraševali, zakaj se nečemu tako ali drugače reče. Če pa bodo sprotne skromne jezikovne razlage koga hudo motile, naj jih preprosto preskoči.

V tem smislu je tudi napisana pričujoča knjiga. Možnost globokega premišljevanja o vsem mogočem je neke vrste zlata svoboda. Vsiljeno ali v najmilejši obliki priporočeno premišljevanje le o eni stvari s strani kogarkoli pa je že posebna vrsta suženjstva, v najmilejši obliki hlapčevstva.

Voll Verdienst, doch dichterisch,
wohnet der Mensch auf dieser Erde. Doch reiner
ist nicht der Schatten der Nacht mit den Sternen,
wenn ich so sagen könnte,
als der Mensch, der heißet ein Bild der Gottheit.
(F. Hölderlin, In lieblicher Bläue)

Res je! *Poln zaslužnosti, a pesniško domuje človek na tej zemlji. Toda senca noči, posute z zvezdami, ni čistejša, če lahko tako rečem, od človeka, imenovanega podoba boštva.* Tako je pesnikove misli prevedel Niko Grafenauer, naslov prevoda pa je *V ljubki modrini*. Človek, podoba boštva? O tem bi se dalo ure in ure na široko razpravljati. Glede na vse to, kaj se je z ljudmi in s svetom dogajalo, se dogaja in se žal še bo dogajalo, bi marsikdo povedal, da ne.

V delu so omenjena prenekatera ledinska imena na Cerkljanskem, ki se na žalost utapljajo v pozabo. Omenjeni so tudi nekateri predmeti in opravila, za katera čedalje več ljudi ne ve več, kaj pomenijo in čemu so nekoč služili in morda pomagali preživeti na tej zemlji. Že v mojem otroštvu marsičesa nismo vedeli pravilno poimenovati, kaj šele dandanes. Avtor je hvaležen sedanjim in preteklim rodovom, ki so uspeli vsaj delno ohraniti to besedno bogastvo.

Domžale, 1. sušca 2023 — Marko Razpet

1 Moja pot v šolo, po štiridesetih letih

Soboto, triindvajsetega svečana, februarja, navadnega leta 2002, sedmi dan pred marčnimi kalendami leta 2755 po legendarni ustanovitvi Rima, sem si izbral za dan, kateremu sem namenil popotovanje od svojega rojstnega doma, ki stoji okroglo 700 m nad morsko gladino, v Planini pri Cerknem, pa vse do cerkljanske osnovne šole, ki je precej niže, kakih 324 m nad morsko gladino, in sicer natančno štirideset let po obiskovanju njenega šestega razreda. Beseda *kalende* je grškega izvora, nastala iz glagola καλέω, kar pomeni *kličem, imenujem*. Prvega dne v mesecu so namreč svečeniki, pristojni za koledar, javno zaklicali ljudem, da se je začel nov mesec. Iz kalend smo dobili besedi *koledar* in *kolednik*. V cerkljanskem narečju pravijo koledarju *kalíendr*, kar je še bliže izvorni besedi. Koledniki pa so bili ljudje, ki so nekoč, tu pa tam pa še danes, v času, ko se eno leto prevesi v naslednje, hodili od hiše do hiše in s petjem ter igranjem na preprosta glasbila nabirali darove. Na kmetih so bili le-ti kos potice, par klobas, svinjski rep, uhelj, parkelj ali rilec. Dandanes, ko je tako in tako vse drugače, imamo kolednike moderne sorte, ki jim v glavnem ni treba več hoditi od vrat do vrat, ampak darove prejemajo kar prek pošte ali banke, zaradi česar je treba nekaj časa potratiti pred okenci ali pa ob računalniku. Če ima človek srečo, da ima doma vsaj telefon, če že nima internetne povezave. Če pa komu taki darovi ne gredo od rok, se pa pred vrati hitro pojavijo koledniki najhujše vrste. Nekoč smo na vprašanje *Kdaj?* odgovorili *Ob svetem Nikoli*, če smo hoteli povedati, da se nekaj nikoli ne bo zgodilo. Rimljani pa so v isti namen uporabljali reklo *Ad kalendas Graecas*, kajti Grki v koledarju nikoli niso imeli kalend kakor Rimljani.

Teh štirideset let je pravzaprav kar hitro minilo. Sicer je pa to ravno toliko časa, kolikor so po pričevanju Biblije potrebovali Izraelci, da so prišli iz egiptovskega suženjstva v svojo obljubljeno deželo. Med tem so doživeli in preživeli marsikaj, na primer prečkali Rdeče morje, obšli Sinaj, prejeli deset božjih zapovedi, se prehranjevali v puščavi z nebeško mano, pili vodo iz skale in vlili ter častili zlato tele. Imeli so srečo, da se zlato tali pri razmeroma nizki temperaturi, 1063 °C. Železu, na primer, je za taljenje treba mnogo huje podkuriti. Poti od Očanca v Cerkno nisem namenil nikakršnih posebnih telesnih, psihičnih ali drugih priprav. Nenadoma je pač naneslo tako, da sta se moj edinorojeni sin Andrej in njegov prijatelj Peter namenila v potu svojega obraza povzpeti na mogočni Porezen, najvišjo goro na Cerkljanskem. Nekje piše, da je njen vrh 1632 m nad morjem, tu pa tam pa ga za meter ali dva znižajo, kar pa jim ni treba zameriti. Beseda *Biblija* je grškega izvora: βιβλίον pomeni namreč *knjižica, knjiga, spis, pismo*. Saj tudi pravijo, da je Biblija knjiga knjig. Tudi *Egipt*, Αἴγυπτος, so zapisali Grki in zato na primer Nemci še dandanašnji verno pišejo črko *y*: *Ägypten*, Angleži *Egypt*, Francozi *Égypte*. Mi navadno *y* izgovarjamo kot *i*, Nemci pa kot *ü*. Ni težko razložiti, zakaj črko *y* Italijani včasih imenujejo *i greca*, Francozi *i grec*, Španci pa *y griega*. Naša popotnika, Peter in Andrej, imata v bistvu grški imeni: πέτρος pomeni *kamen, skala*. Andrej je po grško Ἀνδρέας iz ἀνδρεῖος, kar pomeni *možat, pogumen, vrl, hraber*. Beseda *psihičen*, ki smo jo tudi uporabili, prihaja iz grške ψυχή, kar je *duša*.

Od tistega meni zgodovinskega dne naprej se je zgodilo marsikaj. Pridružili smo se Evropski uniji, evro je postal naše plačilno sredstvo, imeli smo nekaj parlamentarnih in predsedniških volitev, zamenjalo se je nekaj vlad, odločali smo se o tem in onem na kopici referendumov, deležni smo bili nenehnim reformam v šolstvu, na univerzah smo prešli na bolonjski sistem študija, priče smo bili bliskovitemu vzponu in katastrofalnemu padcu nekaterih tajkunov ter drugim povzpetnikom, propadu nekoč uglednih podjetij, učakali smo odprtje novih avtocest in hitrih cest, uvedbo vinjet, svetlim in temnim stranem našega bivanja na tej zemlji, doživeli smo svetovno recesijo, rusko aneksijo Krima, rusko specialno operacijo v Ukrajini in še in še bi lahko naštevali. *Evropa?* Beseda iz grščine: Εὐρώπη. Besedo izvajajo iz besed ευρύς, *daleč*, in ὄψις, *pogled*. Po grški mitologiji je Zeus v podobi bika Evropo, feničansko princesko, ugrabil, jo odpeljal na svojem hrbtu plavajoč na Kreto in jo tam zapeljal. Smo torej dežela daljnega pogleda. *Katastrofa* je na prvi pogled grška beseda: καταστροφή. Sestavljena je iz besed κατά, *dol, navzdol*, in στροφάς, *vrteč se, obračajoč se*. Beseda *sistem* je prav tako grška, σύστημα pomeni *združitev, celota, truma, drhal, društvo, zbor, oddelek, sestav*.

Nekateri grški samostalniki srednjega spola so s prepisom v slovenščino spremenili slovnični spol. Primeri: τὸ σύστημα v *sistem*, τὸ πρόβλημα v *problem*, τὸ δίλεμμα v *dilema*, τὸ αἴνιγμα v *enigma*, τὸ λῆμμα v *lema*. V matematiki je beseda *lema* pogosta. Pomeni namreč *pomožni izrek*. Prvotno so jo uporabljali kot samostalnik moškega spola, na primer *Fatoujev lema*. Sčasoma se je poženščila, tako da danes uporabljamo izraze *Fatoujeva lema, Zornova lema, Urysohnova lema itd.*

Potnik, ki želi priti ali se pripeljati iz Poljanske doline po najbližji poti v Cerkno, nima prav velike izbire: ali na Hotavljah krene na desno in skozi Kopačnico ter Podpleče prej ali slej prispe na Vrhulce, 817 m nad morsko gladino, od koder se nazadnje spusti v Cerkno, ali pa na Hotavljah krene levo in tako ali drugače dospe na Sovodenj, kjer lahko spet izbira med dvema možnostma. Najkrajša je tu pot na desno, ki nas prek nekdanje nepravične rapalske meje (Katera meja je sploh pravična?) pripelje na Kladje, ki je 787 m nad morsko gladino. Tu se križa kup poti, tako da bi se še grafist, to je učeni matematik, ki se ukvarja s teorijo grafov in po možnosti dokaže vsak dan sedem izrekov in tri leme, težko odločil o stopnji tako pomembnega prometnega vozlišča. Beseda *graf* pride iz grščine: γράφω pomeni *pišem, rišem, vrežem, vdolbem*. Tu so bile nekoč trgovina, gostilna s plesiščem, šola, italijanska kaverna in morda še kaj. V tej kaverni so takoj po drugi svetovni vojni prirejali igre, plese in razstave, nato pa je v njej našlo prostor vojaško skladišče JLA[1]. Gostilna na Kladju pa je tista leta zaslovela po vsej širni Jugoslaviji po svojem radodarnem gostilničarju. Ta je slovel daleč naokrog tudi po napisu nad točilno mizo: *Na upanje dajem samo nad 80 let starim,*

[1] Jugoslovanska ljudska armada.

če pridejo v spremstvu staršev. Glede na kreditno sposobnost prebivalstva je bil napis popolnoma umesten.

Vojska se je od tam gori umaknila še pred osamosvojitvijo Slovenije. Baje je neki vojak iz ljubosumnosti streljal na volkswagnovega hrošča misleč, da je v njem dekle, ki ga je zavrnilo. V resnici je streljal na enakega hrošča, v katerem pa je bilo neko drugo dekle, ki ni imelo nič s tem vojakom. Preživela je, a ostala hroma. Menda so morali vojaki nato razširiti pot do njenega doma, da jo je lahko reševalno vozilo vozilo na terapije in nazaj. Besedo *terapija* smo prevzeli od Grkov: θεραπεία pomeni *služba, postrežba, uslužnost, skrb za kaj, oskrba, zdravljenje, negovanje*. Po tem dogodku je JLA zapustila Kladje. Tako so govorili, zraven pa nisem bil. Sicer pa se ni bilo dobro brez potrebe zadrževati v neposredni okolici vojaškega objekta. Še za vstop v transformatorsko postajo, ki je bila tik ob njegovi ograji, je bilo potrebnih cel kup ceremonij, preden so izdali dovoljenje. In to za vsako operacijo posebej. Zaradi pogostih neurij, ki jih je spremljalo grmenje in treskanje na taki nadmorski višini, je do okvar v postaji prihajalo kar pogosto.

V kaverni na Kladju so nato celo nekaj časa gojili zelo iskane šampinjone, tako da Cerkljani niso bili več tako strastno primorani stikati za jurčki in lisičkami kot nekdaj. Takega silovitega napredka kot Kladje pa sosednje Vrhulce žal (ali pa ne) nikoli niso doživele, čeprav je cesta tam čez starejša. Obema omenjenima prelazoma so pravzaprav kot dela človeških rok skupna le nabožna znamenja in kaverni. Pravzaprav malo več: na obeh sta pod Avstro-Ogrsko stala deželna kamna, ki sta nedvoumno označevala mejo med Kranjsko in Primorsko. Novi lastniki pa so ju po prvi svetovni vojni onečastili: v veliki ihti, togoti, oholosti in ošabnosti so ju izruvali in vrgli v grmovje, za nameček pa vanju še besno ustrelili. Svoje kraljestvo pa so razširili, ne da bi koga kaj vprašali, čez naravno razvodnico proti Sovodnju do Šinkovega ali Grogovega mlina, na podpleški strani pa vse do Joškovca. Gradnja kavern, bunkerjev in drugih vojaških naprav je terjala tudi iznakaženost gozdov, pašnikov in travnikov. Zemljo so zaradi višjih državnih interesov vzeli preprostim kmečkim ljudem, tako da se še dandanes ne ve, čigavo je pravzaprav kaj. Kaj se je dogajalo z omenjenima deželnima kamnoma? Deželni kamen na Kladju je pred pogubo otel neki zavedni kmet, kateremu je dolga leta dobro služil kot obtežilni kamen pri kisanju prepotrebnega zelja in repe. Na kmetih sta kislo zelje in klobasa nepogrešljivi dobrini, krvavica, po cerkljansko *mulca*, s kislo repo pa tudi. Pred leti so častitljivi kamen, vsega prenovljenega in bleščečega, postavili na prvotno zgodovinsko mesto. Deželni kamen na Vrhulcah pa je bil prav tako otet pogubi in dandanes stoji na njem steber hleva, ki je bil meni svoj čas prav blizu. Žal ga ni doletela čast, da bi stal na svojem prvotnem mestu kakor oni na Kladju. Oba prelaza povezuje dobro vzdrževana gozdna cesta prek znamenitih Jeramovih vrat, pod kmetijo Ratovž in gozdnatega Ržišča. Po njej se je poleti prav prijetno malo sprehoditi, ker nima zahtevnejših klancev.

Tod je potekala zahodna meja slavnega loškega gospostva, kot nam povedo stari urbarji in skice. Meja je potekala vse od Škofja pa tja do Slamovja in še naprej proti Veharšem, kjer je zaznati ostanke mejnega rimskega zidu, nekakšnega limesa. Matematika pa je iz besede *limes* razvila svoj nepogrešljivi pripomoček, ki mu pravimo *limita*. Latinska beseda *limes* ima množino *limites*. Pravijo, da je bil veharški limes zgrajen v 5. stoletju v obrambo proti divjim barbarskim ljudstvom na svojih pohodih v civilizirano Italijo. Beseda βάρβαρος je pri Grkih pomenila *Negrk, tujec, divjak, surovež*. V zgodovini se kar naprej dogaja, da ima zelo omikano in razvito ljudstvo druga ljudstva, ki jih v tem pogledu ne dosegajo, za manj vredne, za barbare.

Pri Ratovžu nekemu delu posestva še danes pravijo *Za zidom*. Najbrž ne kar tako brez razloga. Tam so klavrni ostanki starodavnega limesa, kar so pred leti potrdili z modernim pripomočkom: s tako imenovanim *lidarjem, laserskim skenerjem terena*. Stara pot iz Podpleč je namreč vodila levo od Tomažka navzgor mimo Jerama na Vrata in nato navzdol proti Planini. Tukaj je bil pač primeren, razmeroma enostaven in občutljiv prehod iz Poljanske doline na Tolminsko. Ti kraji so bili nekoč prav nebogljeni: dolgo ni bilo natančno določeno, komu pravzaprav pripadajo. Loškemu gospostvu, tolminski grofiji ali oglejskemu patriarhu? Beseda *patriarh* je spet grška: πατριάρχης pomeni *očak, začetnik rodu, očanec*, če hočete. Skovana je iz πατριά, *rod, pleme, narod, stan, rodovina*, in ἀρχή, *začetek, rojstvo, izvir, povod, vzrok*, pa tudi *gospostvo, vlada, oblast, poveljstvo, vladavina.*

Oba omenjena prelaza, to se pravi Kladje in Vrhulce, človeku, ki nima kaj dosti skupnega s Cerkljanskim, ne pomenita prav veliko. Nečimrno, kakor da je že vsega vajen, se po eni strani tak osebek pripelje na vrh in se spusti na drugi strani navzdol. Morda vam le malo bolj prisluhne, seveda če je to sploh voljan storiti, ko mu razložite, da čeznju poteka razvodnica med črnomorskim in jadranskim rečnim sistemom. Lahko bi mu prelaza primerjali s streho in rekli, da deževnica, ki odteka po eni strani, prej ali slej konča v Črnem morju, ob katerega južni obali, in sicer okoli današnjega Trabzona, preprosteje v Pontu, kot je zapisal France Prešeren, je mraz trl samega znamenitega rimskega pesnika Ovidija, po drugi strani strehe pa v sinjem Jadranskem morju, vzhodno od starodavnega Ogleja. Če že tujcu Kladje in Vrhulce ne pomenita kaj prida, pa marsikateri Cerkljan ne bi tako menil. Če se vrača domov skozi Poljansko dolino in če že dolgo časa ni bil doma, se mu na prelazih kar milo stori. Spet bom doma med najdražjimi, spet bom videl prelepe domače griče in hribe, potoke, drevesa, polja, senožeti, travnike, ... Spomini ga popeljejo nazaj v otroštvo, šolo, mladost, prve ljubezni, ... Žal se je zadnja leta vse tako zaraslo z visokim grmovjem in drevjem, da se z obeh prelazov ne vidi prav dobro v cerkljansko kotlino. Še za visoki Porezen se je treba malo potruditi, da ga zagledamo, čeprav je najvišji med cerkljanskimi vršaci. Edinole Blegoš s svojo plešo se z Vrhulc zaenkrat še imenitno vidi.

Ko smo se navedenega dne pripeljali čez prelaz Kladje in se spustili po gozdu navzdol, smo kmalu zagledali pod cesto mogočno poslopje, ki je bilo takrat še v gradnji, in za katero nihče ni vedel, kaj bo nekoč notri. Morda bo kaj takšnega, kot imajo Nemci v Oberwolfachu v Schwarzwaldu, svetovno znani raziskovalni inštitut za matematiko, morda pa vsaj središče za raziskovanje cerkljanskega narečja in književnosti. Kasneje se je izkazalo, da s tem ne bo nič. Govorcev našega narečja pa je vedno manj. Nekoliko niže je cestno križišče na Lapajnu pod Ržiščem, kjer se odcepi ozka cesta za Hotavlje. Ta cesta je starejša kot ona čez Kladje. Prevali se ravno na že omenjenem prelazu Vrhulce na črnomorsko stran, po nekaj ridah doseže dno doline v Podplečah ter nadaljuje svojo vijugasto pot proti Kopačnici. Popotnik se tam lahko ustavi Pri Topličarju in se okopa v topli vodi, ki priteka iz tamkajšnjega vrelca, znanega že od najstarejših časov. Idrijski rudnik je sem pošiljal svoje rudarje, zastrupljene z živosrebrnimi hlapi, na rehabilitacijo. Cesta skozi Podpleče je vrisana že v stare avstrijske zemljevide. Po njej je Avstro-Ogrska prevažala svoje vojake, strelivo, hrano in vse drugo, kar potrebuje mogočna vojska, na soško fronto. V Podplečah so bile v velikih skladovnicah ob cesti začasno shranjene ogromne količine topovskega streliva, kot mi je pripovedoval pokojni oče, ki je bil takrat star okoli 16 let. V bližini znamenitega križišča na Lapajnu je še eno posestvo, ki bi bilo tudi pripravno za kakšne manjše znanstvene seminarje, kolokvije in simpozije, ali pa vsaj za umetniške razstave na prostem. Dolgo je čakalo novega lastnika. Beseda συμπόσιον je imela pri Grkih drug pomen: *pojedina, obed, pitje, popivanje*. Kasneje pa je dobila manj zlovešč pomen, in sicer *omizje*.

Kmalu smo se zapeljali po znameniti Dreškovi ridi, po domače *rajdi*, glavni turistični atrakciji v teh krajih, kjer se marsikateri voznik še vedno rad ustavi, tako kot pred štiridesetimi leti, in sicer zato, ker se nam tam ob lepem vremenu, prvič od Kladja navzdol, odpira prelep razgled na cerkljansko kotlino, okoliške vasi in hribe z očakom Poreznom vred. Pogosto se s te ride, ki je na tej cesti ena od štirih na cerkljanski strani, ne vidi kaj prida, saj kotlino skoraj do roba napolnjuje gosta megla, poleg tega pa je pokrajina tudi že precej zaraščena s takim in drugačnim drevjem ter grmovjem in bo kmalu podobna tisti pred prihodom prvega človeka v te kraje. Na srečo megle tisti dan ni bilo, listavci pa so še kazali vsa svoja rebra in se je vmes med njimi bolj ali manj dobro videlo. Naj bo kakorkoli, rida ali rajda, navsezadnje tudi Angleži napišejo *I like*, preberejo pa *aj lajk*. V nekaterih naših zahodnih narečjih zasledimo obraten pojav: namesto *kaj* rečejo *ki*, namesto *zakaj* rečejo *zaki*, namesto *majhen* pa *mihn*.

Dogovor med nami, tremi samotnimi potniki v tistem dolgočasnem in neperspektivnem dnevu, je bil zelo preprost: Andrej in Peter bosta zavzela Porezen, medtem pa bom jaz sam prehodil pot od Očanca navzdol v Cerkno, kjer se bomo ob enih popoldne dobili in se skupaj odpeljali čez Kladje v obratni smeri kakor zjutraj, naravnost domov. Izstopil sem v Skrajnku nad Planino. Skozenj teče več potočkov strmo naravnost do Rajde, kjer se vsa zbrana voda steka v Oresovko, ki se Pri Jernu v Cerknem pridruži Cerknici. Ob zelo velikem deževju narastejo vsi ti potočki z vsemi pritoki vred tako hudo, da so v resni nevarnosti nekatere hiše na Rajdi. Skrajnk je včasih res bil na robu, kraj vasi, sedaj pa bi težko zagovarjali tako trditev. Že sedaj je morda dobro povedati, da ima na Cerkljanskem, pa tudi drugod na Slovenskem, vsak kotiček svoje ime: vsaka njiva, vsaka senožet, vsaka grapa, vsaka pot, vsaka reber, vsak laz, vsak gozd, da o hribih niti ne govorimo.

Nekaj let po tistem, ko sem bil izstopil v Skrajnku, sem bil priča dogodku, zaradi česar me je malo stisnilo pri srcu. Iz Cerknega se je kakor roj sršenov pripodila manjša skupina nemških motoristov. Koliko so bili stari in kakšnega spola je bil kateri, ni bilo moč na hitro ugotoviti, saj so bili oblečeni in pokriti kakor se spodobi za take. Ne vem, kaj jih je pičilo, v Skrajnku so se z glavne ceste pognali po stranski poti naravnost po grapi proti Očancu. Na srečo so kmalu spoznali, da so zašli, in se vrnili ter nadaljevali pot proti Dreškovi rajdi. Spomnil sem se namreč na nemške hajke med drugo svetovno vojno v teh krajih. O teh je večkrat pripovedovala pokojna mama. Morda sem celo v genih od nje prejel neko skrivnostno informacijo, tako da se mi je za trenutek zazdelo, da smo sredi vojne vihre, kar mi je pognalo nekakšen strah v kosti.

Tujih motoristov, mopedistov, celo motokrosistov, se poleti podi po naših cestah zelo veliko, ker so pač nekje brali ali slišali, da je glede tega pri nas vse bolj liberalno. Nič čudnega, če jih nepričakovano srečujemo po gozdnih poteh in narodnih parkih. Kaže, da so opremljeni z izvrstnimi specialkami in GPS, tako da se hitro orientirajo, kjerkoli so že. Marsikateri pa tudi prerano izdihne na naših cestah.

Niso pa domačini nič boljši. Bil sem priča, kako je motokrosist pridivjal na Logarjevo posestvo pod Očancem in se z vso ihto zapodil po strmini naravnost proti hiši. Toda na ostrem robu njive ga je spodneslo in odletel je v zrak ter veličastno telebnil na tla. Na srečo mu ni bilo nič. Kakor se je iznenada pojavil na prizorišču, je tudi izginil, kakor kafra. Kafra je kemijska snov v obliki kristalčkov, toda že pri zadosti veliki sobni temperaturi se spomni spremeniti v plinasto stanje, učeno povedano, *sublimira*. Od tod besedna zveza *izginiti kakor kafra*. Besedo *kafra* smo verjetno posredno sprejeli iz grške besede καφουρά, morda iz arabske *kafur*, كافور, ki pa ima izvor še dlje v preteklost, vsaj v sanskrtu, संस्कृतम्, ali paliju, पाळि.

Sprehajalcu ali komurkoli ni prav nič prijetno, ko se ti kar naenkrat od nekje vzame gorski kolesar, ki pridivja navzdol po isti poti. Motorista, mopedista, traktorista ali motokrosista zahvaljujoč stroju, na katerem sedi, vsaj pravočasno zaslišiš. Zadnje čase so se pojavili še štirikolesniki, pozimi motorne sani in na morju vodni skuterji. Same stvari, ki grenijo življenje običajnim pešcem in kopalcem. S takimi, ki se gredo tak šport, se je tudi težko pogovarjati, saj zanje običajno velja: *velika moč, pa malo pameti*. On ima svoj prav, ti imaš svoj prav. Potem se pa znajdi.

Tam blizu Očanca je skoraj ves čas mojega osnovnošolskega, gimnazijskega in univerzitetnega izobraževanja in še malo čez živel *Ta Rejev*, Vinko Eržen, imenovan tudi *Leskovčev Vencelj*, mož, ki se je v ta kraj preselil od Leskovca v Podplečah. Vzdevek si je zlahka prislužil z zbiranjem starega odpadnega železja in drugih zavrženih kovinskih predmetov. To je bilo po drugi svetovni vojni hvalevredno, morda malo nevarno početje, saj smo mu otroci znosili od doma, iz grap in gozdov vso železno zavrženo in neuporabno ropotijo. Nevarno je bilo pa zato, ker je po gozdovih ležalo še precej ostankov iz druge svetovne vojne, tudi eksplozivnih teles. Skratka, bilo je približno tako kot dandanes, ko pobirajo kosovni material, le da kovinski, zlasti medeninasti, bronasti in bakreni kosi, dobijo novega lastnika še pred prihodom pooblaščenih pobiralcev.

Pri Leskovcu so sloveli po tem, da so tam znali krpati stare lonce, popravljati ure, skovati kakšno reč, narediti kaj iz pločevine ali pa nabrusiti in postružiti to in ono. Nekoč se je stari Leskovec, ki je na stara leta trpel za naduho, zakasnil in hodeč peš domov zvečer omagal ravno Pri Očancu. Ko je malo prišel k sebi, so me pregovorili, da sem ga spremljal domov v Podpleče. Dali so mi staro laterno s svečo in sva jo počasi mahnila proti Jeramovim Vratom na črnomorsko stran. Pri Leskovcu sem prenočil, zjutraj zgodaj vstal in pozajtrkoval ter jo urno ubral nazaj čez Vrata, Pri Očancu pobral torbo in nadaljeval pot naravnost v šolo v Cerkno. Tiste čase se je Vencljeva družina še gnetla pri Leskovcu, kmalu pa so se preselili na primorsko stran v Planino, natančneje v Planino pri Cerknem. Planin je v Sloveniji več. Brat je nekoč pisal od nekod domov in pozabil napisati pod Planino še *Pošta Cerkno*. Pismo je sicer prispelo, a je bilo po dolgem in počez prežigosano, iz česar se je dalo razbrati, da je bilo v Planini pri Rakeku, Planini pri Sevnici, Planini pri Kranju, Planini pri Ajdovščini in morda še kje.

Cerkljani pa imajo že od nekdaj prelepo navado, da kar hitro, zlasti bolj znanim osebam, pripnejo kak vzdevek, ki jim po zunanjosti, opravilu ali po čemerkoli nekako ustreza. Tako smo v Cerknem mimogrede imeli *Palka, Peteršiljčka, Pištolčka, Pumpija* in druge. Pridevnik *ŕjav*, v cerkljanskem narečju *rejev*, kar je laže izgovorljivo, je izveden iz samostalnika *rja*, kar je sovražnica železa, neke vrste železov oksid. Ko sem nekoč nekoga, ki naj bi se bolje kot jaz spoznal na slovenščino, vprašal, kakšno obliko ima samostalnik *rja* v množini, se je izmotal tako, da gladko zavrnil obstoj množine samostalnika *rja*. Pa se nisem vdal. Če pogledamo v najnovejši pravopis, najdemo: *ŕja, ŕje*, pa tudi *rjà, rjè*. Za rodilnik množine prav posebej piše *ŕij*. Torej samostalnik *rja* ima množino, najbrž je imenovalnik množine *ŕje*. Kako pri tem izgovarjati *ŕ*? Nekako tako kot *ər*, *r* s polglasnikom spredaj. Kasneje sem se potolažil, ko sem odkril, da tudi nekaterim nižjim glivam pravijo *ŕje*, tako da imamo res več vrst *ŕij*. Navadno jih obravnavamo skupaj s *snetmi*.

Pridevnik *rjáv* pa izraža barvo, da se razumemo. Vinko se svojega vzdevka nikoli ni branil, še sam sebe je rad imenoval z njim. Stavbi, v kateri so prebivali Erženi, smo rekli včasih *V Fabriki*. Nekoliko više so izkopali dva rudniška rova, po katerih so na vagončkih vozili iz hriba sicer bolj revno bakrovo rudo. Začetki rudarjenja v Planini segajo že v rajnko Avstrijo, morda celo v kameno, bronasto in železno dobo. Pod Italijo pa se je rudarjenje še razbohotilo, saj je kraljevini primanjkovalo rud in so se zadovoljili tudi z manj kvalitetnimi. Tako so tik nad cesto zgradili tovarno za delno predelavo bakrove rude. Iz zgornjega rova se je prišlo skozi hrib naravnost do domačije Pri Šmičkarju na podpleški strani. Zgornji in spodnji rov na planinski strani pa sta bila povezana s poševnim jaškom.

Italijani so ob rudniku iz varnostnih razlogov postavili tudi dva betonska bunkerja. Zgornji, ki je imel tloris v obliki črke *U*, je na nekoliko nižji nadmorski višini kot Očančeva hiša. Zgornji je že skrit v gozdu in malokdo ve zanj. Zahvaljujoč prav temu rudniku je naš konec Planine dobil zelo kmalu elektriko, glede na to, kdaj šele so jo dobile nekatere druge vasi na Cerkljanskem. Ponekod je po domovih zagorela električna žarnica šele kakih trideset let po drugi svetovni vojni. Imel sem veliko srečo, da je bil v družini dober električar, ki je dobro poznal razmere na terenu. Beseda *elektrika* je doma v Grčiji. Tam so jantarju rekli ἔλεκτρον. Isto besedo so uporabljali tudi za *belo zlato*, ki je zlitina 4/5 zlata in 1/5 srebra. Tales iz Mileta[2], Θαλῆς ὁ Μιλήσιος, je namreč že poznal elektrostatične lastnosti jantarja, pa verjetno še kdo pred njim.

Jantar je, na kratko povedano, fosilizirana smola. Od nekdaj so ga nabirali ob obali Baltskega morja. Zlasti je imeniten jantar, v katerega se je ujela kaka muha, mravlja, osa, čebela, strigalica, kresnička ali vešča. Ocenjujejo, da je jantar lahko star tudi 260 milijonov let. Celo skozi naše kraje so ga

[2] Tales iz Mileta (624–545 pr. n. št.) – starogrški filozof in matematik.

tovorili v Oglej in še naprej. Iz jantarja so izdelovali različen nakit in okrasne predmete. Morda še leži kje v Sloveniji kakšen košček, izgubljen na slavni jantarski poti.

Od električarja pri hiši sem se kot otrok hitro, če ne celo kaj preveč naučil. Ko sem ga videl napeljevati žice in priključevati stikala in vtičnice s kleščami in izvijačem v roki, je kmalu začelo doma zmanjkovati predene volne, ki se je potem pojavila v kozolcu in je predstavljala žice, žarnice so bile regratove lučke, stikala pa koščki lesa iz bližnjega grmovja. To so se mi smejali mimoidoči.

O planinskem rudniku je krožilo veliko zgodb, resničnih ali ne. Ena je pripovedovala, da so pri istočasnem vrtanju s planinske in podpleške strani nekoliko zašli z idealne črte, tako da je sredi hriba rov imel nekoliko kljukasto obliko. Morda ne bi bilo nič hudega, če bi se zgrešili in kopali eden mimo drugega. Imeli bi pač dva rova. Pravili so tudi, da je med drugo svetovno vojno rov služil kot prehod iz planinske na podpleško stran in obratno, da ljudem ni bilo treba pešačiti čez Vrhulce. Rov seveda ni bil priporočljiv klavstrofobom, ljudem, ki se bojijo zaprtega prostora. *Klavstrofobija*, strah pred zaprtim prostorom, je tujka, sestavljena iz latinskega in grškega dela. Latinska beseda *claustrum* pomeni *kletka*, grška φόβος pa ima veliko pomenov, na primer *strah, bojazen, groza, strašilo, grožnja, nevarnost, strahota*.

Kmalu po drugi svetovni vojni so rudnik zaprli, zaposlene rudarje pa večinoma premestili v idrijski rudnik živega srebra. V mojih osnovnošolskih časih se je dalo vhode v planinski rudnik še prav dobro videti, celo v globino so se podali najpogumnejši, kar je bilo seveda nevarno. Prav kmalu se je vse skupaj posulo. Uhiteli so še pobrati skoraj vse železne tračnice, odpeljati vagončke, ki so jih porivali rudarji s silo svojih mišic, ostala pa sta bunkerja in debelo in mogočno tovarniško betonsko zidovje, na katerem je zraslo današnje uspešno zasebno podjetje IMOK. Rudarskim vagončkom so po domače rekli *gunti*, pa tudi *hunti*. Na Cerkljanskem in Idrijskem in še kje na Primorskem težko pravilno izgovarjajo *g*, sliši se bolj kot *h*. Nekateri, zlasti Cerkljani, pa tako in tako *g* izgovarjajo kot nekakšen zveneči *h*, približno tako kot Nemci *h* na začetku besede, na primer v besedi *Hund*, kar je *pes*. Ravno zato, ker so vagončki nekoč bili majhni in so tekali sem in tja kot psi, smo dobili besedo *hunt* oziroma *gunt*.

Za izgovarjavo glasu med *g* in *h* so si jezikoslovci izposodili od Grkov črko γ, tako da bi pravilno zapisali *γunt*. Rusi pa so nemške *h* na začetku besede zapisali kar kot г, tako pač, kakor so slišali izgovarjati Nemca. Zato pišejo nam primer Гамбург namesto Hamburg.

Podobno se *h* izgovarja sredi nemških sestavljenih besed, če se le-teh deli začenjajo s *h* kot samostojne besede. Primer: *štedilnik* je po nemško *Sparherd*. Ker je *Herd*, *ognjišče*, del te besede in se njen *h* izgovarja tako kot v besedi *Hund*, se tako izgovarja tudi v besedi *Sparherd*. Iz nje smo dobili narečni besedi *šprγet* in *šprγert*.

Glas *h* sredi ali na koncu besede je nemška posebnost, zato ga tudi pišejo drugače, in sicer kot *ch*, na primer v besedah *Wache* in *Wacht*, ki pomenita *straža*. Zato pa pravijo po domače še danes na Cerkljanskem, pa še marsikje drugod, Dnevu mrtvih, prvega novembra, *vahti*, bolj natančno *wáht*. Saj so nekoč za ta praznik veliko stražili po pokopališčih.

Razlikovanje med obema *h*v izgovoru so prevzeli tudi Čehi, ki imajo zato dve vrsti *h*. Tisti v besedi *Praha* je skoraj cerkljanski γ: *Praγa*. Študent, ki se je iz protesta proti zasedbi Češkoslovaške s strani sil Varšavskega pakta leta 1969 sredi Prage sežgal, se je pisal *Jan Palach*.

Zgornji rov planinskega rudnika se je zasul že tako kmalu po drugi svetovni vojni, da niti niso utegnili pobrati vseh tračnic. Kakšen meter teh je še v času mojega otroštva molel iz jame, ker ga zaradi silnega pritiska zemeljskih gmot ni bilo več moč potegniti ven razen če bi tja gor dostavili na primer močan traktor, da bi iz zemlje odstranil železje, kar pa se ne bi izplačalo. Od nekdanjega rudarjenja v Planini je do današnjega dne ostalo bore malo: kapelica sv. Barbare, na kateri piše po italijansko z velikimi črkami SANTA BARBARA, nekaj jalovine, ki pa je v glavnem že vsa porasla z grmovjem in drevjem, razen če jo niso pravočasno razvozili naokrog za posipanje gozdnih poti, in sredi Svetikove senožeti del rudniške prezračevalne cevi. Sv. Barbara, mučenka, je po vsem svetu zavetnica rudarjev in vseh tistih, ki imajo opravka z razstrelivom.

Sicer pa ima bližnja gozdnata okolica nekdanjega planinskega rudnika bogato zgodovino, katere se ni še nihče resno znanstveno lotil, priče pa so že pomrle ali pa so že krepko v letih. Dokumenti, kolikor jih sploh še obstaja, pa so v Idriji, Ljubljani, Trstu, Vidmu in morda še kje. Med drugo svetovno vojno je tamle kar dobro pokalo in žrtve so padale na obeh straneh. Nekaterim bo tam usojeno počakati do sodnega dne.

Kakor vsaka vojska je tudi naša osvobodilna med drugo svetovno vojno imela svoje sodstvo in tožilstvo. Naneslo je pač tako, da so se organi slednjih nekaj časa zadrževali ravno okoli planinskega rudnika. Nekdanji italijanski bunker v obliki črke U, razmeroma skrit v varstvu gozda, je bil preurejen v začasni zapor. Morda so tam celo sodili, saj so se Nemci po neki hajki hvalili, da so v bunkerju našli papirje in da je po njihovi vsebini možno sklepati, da je bil tam *Kriegsgericht*, vojaško sodišče. Kot otroci smo večkrat pretaknili vse kaverne in bunkerje. Na stenah tistega v obliki črke U smo lahko še v času moje prve polovice osnovne šole prebirali najbrž zadnje besede obsojencev. Zapisane so bile z ogljem ali svinčnikom na stene, precej spodaj, kar pomeni, da so pri pisanju verjetno ležali na betonskih tleh, na katera so položili nekaj sena ali slame. Vsebina besedil je bila poslovilna. Približno taka kot v begunjskih zaporih, ki smo jih obiskali na neki šolski ekskurziji. Vojna je bila za marsikoga huda preizkušnja. Hitro se je zgodilo, da se je človek znašel na nepravi strani, da je hote ali nehote koga izdal, da je vohunil ali kaj podobnega. Dovolj je bilo, da se mu je iz neprevidnosti kaj zareklo ali da je naredil nepravo gesto, in že je bil osumljen. Marsikdo je iz bunkerja v obliki črke U odšel samo še v smrt v bližnji gozd. Pokanja pri usmrtitvah ni bilo moč prikriti, okoliške prebivalce pa so izvajalci tolažili z izgovorom, da preizkušajo orožje ali pa da streljajo divjad. Po grobih ocenah naj bi v gozdu okoli bunkerja bilo pokončanih kakih šestdeset na smrt obsojenih. Prav zanimivo bi bilo zgodovinarjem raziskati, kaj se je okoli planinskega rudnika in v njem med drugo svetovno vojno, zlasti po kapitulaciji Italije, v resnici dogajalo. Marsikdo bo najbrž pritrdil, da so bili obsojenci v Planini še kar dostojno poslani na oni svet, saj pripovedujejo, da so jih drugje pogosto pokončali bolj zverinsko, na primer kar z rokodelskim ali poljedelskim orodjem.

Kako je bilo sicer z obsojenim na smrt sredi vojne? Ali so imeli le-ti pravico do dostojne obrambe, pokopa in označenega groba? Ali so obstajala kakšna pravila, kako z njimi ravnati? Ali so imeli sorodniki pravico izvedeti, kje so bili pokopani?

V letu po končani drugi svetovni vojni je nastal problem, kaj narediti s tistimi, ki so prisegli Dolfetu. Seveda ni bilo časa soditi vsakemu posebej. Ukaz je bil neizprosen in krut: *Vse pobiti!* Le redkim se je uspelo izogniti smrti. Po grobi oceni je bilo takšnih kakih 12 tisoč, večinoma fantov, godnih za ženitev. Žene, zaročenke in neveste so jih zaman čakale. Mnoge se niso nikoli poročile. Njihovi ženini so končali po samotnih gozdovih, v kraških breznih in opuščenih rudniških jaških.

Naredimo malo grobe statistike. Od teh 12 tisoč fantov bi se jih 8 tisoč poročilo v starosti 20 let s prav toliko dekleti. Če bi vsak par odslej imel povprečno po tri otroke, bi le-teh bilo okoli leta 1950 okoli 24 tisoč, od teh 12 tisoč deklet. Bilo bi nas za 36 tisoč več. Okoli leta 1970 bi denimo od teh deklet 8 tisoč žena rodilo okoli 24 tisoč otrok, od tega 12 tisoč deklet. Bilo bi nas vsega za 60 tisoč več. Od teh deklet bi se jih 8 tisoč poročilo okoli leta 1990 in rodilo okoli 24 tisoč otrok, od tega 12 tisoč deklic. Bilo bi nas že za 84 tisoč več. Fantje, leta 1945 stari okoli 20 let, bi v naslednjih nekaj letih večinoma pomrli, stari okoli 70 let, njihove družice pa v starosti 80 let okoli leta 2005. Tako bi nas bilo takrat okoli 64 tisoč več. Okoli leta 2010 bi od 12 tisoč deklic, rojenih pred 20 leti, 6 tisoč žensk rodilo kakšnih 18 tisoč otrok. Preostali del naroda pa bi se med tem normalno razmnoževal in umiral. Bilo bi nas lahko za vsaj 88 tisoč več, pri čemer smo upoštevali pogubljene takoj po vojni leta 1945. Morda ne bi vsaka ženska rodila po tri otroke, morda tudi ne bi bilo toliko porok, v vsakem primeru pa imamo opravka s številkami, ob katerih se lahko zamislimo. Upoštevajmo, da je med drugo svetovno vojno in takoj po njej po najnovejšem štetju na naših tleh tako ali drugače umrlo okoli 90 tisoč ljudi.

Ko se zgodi, da premišljujem o pobojih na naših tleh, se vedno spomnim na svojo učiteljico zgodovine na osnovni šoli in kasneje na gimnaziji. Zgodovinski učbeniki so pisali na primer o preseljevanju narodov. Med branjem smo dobili občutek, da so bili naši davni predniki popolnoma miroljubni, drugačni pa da so bili naši sovražniki, ki so nas preganjali in pobijali. Naša učiteljica nam je znala lepo razložiti, da naši predniki niso bili v tem pogledu nič boljši. Ko danes premišljujemo o svoji preteklosti, lahko zlahka pritrdimo trditvi, da imamo za sosede, ki si jih nismo mogli sami izbirati, narode, ki imajo precejšnje izkušnje z zatiranjem drugih narodov, sami pa še najbolj obvladamo ugonabljanje samega sebe.

Pod Jugoslavijo pa se je zanimanje za bakrovo rudo spet prebudilo v šestdesetih letih, ko sem ravno začel obiskovati Gimnazijo Jurija Vege v Idriji. Takrat so izkopali nov vhod v hrib, precej niže od prejšnjih, le streljaj nad cesto v grapi. Nov rov ni bil nikoli povezan s starimi rovi. Položili so tračnice in nekaj let samotež vozili iz hriba material, ki pa ni vseboval dovolj bakra, da bi se izplačalo zadevo predelovati. Takrat se je Vinko Eržen nehal ukvarjati s starim železjem ter drugo navlako in je odprl gostilno. Kakšnih dvajset let takega lokala v Planini sploh ni bilo. V trgovine in gostilne smo hodili v Cerkno, včasih pa na Kladje, kjer je bila, kot smo že rekli, skromna trgovina pa tudi gostilna s plesiščem. Nekaj vina, mošta in žganja pa se je naredilo tudi na kmetih, tako da gostilna ni bila ravno nujno potrebna. Čeprav so v tistih časih prevrtali celo Škofje po dolgem in počez ter prišli po novem rovu že precej globoko v hrib, so v sedemdesetih letih rudarjenje in raziskave opustili, Vinko pa je kmalu za tem opustil gostinstvo in se lotil drugega posla. Nekoč sem si dal na glavo rudarsko čelado in se v spremstvu nekega rudarja podal v globino. Tako sem izvedel, v kakšnih pogojih so delali rudarji z mojim pokojnim očetom vred. Takoj na začetku tega najnovejšega rudarjenja v Planini pa sem rudarjem na njihovo prošnjo izdelal znak, prekrižani kladivi, in napis z velikimi črkami: SREČNO. Vse to v beli izvedbi. Napis in rudarski simbol so potem pribili na nekakšno leseno tablo, prevlečeno s črno strešno lepenko. Dokler sem hodil na gimnazijo, je ta tabla krasila vhod v jamo. Tabla je imela obliko enakokrakega trapeza, kakršno ima tudi presek rudarskega rova.

Tako na Kladju kot pri Vinku pa se ni le dobro pilo in jedlo, na veliko se je tudi godlo, plesalo in silvestrovalo. Gostje so, takoj ko so dobili spodobne in dostojne službe in se za silo motorizirali, prihajali od blizu in daleč, prav tako godci. Takrat so med avtomobili prevladovali fički, med vozili na dveh kolesih pa mopedi. Seveda je prihajalo tudi do nesporazumov, prepirov in, na srečo malokdaj, celo do pretepov. Novi gostilni navadno nekaj časa prav dobro gre, ker ljudje prihajajo vanjo že zaradi radovednosti in naveličanosti njihovih dotakratnih lokalov.

V prevodih učbenikov viteza Franca Močnika[3] , velikega cerkljanskega rojaka, katerega bomo še omenjali, toda ne prav veliko, ker je to bolje zapisano drugje, slovensko matematično izrazoslovje še ni bilo niti približno ustaljeno. Tako je zaslediti besede *vštričnik* za paralelogram, *polvštričnik* za trapez, *enakostegnat* za enakokrak in tako dalje. Moja rudarska tabla, izdelana po vseh zahtevah naročnika, je torej imela obliko *enakostegnatega polvštričnika*. Enakokraki trapez je trapez, ki ima enako dolga kraka, enako dolgi diagonali, eno simetralo in je povrh vsega še tetivni štirikotnik, zaradi česar mu lahko brez težav očrtamo krožnico (slika 1). Obliko enakokrakega trapeza imajo na primer tudi stranske ploskve pri lesenih koritih za domače cvetice, doma pa je tudi bilo nekaj takih trapezov, na primer pri mizi za mešenje testa, ki smo ji rekli *binkle*, in pri vejalniku za žito.

V Močnikovem času ni bilo ustaljeno strokovno izrazoslovje nasploh. Z

[3]Franc Močnik (1814–1892) – slovenski matematik, pisec učbenikov in šolnik.

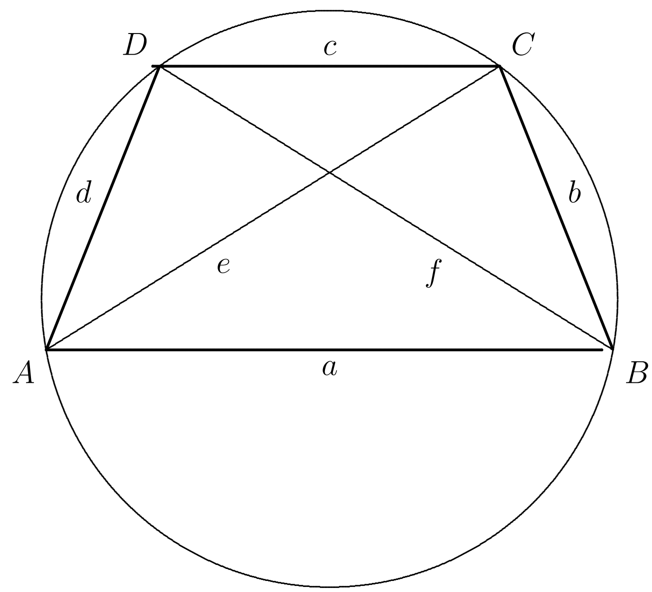
izrazoslovjem v naravoslovju se je ukvarjal na primer Mihael Peternel[4], laniški gospod, rojen tu blizu, na Lanišah, na meji med Kranjsko in Primorsko. Če bi obveljala njegova beseda, bi danes kisiku rekli *kislec*, vodiku *vodenec*, ogljiku *ogljec* in dušiku *trohnelec*. Pravniško izrazoslovje pa je takrat koval Matej Cigale[5], doma v Črnem Vrhu nad Idrijo. Močnik in Cigale sta že davno dobila spominski obeležji v njunih rojstnih krajih, laniški gospod pa je nanj čakal kar 95 let, pa čeprav imamo že dolgo sredi Ljubljane *Peternelovo ulico*, kratko sicer, kajti šteje izredno malo hišnih številk, med Vegovo in Gosposko, tik za Univerzo. Spomenik pa ima Mihael Peternel celo na ljubljanskem Navju.

Marsikdo se bo sedaj vprašal, kaj počne tu matematika, ko pa je že vse kazalo, da se bomo posvetili Planini, Čeplezu, Škofju, planinskemu rudniku z okolico in Cerknemu. Matematika je pač v danih okoliščinah postala pomemben del mojega življenja in pogosto razmišljam o njej. Od kod se je vzela slavna beseda matematika? Iz stare grščine. Beseda μάθημα namreč pomeni *znanje, znanost, veda, nauk, učenje, poduk*. Na koncu knjige se bomo še malo pomudili pri klasični grščini.

Pri gimnazijski matematiki smo precej časa posvetili analitični geometriji v ravnini. Obravnavali smo v glavnem analitične zapise premic in stožnic. Gre za to, da te objekte gledamo v izbranem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu, v katerem točki enolično priredimo pravokotni koordinati x in y, krivuljam pa funkcijsko povezavo $f(x,y)=0$. Zato pogosto analitično geometrijo imenujejo tudi *koordinatna geometrija*. Pri analitični geometriji na veliko uporabljamo algebro in analizo. Za besedo *kartezični* se moramo zahvaliti francoskemu matematiku in filozofu Renéju Descartesu[6], ki je bil v latiščini *Renatus Cartesius*.

Ideja analitične geometrije v prostoru je podobna kot v ravnini, le da se vse skupaj dogaja v izbranem prostorskem pravokotnem kartezičnem koor-

[4] Mihael Peternel (1808–1884) – duhovnik in prvi ravnatelj ljubljanske realke.
[5] Matej Cigale (1819–1889) – slovenski pravnik in jezikoslovec.
[6] René Descartes (1596–1650) – francoski matematik, fizik in filozof.



Slika 1: Enakokraki trapez. V njem velja $b = d$, $e = f$ in $a \parallel c$.

dinatnem sistemu, v katerem točki priredimo pravokotne koordinate x, y in z, ploskvam pa funkcijsko povezavo $f(x, y, z) = 0$. Prehod z dveh na tri razsežnosti je za marsikoga težak, zato so dobrodošli modeli. V obdobju hitrih računalnikov pa s primerno programsko opremo lahko tudi prostorske objekte lepo doživimo, ker jih lahko sukamo, premikamo, povečujemo in zmanjšujemo.

Analitična geometrija v prostoru, ki se dandanes najbolje obravnava z vektorji, pride torej vsaj pri rudarstvu kar prav. Denimo, da imamo globoko pod zemljo mimobežna ravna rova. Zaradi takega ali drugačnega razloga je treba izračunati, koliko sta vsaksebi in kateri točki, ena v enem, druga v drugem rovu, sta si najbližji. Morda zato, da bi iz enega, nezasutega rova, rešili rudarje v drugem. Tu si pomagamo prav z izračunom razdalje med mimobežnicama.

Sliši se nezaslišano – *vektorji*. A le nekaj časa, dokler se jih človek malo ne privadi. Potem pa brez njih ne more več shajati. Vektorji so namreč zelo pripravno orodje v analitični geometriji in nikoli nisem razumel, da so se jih nekateri profesorji bali kot hudič križa. Najbrž so se v študentskih letih nekaj naučili, opravili celo doktorat, nato pa se jim ni več dalo študirati novotarij ali pa zanje preprosto niso imeli časa. Morda se jim vektorji niso zdeli potrebni. Razvoj matematike in drugih znanosti je pač pokazal, da ni tako. Prav elegantno se da marsikaj, za kar bi potrebovali dolg in zapleten zapis, preprosto izraziti z vektorji. Osnovna zapisa sta enačba premice in enačba ravnine v prostoru. Z vektorji hitro zapišemo oddaljenost točke od dane premice in ravnine. Pa presek premice z ravnino, presek dveh ravnin, projiciranje in zrcaljenje točke prek premice in ravnine. Pa še bi lahko naštevali.

Na planinski rudnik in vrtanje po meni tako dragem Škofju v mojem gimnazijskem času sem se še kasneje pogosto spominjal. V Akademskem kolegiju v Ljubljani, kjer sem se znašel kot bruc, je stanovalo tudi nekaj študentov geologije iz Idrije in od drugod. Takrat je idrijskemu rudniku živega srebra še kar dobro šlo in so temu primerno štipendirali svoje bodoče rudniške inženirje. Z vrtanjem v globino geologi lahko natančno ugotovijo, kje je ruda. Če ugotovijo, da je ruda v tetraedru z znanimi oglišči $T_0(x_0, y_0, z_0)$, $T_1(x_1, y_1, z_1)$, $T_2(x_2, y_2, z_2)$ in $T_3(x_3, y_3, z_3)$, kjer so koordinate točk podane v nekem pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu, potem prostornino tetraedra lahko hitro izračunamo. Kako, smo se dobro naučili že pri profesorju Jožetu Karčniku (1931–2022) na idrijski gimnaziji.

V tretjem letniku gimnazije smo namreč imeli izbirni predmet, pri katerem smo obravnavali vektorje, determinante in sisteme linearnih enačb. Ko je profesor napovedal, da bomo pri tem predmetu obravnavali vektorje, se nam je že beseda *vektor* zdela tuja in neprijazna. Nič čudnega, saj smo do takrat v matematiki poznali v glavnem samo števila. Slišali smo, da fiziki za opis nekaterih količin niso zadovoljni le s *skalarji*, ampak da rabijo nekakšne vektorje. Še več, za opis napetosti in deformacij pa *tenzorje*. Skalar je opisan z enim številom, vektor s tremi, tenzor pa kar z devetimi. Seveda v trirazsežnem prostoru. Nezaslišano pa je bilo že samo slišati o večrazsežnih prostorih. Človek se tudi s temi nekako sprijazni, ko enkrat zleze iz okovov vsakdanjosti in je sposoben abstraktnejšega razmišljanja. Nekaterim to bolj, nekaterim manj uspe. Navadno sta za to potrebna čas in potrpljenje.

Takrat smo med drugim spoznali, da je prostornina V paralelepipeda, ki je razpet na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ in ki imajo začetek v isti točki, enak absolutni vrednosti njihovega mešanega produkta:

$$V = |(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|.$$

Mešani produkt bomo še srečali in navedli bomo tudi nekaj njegovih lastnosti. Izraz *mešani produkt* marsikdo, ki mu je domač le običajni produkt števil, sprejme z mešanimi občutki. Vektorski račun poleg produkta števila z vektorjem namreč pozna še dva osnovna produkta: skalarnega in vektorskega. Skalarni produkt vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$ je število, ki ga označimo z $\vec{a} \cdot \vec{b}$ (lahko pa ga pišemo tudi brez vmesne pike), in je natančno definiran skalar, vektorski produkt pa natančno določen vektor, ki ga običajno označimo z $\vec{a} \times \vec{b}$. Najdemo pa tudi oznako $[\vec{a}, \vec{b}]$. V standardni urejeni bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ lahko oba produkta vektorjev

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \quad \text{in} \quad \vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$$

izrazimo v oblikah:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3, \qquad \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Determinanta, ki izraža vektorski produkt, je simbolična, kajti vrstice v njej so očitno raznorodne, v definiciji determinante pa nastopajo sama števila. Profesor Karčnik je vektorski produkt definiral kar s tako determinanto in iz lastnosti determinant sklepal na lastnosti vektorskega produkta, kar seveda ni korektno, a dijaki smo to sprejeli brez pripomb. Še imenitno se nam je zdelo, ker ni bilo treba nečesa znova dokazovati.

Čudna sta oba produkta: rezultat je lahko nič, pa čeprav nobeden od faktorjev ni nič. Za skalarni produkt zakon asociativnosti nima nobenega smisla, za vektorski produkt pa ne velja, saj je po Graßmannovih[7] identitetah

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{c} = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{c})\vec{a}, \quad \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}\,)\vec{c}.$$

Pač pa velja Jacobijeva enakost:

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \times \vec{c} + (\vec{b} \times \vec{c}\,) \times \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a}\,) \times \vec{b} = \vec{0}.$$

Po Jacobiju[8] se imenuje v matematiki še marsikaj. Najbolj mi je ostala v spominu Hamilton[9]–Jacobijeva diferencialna enačba, ki smo jo pri profesorju Francu Križaniču[10] obravnavali čisto na koncu poletnega semestra, v maju, ko se študentom že ni več kaj dosti dalo sproti delati in so raje razmišljali o prihajajočih izpitih in počitnicah. Na stvari, ki jih profesor predava na koncu, se tudi on najbolje spominja in jih na izpitu po navadi najraje izprašuje. Prav zaradi Hamilton–Jacobijeve diferencialne enačbe je na videz strogi, toda dobrohotni profesor Križanič marsikoga poslal na *zorenje*. To je pomenilo, da ni ravno padel in mu izpita ni bilo treba ponavljati. Ko je obvladal to enačbo, poimenovano po dveh matematikih, tako dobro, da je znal potek njenega reševanja kolikor toliko v redu razložiti, je bil izpit končan.

Hermann Günther Graßmann je bil vsestranski znanstvenik. Čeprav je bil samo učitelj na gimnaziji, je počel še marsikaj. Med drugim je razvil vektorski in tenzorski račun, morda malo nerodno, ki ga pa ugledni matematiki niso razumeli ali pa ga niso hoteli razumeti. Šele nekaj let pred njegovo smrtjo so priznali njegovo matematično delo *Ausdehnungslehre* kot zelo pomembno za nadaljnji razvoj znanosti.

S profesorjem Križaničem smo se po svoje prvič srečali na gimnaziji, saj smo uporabljali med prvimi ravno njegove učbenike. Doživeli so nekaj ponatisov in prenov, tako kot naš šolski sistem. Zadnji učbeniki so se imenovali

[7]Hermann Graßmann (1809–1877) – nemški matematik.
[8]Carl Jacobi (1804–1851) - nemški matematik.
[9]William Hamilton (1805–1865) – irski matematik.
[10]France Križanič (1928-2002) – slovenski matematik.

berila. Doživeli pa so pravo prekletstvo, saj se je začela cela gonja proti Križaniču in njegovim berilom. Pa ne le s strani staršev ali njihovih namestnikov v želji, da bi njihov varovanec zlahka naredil šolo, ampak tudi s strani nekaterih šolskih ravnateljev in profesorjev po gimnazijah in celo fakultetah.

Za mešani produkt pa moramo imeti na razpolago tri vektorje, denimo $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$. Njihov mešani produkt označimo z $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ in to ni po definiciji nič drugega kot

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot \vec{c}.$$

Za ta produkt veljajo relacije:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = (\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}\,) = (\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}\,).$$

Nekako tako, kot bi tri osebe plesale kolo na Vilčkovem odru na Kladju, in sicer v smeri, ki je nasprotna gibanju kazalcev na uri. Ples v nasprotni smeri, zato predznak minus, torej v smeri kazalcev na uri, pa pomeni:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\,) = -(\vec{a}, \vec{c}, \vec{b}\,) = -(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a}\,) = -(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c}\,).$$

V drugem letniku gimnazije pa smo se naučili, kar je dobro znano že iz zgodovine starih Egipčanov, Asircev, Babiloncev in Grkov, namreč da je prostornina tristrane piramide ali tetraedra z izbrano osnovno ploskvijo enaka tretjini prostornine tristrane prizme z isto osnovno ploskvijo in isto višino. Čeprav je to znano že iz antičnih časov, tega ni nič lahko pojasniti nekomu, ki ima slabo prostorsko predstavo. Na srečo je obstajal na šoli lesen model pokončne tristrane prizme, ki je bila razrezana na tri tetraedre enakih prostornin. Ko enkrat znamo izračunati prostornino tristrane prizme in tristrane piramide, obvladamo tudi prizmo in piramido, ki ima za osnovno ploskev večkotnik poljubne oblike. Tetraeder je v tem pogledu osnovno telo, tako kot je trikotnik osnovni ravninski lik. Veliko kasneje sem izvedel, da je trikotnik *dvorazsežni simpleks*, tetraeder pa *trirazsežni simpleks*. Nazadnje pa uženemo, kar se tiče prostornine, celo valj, stožec in kroglo.

Ploščino trikotnika kot polovico ploščine paralelograma pa vsakdo hitro razume. Ker je tretjina polovice ravno šestina, hitro najdemo, da je prostornina V tetraedra, razpetega na vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$, ki imajo začetek v isti točki (slika 2), enaka

$$V = \frac{1}{6}|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})|.$$

Sedaj pa nazaj k naši nalogi o rudi. Iz enega od oglišč, vzemimo kar T_0, potegnemo vektorje do sosednjih oglišč in zapišemo:

$$\vec{a} = \overrightarrow{T_0T_1}, \quad \vec{b} = \overrightarrow{T_0T_2}, \quad \vec{c} = \overrightarrow{T_0T_3}.$$

Prostornino V splošnega tetraedra potem hitro izračunamo po zgornji formuli. Toda vektorje $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ lahko najprej izrazimo kot razlike krajevnih vektorjev končnih in začetnih točk, kar pomeni, da jih v standardni urejeni bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ izrazimo z razlikami koordinat:

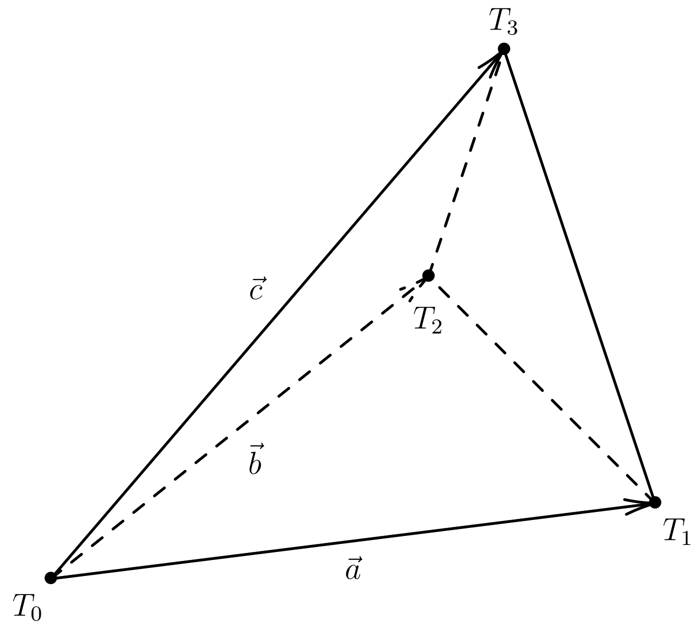
$$\begin{aligned}
\vec{a} &= (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0), \\
\vec{b} &= (x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0), \\
\vec{c} &= (x_3 - x_0, y_3 - y_0, z_3 - z_0).
\end{aligned}$$

Mešani produkt $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ izrazimo kot $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c})$, iz česar se takoj vidi, da se ga potem da preprosto izraziti s trivrstno determinanto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$

Predelamo jo lahko kar hitro v štirivrstno determinanto:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 0 & x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ 0 & x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \\ 0 & x_3 - x_0 & y_3 - y_0 & z_3 - z_0 \end{vmatrix}.$$



Slika 2: Prostornina tetraedra.

Če drugi, tretji in četrti vrstici preprosto prištejemo prvo vrstico, se determinanta ne spremeni, dobimo pa precej lepšo, preglednejšo obliko, kjer vlada kar lep in spoštljiv red, ki si ga zlahka zapomnimo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 & z_0 \\ 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Nazadnje imamo formulo:

$$V = \frac{1}{6}|\Delta|.$$

Če obvladamo prostornino splošnega tetraedra ali trirazsežnega simpleksa, ki je najbolj preprosto telo s štirimi oglišči in štirimi trikotniki, potem zmoremo izračunati tudi prostornino bolj zapletenih teles, ki jih tako ali drugače z ravninami razrežemo na same tetraedre, nato pa njihove prostornine seštejemo.

Tako lahko geologi z vrtinami v zemljo in merjenji še kar natančno ocenijo, koliko rude je globoko pod zemeljskim površjem.

Na ljubljanski univerzi sem izvedel še za eno zanimivo interpretacijo vektorske enakosti, namreč skalarnega produkta vektorskih produktov, kjer sodelujejo kar štirje vektorji, denimo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{x}$ in $\vec{y}$. Prvima dvema recimo fanta, zadnjima dvema pa dekleti. Dokažemo lahko, z vso matematično strogostjo, da velja enakost:

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}\,) = (\vec{a} \cdot \vec{x}\,)(\vec{b} \cdot \vec{y}\,) - (\vec{a} \cdot \vec{y}\,)(\vec{b} \cdot \vec{x}\,).$$

Pri tem uporabimo lastnosti mešanega produkta in Graßmannovo identiteto. Za hip označimo $z = \vec{x} \times \vec{y}$. Tako imamo

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}\,) = (\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot \vec{z} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{z}\,).$$

Ker je z Graßmannovo identiteto

$$\vec{b} \times \vec{z} = \vec{b} \times (\vec{x} \times \vec{y}\,) = (\vec{b} \cdot \vec{y}\,)\vec{x} - (\vec{b} \cdot \vec{x}\,)\vec{y},$$

dobimo:

$$(\vec{a} \times \vec{b}\,) \cdot (\vec{x} \times \vec{y}\,) = \vec{a} \cdot [(\vec{b} \cdot \vec{y}\,)\vec{x} - (\vec{b} \cdot \vec{x}\,)\vec{y}\,] = (\vec{a} \cdot \vec{x}\,)(\vec{b} \cdot \vec{y}\,) - (\vec{a} \cdot \vec{y}\,)(\vec{b} \cdot \vec{x}\,).$$

Kdo ve, kdo se je spomnil naslednje razlage zgornje enakosti z namenom, da bi si jo laže zapomnili. Za domače, cerkljanske razmere in priložnosti bi jo povedali takole:

Fanta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ ter dekleti $\vec{x}$ in $\vec{y}$ so šli skupaj na sprehod od Kacina na Lajše. Tja, na Lajše, je fant $\vec{a}$ šel z dekletom $\vec{x}$, fant $\vec{b}$ pa z dekletom $\vec{y}$. Nazaj z Lajš (zato predznak minus pred drugim členom na desni strani enakosti) pa je fant $\vec{a}$ prišel z dekletom $\vec{y}$, fant $\vec{b}$ pa z dekletom $\vec{x}$.

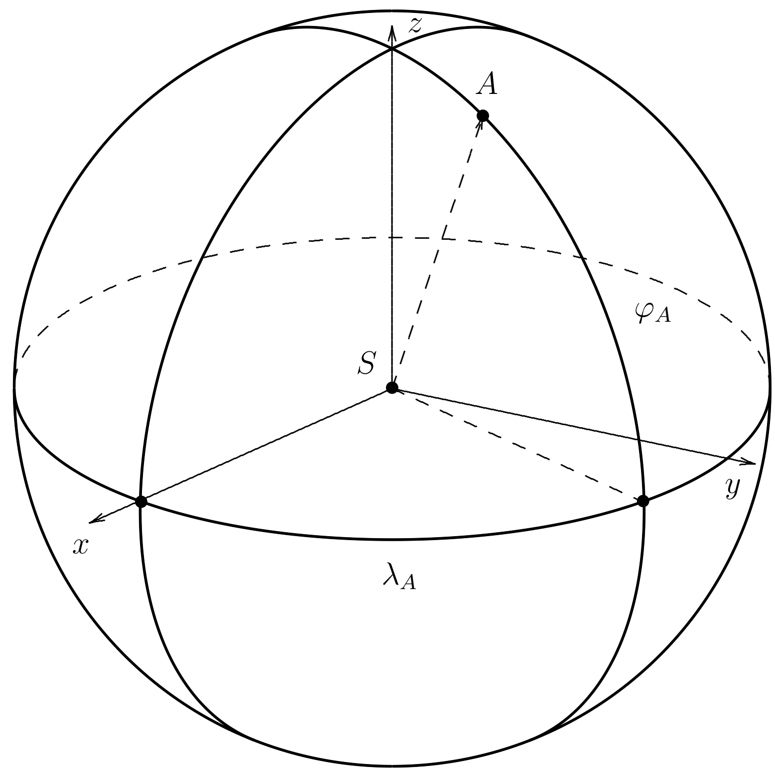
Nekoč je pač taka razlaga krožila med profesorji matematike. V mnemotehničnem smislu se mi ne zdi popolnoma nič sporna. Je že tako, da se ljudje prej zapomnijo kako neumnost kot pa smrtno resno stvar. Kacinov grič je lepa razgledna točka, ker se od tam vidi velik del Cerkljanske, še moj rojstni kraj pod Škofjem. Takih točk je bilo njega dni več, a zaradi visokega drevja in grmovja jih ni več. V računalništvu poznamo izraz *mnemonik*, *mnemotehnika* pa je veščina, kako si nekaj laže zapomnimo. Izraz izhaja iz grščine: μνήμη pomeni *spomin, pomnjenje, spominek*, τέχνη pa *umetnost, znanje, spretnost*.

Od kod se je pa malo prej vzela beseda *tetraeder*? Pravilni tetraeder, četverec, smo obravnavali že v osnovni šoli kot eno od petih pravilnih ali platonskih teles. Pogosto pridevnik *pravilni* kar izpuščamo. Sledili so mu heksaeder, šesterec ali kocka, oktaeder ali osmerec, dodekaeder ali dvanajsterec in ikozaeder ali dvajseterec. Ime pravilnega telesa je odvisno od števila pravilnih večkotnikov, ki ga omejujejo. Od nekdaj vemo, da so to lahko zgolj enakostranični trikotnik, kvadrat in pravilni petkotnik. Vsa tuja imena so telesom dali Stari Grki, ki so geometrijo že dobro obvladali. Druga polovica imen je vsem skupna in ima isti izvor kot dobro znani šolski *kateder*, grško καθέδρα. Po grško namreč beseda ἕδρα pomeni marsikaj: *sedež, stol, klop, sedišče, sedalo, zadnjica; prebivališče, stanovanje, stanovališče; svetišče, ladjišče; sedenje, seja, zborovanje; obotavljanje, pomuda, počivanje*. Franc Močnik bi morda raje zapisal *četverostenje* namesto tetraeder. Prva polovica besede tetraeder pa izhaja iz grškega števnika τέτταρες, *štiri*, ki ima ustrezni vrstilni števnik τέταρτος, *četrti*, in prislovni števnik τετράκις, *štirikrat*.

Podobno bi lahko razložili imena ostalih pravilnih ali platonskih teles. Platon[11], Sokratov[12] učenec, je bil velik starogrški mislec in filozof. Kot zanimivost zapišimo, da Πλάτων pomeni *širokopleči*. Nekateri pravijo, da je vse filozofiranje, ki je njemu sledilo, pravzaprav samo še replika na Platonove ugotovitve. O platonskih telesih bomo nekoliko več govorili na nekem drugem mestu. Johannes Kepler[13], ki ga bomo v tem delu še srečali, je veliko časa posvetil ravno tem telesom, pa tudi drugim, da bi pojasnil Sončev sistem, a

[11]Platon (427–347 pr. n. št.) – grški filozof.
[12]Sokrat (470–399 pr. n. št.) – grški filozof.
[13]Johannes Kepler (1571–1630) – nemški matematik in astronom.

je spoznal, da to ne vodi v pravo smer.



Slika 3: Zemljepisne koordinate kraja.

Zgodilo se mi je, da sem moral nekega dne na hitro najti razdaljo med krajema A in B na zemeljski obli. Za oba sta bila znana podatka, zemljepisna širina in zemljepisna dolžina. O teh smo se učili že na osnovni šoli. Zemljepisna širina kraja A naj bo φ_A, zemljepisna dolžina pa λ_A, zemljepisna širina kraja B pa naj bo analogno φ_B (slika 3), zemljepisna dolžina pa λ_B, radij zemeljske oble pa R. Iz središča Zemlje S potegnimo vektorja $\overrightarrow{SA}$ in $\overrightarrow{SB}$ do točk A in B. Pravokotni kartezični koordinatni sistemu xyz vpeljemo tako, da je njegovo izhodišče v točki S, os x poteka skozi presečišče začetnega poldnevnika in ekvatorja, os y seka ekvator 90° vzhodneje, os z pa poteka skozi severni pol.

V tem koordinatnem koordinatnem sistemu očitno velja:

$$\overrightarrow{SA} = R(\cos\varphi_A \cos\lambda_A, \cos\varphi_A \sin\lambda_A, \sin\varphi_A)\,,$$

$$\overrightarrow{SB} = R(\cos\varphi_B \cos\lambda_B, \cos\varphi_B \sin\lambda_B, \sin\varphi_B).$$

Skalarni produkt teh vektorjev je:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} =$$

$$= R^2(\cos\varphi_A \cos\lambda_A \cos\varphi_B \cos\lambda_B + \cos\varphi_A \sin\lambda_A \cos\varphi_B \sin\lambda_B + \sin\varphi_A \sin\varphi_B).$$

Po poenostavljanju imamo:

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = R^2(\cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin\varphi_A \sin\varphi_B).$$

Po drugi strani pa je

$$\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{SB} = |\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{SB}| \cdot \cos\alpha = R^2 \cos\alpha\,,$$

kjer je α kot med vektorjema $\overrightarrow{SA}$ in $\overrightarrow{SB}$. Za ta kot torej velja:

$$\cos\alpha = \cos\varphi_A \cos\varphi_B \cos(\lambda_B - \lambda_A) + \sin\varphi_A \sin\varphi_B.$$

Razdalja $d(A, B)$ med A in B je najkrajša razdalja med A in B se seveda meri po glavnem krogelnem krogu. Zato je

$$d(A, B) = R\alpha\,,$$

kjer je kot α izražen v radianih. Vse to je seveda točno ob predpostavki, da je Zemlja idealna krogla.

Izražanje kotov v radianih dela ljudem nemalo problemov, čeprav je mersko število kota v stopinjah sorazmerno merskemu številu istega kota v radianih. Že prva šolska naloga pri matematiki na gimnaziji je od nas zahtevala, da pretvorimo neki kot, ki je bil dan v stopinjah, minutah in sekundah, v radiane, ali pa je bilo morda ravno obratno. Kotne stopinje, minute in sekunde so starodavna dediščina Mezopotamcev in njihovega šestdesetiškega sistema, ki ga iz rabe ni izrinila niti velika francoska revolucija. Morda pa je bila celo ena naloga pretvarjanje kota v eno smer, druga pa v drugo. Veliko truda je zahtevala, veliko množenj in deljenj, zato je bilo veliko priložnosti za napako in človek je bil lahko že tu, na samem začetku, ob četrtino ali celo polovico točk. Za marsikoga je bil to *obetaven* začetek akademske kariere.

En radian je v krogu tisti središčni kot, ki ustreza loku dolžine enega radija. To je za novinca težka definicija. Veliko bolje bi bilo uporabiti kar enostavni sklepni račun, kot ga uporabljamo na primer pri cenah. Zato kot $180°$ meri π radianov, kot $0°$ pa 0 radianov, zveza med enimi in drugimi enotami pa je linearna. To je vse, kar je treba vedeti. To pomeni:

$$1 \text{ stopinja} = \frac{\pi}{180} \text{ radianov}\,,\ 1 \text{ radian} = \frac{180}{\pi} \text{ stopinj.}$$

V matematiki radianov niti ne omenjamo, ko se jih privadimo. Radiani so absolutne kotne enote brez dimenzije. Ko na primer napišemo $\sin 3$, imamo v mislih sinus kota 3 radianov.

Mimogrede smo spoznali tudi merjenje kotov v gradih. Pravi kot meri 100 gradov: $90° = 100^{\mathrm{g}}$. Grade so uvedli Francozi hkrati z metrskim sistemom. Celo nekatera žepna računala imajo na izbiro radiane, stopinje in grade.

Ko sem že mislil, da je kotnih enot zame konec, sem v JLA, kjer sem bil pri topništvu, srečal še hiliadite, imenovane tudi tisočinke ali črtice. Označujemo jih s $^{-}$. Matematike, če niso od samega študija prej napol oslepeli ali bili tako ali drugače nesposobni služiti vojake, so navadno dali k topništvu, kjer so računali, kako nameriti top, da bo prav zadel. Hiliadit je zelo pripravna enota, ko je treba nekaj na hitro izračunati. Polni kot je razdeljen na 6400 hiliaditov, iztegnjeni kot na 3200 hiljaditov, pravi kot pa na 1600 hiliaditov:

$$360° = 6400^{-}, \quad 180° = 3200^{-}, \quad 90° = 1600^{-}.$$

Krog s polmerom 1000 m ima obseg 6283 m in nekaj čez, kar običajno zaokrožimo na 6400 m, ker je to dolžino zelo lahko večkrat zapored deliti z 2. Rusi vzamejo zaokrožitev navzdol, na 6000 m. Zato je 1^- zelo natančno kot, ki ustreza krožnemu loku dolžine 1 m na krožnici s polmerom 1000 m. Metrsko palico, ki jo gledamo z razdalje 1000 m, vidimo približno pod kotom 1^-. Beseda *hiliadit* ima izvor v grški besedi χίλιοι, kar pomeni *tisoč*.

Kdor nima v znanosti česa pametnejšega početi, se ukvarja z novimi izrazi in oznakami ali pa si izmišljuje nove enote. Tako si je nekdo izmislil oznako $\tau = 2\pi$, tako da bi polni kot meril 1τ, iztegnjeni kot $\tau/2$, pravi kot pa $\tau/4$.

Oznake v matematiki so seveda pomembne. Bile naj bi enostavne, kar same naj bi čim več povedale, kaj označujejo, in seveda nedvoumne. Za matrike najdemo po knjigah oznake $\|\ \|$, $[\ ]$, $(\ )$. Na srečo za determinanto vsi že dolgo uporabljajo oznako $|\ |$. Zgled:

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{matrix} \right\|, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \det B = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Tudi determinante so zelo uporabne v matematiki. Pogosto jih dijaki mešajo z diskriminantami, ker besedi zvenita nekoliko podobno. Determinanta je opredeljena razmeroma zapleteno za vsakogar, ki ni ravno doma v matematiki. Gre pa za tole, da n^2 števil razporedimo v kvadratno tabelo z n vrsticami in prav toliko stolpci, nato vse skupaj postavimo med navpični črti nekako takole:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Indeksiranje ni ravno dosledno, saj bi neuki kaj hitro razumeli, da je na primer element a_{11} okrašen z indeksom enajst. Običajno se nihče ne muči s tem, da bi pisal na primer $a_{1,1}$. Iz besedila je navadno razvidno, za kaj gre.

Besedi *indeks* in z njim povezano *indeksiranje* prihajata iz latinske besede *index*, kar pomeni *kazalec, znak, seznam*. Na fakulteti smo imeli indeks predavanj, kamor so se nam profesorji podpisovali in s tem potrjevali inskripcijo in frekvenco. Potrjena inskripcija je pomenila, da smo se na začetku predavanj v semestru sploh pojavili v pravi predavalnici, podpisana frekvenca, ki je bila bolj pomembna in jo je bilo teže pridobiti, saj si jo je bilo treba zaslužiti, pa je pomenila, da smo vztrajali do konca predavanj v semestru in včasih tudi to, da smo v potu svojega obraza opravili predpisane vaje in kolokvije. V indeksu so bili nalepljeni koleki, udarjeni žigi, podpisi dekana, da smo sploh vpisani na fakulteto, da smo bili zdravniško sistematsko pregledani in drugo. Indeks je bilo treba včasih tudi pokazati, da je bila potrjena istovetnost študenta. Z indeksom v roki se je celo dalo na kako prireditev. Moral pa je seveda biti veljaven.

Sicer pa imamo še indekse pojmov, indeks dobička in index izgube v gospodarstvu, indeks knjig. Najbolj sem si zapomnil *Index librorum prohibitorum*, to je *Indeks prepovedanih knjig*, ki ga je izdal papež Pavel IV. leta 1559. Verniki brez posebnega dovoljenja knjig z Indeksa niso smeli brati, sicer so hitro prišli v roke inkviziciji, kar je lahko pomenilo tudi tako ali drugačno smrt. V tem, kako ugonobiti človeka, so bili vsi, ki so o tem odločali, v zgodovini, ne glede na družbeni red, zelo domiselni in se jim je pamet v tem pogledu najbujneje razcvetela. Zadnja, dvajseta izdaja Indeksa je bila dana na svetlo leta 1948, leta 1966 pa ga je formalno ukinil papež Pavel VI.

Kdo od znanih ljudi se je s svojim delom znašel na Indeksu? V tem delu večkrat omenjeni René Descartes z delom *Méditations Metaphysiques*, na primer. Pa Galileo Galilei[14] in njegov *Dvogovor o dveh glavnih svetovnih sestavih, Ptolemajevem*[15] *in Kopernikovem*[16] – *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, Tolemaico e Copernicano*. Še in še bi lahko naštevali. Galileo je v zimi 1609/10 s svojim teleskopom odkril štiri najsvetlejše Jupitrove lune, poimenovane z imeni iz grške mitologije: *Io, Evropo*, *Ganimed* in *Kalisto*, v grščini Ἰώ, Εὐρώπη, Γανυμήδης in Καλλιστώ. Od matematikov je bil na In-

[14]Galileo Galilei (1564–1642) – italijanski matematik in fizik.
[15]Klavdij Ptolemaj (85–170) – antični matematik in astronom.
[16]Nikolaj Kopernik (1473–1543) – poljski matematik in astronom.

dexu tudi Blaise Pascal[17], ki je v tem delu tudi še omenjen, z delom *Pensées – Misli*, z Voltairovimi[18] opombami. Tudi Nikolaj Kopernik in Johannes Kepler. Da o številnih pisateljih niti ne govorimo.

Leta 1584 smo dobili Dalmatinov[19] prevod celotne Biblije v slovenščino. Precej so jih v obdobju protireformacije pokurili. O tem je pesnik Anton Aškerc[20] napisal v verzih *Slovensko legendo*. Pri slovenščini nam jo Viktor Jereb ni razlagal, kar pa so bili deležni učenci, ki so bili za en razred pred nami. Znali so jo po pripovedovanju na pamet in jo tudi zaigrali. Boga je igral Franc Tominc, Porzenski Franci, prav tako dijak idrijske gimnazije. *Porzenski* je bil zato, ker je stanoval v stavbi, kjer je bil nekoč Hotel Porezen. Na zid te stavbe je bil prislonjen doprsni kip matematika Franca viteza Močnika, ki pa ga je marsikdo spregledal. Zato so kasneje kip prestavili pred cerkljanski muzej, kjer dela družbo nadškofu Sedeju[21] in Bevku[22]. Dolgočasne vožnje z avtobusom v Idrijo in nazaj sta nam popestrila Porzenski Franci in Jože Albreht, ki sta se ves čas na glas pogovarjala o vsem mogočem in eden drugega provocirala.

Če prav premislimo, znanje določenih besedil na pamet niti ni bilo tako napačno. Pri Jerebu[23] smo morali na pamet obvladati Prešernovega[24] *Povodnega moža*, Aškerčevega *Mejnika* in Gregorčičevo[25] *Soči*. Pa ni bilo dovolj znati le besedila, treba je bilo povedati pesmi z občutkom in s pravilno artikulacijo, treba je bilo vedeti za zgodovinski okvir pesmi, za pomen posameznih izrazov, za vrsto rim in stopic, za obliko pesmi in drugo.

Porzenski Franci je bil zraven povsod tam, kjer se je v Cerknem kaj

[17] Blaise Pascal (1623–1662) – francoski matematik in fizik.
[18] François-Marie Arouet s psevdonimom Voltaire (1694–1778) – francoski pisec in filozof.
[19] Jurij Dalmatin (1547–1589) – slovenski protestantski teolog in pisec.
[20] Anton Aškerc (1856–1912) – slovenski duhovnik in pesnik.
[21] Frančišek Borgia Sedej (1854–1931) – slovenski nadškof.
[22] France Bevk (1890–1970) – slovenski pisatelj
[23] Viktor Jereb (1904–1984) – cerkljanski učitelj.
[24] France Prešeren (1800–1849 – največji slovenski pesnik.
[25] Simon Gregorčič (1844–1906) – slovenski duhovnik in pesnik.

dogajalo. Pri profesorju Karčniku sva celo skupaj poslušala predavanja iz vektorskega računa, determinant in sistemov linearnih enačb. Poslušal sem celo Francijevo razlago njegove maturitetne naloge, s katero nam je skušal pojasniti, zakaj letalo sploh lahko leti. Študiral je na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani. Ko sem bil še študent, sem nekega dne izvedel, da nas je v cvetu svoje mladosti za vselej zapustil.

Nekaj izvodov Dalmatinove Biblije je pa le ostalo in so bile osnova za kasnejše prevode. So pa jo dali pred leti na trg v faksimilirani izdaji. Pesnik balad, Anton Aškerc, poje takole:

> *"Pripeljal nemara s seboj kar cel sod*
> *slovenskih mi Svetih je Pisem;*
> *Peči bil sem kurit dal ž njimi povsod,*
> *Vseh mogel dobiti, žal, nisem!"*
>
> *(A. Aškerc, Slovenska legenda)*

Beseda *indeks* nas je zapeljala na stranpota, zato se hitro vrnimo k determinantam. Nekaj so o njih vedeli že v 16. stoletju na Kitajskem in Japonskem, pa tudi Cardano[26] in Leibniz[27], čeprav izraza *determinanta* še niso poznali. Uporabljali so jo v bistvu za reševanje sistema linearnih enačb. Rusi za determinanto uporabljajo besedo определитель, Ukrajinci визначник, Poljaki podobno: *wyznacznik*. Islandci so si zanjo izmislili besedo *ákveða*, Albanci pa *përcaktori*.

V determinanti ima torej vsako število a_{ij} dva indeksa: prvi označuje, v kateri vrstici mu je mesto, drugo pa, v katerem stolpcu. Nato zadevi priredimo število D, ki je vsota vseh produktov n števil, iz vsake vrstice natančno po eno in iz vsakega stolpca natančno po eno. Takih produktov pa je $n!$. Poleg tega tak produkt pomnožimo še z 1 oziroma -1, kar je odvisno od tega, kako so si indeksi stolpcev glede na indekse vrstic. Ko tako popravljene

[26]Gerolamo Cardano (1501–1576) – italijanski matematik.
[27]Gottfried Leibniz (1646–1716) – nemški matematik in filozof.

produkte seštejemo, dobimo število D. Marsikomu morda ni domača oznaka $n!$, kar beremo n-faktorsko, n-faktorialno ali n-fakulteta. Klicaj ne označuje konca velelnega stavka, pač pa je $n!$ naravno število, ki ga priredimo vsakemu nenegativnemu celemu številu n, in sicer takole:

$$0! = 1\,,\ 1! = 1\,,\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n \quad \text{za} \quad n > 1.$$

Tako je na primer $2! = 2, 3! = 6, 4! = 24, 5! = 120, 6! = 720$. Zaporedje s splošnim členom $a_n = n!$ očitno kar hitro narašča in nas hitro popelje v vrtoglave višine. Zaradi klicaja v oznaki $n!$ se v matematiki radi izogibamo velelnih stavkov, ki bi bili dvoumni, na primer: "Sedaj pa pomnožimo števec in imenovalec ulomka z $n!$", saj človek ne ve, ali z n ali s prej opredeljenim številom $n!$.

Kako je torej s spreminjanjem predznaka členov v opredelitvi determinante? Vsak člen je oblike

$$a_{11'}a_{22'}a_{33'} \cdots a_{nn'}\,,$$

kjer so $1', 2', 3', \ldots, n'$ indeksi stolpcev, dobljeni iz indeksov vrstic $1, 2, 3, \ldots, n$ samo s prerazporeditvijo. Teh je po številu ravno $n!$, vključno z naravno razporeditvijo $1, 2, 3, \ldots, n$. Na prvo mesto v razporeditvi $1', 2', 3', \ldots, n'$ namreč lahko volimo n števil, na drugo eno manj, torej $n-1$, na tretjo še eno manj, torej $n-2$ in tako naprej, za predzadnje mesto nam ostaneta dve izbiri, za zadnje pa le eno. Torej je vseh razporeditev

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1 = n!.$$

Do vsake razporeditve pa pridemo iz naravne samo s tako imenovanimi *transpozicijami*, to je z medsebojnimi zamenjavami dveh števil. Da pa se pokazati, da do dane razporeditve lahko pridemo s sodim ali z lihim številom transpozicij. Prav tako iz dane razporeditve pridemo nazaj na naravno razporeditev ali s sodim ali z lihim številom transpozicij. Tako imamo za $n \geq 2$ natančno $n!/2$ takih razporeditev, ki zahtevajo sodo število transpozicij, da jih uredimo v naravno razporeditev, in prav tako $n!/2$ takih, ki zahtevajo liho število transpozicij za prehod v naravno razporeditev. Prvim pravimo *sode*, drugim pa *lihe razporeditve*. V opredelitvi determinante pomnožimo produkte

$$a_{11'}a_{22'}a_{33'}\cdots a_{nn'}$$

z -1, če je razporeditev $1', 2', 3', \ldots, n'$ liha , in z 1 sicer.

Zanimivo je to, da je število členov v opredelitvi determinante lahko zelo veliko, toda z nekaterimi preprostimi linearnimi transformaciji jo lahko poenostavimo. Očitno je račun tem lažji, čim več ničel je v determinanti. Sicer bi bilo členov lahko ogromno. Pri $n = 100$ bi bilo teh kar $100!$. Za to bi bilo potrebnih $100! \cdot 99$ množenj in $100! - 1$ seštevanj. Čas, ki ga računalnik potrebuje za seštevanje, je zanemarljivo majhen s časom, ki mu je potreben za množenje. Denimo, da opravi eno množenje v 1 nanosekundi, to je v 10^{-9} sekunde. Potem bi za izračun 100-vrstne determinante računalnik potreboval vsaj

$$t = 100! \cdot 99 \cdot 10^{-9} \text{ sekund.}$$

Bežni pogled na to število daje vtis, da to ni posebno velik čas. Toda globoko se motimo. Na srečo je Stirling[28] našel približno formulo, to je

$$n! \approx n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}\,,$$

ki pa je za velike n kar točna. Pri tem je število $e = 2.7182818284590\ldots$ osnova naravnih logaritmov. Z desetiškimi logaritmi, s katerimi se je ubadal naš veliki Zagoričan baron Vega[29], lahko ocenimo, koliko celih mest ima dano pozitivno število v desetiškem zapisu. Števila, ki so strogo med 1 in 10, imajo eno celo mesto. Desetiški logaritem takih števil je strogo med 0 in 1. števila, ki so strogo med 10 in 100, imajo dve celi mesti. Desetiški logaritem takih števil je namreč strogo med 1 in 2. Tako lahko hitro odkrijemo, da za $x \geq 1$

[28]James Stirling (1692–1770) – škotski matematik.
[29]Jurij Vega (1754–1802) – slovenski oficir in matematik.

število $[\log x]+1$ pove, koliko celih mest ima število x. Tako lahko približno zapišemo:

$$t \approx 100^{100} \cdot e^{-100} \cdot \sqrt{200\pi} \cdot 99 \cdot 10^{-9} \text{ sekund.}$$

Sedaj nam bo desetiški logaritem povedal oceno za t:

$$\log t \approx 100 \log 100 - 100 \log e + \frac{1}{2}(\log 200 + \log \pi) + \log 99 - 9 \log 10 =$$

$$= 200 - 43.42944819 + 1.399089934 + 1.995635194 - 9 = 150.9652769.$$

Torej je čas t v sekundah 151-mestno število. Če preračunamo ta čas v leta z dolžino 365.25 dni, dobimo nekoliko manjše število:

$$t \approx \frac{10^{150.9652769}}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365.25} \text{ let.}$$

Desetiški logaritem nam tokrat da:

$$\log t \approx 150.9652769 - 2 \log 60 - \log 24 - \log 365.25 = 143.466.$$

To pomeni, da je čas t v letih 144-mestno število. Če bi računalnik delal tisočkrat hitreje, bi bilo to število še vedno 141-mestno. To je ogromno število v primerjavo s starostjo Osončja, ki se ocenjuje na nekaj milijard let, kar lahko izrazimo s komaj desetmestnim številom.

Profesor Karčnik nam je determinanto sicer korektno definiral, potem ko nam je bil temeljito razložil razporeditve ali permutacije z njihovimi transpozicijami vred, dokazal precej njenih lastnosti, ni pa se dotaknil časa njenega izračuna. Morda se tega niti ni zavedal ali pa nam ni hotel jemati poguma za študij matematike. Za matematika je najvažnejše, da nekaj obstaja in da ni v protislovju z drugimi stvarmi. Kako pa tole reč dobimo, ga največkrat posebno ne zanima.

To pa ne pomeni, da računalniki ne zmorejo računati tako velikih determinant. Na srečo obstajajo zviti in prefinjeni postopki za računanje velikih determinant. Z Gaußovim[30] postopkom lahko determinanto izračunamo že

[30] Carl Gauß (1777-1855) – nemški matematik in fizik.

s približno n^3 množenji in deljenji, to je trenutku $t \approx 100^3 \cdot 10^{-9} = 10^{-3}$ sekunde, v tisočinki sekunde, če računalnik opravi eno množenje oziroma deljenje v eni nanosekundi. Seveda pa je računalnik treba prej *naučiti*, kako naj računa. Zato vselej globoko premislimo, kako bomo kaj računali, da nas ne bo preveč stalo. Ne kaže se kar brezglavo zapoditi z računalnikom v neki problem, ker se delo morda ne bo končalo do konca našega razmeroma kratkega življenja, ampak je treba najti pravi algoritem, s katerim bomo nekaj hitro izračunali. To pomeni, da se še kako izplača poiskati pravi postopek za dosego cilja. Gaußov postopek je že tak primer. To pa pomeni, kako pomembna je tudi pri takih rečeh matematika.

Priimek velikega nemškega matematika, ki smo ga omenili že v osnovni šoli v zvezi z njegovim bliskovitim seštevanjem vsote

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 98 + 99 + 100,$$

na Zahodu pišejo preprosto kot Gauss, pravilno pa je uporabljati nemško črko ß, *scharfes Es*, ali *Es-Zet*, ker je nastala z zlitjem stare gotske črke ſ, ki so jo še znale pisati naše stare babice in tete, in gotske črke 𝔷. Nekako tako kot je pisal Trubar[31]. Madžari uporabljajo dvočrkovje *sz* za glas *s*, črko *s* pa za bolj pogost glas *š*. Zato ime *János* preberejo kot *Jánoš*. Pred ne tako dolgimi leti so Nemci imeli reformo svojega pravopisa in so nekoliko skrčili rabo črke ß. Ta sledi samo dolgim samoglasnikom in dvoglasnikom, tako da dvočrkovje *ss* označuje pred njim stoječi kratek samoglasnik, tako kot na primer pred *tt, ll, mm, nn, tz, ck*. Zato se piše *Gauß*. Švicarji pa se na črko ß požvižgajo in povsod pišejo namesto nje kar *ss*, tako da naj bralec kar sam sproti ugotavlja, kako bo bral samoglasnike pred njo.

Gaußje namreč sešteval takole:

$$1+2+3+\ldots+98+99+100 = (1+100)+(2+99)+(3+98)+\ldots+(50+51) =$$

$$= 101 + 101 + 101 + \ldots + 101 = 50 \cdot 101 = 5050.$$

[31]Primož Trubar (1508–1586) – slovenski protestantski duhovnik in pisec

Kasneje smo na gimnaziji znali sešteti prvih n členov aritmetičnega zaporedja

$$a_1, a_2, a_3, \ldots$$

na podoben način:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n).$$

Pri aritmetičnem zaporedju je razlika dveh sosednjih členov povsod enaka.

Slika 4: Kraji moje mladosti.

2 Brinje

Kot je bilo že rečeno, sem po štiridesetih letih nameraval ponovno prehoditi svojo nekdanjo pot v šolo, od Očanca v Cerkno. Moj rojstni kraj ni daleč od nekdanjega planinskega rudnika. Skoraj na isti nadmorski višini sta. Od moje rojstne hiše je peljala steza skoraj vodoravno skozi gozd do obeh vhodov v jamo. Vmes je več grap, pa tudi studenec, kamor smo hodili poleti po hladno vodo. Iz njega so se napajali prejšnji rodovi, dokler moj ded, ki ga žal nisem mogel poznati, naredil v Brinju vodnega zbiralnika. Če je človek imel srečo, je našel poleti ali jeseni v gozdu tudi kakšno užitno gobo ali pa ga je čakalo kako drugo presenečenje, na primer ptičje gnezdo ali pa poginula žival.

Naneslo pa je tako, da sem se rodil nekega torka, v znamenju ovna, deveti dan po polni luni in štiri leta po zadnji nemški hajki, tam gori nad Vovšjem, precej nad vasjo Planina pri Cerknem, ravno pri Očancu, lahko bi rekli pod Škofjem, prav v sobi, kamor se pride iz izbe, nad morda za marsikoga precej neuglednim prostorom, in sicer nad kurnikom. Kot znamenje ovna, latinsko *Aries*, so si astrologi izmislili znak ♈. Oven je v resnici nekaj drugega kot koštrun. Koštrun je oven, toda skopljen, učeno povedano kastriran, kar pomeni, da je revež moral pod prisilo žrtvovati del svoje moškosti v prid vrste, ki ji znanstveno rečemo *Homo sapiens*. Koštrun proti ovnu je nekako tako kot kopun proti petelinu, vol proti biku ali pa mož proti skopljencu ali *evnuhu*. Slednja beseda izvira iz grške εὐνοῦχος v enakem pomenu.

Pod bivalnimi prostori pri Očancu je bila klet, ki smo ji rekli *hram*, katerega del pa je bil preurejen v kurnik za kokoši in morda še petelina, enega samega seveda. Dva bi takoj uprizorila petelinji boj, ne da bi ju kdo za to spodbujal. Da o več petelinih raje ne govorimo. Pernata flota je imela dostop od zunaj po nekakšni leseni brvi in skozi majhno okence, ki ga je bilo treba vsak dan vestno zapirati, potem ko so živali odšle spat. Kajti do gozda, kjer so domovale lisice in druge živali, ni bilo daleč. Skrbno smo seveda pazili, da je bil pri hiši kvečjemu en petelin. Izleglo se jih je sicer več, a so večinoma končali v nedeljskem ali pa prazničnem loncu, ko so odrasli. Pa tako lepo življenje se jim je obetalo! Zato pa nikoli nismo redili kopunov.

Včasih se je kakšna kura le odločila, da bo koklja, kokošja mati, in mama ji je skrbno, s pravo materinsko ljubeznijo, pripravila na podstrešju poseben separé, kjer je žival valila. Potem smo izvaljena piščeta dali pod kako sito, da ne bi prišla požrešnemu mačku v kremplje. Le-ta se je moral kar sam potruditi, saj mu je bilo miši v hiši in na polju dovolj na razpolago. Pocrkljali smo ga pa vsak dan vsaj enkrat s kravjim mlekom. Proso so piščančki znali takoj pobirati. Otroci smo jih z zanimanjem opazovali in ugibali, koliko bo petelinčkov. Potem smo kokljo z zarodom vred dali na plano. Mama kura je še kako odganjala domače in druge mačkone, katere so kmalu minile skomine po piščančjem mesu, saj so se ostrega materinega kljuna še kar bali. Beseda *separé* izvira iz francoščine: *chambre séparée* pomeni namreč posebno, ločeno sobo za ožjo družbo, ločen prostor.

Če je bilo v kokošjem gnezdu n petelinov, in je tako naneslo, da je bilo neke nedelje potrebno zaradi enega gosta žrtvovati enega petelina za kosilo, je bilo možno reveža izbrati na n načinov. Če smo pričakovali dva gosta, bi morali zaklati dva petelina. Izbrali bi ju lahko na

$$\frac{n(n-1)}{2!} = \binom{n}{2}$$

načinov. Tri peteline, pri obisku treh gostov na

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \binom{n}{3}$$

načine itd. Na splošno, če bi se najavilo k gostov, bi šlo k petelinov izmed n, ki bi jih lahko izbrali na

$$\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \binom{n}{k}$$

načinov. Za $k > n$ gostov pa bi petelinov zmanjkalo, torej ni bilo načina, kako nahraniti toliko gostov, pri čemer bi vsak dobil celega petelina, torej:

$$\binom{n}{k} = 0, \quad k > n.$$

Uredili so mi zadevo tako, da godujem na sv. Marka dan. Ta Marko ni bil kdorkoli, ampak sv. Marko Evangelist, pisec drugega evangelija. Beseda *evangelij* je grškega izvora: εὐαγγέλιον namreč pomeni *vesela novica, vest*. Vedeti pa je treba, da se v grščini γγ izgovarja kot *ng*. Beseda je sestavljena. Prvi del, εὖ, je prislov in pomeni *dobro*. Drugi del pa izvira iz glagola ἀγγέλλω, kar pomeni *povem, oznanim*. Tudi beseda *angel, odposlanec*, ἄγγελος, ima isti izvor. To besedo je uporabil tudi Simonides[32] na epitafu pri Termopilah, kjer so se leta 480 pr. n. št. borili Špartanci pod vodstvom Leonide proti mogočni perzijski vojski in padli do zadnjega moža.

Ὦ ξεῖν', ἀγγέλλειν Λακεδαιμονίοις ὅτι τῇδε
κείμεθα, τοῖς κείνων ῥήμασι πειθόμενοι.

To pomeni v prevodu Antona Sovreta[33], enega najboljših prevajalcev iz stare grščine v slovenščino, kar smo jih kadarkoli imeli:

Tujec, ki greš v Lakedaimon, povej, da še zmerom ležimo v klancu
stražarji zvesti, kakor je velel ukaz.

O Termopilah bomo kasneje še zapisali nekaj besed. Beseda *epitaf, nagrobno besedilo, nagrobnik*, je seveda tudi grška: ἐπιτάφιον. Izvira iz predloga ἐπί, *pri, na, ob*, in τάφος, *grob*.

Sv. Marko je običajno upodobljen s knjigo in gosjim peresom v roki, ob njem pa dežura mogočni lev, kralj živali. Zato nič čudnega, če so Benečani imeli v grbu leva, saj je bil zavetnik njihove slavne republike *Serenissime* ravno sv. Marko. Vpliva na izbiro svojega imena seveda nisem imel. Dva

[32]Simonides s Keosa (556–468) pr. n. št.) – grški lirični pesnik.
[33]Anton Sovrè (1885–1963) – slovenski klasični filolog in prevajalec.

glasova, zadnja dva soglasnika, v imenu sta mi delala na začetku težave, a je kasneje le nekako šlo. Še dolgo so se ljudje spominjali moje otroške izgovarjave, ko sem namesto *kamen* rekel *amen*. Ob lepem vremenu je tam gori, okrog Očanca, zelo lepo. Tudi pozimi ni slabo, le da sneg, če ga kaj sploh je, precej hitro pobere, saj je lega prisojna. Ker takrat še ni bilo avtobusa, ki bi otroke vozil v Cerkno v šolo in nazaj, smo morali hoditi gor in dol kar peš. Ta hoja pa tudi ni bila tako slaba, saj smo se šolarji lahko veliko pogovarjali, smo se pa tudi sprečkali in stepli, če je bilo treba. Nekoliko več truda je bilo le takrat, ko je bil hud dež ali pa veliko snega. Takrat so za prav prišle tudi krplje, smuči ali pa sanke.

Na svojem popotovanju sem nameraval svojo nekdanjo šolsko pot od Očanca v Cerkno tudi ovekovečiti s fotografijami, pa sem naletel na težave. Vsepovsod je namreč danes toliko žic v napoto, telefonskih in električnih, da človek komaj naredi kakšno dobro fotografijo. Tudi stari Pajek svoj čas ni napredel toliko žic! *Pajek*, po cerkljansko *Pâlk*, je bil vzdevek električarja, takoj po drugi svetovni vojni je bilo takih na Cerkljanskem malo, ki je spredel že kar gosto električno mrežo od hiše do hiše. Sedaj pa je ta mreža seveda gostejša kot njega dni in za lepo fotografijo se je treba potruditi. Za to pa tistega februarskega dne nisem imel ravno obilico časa. Da bi pa star dedec lezel po drevju samo zaradi nekoliko lepših slik, se pa tudi ni izplačalo. *Fotografija?* Spet grška sestavljenka. Beseda φῶς, v rodilniku φωτός, pomeni *luč, svetloba, dan*, beseda γράφω pa *pišem*, kar nam je že znano.

Po navadi sem pri Očancu spal v mušu. *Muš* je čudna beseda s tremi črkami, ki pomeni vsaj troje. Lahko pomeni *osel*, ki ima kar štiri črke, primorsko tovorno živinče, včasih malo trmasto. *Muš* je tudi lesena naprava, s katero si je včasih človek naložil poln pleten koš na pleča, običajno na travniku, v gozdu ali na njivi. *Muš* pa je tudi podstrešna soba, ki z oknom ali dvema gleda iz strehe. Takega muša smo imeli pri Očancu nad glavnim vhodom. Baje ga je zgradil moj ded, da je s tem ustvaril boljše bivalne pogoje svoji družini. Ko sem pogledal skozi okno iz muša, se je videl opaž na hlevu, če je pa bilo lepo vreme, se je videlo vse do Šebrelj s cerkvijo sv. Ivana, pod katero je slovito arheološko najdišče *Divje Babe*, pa v Ravne pri Cerknem in v Toše ali pa vsaj do Babje Glave, poraščenega vrha nad levim bregom Cerknice. Ko sem pozajtrkoval, sem pograbil platneno malho s knjigami in zvezki. Takrat se otroci še niso mučili s tako težkimi torbami kot dandanes. O tem, da bi imeli torbo kar na kolesčkih kot dandanes, smo pa lahko samo sanjali. En zvezek je bil za računstvo, en za ostalo, knjige pa smo podedovali po starejših bratih ali sestrah. V nižjih razredih sta bili to samo čitanka in računica. Pisali smo s svinčnikom in črnilom. Barvice si je lahko privoščil malokdo. Črnilo smo imeli doma, v šoli pa v črnilnikih, nameščenih v šolskih klopeh. Peresnik, svinčnik in radirko smo nosili v šolo v svojih torbah, malhah ali nahrbtnikih. Slednje so nam že takrat globoko priporočali, češ da ne bo preveč trpela hrbtenica. Svinčnike smo porabili malodane do konca. Ko se ga ni več dalo držati med prsti, smo ga učvrstili v posebno držalo. Če mama ni pravočasno dejala, da naj prinesem iz Cerknega za petdeset dinarjev kvasa, sem že tekel po klancu, da v nobenem primeru ne bi kdo še rekel, da naj prinesem tudi za sto dinarjev *bezgerna*. Dolgo sem brskal po slovarjih in spraševal učene ljudi, od kod se je vzela pa ta beseda, ki je na Cerkljanskem nismo poznali, na poljanski strani razvodnice pa je bila običajna. Pride iz nemškega izraza za *stisnjeni kvas*, *Pressgerm*. Sama beseda *Germ* pomeni *droži*, glagol *pressen* pa *stiskati*. Beseda *preša, stiskalnica*, pa je bila seveda od nekdaj znana daleč naokoli.

Če se, potem ko sem bil zapustil domačijo, nisem prej slučajno nataknil na kakšno bodečo žico ali trnje, sem bil že tam doli med tepkami nad vasjo. Na vsaki strani poti jih je raslo po nekaj. Imenitno drevo je tepka: daje obilno drobnih sadežev, iz katerih smo pridelovali mošt, žganje in suhe hruške. Blaži viharje in daje senco. Odpadne veje tepke so bile dobre za kurjavo, posekana tepka pa je dala kakovostna drva za kurjavo. Nič čudnega, da je presvetla cesarica Marija Terezija[34] ukazala kmetom posaditi tepke. Kdor tega ni storil,

[34] Marija Terezija (1717–1780) – vladarica habsburških dežel.

je bil baje *tepen*. Zato baje omenjenemu sadnemu drevesu rečemo *tepka*.

Natakniti se na bodečo žico ob poti v šolo pa ni bilo prav nič težko. Tako sem nekega jutra gredoč v šolo uspel raztrgati popolnoma novo pelerino takoj pod domačim hlevom, pri čemer mi je izdatno pomagal veter. Tiste čase je vsak kmet zelo pazil, da se je hodilo po odrejenih poteh in ne po travi ali po polju. Zato so zabili v tla lesene kole in nanje napeli bodečo žico, celo dvakrat eno nad drugo, da se je pod njo le stežka splazilo, preskočiti pa je tudi ni bilo lahko. Kdor je to poskušal, je tvegal, da si poškoduje kak vitalen del telesa. Bodečo žico so sicer prodajali v trgovini, bilo jo je pa še na pretek tudi okoli opuščenih italijanskih vojaških objektov, ki jih na Cerkljanskem ni bilo malo. Tudi danes bi se tam v kakšnem gozdu ali grmovju še našlo nekaj že krepko zarjavele bodeče žice, pogosto vrasle v kakšno drevo. Prav nič se ne motimo, če zapišemo, da danes za takimi rečmi nihče več ne stika.

Na Vovšju, to so polja pod Očančevo domačijo, sem običajno krenil pod Gabrovčevo in Gričarjevo njivo mimo Cvekove njive v Cerkovnici nad Platom proti sosedom, ki so živeli v Nakančni in Svetikovi hiši. Svetikovi so bili naši prvi sosedje. Pripovedovali so, da je bila Cvekova njiva nekoč cerkvena. Od tod to ime. Pravijo, da imajo tudi toponimi *Cerkno, Cerknica, Cerklje, Cirkulane* in še kateri izvor v besedi *cerkev*, ki pa je navsezadnje grškega izvora, saj κυριακός pomeni *Gospodov*. Zlog κυ se je ponekod sčasoma začel izgovarjati in pisati kot *ci*. Še učeni jezikoslovec Baudouin de Courtenay[35] , ki je v drugi polovici 19. stoletja študiral zahodna slovenska narečja, je pisal *Cirkno*, ne pa *Cerkno*, tako da se zdi izvor našega krajevnega imena v besedi κυριακός še bolj verjeten. Provociram, če ne drugega.

V zgornji Ziljski dolini na Koroškem je kraj *Kirchbach*, ki ima slovensko ime *Cirkno na Zilji*. V naselju Laze pri Gobniku v občini Litija stoji *dvorec Cerkno*, po nemško *Zircknahof*. Vse to kaže, da je ime *Cirkno* prvobitno. Naše Cerkno so Nemci imenovali *Kirchheim*. Besede *Kirche, Bach, Heim* pomenijo po vrsti *cerkev, potok, dom*.

[35]Baudouin de Courtenay (1845–1929) – poljski lingvist.

Grški zlogi κε, κη, κι, κυ so pogosto v latinščini postali ce, ci, cy, včasih pa so se še v pisavi in izgovorjavi pomehčali v *se, si.* Grški κέντρον, središče, je postal *centrum*, starodavni pokrajini Κιλικία in Καππαδοκία v Mali Aziji sta se polatinili v *Cilicia* in *Cappadocia*, otok Κύπρος pa v *Cyprus*, po naše *Ciper*. Ozvezdje *Kefej* je dobilo ime po etiopskem kralju, ki so ga Grki imenovali Κηφεύς, v latinščini pa je postal *Cepheus*. Solunska brata Κύριλλος καὶ Μεθόδιος sta postala *sv. Ciril in Metod*, med slovanskimi narodi zelo čaščena in spoštovana svetnika.

Beseda *toponim* pomeni *ime kraja* in je nastala iz dveh grških: τόπος, kar pomeni med drugim *kraj, mesto, prostor*, in ὄνομα, kar pomeni *ime*. Na predavanjih iz teorije množic je nam, brucem, profesor Prijatelj[36] veliko pripovedoval o *topologiji*. Tudi ta beseda je grška, sestavljena iz besede τόπος, ki smo jo pravkar spoznali, drugi del pa je nastal iz besede λόγος, kar pomeni *beseda, govor, nauk* in še kup drugega. Dodal je še, na naj nikar ne zamenjujemo topologije s *patologijo*. Beseda πάθος namreč pomeni med drugim *trpljenje, bolezen, bolečina*, vsekakor nekaj slabega, žalostnega, groznega. *Patologija* je postal znanstveni, večinoma medicinski izraz v zvezi z raziskovanjem bolezni.

Do nekaterih od svojih posestev nad vasjo so imeli vrli planinski kmetje dostop ravno po klancu mimo Očanca. Lahko je mimoidoči poleti s koso potrkal po oknu še spečih fantov in jih prosil, če grejo kosit travo na Škofje. Opoldne so gospodinje in brhka dekleta nosile mimo naše hiše v jerbasih in koših kosila ljudem po senožetih tam gori. Stari Logar iz Planine, ki je rad skladal verze, če je le imel primeren motiv, je zapisal naslednje, kar lepe, čeprav kratke verze:

Sila velika,
veter močan,
mimo Svetika
jo briše kaplan.

[36]Niko Prijatelj (1922–2003) – slovenski matematik.

Komu so bili namenjeni, lahko samo ugibamo. Nekomu gotovo, saj Logar ni zlagal verzov kar tja v en dan, ampak so bili vedno nekomu ali nečemu namenjeni. Pot mimo Svetika v Planini se namreč nadaljuje v klanec, ki vodi mimo Očanca skozi Zašurkovico, Lukov Brdavek in naprej po *Oseliški poti*, kot smo ji rekli doma, do Ratovža, in še naprej čez Ogel, Laniše vse do Stare Oselice in Trebije.

Zašurkovica je bila domačija takoj za našo, samo malo po klančku navzgor je bilo treba stopiti do nje. Po domače smo ji rekli *Zašurkajca*, kar izhaja iz narečne besede *šurk*, to se pravi *ščurek*.

Veliko bi se dalo povedati o imenih domačij. Veliko jih je nastalo po priimkih lastnikov. Pogosto so imena ostala tudi po zamenjavi lastnikov. Ljudje so se še najbolj med seboj poznali po tem, na kateri domačiji je kdo doma, manj po priimkih. Nekaj primerov hišnih imen, izvirajočih iz priimkov: *Pri Gabrovcu, Pri Novincu, Pri Logarju, Pri Očancu, Pri Obidu, Pri Jerebu, Pri Čuku, Pri Golobu, Pri Jeramu, Pri Kumru, Pri Pirhu, Pri Kolencu, Pri Štruklju*. Domačije se imenujejo tudi po osebnih imenih, večinoma po moških, na primer: *Pri Andrejaču, Pri Matevžu, Pri Mihu, Pri Pavletu, Pri Lojzu, Pri Tinčku, Pri Jernačetu, Pri Blažu, Pri Štefnu, Pri Štefku, Pri Maksu, Pri Jušku, Pri Joškovcu, Pri Gabrijelu, Pri Luku, Pri Andreju, Pri Marinkovcu, Pri Markušu, Pri Tomažku, Pri Ivanu, Pri Blažičku*. Se pa dobijo tudi take, poimenovane po ženskih imenih, na primer: *Pri Jeramovi Mici, Pri Šemčevi Mici, Pri Ciski, Pri Cvekovi Barbari*. So tudi primeri, kjer je domačija dobila ime po kaki krajevni ali drugi značilnosti, na primer: *V Mrtvici, V Stiskah, Na Rajdi, V Grapi, Za Grapo, V Bajti, Na Robu, V Hastu, Na Koritu, Na Medrcah, Pri Nakančerju, Na Močilah, V Ravnici, Na Ravan, V Travniku, Pri Zimu, Na Mušu, V Logu, Pri Podrobarju, V Malnu, V Pstin, Na Oglu, Pri Zaoglarju, Pri Vrhovcu, Pod Grivo*. Lahko pa tudi po tem, od kod se je nekdo priselil, na primer: *Pri Gorenjcu, Pri Masorniku, Pri Šebreljencu, Pri Ravnanu, Pri Zapoškarju*. Po kaki živali ali vzdevku, na primer: *Pri Bohu, Pri Dristu, Pri Pudlčku, Pri Monu, Pri*

Oblačku, Pri Dudlčku, Pri Tevletu, Pri Čapalu. *Boha* pomeni po cerkljansko *bolha*. Tudi po poklicih: *Pri Mežnarju, Pri Kovaču, Pri Streharju, Na Žagi, Pri Tišlerju, Pri Šoštarju*. Celo po tem, kaj se je tam počelo: *Pri Ratovžu, Na Počivalu, Na Lanišah*. Podobno kot *Krekovše* na Idrijskem, najdemo še druge kmetije, katerih imena se končajo na *-(v)še*, na primer: *Mekinovše, Kisovše, Marinkovše, Cigaletovše, Dolenjčevše, Gopalše*. Omenimo, da sta priimka *Kumar* in *Gopal*, v pisavi devanagari कुमार, गोपाल, zelo razširjena med Indijci.

Nad Mrtvico, na cesti Cerkno–Kladje, se je bilo na poti v šolo treba odločiti. Od Nakančne hiše se tudi lahko pride po cesti nad Mrtvico mimo Ivana skozi Čeplez v Cerkno. Pod Medrcami je ob cesti v škarpi vodni zbiralnik. Še preden sem začel hoditi v šolo, je v naši Planini nekega popoldneva zagorelo, in sicer najprej Pri Kmetunato pa še pri sosedu. Grozilo je že, da bo rdeči petelin smuknil še K Šoštarju in drugam. Ljudje so ravno pridno delali po poljih, travnikih in gozdovih. Nenadoma so vsi hiteli domov. Mimo naše hiše je pritekel Svetik, ovca, ki jo je bil odgnal na pašo, pa za njim. Tekel sem za obema. Ko smo prišli do omenjenega zbiralnika, sem prvič v življenju videl gasilce, prostovoljce. Vodo so zajemali povsod, kjer se je le dalo, in gasili. Ko sem pritekel na kraj nad pogoriščem, je bilo videti le še zidovje in ožgane tramove, mrtviško hišo pa so polivali, da se ne bi vnela.

Od vseh gasilcev, oblečenih v značilne uniforme, pokritih s čeladami, opasanih s širokimi pasovi in opremljenih s čudnimi kljukami in drugimi orodji, sem spoznal samo enega, Jožeta Sedeja, cerkljanskega brivca, ki je bril brade in strigel lase v hišici, ki je nekoč stala zraven Andrejonovega mostu. Jože in Malnarski Janez sta ordinirala v tisti brivnici, kamor so dajali strič tudi mene. Planinci tisti čas še nismo imeli gasilskega doma, a smo ga dobili nekaj let kasneje po opisanem požaru. Deloma so ga sezidali ravno iz kamenja pogorele Kmetove hiše, ker se ta nikoli več ni na novo gradila, sosedova pa tudi ne.

Ko kdo omeni brivce, se vedno spomnim na *logično protislovje* ali *anti-*

nomijo, za katero sem prvič slišal kot bruc na fakulteti in sem jo rad naprej pripovedoval svojim študentom. Saj je vloga profesorja, ki predava, da posreduje svoje znanje svojim študentom. Cerkljanska inačica bi se lahko glasila takole.

Jože Sedej, kleni Cerkljan, je v Cerknem edini pravi brivec, ki se spozna na svoje delo. Toda Jože je čudne sorte stric, ki brije tiste in samo tiste Cerkljane, ki se sami ne brijejo. Sedaj se lahko vprašamo, ali se brivec Jože brije kar sam ali ne. Denimo, da se Jože ne brije sam. Potem ga mora briti edini brivec v Cerknem, to pa je edinole Jože. Torej se Jože brije sam. Sklepanje lahko pričnemo tudi drugače. Naj se torej Jože brije sam. Torej je eden tistih Cerkljanov, ki se sami ne brijejo, in Jože je potemtakem med njimi. Jože se torej ne brije sam. Ugotovili smo: Jože se brije sam in Jože se ne brije sam. Taka ugotovitev je za logiko nevzdržna. Zašli smo v protislovje, a tega v logiki, ki je osnova matematike, nikakor ne sme biti. Vse to pomeni, kako pomembne so osnove vsake matematične teorije.

Na fakulteti smo imeli študentko, ki je s svojim razmeroma zahtevnim matematičnim diplomskim delom kandidirala za fakultetno Prešernovo nagrado. Odbor za nagrado jo je kljub pozitivnima mnenjema recenzentov zavrnil. Očitki so bili, da navajanje virov ni čisto pravo, njih citiranje neustrezno, jezik v delu da ni ravno izpiljen, pedagoška naravnanost naj ne bi bila dovolj poudarjena in morda še kaj. Omenjeno pa je bilo tudi, da je diplomantka v enem od virov odkrila logično napako. Komisiji, ki ni bila ravno doma v matematiki, se je logična napaka zdela premalo, češ da je samo ena. Toda samo ena nedolžna logična napaka nas že lahko privede, če je pravočasno ne odstranimo, samo do še večjih logičnih napak in vsa teorija se nam lahko zaradi ene same logične napake nekega dne popolnoma sesuje, tako kot zgodba o cerkljanskem brivcu.

Omenili smo besedo *antinomija*, ki je spet grškega izvora, nastala iz predloga ἀντί, kar pomeni *nasproti, v primerjavi z, namesto, za*, in νόμος, kar med drugim pomeni *načelo, pravilo, predpis, odredba, zakon, postava*. Namesto antinomija je v uporabi tudi beseda *paradoks*. Po grško je παρά *poleg, ob strani, pri, k, mimo, ob, skozi, proti*, medtem ko je δόξα med drugim tudi *mnenje, pogled, mišljenje, predstava, nauk, domnevanje, dozdevek*.

Seveda so me po mojem prvem pobegu od doma hitro pogrešali in nekdo, morda sestra ali brat, je prišel pome. V svoji pretresenosti zaradi požara mi to ni ostalo v spominu, čeprav mi ta sega še globlje v otroštvo. Celo tega, da sem nekoč pozimi v materini odsotnosti padel skozi okno, se medlo spominjam. S sestro, ki je umrla, ko sem imel približno tri leta, sva se igrala na široki okenski polici nad vhodom v klet, ki smo ji rekli *hram*. Tam zunaj, pod oknom, je bilo tudi malo zaledenelo, ker je rado kapljalo s strešnega žlebu naravnost pred vhod klet. Imeli smo, ker je bila huda zima, dvojna okna. Njihovo tesnjenje se z današnjimi ne more primerjati. Notranja okna so se odpirala navznoter, zunanja pa navzven. Slednja so bila pritrjena, da se niso odpirala, s posukano žico ob žebelj. Te posukane žice in prerano umrle sestre sem se še dolgo spominjal, potem pa ničesar več, saj je žica popustila in padel sem naravnost na trdo ledeno gmoto pred hramom. Sestra mi pa kasneje tudi ni mogla povedati podrobnosti, kako je bilo s tem, ker je revica prej umrla. Starejša sestra in teta, obe že pokojni, katerima sem bil zaupan, sta me pobrali in odnesli v posteljo. Baje da dolgo nisem mogel dati od sebe nobenega glasu, čeprav sem kazal znake življenja. Šele ko se je vrnila mama, sem jo poklical in s tem dal vesoljnemu svetu vedeti, da sem še živ. Sestrica je prerano umrla v nezavidljivo urejenih povojnih razmerah v cerkljanski bolnišnici, ki je nekaj časa delovala nad ambulanto. Tej smo rekli *Mala palacina* za razliko od *Velike palacine*, kjer je bil dijaški dom. Oboje so zgradili pod Italijo. Velika palacina je bila prvotno namenjena italijanskim oficirjem in njihovim družinam. Zaradi smrti hčerke se je mama vse življenje žrla, kadarkoli se je nanjo spomnila, in si po nepotrebnem očitala, da zanjo morda ni vsega storila, kar bi lahko.

Srednja sestra, žal tudi že pokojna, je nekoč v šali pripomnila, da mi je matematika dobro šla samo zaradi tega znamenitega padca skozi okno. O tem se je v družinskem krogu pogosto razpravljalo. Pravkar omenjena sestra je takoj po drugi vojni obiskovala na novo ustanovljeno nižjo gimnazijo v Cerknem. Da pa ji ni bilo treba pešačiti dol in gor, od Očanca v Cerkno in nazaj, po poti, ki sem jo bil sklenil še enkrat v življenju prehoditi, so jo dali stanovat v znameniti cerkljanski dijaški dom, v Veliko palacino, samo ob nedeljah pa je bila doma, kjer se je temeljito očedila, najedla, naspala in zamenjala svoje cunje. Ko se je ob nedeljah popoldne odpravljala nazaj v dijaški dom, je govorila, da odhaja nazaj v *Klapač*. Nižjo gimnazijo je obiskoval tudi moj najmlajši brat, žal tudi že pokojni, kateremu pa je bilo usojeno, da je moral v šolo kar pešačiti. Pešačil sem tudi jaz, razen na koncu, ko so vpeljali avtobus. Za lažjo predstavo: Očanec samuje na nadmorski višini 700 m, Cerkno pa je na 324 m. Pot navzdol smo pretekli tudi v manj kot po ure, pot navzgor pa je v normalnih okoliščinah zahtevala kake tri četrt ure. Nisem pa imel te časti, da bi obiskoval cerkljansko nižjo gimnazijo, ki so jo med mojim obiskovanjem prvih štirih razredov osnovne šole ukinili in vpeljali obvezno osemletno šolo, na kratko osemletko. Trenutno pa premoremo celo devetletko. Nižja gimnazija, ki sicer ni bila obvezna, je seveda odigrala za Cerkljansko pomembno vlogo. Ob ustanavljanju so ji nove oblasti iz takega ali drugačnega razloga nagajale, navsezadnje pa je le stekla, pri čemer je imel velike zasluge učitelj, pa tudi šolski nadzornik Viktor Jereb, in veliko fantov in deklet jo je kljub vsakršnemu pomanjkanju tudi končalo. Ljudje so bili takrat v glavnem mnenja, da nisi nič, če nimaš šol.

Nad Mrtvico je bilo treba previdno prečkati cesto Cerkno–Kladje, če se je pač človek odločil iti skozi Planino mimo Šoštarja skozi planinske Riže, kjer je bilo že tisti čas kup podrtih ali pa zapuščenih bajt, recimo Kmetova, pa ona od Šemčeve Mice in Cvekove Barbare. Mala Mihova hiša je bila obljudena. Mihova Stanka je bila dolga leta planinska knjižničarka, Mihov Jelko pa prijatelj mojega najmlajšega brata. Stanka je izposojala knjige ob nedeljah popoldne v prostoru nad planinsko mlekarno, ki je bila prva na Cerkljanskem že pod rajnko Avstrijo in simbol napredka na vasi. Vaška knjižnica je bila sicer majhna, imela je mizo in nekaj klopi ter za eno omaro običajne velikosti polno knjig, kar je bilo za vasi Planina in Čeplez skupaj popolnoma dovolj. V mojih osnovnošolskih časih je celo obstajala skrbno na roko napisana kronika vasi Planina. Imel sem jo čast samo enkrat prebrati. V lepem rokopisu so bili v kroniki popisani pomembnejši dogodki in z vajeno roko do podrobnosti narisane risbe, med njimi tudi znamenite planinske rudniške naprave. Natančno so bili opisani tudi pomembnejši dogodki, ki so zgodili v vasi. Žal se je kronika v nepojasnjenih okoliščinah izgubila. Še dandanes, ko imamo ustanove, ki so imenovane in pooblaščene za hrambo naravne in kulturne dediščine, včasih ravnajo z izkopaninami, redkimi rastlinami in živalmi kakor svinja z mehom. Beseda *kronika* izhaja iz grške besede χρόνος, *čas, doba, starost, rok*. Prav tako je grška beseda simbol: σύμβολον, *znamenje, znak, značka, znamka*.

Planinska mlekarna mi je ostala tudi v neprijetnem spominu. Kot osnovnošolec sem moral tu pa tam nesti v to mlekarno mleko, ki so ga v njej zbirali. Nekoliko bolj oddaljeni smo ga prinašali v posebni kangli, ki se je zadela na hrbet kakor koš ali nahrbtnik. Po oddaji mleka bi moral prazno kanglo pustiti zunaj mlekarne na dogovorjenem mestu in jo potem, vračajoč se popoldne iz šole, pobrati in odnesti domov. Nekega dne pa sem jo v svoji raztresenosti pozabil v mlekarni, ki pa je bila popoldne že zaprta. V neprijetni situaciji se je javila Gričarjeva Marija, žal tudi že pokojna, ki je bila ravno prav suha, da je smuknila skozi železne rešetke oken, ki je bilo na srečo odprto, v notranjost mlekarne po tisto kanglo. Če kaj lahko gre narobe, bo narobe tudi šlo. Kangla je bila prevelika in je ni bilo moč spraviti skozi rešetke, zato je morala ostati v mlekarni do naslednjega dne. Še dobro, da je ubogi Mariji uspelo vrniti na plano. Ubogi pa sem bil tudi jaz sam, ko sem se vrnil domov brez edine kangle za mleko, ki je bila pri hiši.

Cesti Cerkno–Lapajne–Podpleče in Cerkno–Lapajne–Kladje–Sovodenj in naprej sta bili od nekdaj salamensko pomembni prometnici. Med prvo svetovno vojno so po njih oskrbovali vojsko, prevažali topove in strelivo na soško fronto, kasneje pa so eni soldati bežali pred drugimi na ena stran, dokler se niso drugi ustavili pri Joškovcu in Slavku na kranjski strani. Čez četrt stoletja so slednji bežali spet nazaj, od koder so prišli. Lahko bi o tem govorili vsaj še tri dni. Omenimo samo še to, da so se ljudje po drugi svetovni vojni vozili po tej cesti na Kladje k Vilčku na veselice in spremljat televizijski spored. Na Kladju so zaradi primerne nadmorske višine kraja bili med prvimi na Cerkljanskem, kjer so imeli televizor (tisti radio, v katerem se vidi kino, kakor je ob neki priložnosti rekel neki bistri hudomušnež v Cerknem).

Pri Mihu v Planini sem zavil proti Koritu dol na vas mimo Corna in Andrejača, nato sem jo mahnil naravnost do planinskega znamenja, lahko pa rečemo tudi kapelice. Na vrhu njenega pročelja je v trikotniku narisano božje oko, za katerega se nam je zdelo, da se obrača za nami: če si se premaknil v smeri Logarjevega kozolca proti Čeplezu, je gledalo za teboj, če si se oddaljeval proti vasi, pa spet. Tukaj so se zvečer dobivali tudi mladi, skrivaj ali pa tudi ne. Od kapelice se da priti po cesti v Čeplez ali pa v Planino, pa tudi počez po kolovozu v Cerkno. Pri kapelici smo se šolarji dobivali, da smo potem hodili skupaj v šolo. Naredil smo tudi kakšno traparijo. Tega pač ni moč tajiti. Jeseni smo poruvali in s tem odtujili kakemu kmetu v Planini ali Čeplezu, za popestritev svojih šolskih dni, kakšno prav lepo, veliko, po možnosti tanjšo repo, jo celo zgledno obrezali, da smo jo potem kontrolirano s palico kotalili po poti vse do Cerknega, seveda če nam ni prej ušla po strmem bregu v Podlivec. Priložnosti je bilo dovolj, saj je povsod ob poti nekaj raslo: krompir, repa, pesa, koruza, zelje, ohrovt, pšenica, ječmen, proso, rž, oves, ajda. Polja so bila tiste čase vzorno obdelana. Danes je tega bolj malo ali pa nič. Pri Gantarju in Jamšku v Cerknem se je na koncu naše poti, tik pred začetkom pouka, nabralo precej od kotaljenja obtolčenih rep, zagotovo vsaj za pol svinjskega kotla, kajti repo kotalečih šolskih skupin je bilo več. Tako je neusmiljena gravitacija opravila svoje in marsikateri cerkljanski debeli pujs je prišel na svoj račun.

Pri Jamšku je naša korajža v kotaljenju rep popustila, kajti v strahu pred učiteljicami in učitelji repe običajno nismo kotalili čez cerkljanski *plac*, ker ni bilo moč izključiti možnosti, da se ne bo znašla Cinkovi Vidi ali Migučevi Angeli, bognedaj Masornikovemu Viktorju, našim strogim učiteljem, nekdaj šolskim nadzornikom, pod nogami. Kljub temu pa se je, malokdaj sicer, pa kdo le drznil zakotaliti repico, če je od nje še kaj ostalo, mimo Miha na placu, Gabrijela in Balantača naravnost v Cerknico.

Vsaka vas ima kakšno kapelico. Na Kladju sta celo dve. Ena stoji na sami razvodnici. Nekemu tovornjakarju jo je po nesreči uspelo zasukati za manjši kot okoli njene navpične osi, pri čemer so njeni temelji ostali na prvotnem mestu. Druga pa je nekaj deset metrov ob cesti proti Sovodnju. Pod to kapelico je celo vodni zbiralnik. Tudi ta je bila deležna bližnjega srečanja s tovornjakom, ki ji je odbil del strešice. Čeprav je bila pod spomeniškim varstvom, jo je moral obnoviti kar domačin. Poskrbel je, da strešica ne sega preveč proti cesti. Prelaz Vrhulce se ne more ponašati s kapelico, stoji pa tam skromno razpelo, ki je bilo nekajkrat po drugi svetovni vojni oskrunjeno. Verjetno je nekdo preveč zares vzel nov družbeni red. Kapelica je tudi v Čeplezu. Najdemo pa tudi precej kmečkih hiš, kozolcev in hlevov, ki premorejo nišo s kakšnim svetnikom. Zelo radi so upodabljali sv. Florijana, varuha pred požarom. Bilo je nekaj ljudi na Cerkljanskem, ki v cerkev niso kaj prida hodili, verjetno zaradi oddaljenosti, toda na sv. Florijana in sv. Jerneja dan so pa redno zahajali v božji hram.

Od planinske kapelice sem jo potem mahnil kar pod Logarjevim kozolcem navzdol. Ves čas se je dalo kar udobno hoditi in hkrati občasno pogledati navzgor proti Čeplezu, kjer je hišni gospodar Rojc imel svoja poslopja, ki so spominjala na nekakšen stolp, Planinci pa so imeli že kar tri stolpe, kakor je poudaril Koritni Tone: cerkvenega, gasilskega in kabino za električni transformator. Saj se še spomnim, kako sta transformatorsko postajo, skupno za Planino in Čeplez, zidala Šimanov Jernejc iz Poč, nekdaj soprog moje pokojne tete, in še nekdo, katerega ime pa mi je že ušlo iz spomina, vdano pa sta jima asistirala dva pomočnika, po domače *malavarja*, ki sta mešala malto in jo dostavljala zidarjema. Prav tako sta jima prinašala opeko in drug material. Zidarji imajo od nekdaj pravico, da samo zidajo, pomočniki pa jim morajo vse prinesti k riti, kot sami pravijo. *Malavar* je cerkljanska beseda, ki prihaja iz italijanskega samostalnika *manovale*, kar pomeni *težak*, *zidarski pomočnik*.

Gledati se je dalo na vse strani, ko je človek le enkrat bil mimo Brdnikovega kozolca. Če ni motilo grmovje ali pa megla, se je videlo vse tja do Zakriža s cerkvijo sv. Andreja. Ko so bile zrele jagode, smo stikali za njimi, ko pa so bili zreli lešniki, smo se tudi malo bolj zadrževali okrog lesk. Nabiranje jagod me je nekega dne drago stalo, kakor bomo videli. Ko so bili zreli orehi, smo kar spotoma delali iz njih tudi brleke in druge neumnosti. Jeseni je bilo ob poti na razpolago vsakršno sadje: več vrst jabolk in hrušk, tu in tam pa so se ob dobrih letinah popotniku zrele češplje kar same ponujale, saj so ponekod visele nad sredino poti, človeku naravnost pred nos. Ni pa bilo ravno zdravo utrgati kak prepovedan sad vpričo lastnika ali njegovih svojcev.

Pred Hrušico, kjer pot iz Planine v Cerkno vodi še enkrat prek ceste Cerkno–Kladje, se ob lepem vremenu lepo vidi navzdol v dolino potoka Oresovke. Dolina je dobila ime Podlivec. Pogled s tega vzvišenega mesta pa je mogoč vse tja do pokopališke cerkve sv. Jerneja, kjer je bil v starih časih sedež cerkljanske fare. V Hrušici se je takrat, ko sem še hodil v osnovno šolo, pod Lukovim samcem utrgal zemeljski plaz, ki je poškodoval glavni kolovoz. Takrat so z ovnom, prastaro napravo, s kakršno so se v antičnih časih, pa tudi kasneje, lotili mestnih obzidij, zabili v tla hrastove pilote, ki še dandanes stojijo. Tako so popravili za nas pomembno pot tudi kraju, ki smo mu rekli *Na pol poti*, sicer bi velik del zemlje zlezel tja dol v Podlivec. Hrušica je lep svet, le da je za Planince že nekoliko daleč, čeprav je Romlaz še bolj, da ne govorimo, kje je je Koritni kozolec, pravzaprav samec s predpasnikom. Na pol poti se glavni poti pridruži tudi ozka steza iz Čepleza.

Obe poti, iz Planine in Čepleza, se torej snideta Na pol poti. Od tam nas je potem šla naprej že cela sodrga preko Romlaza v Cerkno. Romlaz je lep kos zemlje. Od tam se vidi na vse strani, ne le v Zakriž, ampak tudi v Labinje in Ralne, pa na veličastni Porezen, če ni oblačno, pa tudi na druge strani. Pripraven je zlasti Jerebov kozolec, če človeka ujame ploha, saj od tu naprej ni nobenega poštenega kozolca več, vse do Teškanovega, nazaj navkreber pa do Bridnikovega prav nobenega. Vmes je le Koritni samec s predpasnikom, kjer si bil pa še bolj moker kot prej, če je zapihal pravi veter. Jerebov Jakob je slovel po tem, da ni preganjal vedrilcev, če le niso delali škode po kozolcu, stari Teškan jih pa je, če jih je le videl, pa najsi je bilo lepo ali grdo vreme. V Planini so bili svoj čas kar trije Jakobi: Mrtviški, ki je znal izdelovati in popravljati čevlje, Medrski, ki je tam v Jelenku nekoč ponoči nekoga prepodil izpred senika, in Jerebov. Zaradi njih je bilo treba zelo paziti, o katerem Jakobu je tekla beseda.

Jerebov Jakob me je pogosto prosil, da sem mu iz trafike v Cerknem prinesel cigarete, navadno znamke Morava, gor na Romlaz, kjer je kaj počel, pa mu jih je ravno zmanjkalo. Na Romlazu je pozimi narava ustvarila male snežne zamete. Ko sem v gimnazijskih časih hodil popoldne domov iz Cerknega čez Romlaz, sem med potjo premišljeval o matematičnih problemih, ki jih je dal profesor Karčnik, in pozimi sem pogosto po snegu pisal in risal trikotnike, ki smo jih morali za domačo nalogo konstruirati samo z ravnilom in šestilom, ki sta edini priznani orodji v evklidski geometriji. Če te je Na pol poti zalotilo zvonjenje za službo božjo pri sv. Ani v Cerknem, si bil lahko trdno prepričan, da boš v cerkvi ravno pravi čas, brez kakršnekoli zamude, ne da bi posebno hitel mimo Teškana, Orla, Landorja, Hramšarja, Dreška, Trčka, Jamška in Miha na placu v Cerknem.

Pod Jerebovim kozolcem je tik ob poti visoka živa meja, ki je prišla poleti še kako prav, ker je ljudem in živini delala senco. Pod živo mejo pa sta Pudeljčkov svet in senik. Gorje ti, če si šel po travi in te je zasačil Pudeljček! Tam je zmeraj kdo od njegovih ali pa kar sam kaj delal: ali je pripravljal drva ali pa je drobil hosto in vezal butare. Potem se spet pride na bolj odprt svet, na Grintovec, vzpetino nad Cerknim, od koder se vidi skoraj celotna prestolnica naše občine, da bi jo lahko kar objel in poljubil, čeprav poti še ni bilo konec, pa tudi dolina Podlivec z Otržjem vred, gospodarja pred hišo pa ravno ne. Pogled nas zanese tudi do sicer bolj slabo vidnih razvalin Mačkove domačije nad levim bregom Oresovke, pa še naprej, vse do Stisk in Rajde. Pri Mačku rastejo sedaj samo še koprive in grmovje, v času mojega šolanja v Cerknem pa se je z moje šolske poti še dalo videti sicer že razpadajoče zidovje. Kmalu bo marsikje tako, kot je sedaj pri Mačku. Nekje na Grintovcu preseka pot po slovenski geodetski mreži štirinajsti poldnevnik vzhodno od Greenwicha, kar tudi ni slabo. Če uporabljamo GPS, sistem globalnega določanja lege, ki ni prilagojen slovenski geodetski mreži, za katerega točnost skrbi cela jata umetnih satelitov, pa pridemo do zaključka, da štirinajsti poldnevnik preseka cesto od Cerknega do Rajde približno tam, kjer je nekdaj stal Bavconov oziroma Makucev kozolec. To je tam, kjer se odcepi s ceste pot v Otržje. Sledeč slovenski geodetski mreži pa poteka štirinajsti poldnevnik tik mimo Migučevih svisli, precej bliže Cerknemu kot je Bavconov kozolec.

Le trije celostopinjski poldnevniki prečkajo Slovenijo: štirinajsti, petnajsti in šestnajsti. Petnajsti je pomemben, ker definira srednjeevropski čas. Kljub temu bi Cerkljani lahko na neki način obeležili štirinajsti poldnevnik v Podlivcu in na Grintovcu, kjer bi šolarjem na prostem lahko razlagali osnove zemljepisa ali geografije. Trebanjci na Dolenjskem so namreč svojemu petnajstemu posvetili kar precejšnjo pozornost. Tako bi Cerkljani v svojem napredku marsikoga prehiteli, približno tako kot so nekoč Idrijčane, saj sta v Cerknem prej kot v Idriji stala semafor in parkomat.

Beseda geografija je kajpak grškega izvora. Nastala je s sestavljanjem besede γῆ, *zemlja*, in γράφω, kar med drugim pomeni *pišem*. Le od kje se je vzela beseda *semafor*? Nemci tej koristni napravi, brez katere bi se ljudje po cestah še bolj pobijali, pravijo *Ampel*, praktični Angleži *traffic light*, Francozi spet nekaj tretjega, Rusi светофор, Bolgari pa ne dosti drugače: светофар. Beseda *semafor* je nastala iz dveh grških besed: σῆμα, kar pomeni *znak, znamenje*, in glagola φέρω, *nosim*. Podobno je nastala beseda *termofor*, θερμός namreč pomeni *vroč, topel, vrel, razbeljen*. To nas spominja na slavne Termopile v Grčiji. Beseda πύλη pomeni *vrata, vhod, soteska, klanec*. Res! *Termopile*, Θερμοπύλαι, so dobile ime po tamkajšnjih toplih vrelcih. Še ena zanimivost. Ko smo bili poleti leta 1968 skupaj s profesorjem Tomažem Pavšičem[37] na maturantskem izletu v Dubrovniku, smo v starodavno mesto hodili skozi zahodna mestna vrata v obzidju. Tisti konec prelepega Dubrovnika se, ne slučajno, imenuje *Pile*.

Z Grintovca nad Cerknim se lepo vidi na nekdanji živinski trg, kjer je še v mojem času vsak torek potekal živahen sejem, kjer so prodajali in kupovali ovce, ovne, kozle, koze, pujse, teleta, junice, junce, bike, krave in drugo živino. Zmeraj je bilo veliko ocenjevanja živali in živahnega pogajanja za ceno. Po kupčiji se je veliko denarja tudi zapravilo in zaigralo, Cerkljani bi rekli *zakvartalo*, po številnih cerkljanskih gostilnah. Ko človek gleda živinski sejem, se nehote spomni na Aškerčevo balado *Mejnik*, ki smo se jo učili pri učitelju Jerebu. Celo na pamet smo jo morali znati, kar je dandanes po modernih osnovnih šolah prava redkost. Od slavnega cerkljanskega živinskega trga je ostala samo še majhna betonska klančina, kamor je ritensko zapeljal tovornjak, da so potem nanj naložili živali za klavnico ali preprodajo. To je tisti nizek zid v bližini Čuka in na njem je z barvo zapisano, da se od tam da priti na Porezen. Najde pa se še kakšen železen vzidan obroč, kamor so priklenili žival. Živino so odvažali v Idrijo, Tolmin in Gorico. Nekaj pa jo je odkupila tudi cerkljanska kmetijska zadruga za cerkljansko klavnico. Res! Tudi v Cerknem je bila nekoč klavnica, na levem bregu Cerknice pri žagi. Precej živali, zlasti mlade in perspektivne za nadaljnjo uporabo ali rejo, pa so kmetje tudi preprodajali drug drugemu. Na cerkljanskem živinskem trgu je stala tudi velika tehtnica za tehtanje živine. Kdor je tehtal, je bil pod streho in na suhem v posebni hišici. Od tega ni ostalo nič. Prostor sedaj služi kot parkirišče.

[37]Tomaž Pavšič (1931–2019) – profesor na idrijski gimnaziji, kulturni delavec.

Druga varianta moje nekdanje šolske poti je vodila po cesti mimo Ivana pod Lukovim kozolcem in Rojcem skozi Planini sosednjo vas Čeplez. Malo pred Rojčevo škarpo se zavije v Planino, če pa greš nekoliko naravnost po cesti mimo Bočarjevega kozolca, prideš na Bočarjev ovinek, od koder se vidi naravnost v Cerkno, pa tudi čez dolino v Gopalše, na planinske njive in drugam. Za Lukom, pod Bočarjevim hlevom, smo nekoč čakali na avtobus za Ljubljano ali Cerkno. Za Cerkno se skoraj ni izplačalo na avtobus, ker se je dalo kar hitro opraviti pot navzdol tudi peš. Avtobus za v Cerkno je bil dobrodošel za starejše ljudi in tiste, ki težko hodijo. Tukaj je bilo uradno avtobusno postajališče za Planince in marsikateri šofer ni hotel ustaviti na Vrhu dolin nad Planino. Danes pa lahko vozijo na pol prazni avtobusi naokrog in še gledajo, če je kje kdo, ki bi se kam peljal. Res pa je, da avtobusi ne smejo ustavljati kjerkoli. Svoj čas so ukinili vsa avtobusna postajališča med Godovičem in Idrijo, češ da so nevarna. To je res, zlasti za šolarje. Nikoli se ne ve, kdaj bo kdo od njih stopil na cesto ravno takrat, ko bo nekdo z avtom pridivjal mimo.

Pri Luku so nekdaj tudi cepili otroke iz Planine in Čepleza. Proti različnim boleznim: otroški paralizi, oslovskemu kašlju, ošpicam, kozam. Prišli so iz Idrije z vsem potrebnim priborom: injekcijami, špiritom, gorilnikom, steklenicami. Navadno so bili trije: otroška zdravnica, močna ženska, s katero ni kazalo zbijati šale, medicinska sestra in šofer. Pripeljali so se v nekakšnem džipu, morda še iz časov tik po drugi svetovni vojni, ko so Američani katerega podarili Jugoslaviji. Postavili smo se v vrsto, kakor se postavljajo Angleži, ko vstopajo v avtobus. Čim so trije, že oblikujejo vrsto in ne daj, da bi se kdo vrival in prehiteval. Lukova Vera je za tako priložnost dobro zakurila v nepogrešljivi krušni peči, da otrok ni zeblo, kajti treba se je bilo tudi malo sleči. Obenem pa je lahko zastavila še testo za potico in kruh. Mimogrede je zdravnica pregledala še kakšnega otročička. Med cepljenjem pa je šofer čakal kje zunaj ali pa se je malo sprehodil po Čeplezu, na primer do Zapoškarja navzdol, pa do Bočarja nazaj. Ko sem bil že malo večji, se je pošalil: "Za tako velikega zagotovo ne bodo uporabili navadne injekcijske igle, ampak konjsko." Pri nekaterih cepljenjih pa cepiva nismo dobivali po igli, temveč po žlički, kar je bilo za otroke ogromno olajšanje. Ko študentom razlagam injektivne, surjektivne in bijektivne funkcije, krajše injekcije, surjekcije in bijekcije, se še vedno spomnim na tiste injekcijske igle pri Luku v Čeplezu.

Pri Zapoškarju v Čeplezu so svoj čas imeli na razpolago plemenskega bika, morda lepšega, kot je bil tisti, ki je ugrabil Evropo. Kmetje so potem tja vodili krave, ki so se pojale, kar pomeni, da so kazale nagnjenje za parjenje, da so dobile svoje po popolnoma naravni poti. Zapoškar pa je imel po vrsti kar štiri hčerke, tako da je bilo pri njih, ko so bile še vse doma, vedno živahno. Vendarle pa je bil peti otrok zelo zaželeni sin. V njihovi kleti, tik ob cesti Cerkno–Kladje, so dolgo časa pobirali tudi mleko. Nekaj časa smo ga tja nosili celo od Očanca. Z oddajo mleka res nisem imel sreče. Zgodilo se mi je, da sem na hrbtu v šolo grede nosil polno kanglo, v roki pa blok z risalnimi listi. Ravno pri Grapnem kozolcu sem se, neroden, kakor sem vselej bil, spotaknil, vse mleko je šlo po zlu, pa še moje umetnine mi je spackalo. Joj! Kaj bo rekel strogi Dalenikov Gabrijel, ki nas je takrat poučeval likovno vzgojo! Kaj bo rekel ata, ko bo izvedel, da Zapoškar tistega dne ni mogel zapisati v tabelo več kot nič litrov od Očanca oddanega mleka! Ne spominjam se več, kako je bilo. Še sreča, da je bil Medrski Jakob priča moji nezgodi.

Naravno osemenjevanje krav pri Zapoškarju se je nekega dne nehalo, nakar sva z očetom nekajkrat gnala kravo na Laniše, kjer je bil doma laniški gospod, Mihael Peternel, in kjer so še imeli registriranega plemenskega bika, ki bi se lahko po lepoti kosal samo s tistim v Epu o Gilgamešu. Nazadnje so še tega ukinili in prešli na sodobno, umetno osemenjevanje krav.

Pojem funkcije v matematiki ni od nekdaj, ampak je počasi zorel. Še Euler[38], ki je napisal toliko del, da baje do danes še niso vseh preštudirali, je bil mnenja, da je funkcija vsaka taka povezava med pravokotnima kartezičnima koordinatama x in y, ki jo je mogoče načrtati s prosto roko. Nato

[38] Leonhard Euler (1707–1783) – švicarski matematik in fizik.

so ugotovili, da je za natančen opis funkcije treba imeti množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ter predpis f, ki vsakemu elementu x iz $\mathcal{A}$ priredi *enega ali več* elementov y iz $\mathcal{B}$. Pisali so: $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ in $y = f(x)$. Približno tako je bilo zapisano še v nekaterih učbenikih in zbirkah nalog, ki smo jih uporabljali na gimnaziji, pa tudi na univerzi. Danes se nam zdi malo čudno, ko v njih vidimo na slikah, kako se na primer graf funkcije arcus sinus vije kot nekakšna dolga kača vzdolž osi y. Nekatere zbirke so doživljale mnogo ponatisov s takimi podobami še potem, ko so se končno dogovorili, da je funkcija f predpis ali pravilo, ki vsakemu elementu x iz $\mathcal{A}$ priredi *natanko en* element y iz $\mathcal{B}$, ki ga zapišemo v obliki $y = f(x)$. Baje bi bilo popravljanje predrago. Poudarimo, da pa je v gimnazijskih učbenikih profesorja Križaniča bila zapisana korektna definicija funkcije kot enega osrednjih pojmov matematične analize. Tako kot matematika, je izraz *analiza grški*: ἀνάλυσις pomeni *razveza, odrešenje, osvoboditev*, v prenesenem pomenu pa celo *odhod, smrt*.

V resnici je tudi omenjena definicija funkcije nekoliko sporna, kajti uporablja besedo *predpis*, ki ni v samih osnovah matematike nikjer vpeljan. Matematika se boji logičnih protislovij, ki bi nastala zaradi napačnih definicij, bolj kot sam hudič križa. Spomnimo se samo na tistega brivca, ki brije vse tiste, ki se sami ne brijejo. Že Evklid je naredil napako, ko je definiral točko, premico in ravnino. Naredil jo je tudi Cantor, ko je definiral množico. Nikakor ne gre, da bi imeli napako še v definiciji funkcije. Odkar pa so spoznali, da za matematika niso pomembne le reči, ampak predvsem lastnosti in odnosi med njimi, je laže. Vsaka matematična teorija vpelje potrebne simbole, definicije in aksiome, nato pa z logičnim sklepanjem razvija in išče trditve, izreke in leme. Beseda *aksiom* je grška: ἀξίωμα pomeni *čast, vrednota, ugled, zahteva*. Prav tako je grška tudi beseda *lema*. V grščini pomeni λῆμμα *dohodek, dobiček, korist*. Tako je na primer zgrajena teorija množic. Z njo brez težav pridemo do pojma binarne relacije na dani množici, nato pa rečemo da je funkcija f iz $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$ enolična binarna relacija na uniji množic $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$. To pomeni: če je $y_1 = f(x)$ in hkrati $y_2 = f(x)$, kjer je $x \in \mathcal{A}$

ter $y_1, y_2 \in \mathcal{B}$, potem je nemogoče, da bi bilo $y_1 \neq y_2$, ampak mora veljati nasprotno, $y_1 = y_2$.

Pri Luku jo je bilo treba udariti peš po ozki in strmi stezi mimo Pavlina, kjer je Mica nekoč pozabila luč v kleti, nakar je mislila, da so na delu tatovi, in Lukovega kozolca, bolje samca, pa nekoliko niže drugič čez cesto, ki vodi proti severu do čepleške rajde, nato pa po še slabši stezi, kjer pride spet skupaj Na pol poti s širšo potjo za Planino.

V Planini, pri Ivanu ob cesti je bila včasih gostilna, da so lahko ljudje hodili kam pit in igrat karte, to se pravi *kvartat*, pod Italijo pa tudi kakšno naskrivaj po domače zapet. Po drugi svetovni vojni pa so bili Planinci in Čepležani večinoma brez gostilne, zato so morali hoditi na Kladje ali pa v Cerkno po pivskih opravkih. Zlati časi so bili na koncu šestdesetih let, ko se je pokojni Vinko Eržen nehal ukvarjati s starimi cunjami in odpadnim železjem in se je nekaj let šel gostilničarja. Pri Ivanu se je tudi žalostno končala usoda prenekaterega bakrenega kotla za kuhanje žganja. To je bilo pod Italijo tvegano in strogo prepovedano početje. Pravijo, da se ga je marsikateri italijanski vojak do smrti nadelal z žganjem. Včasih so z domačimi fanti celo stavili, kdo ga več prenese. Kakorkoli že, oblast je kmete prepričala, da so pripeljali svoje kotle k Ivanu, kjer naj bi jih uradnik popisal in opremil z registrsko značko. A jim je v kotle naredil velike luknje, da so postali neuporabni. Neki kmet, ki je pripeljal registrirat več kotlov, jih je po tej katastrofi privezal z dolgo verigo za voz in odpeljal domov. To je seveda ropotalo in krepko bobnelo tam gori nad Mrtvico, kakor da bi Perzijci, Bizantinci ali Turki udarili prek Jeramovih Vrat na Cerkljansko. Spominjam se, da je po vojni marsikateri kotel imel okroglo bakreno krpo, z zakovicami pritrjeno na kotel, ker so kasneje luknje, ki so jih naredile italijanske oblasti, pokrpali in veselo naprej kuhali žganje po strašni vojni. Skrivaj so ga še vedno kuhali, med vojno pa je služil tudi kot nadomestek za špirit v domačem zdravstvu. Žganjekuha je seveda imela svoje slabe in dobre strani. Za slabe ve vsak, dobro pa je bilo, da so ljudje pobrali vse sadje. Kar ni bilo za na mizo, je bilo ali za v *pajštvo*, kmečko sušilnico sadja na Cerkljanskem, ali pa za v čeber za žganje. Dandanes je drugače, ogromno sadja zgnije na tleh ali pa kar na drevesu. Kotle za žganjekuho pa je današnjim oblastem spet treba prijavljati.

Nad cesto skozi Mativščico, kjer je sedaj spomenik padlim borcem NOB, ponosno stoji Lukov kozolec, ob poti med Medrcami in Orlovo Pečjo. Nekoč so me neke mrhe po krivici obdolžile, češ da sem jaz Lukovim iz tega kozolca zmetal ven vso krmo, pa je nisem, Najvišji mi je priča, de je nisem. Najbolj je, brez kakršnih koli oprijemljivih dokazov proti meni pričal nekdo, žal prerano umrli, nekoliko starejši od mene. Bog mu grehe odpusti! Bil sem pač neizkušen v obrambi samega sebe, trmast pa tudi, tako da se Lukovim nikoli nisem opravičil, saj se jim v resnici nisem imel za kaj. Ko pa sem jim hotel povedati vsaj to, kako je v resnici bilo, sem izvedel, da sta gospodar in gospodinja že pokojna. Če bi se opravičeval, bi jim pa lagal, kar je sprto z logiko. Nad Grapnim kozolcem, ki ima zelo lepe lesene *križe*, funkcionalno in estetsko med seboj povezane tramove na pročelju, je rasla Bregarjeva mohornika, kjer smo včasih Bregarjevemu Milanu skrivaj vzeli kakšno vabljivo jabolko, ki je zorelo na veji kot kakšen prepovedan sad v Raju, pri Rojcu pa kakšen grozd, ki ni bil ravno tako velik kot tisti v Bibliji, ki sta ga prinesla oglednika iz obljubljene dežele Izraelcem, ki so se vračali iz egiptovske sužnosti, in to celih štirideset let. Bilo pa je Rojčevo grozdje zagotovo slajše. Mohornika je priljubljena vrsta jabolk, ki dozorijo med prvimi, nekako okoli goda sv. Mohorja, oglejskega škofa, to je 12. julija.

Grapni kozolec sem si dobro zapomnil. Nekoč, ko sem bil še majhen, sem tekel z drugimi otroki v Čeplez, kjer so na večer pred godom sv. Janeza Krstnika, ki je Planincem zavetnik, pa tudi Čepležanom, Podplečanom in morda še komu – naj mi ne zamerijo, če sem koga izpustil – kurili kres nekje tam pod Zimom. Ta pobeg je bil približno tak, kot tisti na dan, ko je gorelo pri Kmetu in njegovem sosedu v Planini. Potem so me pa doma, ko je bila že tema, nekoliko pogrešali in bili v hudih skrbeh, nakar so nagnali kar našega ata pome, ki je takrat delal kot rudar v Idriji in je bil za konec tedna ravno doma. Še dobro, da me je pravočasno našel, ker je ravno kazalo na hudo ploho. To se je domov grede zares zgodilo ravno pri Grapnem kozolcu, kjer sva izkoristila njegovo streho in povedrila. Grmelo in bliskalo se je kot sto zlodejev. Bil sem bolj slabo oblečen, pa še v kratkih hlačah, tako da me je ata pokril kar s suho deteljo iz kozolca. Upam, da Grapnik tega ni opazil! Ko je bilo najhuje mimo, sva odšla domov. Eden od Grapnikovih sinov se je kasneje preselil na Vrh dolin, kjer se je nekaj časa šel kmečki turizem, podjetje pa je poslovenil v *Turistična kmetija Grapar*.

Drugič pa sem se Grapni kozolec zapomnil na neko velikonočno nedeljo, že v tretjem tisočletju, ko sva se z ženo peljala iz Čepleza proti Kladju. Neki lokalni divjak naju je z vso ihto z avtom po levi strani prehitel nekje pri odcepu za Planino, nato pa nama je po nekaj metrih tik pred nosom zavil na desno naravnost v Grapni kozolec. Človeka v takih primerih spreletijo mravljinci. Lahko bi bilo to zadnjič. Najbrž je mulec hotel s tem pokazati, kdo je v teh krajih gospodar, in si pri tem mislil, kaj boste vi mestne reve. Važno je, da je zadostil svojim prehitevalnim nagonom. Je bilo to res potrebno? Nasploh šoferske navade Slovencev niso ravno za zgled drugim.

Sicer pa je pokojni ata bil kar vešč računanja, čeprav nikoli ni hodil na kako srednjo šolo, kaj šele višjo ali visoko. Rad se je igral s števili in sposoben je bil marsikaj izračunati tudi na pamet. Ko je brat dobil prvo plačo, je malo pomislil in povedal, da bo treba do pokojnine delati še natanko 479 mesecev. Glede pokojninskega sistema pa je bil prepričan, da morajo za njegovo pokojnino delati vsaj trije. Zanj je bilo to zagotovo res: imel je namreč tri zaposlene sinove. Ko se je igral s desetiškimi števili, je opazil, da je razlika izbranega števila in števila, zapisanega v obratnem vrstnem redu števk, deljiva z 9. Na primer, število 1949, predelano na opisani način, da 9491. Razlika večjega in manjšega pa je $9491 - 1949 = 7542$ in res se deljenje števila 7542 z 9 izide brez ostanka: $7542/9 = 838$. Ni si pa znal razložiti, zakaj je tako. Matematika pa seveda zanima, ali ima vsako naravno število to lastnost. Šele na gimnaziji sem bil sposoben to lastnost tudi sam dokazati. Nič čudnega! Saj so v normalnih okoliščinah tudi češnje v Planini bile zrele šele, ko je bil za to pravi čas.

Imejmo torej naravno število N, zapisano desetiško s števkami

$$a_m, a_{m-1}, \ldots, a_1, a_0.$$

Vse so med vključno 0 in vključno 9. To pomeni:

$$N = (a_m\, a_{m-1}\, \ldots a_1\, a_0)_{10} = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

število N', zapisano v obratnem vrstnem redu števk, je

$$N' = (a_0\, a_1\, \ldots a_{m-1}\, a_m)_{10} = a_0 10^m + a_1 10^{m-1} + \ldots + a_{m-1} 10 + a_m.$$

Njuna razlika pa je:

$$N' - N = a_0(10^m - 1) + a_1(10^{m-1} - 10) + \ldots + a_{m-1}(10 - 10^m) + a_m(1 - 10^m).$$

V oklepajih nastopajo števila oblike

$$c(m, r) = 10^r - 10^{m-r}\,,\ 0 \leq r \leq m\,,$$

ki pa so vsa deljiva z 9, kar takoj vidimo iz zapisa:

$$c(m, r) = (10^r - 1) - (10^{m-r} - 1).$$

Vsako število oblike $10^k - 1$, kjer je k nenegativno celo število, je seveda deljivo z 9. Za $k = 0$ je to več kot očitno, za $k \geq 1$ pa velja:

$$10^k - 1 = (10 - 1)(10^{k-1} + 10^{k-2} + \ldots + 10 + 1) = 9p(k)\,,$$

kjer je $p(k)$ neko naravno število. Torej so vsa števila $c(m, r)$ tudi deljiva z 9 in s tem tudi $N' - N$.

Kot kaže, pa ata nikdar ni opazil, da je tudi razlika $N''-N$ vedno deljivo z 9, pri čemer število N'' dobimo in N s poljubno razporeditvijo ali permutacijo števk. To je spet zaradi tega, ker je število

$$10^r - 10^s = (10^r - 1) - (10^s - 1)\,,$$

ki se pojavi v desetiškem zapisu razlike $N'' - N$, vedno deljivo z 9.

Že v prvem letniku gimnazije smo spoznali zapis števil s poljubno osnovo b, kjer je b naravno število in $b \geq 2$:

$$N = (a_n\,a_{n-1}\,\ldots a_1\,a_0)_b = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \ldots + a_1 b + a_0.$$

Števke v sistemu ali sestavu z osnovo b so potem med vključno 0 in $b-1$. Zato imamo v nam vsem znanem in dobro udomačenem desetiškem sistemu deset števk: 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Vedno se niso zapisovale tako. Arabci, ki so hitro spoznali prednost desetiškega zapisa števil pred rimskimi in grškimi, so jih iz Indije razširili na Zahod. Arabske števke so: ٩ ٨ ٧ ٦ ٥ ٤ ٣ ٢ ١ ٠. Ker Arabci pišejo besede in stavke z desne na levo, je navedene števke treba tudi brati temu ustrezno. Pač pa večmestna števila pišejo tako kot mi: 1949 je ١٩٤٩.

Poudarjeno je bilo, da je binarni ali dvojiški številski sistem, tisti z osnovo $b = 2$, zelo enostaven, saj ima le dve števki, 0 in 1, zelo pomemben v računalništvu. Ni mi znano, kdo je to vpeljal v učni načrt, ki se sicer neprestano nekaj spreminja. Res pa je, da je takrat računalništvo že bilo na pohodu in je potrebovalo dvojiški, osmiški in šestnajstiški zapis, toda za marsikoga je bilo v prvem letniku vse to prava pokora. Kasneje sem opazil, da so se učbeniki računalništva vsevprek začenjali s številskimi sistemi, katerim so posvečali kar nekam veliko strani. Res pa je, da je število $N' - N$, ki ga dobimo s postopkom, ki je opisan zgoraj, toda v številskem sestavu z osnovo b, vedno deljivo z $b-1$.

Na svoja stara leta je ata nabavil elektromotor, s katerim smo nato doma mlatili žito, rezali slamo, žagali drva in mleli sadje za mošt in žganje. Slamoreznica je imela velik litoželezni vztrajnik in prek tega je elektromotor z jermenom poganjal stroj. Takrat sem ravno toliko znal matematike, da sem si drznil očeta, ki mi je dolga leta dajal jesti in piti, vprašati koliko meri obseg tistega vztrajnika. Rekel je, da je treba njegov premer pomnožiti s številom 3.14. Malo kasneje sem izvedel, da je to znamenito število π, razmerje med obsegom in premerom kroga in da se ploščina kroga tudi izraža z njim. Dostikrat smo računali kar z racionalnim približkom 22/7, ki ga je že davno, davno poznal Arhimed[39]. Odkril je celo, da leži število π med približkoma 223/71 in 22/7. Niso pa vsi poznali tako dobrega približka. Hebrejci so vzeli za π kar 3, kar sledi iz citata v Prvi knjigi kraljev, 7, 23:

> *Naredil je tudi ulito morje, deset komolcev od roba do roba, okroglo okoli, pet komolcev visoko; in vrvica tridesetih komolcev ga je kroginkrog ovijala.*
>
> Καὶ ἐποίησε τὴν θάλασσαν δέκα ἐν πήχει ἀπὸ τοῦ χείλους αὐτῆς ἕως τοῦ χείλους αὐτῆς, στρογγύλον κύκλῳ τὸ αὐτό· πέντε ἐν πήχει τὸ ὕψος αὐτῆς, καὶ συνηγμένοι τριάκοντα ἐν πήχει ἐκύκλουν αὐτήν.

Iznašli pa so še boljše racionalne približke za π, na primer 355/113, ki mu pravimo Metiusov približek. Ni se ga težko zapomniti: sestavljajo ga lihe števke $1, 1, 3, 3, 5, 5$: v imenovalcu $1, 1, 3$, v števcu pa $3, 5, 5$.

Naslednja reč, ki je ne bom nikoli pozabil, je mešanje žganja. Tega smo doma pri Očancu kar precej nakuhali, čeprav smo ga zelo malo sami popili: iz tepk, jabolk in drugega sadja. Bilo je od posode do posode različno močno in treba ga je bilo uravnati (v narečju *uglihati*) za normalno uporabo, to je na idealnih 21 gradov. Oče je znal zmešati močnejše in šibkejše žganje ter vodo, tako da je dobljena mešanica imela 21 gradov. Skrivnost je v formuli

$$p = \frac{p_1 V_1 + p_2 V_2 + \ldots + p_n V_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n},$$

kjer je p *moč* mešanice, ko zmešamo V_1 litrov žganja *moči* p_1, V_2 litrov žganja *moči* p_2 in tako dalje. Za vodo je treba vzeti *moč* 0. Če na primer zmešamo

[39] Arhimed iz Sirakuz (287–212 pr. n. št.) – starogrški matematik in fizik.

5 litrov žganja s 30 gradi in 15 litrov s 25 gradi, dobimo pijačo, ki ima

$$p = \frac{30 \cdot 5 + 25 \cdot 15}{20} = 26.25$$

gradov, kar je preveč. Da bi ugotovili, koliko vode je potrebno doliti, da dobimo pijačo z 21 gradi, je treba rešiti enačbo

$$\frac{30 \cdot 5 + 25 \cdot 15 + 0 \cdot V}{5 + 15 + V} = 21$$

oziroma enačbo $525 = 21(20 + V)$. Njena rešitev je $V = 5$ litrov. Ali je ata uganil ali izračunal, ugotovil je, da mora doliti 5 litrov vode, da bo mešanica ravno pravšnja.

V šoli smo morali vedno odgovor povedati v stavku: da iz 5 litrov žganja s 30 gradi in 15 litrov s 25 gradi dobimo z mešanjem pijačo z 21 gradi, moramo doliti 5 litrov vode. Lepo navado, odgovarjati na vprašanja v stavku, so po šolah opustili v teku neštetih šolskih reform. Sčasoma so šolarji začeli odgovore pisati samo še na za to namenjena prazna mesta v testih. Videti je, da so šolske reforme namenjene temu, da bi bilo šolarjem čim laže. Morda bi bilo dobro, da avtorji reform ne bi smeli imeti v sorodstvu nobenih šolarjev, kajti priredili jih bodo zagotovo tako, da bo *naš prišel skozi* oziroma *naša prišla skozi* z najmanjšim trudom. Nekakšen učiteljski celibat pod rajnko Avstrijo je nemara imel svoj smisel.

Na kmetih so bili v uporabi alkoholometri, rekli so jim kar *vage*, na katerih je en grad pomenil 2/5 procenta alkohola. Idealno močno žganje z 21 gradi je torej vsebovalo 52.5 procenta alkohola. Merili (v narečju *vagali*) pa so pri žganjekuhi bolj približno, saj običajno ni bilo časa, da bi to izvajali pri normalni temperaturi. Kuhanje žganja je navadno potekalo v pozni jeseni ali pozimi, ko ni bilo drugega važnejšega dela. Pozitivna plat žganjekuhe je bila v tem, da so ljudje pobrali vse sadje, tako da ni gnilo že na drevju ali po tleh, kot vidimo v današnjih časih, pa tudi pri hiši je bilo nekaj domačega alkohola v medicinske namene. Slabo pa je bilo seveda zato, da so se nekateri ljudje z domačim žganjem preveč in prepogosto opijali, tako da je stvar postala moralni in socialni problem.

Nekateri alkoholometri so imeli skalo v odstotkih. Če se držimo istih enot in so skale med seboj afino linearno izražajo, dobimo prav tako pravilen rezultat. Denimo, da merimo vsebnost alkohola p oziroma q v gradih oziroma v nekih drugih enotah, pri čemer je $p = Aq + B$, kjer sta $A \neq 0$ in B znani konstanti. Iz zgornje formule dobimo

$$Aq + B = \frac{(Aq_1 + B)V_1 + (Aq_2 + B)V_2 + \ldots + (Aq_n + B)V_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}.$$

Po preureditvi števca imamo najprej

$$Aq + B = \frac{A(q_1V_1 + q_2V_2 + \ldots + q_nV_n) + B(V_1 + V_2 + \ldots + V_n)}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n},$$

nato pa

$$Aq + B = A\frac{q_1V_1 + q_2V_2 + \ldots + q_nV_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n} + B$$

in po poenostavitvi nazadnje

$$q = \frac{q_1V_1 + q_2V_2 + \ldots + q_nV_n}{V_1 + V_2 + \ldots + V_n}.$$

Isti princip velja tudi za mešanje voda s temperaturami med lediščem in vreliščem, če se ne oziramo na izhlapevanje in toplotne izgube, količine voda pa naj bodo njihove mase. Zmesno temperaturo dobimo v isti enoti kot so bile izmerjene posamezne vode pred mešanjem. Torej lahko uporabljamo Celzijeve, Kelvinove ali Fahrenheitove stopinje, saj se med seboj izražajo afino linearno. Enako bi izračunali ceno c mešanice m_1 kg tepk po c_1 € in m_2 kg tepk po c_2 €:

$$c = \frac{c_1m_1 + c_2m_2}{m_1 + m_2}.$$

Po vsem tem se spet vrnimo na mojo šolsko pot. Mrtviški Danilo, žal že pokojni, je bila prva živa duša, ki sem jo tistega dne sploh srečal, ko sem se šel to hojo po štiridesetih letih. On me je tudi na kavo povabil, tako da sem celo spoznal njegovo družino, pa še polomljeno pohodno palico mi je spretno popravil. Hvala! Res pa je tudi, da nisem srečal vse do Cerknega nikogar več. V Mrtvici oziroma Pri Šoštarju je govora zato, ker je tam Šemčev oziroma Mrtviški Jakob izdeloval nove čevlje po meri, pa tudi stare pokrpal ali potempljal. Ko so pri Ivanu ob cesti zaprli gostilno, so pa kakšno nedeljo dedci kar Pri Šoštarju vrgli karte. Med njimi se je znašel v mojem času še kakšen veteran prve svetovne vojne. Rad je povedal, kako je bilo na fronti v Galiciji in Rusiji ali na kakšnem drugem bojišču. Mladi pa so jim radi oporekali, češ da so Avstro-Ogrsko izgubili zaradi ruma. Menda so ga jim dajali na frontah za večji pogum. Kljub temu pa so naši dedje Avstrijo zelo čislali. Če si jih vprašal, kdaj je bilo bolje, pod Avstrijo, Italijo ali Jugoslavijo, je bil ogovor jasen: "Kakšna Italija neki, kakšna Jugoslavija! Rajnka Avstrija, Franc Jožef!"

Takrat, 23. svečana leta 2002, ko sem obnovil svojo nekdanjo šolsko pot, se je že ravno toliko ogrelo, da so prve spomladanske cvetlice že prilezle iz zemlje. Martinčkov, kuščarjev, slepcev, gadov, gožev, modrasov in drugih plazilcev pa tisti dan še ni bilo. Pač pa mi je dobro ostal v spominu Teškanov kozolec, pa ne zaradi vedrenja v njem, ampak zaradi rdečih gozdnih jagod. Ob poti so nekega dne ravno zorele jagode in v šolo grede sem si jih zjutraj malo privoščil, kar je kajpak zahtevalo svoj čas, tako sem se vanje zatopil. Malo se mi je le čudno zdelo, da takrat nikjer ni bilo nikogar, ki bi ravno šel v šolo. Jagode so me popolnoma premamile, tako da sem prišel v svoj razred približno ob devetih, pouk pa se je začel že ob osmih. Pa nisem bil kriv za tako zamudo le jaz sam, doma je pač nekdo pozabil naviti uro in smo se tisti dan zjutraj orientirali bolj po soncu. Tudi sicer je doma služba točnega časa bila bolj površna. Radia nismo imeli, kaj šele televizije. Tako smo bili glede časa vezani na žepne in ročne ure, zvonjenje cerkvenih ur in sonce. To je vpila naša učiteljica Cinkova Vida nad mano izza katedra, drugi pa so se mi smejali, ker sem bil ves rdeč od jagod okoli ust. Sicer me je Cinkova Vida učila na osnovni šoli kar vsa prva štiri leta. Te jagode mi je večkrat očital sin, če sem ga kdaj okaral zaradi kake neumnosti. Cinkova Vida je slovela tudi po tem, da je v enem šolskem letu spremenila v trske kar precej lesenih ravnil, s katerimi je najbolj poredne vpričo sošolcev namlatila po zadnji plati ali kamor je pač padlo. Oblačkov Rado je bil pri tem kar spreten. Držala ga je in udrihala z evklidskim orodjem, on pa je svojo zadnjo plat spretno odmikal, tako da sta se kar zavrtela in je bilo videti, da se gresta pravi ples, podoben tangu ali angleškemu valčku. Žal nobena kronika ni zabeležila, ali sta se vrtela v pozitivni ali negativni matematični smeri, gledano s stropa učilnice. Od ravnila pa je na koncu ostalo bore malo, kajti od udarcev in uspešnih zadetkov je zacvetelo in se spremenilo v same trske, primerne za vžig ognja v peči ali štedilniku.

Pravzaprav sem bil vedno kar malo nevoščljiv Cerkljanom. Samo na Grintovec jim je treba priti, pa že vidijo pol sveta: Cegunco in Sveto Ano, Čeplez, Cerkno, prazno parcelo, kjer je včasih stal Betin hlev, pa tudi mizarnico, kjer so izdelovali iz lesa različne stvari, največ omare, in kar je okoli nje in tako naprej. Grintovec ima ob hudem deževju tudi svoje pasti. Voda kar vre na dan v premnogih izvirih. Vse je blatno in spolzko. Tako se mi je zgodilo, da mi je tista že pokojna sestra, ki je svoj čas stanovala v Klapaču, potem ko se je bila poročila na Opčine pri Trstu, kupila kavbojke, ki jih je takrat nosil malokdo. Na poti v šolo pa padem ravno na Grintovcu v blato z novimi kavbojkami vred. Blaten sem bil do vratu. Pri Orlu sem se nekoliko opral in z mokrimi hlačami na sebi presedel v šoli celo dopoldne. Takrat še nihče ni vedel, da bolj ko imaš oguljene in izrabljene kavbojke, večji frajer si. Če olikano greš po poti, ne pa po bližnjicah po travi, kjer te lahko kdo še preganja, prideš do Dreškovega in Orlovega kozolca, ki sta prva, če greš po stari poti iz Cerknega proti Planini. Če smo se bali iti mimo Teškanove hiše, ker smo malo prej više gori hodili po njihovi travi, smo jo mahnili kar po stezi od Orlovega kozolca do Orlove hiše, kjer pa morda Nencetu to ni bilo ravno všeč. No, pri Orlu smo si pri vodi tudi lahko, kot je bilo že povedano, oprali in očistili čevlje, če je bilo treba. Zdaj pred Orlom korita ni več. Potem je bilo treba iti le še za Landorjem in Hramšarjem, mimo Dreška in Trčka, pa si bil že pri Gantarju in Jamšku.

Takrat še nismo vedeli in razumeli, zakaj je tista marmornata plošča vzidana na Jamškovi hiši, z napisom v starinski slovenščini, nekemu hudo učenemu Francu Močniku v čast. Tam je na ovinku stalo kamnito Trčkovo korito, kjer si je človek lahko tudi očistil svoje blatne ali prašne čevlje, če je to pozabil narediti pri Orlovem koritu. Ali pa se je tam odžejal. Korito še obstaja in morebiti ga bi bilo dobro postaviti na prvotno mesto. Hišno ime *Pri Orlu* je menda nastalo v času kratkotrajne francoske okupacije teh krajev na začetki 19. stoletja. Druga beseda, ki so jo zapustili Francozi v Cerknem, je ime soseske *Sigade* na drugem koncu Cerknega, v predelu, kjer so doma Bolantovi. Sigade imajo baje izvor v francoskih besedah *Voici le garde* ali nekaj takega, kar pomeni *Tu je straža.* Verjetno so v Sigadah Francozi namestili kašno oboroženo enoto. V Orlovi hiši je bil neke vrste urad in nad vhodom je bil grb s francoskim orlom in cesarskimi insignijami, na katere se Cerkljani najbrž niso spoznali, orel pa jim je bil seveda domač, saj ta žival rada pobaše kako pišče, kuro ali celo petelina. Podoba orla ali leva v grbih in na zastavah je zelo priljubljena. Orel, kralj ptic, vladar višav, je že od najstarejših časov simbol velikodušnosti, moči, božanske sile, poguma in pravičnosti. Babiloncem, Perzijcem, Grkom, Rimljanom in vsem, ki so se imeli za njihove dediče, je orel predstavljal božanstvo, oblast in moč.

Hramšarjevi se niso v očeh mladine, ki je hodila gor in dol čez Grintovec, proslavili le s preganjanjem po njihovi travi hodečih, ampak tudi po čem drugem. Hramšarjev Franc je dolga leta cerkljanskim laufarjem rezljal lipove maske, ki jim pravimo larfe. Njegova lesena naličja so ponesla slavo in čast cerkljanske laufarije daleč po svetu. Franc se je seveda postaral in umrl. Čeprav so bili podani predlogi, da se mu podeli občinsko, to je Bevkovo nagrado za izvrstno opravljeno delo, jo je bil deležen šele posmrtno, učeno povedano *posthumno.* Njegov stric Andrej pa je kot nekdanji zvesti avstro-ogrski vojak padel italijanskim oblastem v nemilost, ker so baje pri njem našli neke njim sumljive zemljevide. In so ga strpali v zapor, od koder pa jim je ušel čez hribe in doline, smuknil čez rapalsko mejo in nekaj časa delal v Ljubljani in Slovenj Gradcu, od koder se je preselil v ZDA, kjer je imel sorodnike. V ZDA je pridno skrbel za kulturno življenje tamkajšnjih slovenskih izseljencev, pridno študiral in opravil kar štiri doktorate, tako da bi pred njegovim imenom lahko zapisali ddddr, matematično pa d^4r, kakor pri četrtem diferencialu funkcije v matematični analizi. Med drugo svetovno vojno je kot dober psiholog in poliglot deloval v ameriških obveščevalnih službah, s čimer se je zameril jugoslovanskim oblastem, ki mu niso dovolile niti obiska sorodnikov v Cerknem, tako da so se občasno sestajali nekje onkraj državne meje. V šoli nam je Hramšarjevega Andreja večkrat bežno omenila Cinkova Vida. Morda se niti ni zavedala, da pri oblasteh ni dobro zapisan.

Beseda *laufar* je nemška izposojenka. *Der Läufer* pomeni *tekač*, glagol *laufen* pa *teči*. Profesorica Vestova, ki nas je na gimnaziji v Idriji učila nemščino, je navadno govorila v razredu po nemško, razlagala pa tudi. Pri samostalnikih je bilo treba na njeno vprašanje "Wie lauten die Formen?", kar pomeni "Kako se glasijo oblike?", v hipu vedeti in zrecitirati rodilnik ednine in imenovalnik množine: *des Läufers, die Läufer*. Pri glagolih v nedoločniku pa je pričakovala obliko za prvo in drugo osebo ednine v sedanjem času v povednem naklonu, nato pa obliko v prvi osebi ednine nedovršnega in dovršnega preteklega časa v povednem naklonu: *ich laufe, du läufst, ich lief, ich bin gelaufen*. Bog naj se usmili grešnika, ki je rekel *ich habe gelaufen*, kajti za tvorbo dovršnega preteklega časa glagolov premikanja in še nekaterih drugih se uporablja glagol *sein, biti*, v večini primerov pa glagol *haben, imeti*. Zato so laufarji, ker nekateri od njih, ko se pojavijo na vasi, neprenehoma tekajo naokrog, dobili tako ime.

Orlovi so se nekega dne preselili v novo hišo na Plužnjah. To je predel Cerknega nad sedanjo osnovno šolo. Nekoč so bile tam same njive, postopoma pa so jih pozidali s stanovanjskimi hišami, v glavnem na kredit. Zato je bil predel za nekaj časa preimenovan v *Pufkolonijo*. V staro Orlovo hišo v Strani, kakor se reče delu Cerknega pod Grintovcem, pa so prišli novi ljudje iz Novakov. Tem pa ni bilo prav nič všeč, da smo v šolo hodili po bližnjici od Orlovega kozolca do njihove hiše. Začel se je pravi boj *za staro pravdo*, kajti Nence nas ni tako hudo preganjal, zlasti pa ne z grožnjami, kaj šele z gorjačo. Dva odrasla mulca, nova prišleka, podpirana še s strani njune matere, sta postala ošabna do nas šolarjev in sta nas nekaj časa preganjala, zmerjala, tepla in maltretirala na vse viže. Hotela sta, da hodimo po poti točno mimo Teškana. Na srečo nas je v šolo kmalu začel prevažati avtobus, tako da smo se izognili Scili in Karibdi, grško Σκύλλα καὶ Χάρυβδις, v cerkljanski Strani.

Ko hodim mimo Orlovega kozolca, se vedno spomnim na to, da sem tukaj prvič od nekoga slišal, da je vsota notranjih kotov v vsakem trikotniku 180°. Seveda v evklidski geometriji, saj v osnovni šoli niti slišali nismo, da druge geometrije sploh obstajajo. Sošolec Franko mi je grede iz šole domov ravno pri Orlovem kozolcu pripovedoval, da so v paralelki, kjer so bili pri matematiki kako uro ali dve naprej kot mi, obravnavali trikotnik in da jim je učitelj Pagon[40] dokazal omenjeno lastnost notranjih trikotnikovih kotov. Nam je nekaj ur matematike odpadlo, morda zaradi praznika ali športnega dne, toda bili smo že naslednji dan prav tako počaščeni, da smo *ex cathedra* izvedeli, kako in kaj je s temi koti v trikotniku. Seveda nismo ostali le pri trikotniku, najenostavnejšem ravninskem liku; sledili so večkotniki, pravilni in nepravilni, konveksni in konkavni.

Kdaj je leča ali zrcalo *konkavno*, se nekateri nikakor niso uspeli zapomniti. Profesorica Draga Urbasova[41] na idrijski gimnaziji je bila polna takih in drugačnih mnemonikov. "V konkavno zrcalo lahko naliješ kavo", je pojasnjevala, "v konveksno pa ne." Po tej razlagi je marsikdo vedel, kako je prav. Nekateri pravijo, da je beseda *kava* arabska, izhajala naj bi iz besede قهوة. Kava je postala obvezna pijača tudi na fakultetah: poživilo proti zaspanosti

[40]Maks Pagon (1926–1987) – cerkljanski učitelj matematike in fizike.

[41]Draga Urbas Keravica (1934–2016) – profesorica biologije in kemije na idrijski gimnaziji, kulturna delavka.

in priložnost, da zdaj povabi ta ali oni nekoga na kavo, da lahko potem kakšno žaltavo rečeta. Privatniki pa že poskrbijo, da zraste v bližini kakšen bife, kjer se dobi boljša ali slabša kava, kava s smetano, kava z mlekom, kava kar tako, kratka kava, dvojna kava pa še kakšna. Če ni druge možnosti, pa postavijo avtomate za kavo po stavbi. S tremi, štirimi kavami na dan se kar dobro shaja. Vsake toliko časa se pojavi mnenje, da pitje kave škoduje, čez čas pa ravno nasprotno. Najbolje pa je, da se kavo pije do neke pametne mere, to se pravi, pije naj se jo zmerno, brez pretiravanja.

Prav tako se vsako toliko časa pojavi mnenje, da naj bi učitelji bili na šoli štirideset ur tedensko, tako kot vsi drugi delavci, to je osem ur vsak dan. Priprave doma, popravljanje kontrolnih in drugih nalog, izdelava učil, izpolnjevanje slabo sestavljenih obrazcev, nabiranje vzorcev v naravi, sedenje na redovalnih konferencah, roditeljskih sestankih in drugo trdovratne birokrate ne zanima. Ti so nekoč sami hodili v šolo in sem ter tja na roditeljske sestanke zaradi svojih po možnosti razvajenih otrok, in že menijo, da se na šolo spoznajo bolje kot vsi učiteljski zbori skupaj. Morda jim šola ni šla kaj prida dobro in so same sebe prepričali, da učitelji premalo delajo in jih je treba prevzgojiti in jih še bolj obremeniti. Birokrata učiteljske težave ne zanimajo. Tako kot se je drl kaplar JLA, tudi JHA, na vojaka, ki je nekaj klobasal in se opravičeval, z besedami: "Ово ме не интересује." Da človek sploh zdrži 8 ur v službi, kava še kako prav pride.

Tudi na univerzah so že davno bile tendence, da so profesorji kot vsi ostali tam po osem ur dnevno. Poleg predavanj in priprav nanje naj bi enostavno tam bili, pa četudi ne bi delali nič pametnega in hodili le na kavo vsake toliko časa. Tudi zamisli o registrirnih urah imajo že dolgo brado. Večinoma so jih res uvedli. Kjer se to še ni zgodilo, gre nekaterim strašno v nos. Sicer se pa ni bati, sistem že poskrbi, da profesorji niso brez dela. Če drugega ne, se vsake toliko časa nekdo izmisli nove obrazce, ki jih je treba izpolnjevati. Očitno so za nekatere bolj važni statuti, pravilniki, požarni red, sistematski zdravniški pregledi, sestanki za to in ono kakor pa kvaliteta znanja, ki ga naj študent pridobi med študijem.

Žalostno je, da tudi nekateri visoki državni uradniki, ki so se rekrutirali celo iz učiteljskih oziroma profesorskih vrst, hote ali nehote s svojim govorjenjem in obnašanjem umetno ustvarjajo med ljudmi negativno naravnanost proti učiteljem in profesorjem, celo univerzam, čeprav so nekaterim ravno slednje dale akademski naslov, s katerim se šopirijo kot petelini na gnoju. Ob tem se nehote spomnim na Cankarjevo črtico *Mater je zatajil*. Saj je univerza *mati*, namreč naša *alma mater*, po latinsko *mati rednica*, ki daje duhovno hrano.

Pojdimo nazaj na vrline naših ljudi glede izmišljevanja novih imen, ne pa obrazcev, ki so seveda v določenih situacijah nujno potrebni. Ljudje se tudi novim mestnim predelom, ne le sokrajanom, hitro izmislijo kakšno hudomušno ime. V Spodnji Idriji, *Pri Fari*, ker je bila tam prva *fara* v tistem koncu, nekemu naselju rečejo *Na Koreji*. Ko je izbruhnila po drugi svetovni vojni korejska vojna, ki se uradno nikoli ni končala, je v Spodnji Idriji nastalo novo blokovsko naselje in baje so se ženske tam ravno tiste čase pogosto prepirale. Soseska je hitro dobila ustrezno aktualno ime, ki je ostalo vse do danes, tako kot so prebivalci Spodnje Idrije še vedno Prifarci.

Grintovec je zanimiva vzpetina med dolino Oresovke in Cerknice. Kdorkoli se povzpne nanj, kot smo že nekje povedali, vidi lep kos Cerknega. Kakor na dlani so mu hribi Gradišče, kjer naj bi bil nekoč celo grad, Homec, za katerim se skriva Miklavžev turn, Lamk, za katerim se gnetejo domačije vasi Zakriž, Veliki Kovk, ki za seboj zastira Ravne, in Lajše, na starih zemljevidih Veliki vrh. Malo dlje pa se ponosno dvigajo, omenimo le nekatere višje vrhove: Porezen, Črni vrh in Kojca.

Potem smo bezljali le še čez stari in novi trg v Cerknem ter zavili čez Andrejonov most prek Cerknice. Potrebno je bilo opraviti le še nekaj korakov, pa se je že videl Tinčkov most prek Zapoške, pa tudi mogočno poslopje, kjer je bila nekoč kinodvorana, sedaj pa sta notri županstvo občine Cerkno in pošta, in poslopje nove sodnije, kjer je bila po drugi svetovni vojni nižja gimnazija, nato nekaj razredov osemletke, sedaj pa sta notri glasbena šola in muzej. V to stavbo sem natanko pred štiridesetimi leti hodil v šesti razred, razrednik mi je bil pa Viktor Jereb, po domače Masornikov, svoj čas strogi šolski nadzornik. Šola je takrat imela lepe, negovane vrbe žalujke ob dvorišču, sedaj pa je tam vse preurejeno.

V obratni smeri, iz Cerknega v Planino, pa so korita služila drugemu namenu: ob vročini smo se ob njih napili vode kakor kamele, da smo potem zdržali vse do doma. Živo kamelo je od nas le malokdo že videl, večina jih je to žival, puščavsko ladjo, videla samo na slikah v kakšni knjigi ali pa pri jaslicah ob božičnih praznikih. Kozolci pa so prav tako prišli prav, da smo v njih v hudo deževnih urah malo povedrili na poti domov. Lahko bi rekli, da smo se v dežju selili iz enega kozolca v drugega, ko je dež vsaj malo pojenjal.

Ta pot, od Očanca navzdol v Cerkno, se je dala pri normalnih pogojih prehoditi prej kot v pol ure, nazaj gor pa se je običajno zavlekla tudi na eno uro, če smo se pa kaj obirali, kar je bilo del našega šolanja in odraščanja, pa po potrebi še več. Je pa res, da je bilo treba nesti svoje kosti skupaj s prtljago od 324 metrov nad morjem v Cerknem na 700 metrov doma. Pomislite, koliko so se namučili šele oni, ki so imeli še dlje v šolo. Ta pot, iz Cerknega v Planino, je pela svojo pesem še cela štiri leta, ko sem hodil na gimnazijo v Idrijo. Za nazaj domov namreč ni bilo avtobusa iz Cerknega za Kladje. Pa tudi dolgotrajno pešačenje ni bilo tako slabo, saj sem od take telovadbe imel dobro razvita pljuča, da malokdo tako. Lahko bi me profesor Leskovec[42] oprostil zame popolnoma odvečne telovadbe na gimnaziji! Toda, če so telovadili oni, zakaj ne bi telovadil še Očančev Marko, so menili vsi enoglasno. Saj je zdrav in krepak kmečki fant.

Svojo staro šolsko pot sem zopet prehodil ob sv. Polikarpu, dne 23. svečana leta 2002 in med tem naredil precej fotografij nekoč dragih mi krajev. Polikarp je pri nas zelo redko moško ime. Morda je bilo nekoč bolj razširjeno, saj ga v domači literaturi tu in tam pa le srečamo. Morda je

[42] Boris Leskovec, nekdanji profesor telesne vzgoje na idrijski gimnaziji.

najbolj znan Polikarp Khallan, tudi Khallain, v Tavčarjevi[43] Visoški kroniki. Ime *Polikarp* je v bistvu lepo, le da ga pri nas malokdo mara. Nastalo je iz grške besede πολύς, kar pomeni *mnog, mnogo*, in besede καρπός, kar pomeni *sad, plod*. Sv. Polikarp je bil škof v Smirni, grško Σμύρνη, in je tam leta 155 ali 156 umrl mučeniške smrti. Smirna ob maloazijski, turški obali Egejskega morja, je danes Izmir, natančneje İzmir po turško. Smirna je bolj znana po odličnih preprogah, toda ne po preprogi Sierpińskega[44], kakršno poznamo v matematiki. Na Polikarpa se morda popotnik, ki je vsaj enkrat v življenju prebral Visoško kroniko, spomni, ko se vozi po Poljanski dolini mimo dvorca Visoko na desnem bregu Poljanske Sore.

V Cerkno se je dalo priti še na kup drugih načinov. Čepležani so hodili tudi skozi Andrejonov in Dreškov Korošek. Če jih niso preganjali Teškanovi in drugi lastniki zemlje, so se lahko odžejali pri njihovemu vodnemu zajetju, sicer pa so prišli do pitne vode šele pri čepleškemu perilniku. Spotoma so se lahko tudi na glavo postavljali, če jim je to bilo v veselje. Planinci pa so jo lahko mahnili tudi skozi Stiske in Rajdo, to se pravi skozi Podlivec. Obenem so lahko eni in drugi nesli še žito v mlin, bodisi V Stiske ali pa Pod Grivo. Navsezadnje si pa lahko šel tudi po cesti naokoli, morda te je pa še kakšen šofer pobral, da ti ni bilo treba pešačiti navkreber.

V Stiskah, kjer sonce s svojo toplino in svetlobo ni kaj prida radodarno, zlasti ne v mrzlih zimskih mesecih, sta obratovala mlin z dvema mlinskima kamnoma in kovačija. Seveda pa je tamkajšnja senčna lega prišla še kako prav ob poletni vročini. V Stiskah so se vse naprave vrtele zahvaljujoč vodni energiji potoka Oresovka. Nekaj deset metrov od mlina proti izviru Oresovke je bil jez, od koder je bila speljana voda na mlinska kolesa. Nekega leta so že junija meseca jez očistili nanešenega peska in nesnage in ga obnovili, tako da se je dalo z lesenim čolničkom, ki je bil pri hiši, voziti po njem. Nekega dne, ko je bilo že pozno popoldne, sem malo zaveslal po jezu in si, nevešč

[43] Ivan Tavčar (1851–1923) – slovenski pisatelj in politik.
[44] Wacław Sierpiński (1882–1969) – poljski matematik.)

tega opravila, prislužil neprostovoljno kopel. Domov sem seveda prišel moker kakor cucek. Na srečo se nisem prehladil, kar ne bi bilo lepo. Naslednji dan smo namreč imeli šolski izlet v Postojnsko jamo in Portorož. Nisem si hotel privoščiti sramote, da ne bi prvič v življenju videl morja skupaj s svojimi sošolci. Izlet smo opravili s tovornjakom, na katerega je Čerinov Janez, takrat še eden redkih šoferjev v Cerknem, namestil klopi in ponjavo.

Življenje v Stiskah ni bilo nikoli rožnato. Poleg garanja v mlinu in kovačiji so Stiskarjevi obdelovali še nekaj zemlje, ki je večinoma na kar strmem svetu. Nekoč, ko so imele zasnubljene ženske, morda bodoče neveste, še navado, da so pred poroko prišle na ogled posestva svojega snubca, morda celo bodočega moža, je prišla ena v Stiske. Ni se še dobro razgledala, pa je že izjavila: "Vidim, da tukaj niso samo stiske, ampak tudi križi in težave." O tem, kako je bilo po tem dogodku z besedno igro, pa ustno izročilo modro molči.

Je pa v Stiskah nekaj, s čimer se ne more pohvaliti vsaka hiša. Stiskarjeva nosi številko 1, kar marsikoga spomni na 1. Peanov aksiom: 1 je naravno število. Ta aksiom skupaj z ostalimi štirimi Peanovimi aksiomi popolnoma opisuje naravna števila. Rajdarska hiša nosi številko 2 in je v tem smislu, matematično povedano, neposredni naslednik Stisk. Prvi dve planinski hiši sta bili v času mojega šolanja v Cerknem in Idriji popolnoma ločeni od vaškega jedra Planine. Sedaj je nekoliko drugače. Na Rajdi je zraslo manjše naselje, od katerega ni daleč ne v Cerkno ne v središče Planine. Peš le malokdo hodi, večina se jih vozi po cesti bodisi navzgor skozi Čeplez ali pa navzdol skozi Podlivec v Cerkno.

Planinske hišne številke so v moji domišljiji odigrale pomembno vlogo. Če mi je bilo treba kaj delati, kar je bilo oštevilčeno ali pa bi se dalo posamezne faze dela označiti s številkami, sem si ob tem mislil na primer takole: 34 – sem že pri Svetiku, 35 – dosegel sem Očanca, 36 – grem skozi Zašurkovico (hiše tam že davno ni več), 37 – dospel sem k babici Pri Cigaletu. Številka 38 je bila ob cesti Cerkno–Kladje, na nekdanji rudniški hiši, kamor se je vselil Vinko Eržen. Številka 39 pa je bila pritrjena na Lojzetovo hišo na Platu.

Tukaj pa je bilo planinskih hišnih številk za tiste čase konec. Kasneje, proti koncu drugega tisočletja, so začeli dodajati nove.

Žal so planinske hišne številke trenutno razporejene nelogično: številke nekaterih hiš v razvalinah nad Planino so sedaj pod Planino, naravni vrstni red gre malo sem, malo tja, malo gor, malo dol, samo v vaškem jedru okoli cerkve sv. Janeza Krstnika potekajo še nekako po vrsti. Nekatere hišne številke so opremljene z nekakšnimi indeksi, na primer 2/A ali 2B in podobno. Rešitev zmede bi bila zelo enostavna, če bi pravi čas nekdo hiše oštevilčil z mnogokratniki števila 5, 10 ali pa 100, če je kazalo, da se bo kraj hitro širil. Potem bi bilo dovolj številk za nove zgradbe in red bi bil večji.

Rajdarski so imeli, tako kot večina drugih družin, razmetane kose posestva okoli Planine. Eno od senožeti so imeli blizu Očanca, tako da smo morali, če smo hoteli hoditi in voziti v svoje Rupe in nazaj, prečkati njihov svet. S tem ni bilo po dogovoru nobenih težav. Zato smo se z Rajdarskimi pogosto srečevali v času košnje, ko so pokosili, posušili in pospravili seno. Včasih jim je vreme tudi ponagajalo in so našli zavetje v našem kozolcu. Tam smo rekli marsikatero modro. Stari Rajdar je bil tudi uspešen čebelar. Ko sem bil še majhen, me je, ko so delali na svojem kosu zemlje, poslal domov po kos kruha, na katerega mi je potem s pravo čebelarsko ljubeznijo razmazal zajetno žlico najsladkejšega medu, ki ga je bil prinesel v senožet.

Ko sem bil v šestem razredu, se je v Cerkno za nekaj let priselila Sedlakova družina. Takrat so se na Cerkljanskem pojavili *taborniki* in Sedlakovi so bili zraven. Ne vem, ali so bili v Cerknem taborniki že prej ali ne. V razredu se je veliko govorilo o njih, kajti nekateri sošolci so postali taborniki. Občutek sem dobil, kakor da je njihova organizacija polvojaška reč in me ni nikdar resno zanimala, vanjo me pa tudi nikoli nihče ni vabil. Zakaj polvojaška? Nosili so posebne bluze z oznakami, posebne ovratne rute, ki so označevale njihov rang, oboroženi so bili z noži, dvigovali in spuščali so zastavo, postavljati so se morali v vrsto, pokoravati so se morali svojim voditeljem in morda še kaj. Hvale vredno pa je bilo, da so se taborniki naučili živeti z naravo in v njej tudi preživeti, če bi bila nuja. Se je pa zgodilo, da je skozi Cerkno šla Titova štafeta in v šoli smo bili določeni po trije in trije, da jo ponesemo po cesti mimo Dudlčkove hiše, ki je danes ni več, proti Želinu. Eden iz trojke naj bi nesel štafeto, ostala dva pa tekla z zastavo ob njem. Ko so rekli, da štafeto lahko nese samo tabornik, sem odtekel tistih nekaj metrov in sam pri sebi sklenil, da se s politiko ne bom nikoli ukvarjal, kar mi je do današnjih dni kar uspevalo. Pa ne da bi se hvalil, bil sem tiste čase med boljšimi učenci na cerkljanski osemletki. Taborniki so bili torej nekaj več.

Morda je še dobro, da Titove štafete nisem nosil, saj bi mi, neroden kakor sem vedno bil, verjetno padla iz rok in Cerkno bi bilo osramočeno. Za vstop v Partijo so me pa samo enkrat povprašali, in sicer v JLA, a sem se takrat izmotal, češ da pri svojih 27 letih, kolikor sem jih takrat štel, še nisem zrel in da si z mano ne bodo mogli kaj prida pomagati. Diplomiral sem pri svojih 24 letih, nato vpisal na ljubljanski univerzi magistrski študij. Ugotovil sem, da bi bilo dobro vsemu navkljub odslužiti leto dni v JLA, pa naj bo tako ali drugače, dokler je bil še živ maršal Tito. Vsi smo že od nekdaj slutili, da se bo z njegovim odhodom nekaj hudega zgodilo, čeprav tega naglas ni nihče govoril. Kasnejši dogodki so pokazali, da smo imeli prav. Bil sem pa med najstarejšimi v enoti, že poročen in z ženo ter malo dojenko doma. Po povabilu v Partijo in mojemu *ne* sem imel s tem mir. Že od nekdaj mi je presedalo, če me je kdo v kaj preveč silil. Še teti sem se upiral, ko me je silila jesti neko čudno jed, ki je nisem še nikoli videl, čeprav jo je na vse pretege hvalila, kako je dobra in jo pri tem sama jedla in dokazovala, da ni strupena.

Na gimnaziji v Idriji smo bili nekega dne posebej opozorjeni, da so prejšnji dan sprejeli v Partijo nekaj primernih sošolcev, ki so pravkar postali polnoletni. Hoteli so preostalim v razredu dopovedati, da se je treba do njih ustrezno vesti. Pa smo imeli spet nekoga, ki je bil nekaj več kot drugi! Ko pa je bilo treba kaj od koga prepisati, sem bil pa seveda vedno dober.

Biti član Partije je bila nekoč prednost, ki je seveda terjala tudi svoje obveznosti. Če sta se pojavila dva, ki sta sicer bila v vestnosti, delavnosti, znanju in sposobnostih skoraj enaka, je imel kjerkoli prednost tisti, ki je bil v Partiji. Tako je pač bilo in s tem smo se morali sprijazniti.

Beseda *tabornik* je izpeljana iz besede *tabor*, ki je verjetno zelo stara. Že v Bibliji je zapisana gora Tabor, hebrejsko הר תבור, Hor Tabor ali pa tudi Har Tavor, arabsko Jebel et Tur, جبل الطور, grško Ὄρος Θαβώρ, visoka 588 m v Galileji. Na tej gori je Kristus pokazal svojo božjo naravo nekaterim apostolom. Takrat so navzoči iz oblakov slišali glas Boga Očeta:

> *"Ta je moj ljubljeni Sin, nad katerim imam veselje; njega poslušajte!"*
>
> Οὗτός ἐστιν ὁ υἱός μου ὁ ἀγαπητός, ἐν ᾧ εὐδόκησα· αὐτοῦ ἀκούετε.
>
> *(Mt 17, 5)*

Temu dogodku v čast je 6. avgusta praznik *Jezusove spremenitve*, ki ga praznujejo katoličani in pravoslavni, vsak po svojem koledarju.

Tabor je ime krajev, gradov, mestnih predelov, športnih društev, kulturnih gibanj, političnih gibanj, časopisov in hotelov. Na Češkem je mesto Tábor, znano po *taboritih*, najzagrizenejših privržencih češkega verskega reformatorja Jana Husa (1369–1415). Avstrijsko mesto Steyr ima svoj Tabor, štajerski Weiz pa tudi. Madžari poznajo besedo *tábor*, kar pomeni tabor, kamp, Turki pa *tabur*, kar naj bi pomenil vojaško formacijo od 300 do 1300 vojakov, morda bataljon. Težko je kar tako na pamet reči, kako je do lastnega imena *Tabor* v posameznih primerih prišlo, bilo pa bi zanimivo vedeti. Celo v ZDA, kjer so za nove kraje pogosto uporabili kar stara evropska imena, se najde kakšen Tabor.

V Lokvi pri Sežani stoji mogočen stolp, ki mu pravijo *Tabor*, zgradili pa so ga proti koncu 15. stoletja za obrambo proti Turkom. Sedaj je v njem vojaški muzej, v katerem so zbrani iz obeh svetovnih vojn ostanki pušk, pištol, mitraljezov, nabojev, topov, granat, bomb, bajonetov, plinskih mask, uniform, kap, jedilnih priborov, čutaric, kartic, razglednic. V tej vasi se izplača stopiti v cerkev sv. Mihaela in si ogledati freske slikarja Toneta Kralja.

Posebnost teh fresk je v nabožnosti, ki je prepletena z motivi nasilja nad Primorci med obema svetovnima vojnama. V Lokvi, nedaleč od italijanske meje in znamenite kraške jame Vilenica, je bila doma moja pokojna svakinja, ki je neka druga svakinja nikoli ni dobro razumela, saj sta govorili vsaka v svojem narečju, pa še Kraševka je bila v govorjenju hitrejša, medtem ko smo Cerkljani praviloma nekoliko počasnejši v vrtenju jezika.

Vojaških muzejev je zraslo po Sloveniji kar precej. Na Primorskem je največji v Kobaridu, manjši pa so še v Lokvi, Idriji, Solkanu in Logatcu. Imeli smo ga tudi v Trebenčah, a je tragično propadel. Kobariškega še ni bilo, ko smo v osnovni šoli imeli izlet na Vršič in smo se ustavili tudi v Kobaridu. Pa še običajni muzeji imajo navadno svoj vojaški oddelek. Eksponate ni bilo težko najti, saj je na območju nekdanje soške fronte še danes veliko ostankov iz prve svetovne vojne. Precej so jih nabrali tudi zasebni zbiratelji, kakšno neeksplodirano bombo pa še vedno najdejo, čim začnejo na tem območju nekoliko globlje kopati v zemljo.

Slika 5: Domači kozolec.

3 Sončev mrk

V šolskem letu 1960/61 sem hodil v peti razred, ki ga je vodila Migučeva Angela, natančneje Angela Bevk. Takrat se je zgodilo, da je bil en dan po pustu, to se pravi na pepelnično sredo leta 1961 (15. februarja) Sončev mrk, ko je Luna po nekaterih ne posebno oddaljenih krajih navidezno popolnoma zakrila Sonce. Zakaj Sončev mrk, ne pa sončni mrk? V šoli smo govorili o sončnem mrku, toda vrli astronomi so kasneje spoznali, da je bilo vse dotakratno pisanje in govorjenje pravzaprav napačno, da je treba narediti čez to križ in da je treba odslej reči in pisati *Sončev mrk*. Že v znak spoštovanja bi morali res vedno pisati *Sonce*, ne pa *sonce*, kadar imamo v mislih tako pomembno nebesno telo, ki nas greje in bi brez njega najbrž niti ne obstajali. Ko bomo dobesedno navajali vire, bomo pisali tako, kot je zapisal avtor, lahko sonce, Sonce, sončni ali pa Sončev. Še na začetku 20. stoletja so uporabljali besedo *solnce*, s katero je kasneje opravil Čermelj[45], čeprav jo je leta 1930 sam še uporabljal v svojih astronomskih knjigah. Rusi so ohranili starinsko besedo солнце.

Po grško je mrk ἔκλειψις. Zato pa Angleži rečejo Sončevemu oziroma Luninemu mrku *solar eclipse* oziroma *lunar eclipse*. Pri Sončevem mrku pride Luna (☽) med Zemljo (⊕) in Sonce (⊙). Tak mrk se lahko zgodi le ob mlaju, ko za nas Zemljane Luna delno ali popolnoma zakrije Sonce. Pri Luninem mrku, ki se zgodi le ob polni luni, pride Zemlja med Sonce in Luno, Zemljina senca pa pokrije Luno. Sončevi mrki so lahko popolni, delni in kolobarjasti. Najbolj veličastni so popolni Sončevi mrki. Opazovati se dajo le s krajev na zelo ozkem pasu na Zemlji. Pa še takrat mora biti primerno vreme, da se sploh kaj vidi. Najraje ponagajajo oblaki. Marsikatera odprava, ki se poda na opazovanje Sončevega mrka kam daleč, se vrne razočarana ravno zaradi slabega vremena v krajih, kjer naj bi bil mrk viden..

Kaj takega, Sončev mrk na pepelnično sredo, se zgodi zelo redko. Sončevi

[45] Lavo Čermelj (1889–1980) s psevdonimom Šlibarjev Polde – slovenski fizik in publicist.

mrki so že tako in tako redki pojavi, pepelnična sreda pa je povezana s premakljivim praznikom velike noči in zato ni vsako leto na isti dan. Velja samo, da sledi prazniku norcev, pustnemu torku.

Da je mrk res bil na pepelnično sredo, lahko preveri vsak, če le hoče. Pri nas na Cerkljanskem mrk ni bil ravno popoln, je pa bil popoln v veliko krajih, tudi v Dalmaciji. Za tak dogodek so nas v šoli dobro strokovno in psihično pripravili, da si ne bi kdo mislil, da bo sodni dan ali pa tretja svetovna vojna, ko smo se komajda znebili ostankov druge. Več kot sto let pred tem je moral v Poljanah nad Škofjo Loko Mihael Peternel, laniški gospod, prav tako pripraviti ljudi, zlasti mladino, na tak mrk, ki je bil 8. julija 1842. Dandanes mladina večinoma ne da kaj dosti na mrke, Luno, zvezde, repatice in drugo, pomembno jim je, da podnevi sije Sonce.

Najbolj važno pri vsem tem pa je bilo, da smo za opazovanje Sončevega mrka imeli primerne naprave, da kdo ne bi po neumnosti oslepel, če bi zijal kar tako, s prostimi očmi, v Sonce. Ker ni bilo drugega – za mrk leta 1999 se je dobilo že marsikaj boljšega – smo nekje staknili primeren kos navadne šipe, jo okadili nad gorečo svečo, da smo potem gledali skoz tako pripravljeno steklo. Rajnki Markuš, Andrej Selak iz Čepleza, je takrat tri dni zapored otrokom samo šipe pripravljal, da smo jih vsi imeli. Med drugimi spretnostmi je obvladal tudi rezanje šip, saj je bilo pogosto treba kje zamenjati kakšno razbito okensko šipo z novo, zamenjati celo okno ali pa ga vzidati.

Na pepelnično sredo navsezgodaj smo se obvezno dobili pred šolo in jo ubrali na Vrh Križa. Šli smo po cesti mimo Metoda, kjer je bila doma Metodova Anica, ravnateljeva žena, čez cerkljansko Poklonišče, mimo Koščevega roba in nato skozi Benat ali Hrbije proti Zakrižu. Pri znamenju, kapelici, smo se spomnili, kako so nekoč govorili, da je tam hudiček pral prešite odeje, ker so stope v Klavžarjevem mlinu dajale od sebe tako čudne glasove. Da pa bi se peklenšček ustavil pri svoji žehti in da ne bi nadlegoval ljudi, so postavili tisto kapelico, ki so jo v atomskem veku, ko so razširili cesto, prestavili na njeno nasprotno stran. Saj ni nič čudnega, če se je človek, ki je prišel iz

Zakriža skozi Benat živ in zdrav na Poklonišče, tam zahvalil vsem trem svetnikom in eni svetnici. Če je namreč lepo vreme, se s Poklonišča hkrati vidijo kar štiri cerkve, če se le malo naokrog obrneš: cerkvi sv. Ane in sv. Jerneja v Cerknem, ki sta najbližji, cerkev sv. Tomaža v Novakih in sv. Janeza Krstnika v Planini. Novaška cerkev je bila med drugo svetovno vojno zaradi bombardiranja hudo poškodovana, tako da je bil njen zvonik še dolgo brez zaključne konice.

Takoj nad omenjeno kapelico nad Benatom nas cesta vodi skozi temačen gozd. Šimanov Jernejc, ki je Planincem zidal transformatorsko postajo, je tu nekoč ponoči imel bližnje srečanje z nečim črnim, ko se je vračal domov iz Cerknega. Nekaj ga je tako zelo prestrašilo, ko je planilo čez cesto, da je, ne bodi len, hudo zamahnil z gorjačo pe nečem kosmatem. Bitje je obležalo kraj poti, Jernejc pa ga je odnesel proti domu. V Zakrižu šele je spoznal, da je ubil mladega jazbeca. Doma ga je odrl in dal ustrojit kožo, ki je potem še leta teti, Andrejačevi Julki, služila za dodatek pedalu njenega šivalnega stroja. Po teh krajih ni bilo ravno varno hoditi sam naokrog, zlasti ne ponoči. Včasih se je našel nepridiprav, ki je prežal po teh grapah in gozdovih na ljudi, ki so pešačili v Zakriž, še posebej ob plačilnih dnevih. Menil je, zakaj le bi se mučil in delal v tovarni, ko mu pa denar kar sam prihaja nasproti.

Dandanes le malokdo še pešači v Zakriž, saj se ljudje večinoma vozijo z avtomobili bodisi po krajši in strmejši poti skozi Benat ali pa po daljši skozi Mostanijo, Laznico in Gorje. *Laznica* je nova cerkljanska vas pod Poreznom, Trebenčam sosednja vas. V času opisanega Sončevega mrka je še ni bilo. Poznali pa smo *Laznice* na pol poti med Želinom in Cerknim. V Laznicah prečka cesta Cerkno–Želin potok Cerknico po novem mostu, ki ima bogato zgodovino. Ko smo se vozili v Idrijo na gimnazijo, je bil lazniški most še tisti, vojaški, ki so ga postavili Italijani. Ko je avtobus zapeljal čezenj, nas je na zadnjih sedežih kar malo dvignilo v zrak. Nekega dne, precej let za tem, pa je most dokončno klonil in so zato morali narediti novega, betonskega.

Pri Rajhu sredi Zakriža smo zavili levo, mimo Bajtarja, Hadalina, Štucina, Trpina, Klavžarja in Andrejača na Ravnico. Tako kot povsod na Cerkljanskem ima vsaka hiša svoje ime. Pri Mihonu, morda Pri Blaju, je nekdo kriknil, da konček Sonca že manjka. Res! Deloma ga je zakrila Luna. Vsi so, kot bi trenil, izvlekli svoje okajene šipe na plano in začeli opazovati mrk. In res se je začel. Bilo je okoli osmih zjutraj. Mihonova hiša je bila znana po tem, da je bil en njen del zidan, en del pa lesen, narejen iz brun. Ohranila se nam je vsaj na fotografijah, sedaj pa tam prebiva popolnoma drug rod v lepi, novi hiši.

Zakriž ima tudi posestvo, ki ji pravijo *Pri Grču*. Še pod Avstrijo je vaški učitelj vprašal dva učenca v razredu: "Čigava sta pa vidva?" Na Cerkljanskem priimek ne velja kaj prida, ljudje se jih ne zapomnijo tako dobro kot hišna imena. Zato raje, v svojem narečju, ko je govora o nekom, rečejo na primer "Očančev Marko", ker je pač doma *Pri Očancu*. Večina ljudi pa ve, kje je to. Eden od vprašanih učencev, najbolj pogumen, je odgovoril po domače: "Jest sm Rajhaw, wan je pa Grčaw." Učitelj je razumel, kot da je eden *rajhal*, to je, v narečju, opravljal zidarsko delo obmetavanja stene, drugi pa *grčal*, to je dajal grgrajoče, hropeče glasove. Učitelj ni bil zadovoljen z odgovorom, ker je razumel, kaj sta fanta delala, ne pa čigava sta. Potrebna so bila dodatna vprašanja, o čemer pa sicer bogato cerkljansko ljudsko izročilo ne ve ničesar. Zgodbo mi je večkrat pripovedovala pokojna mama, je pa zanjo prav tako vedel tudi učitelj slovenščine Viktor Jereb, ki je nam učencem pri pouku pogosto pojasnil tudi kakšno cerkljansko besedo.

Ko smo z zadnjimi močmi le prilezli mimo Abrama in Podrobarja na vrh, smo se s svojimi šipami razvrstili okrog Orehovca in Juga, celo gor do Ferjanca je marsikdo zlezel. Podrobarjeva domačija stoji pod robom, kar pomeni pod kamnito gmoto v hribu. Cerkljanom beseda *rob* ne označuje samo konca nekega kosa materiala ali polja, ampak kakšno večjo skalovje, ki štrli iz zemlje. Tako imamo na Kojci Hudičev in Divji rob. Pri Andrejaču, kjer je bila doma moja mama, so rekli tudi *Na Robu*, ker hiša, sicer majhna, deloma stoji na čvrsti skali, to se pravi, da lahko rečemo tudi *na robu*.

Mogočni apnenčasti rob nad Podrobarjem pa ni kar tako. Ves je preluknjan, kajti Italijani so v njem uredili bunkerje, pri čemer so uporabili na tone betona in gradbenega železa. Zakrižani so začeli kmalu potem, ko je v Evropi padla železna zavesa, v delu teh bunkerjev prirejati za božične praznike žive jaslice, nekaj podobnega kot v Postojnski jami, le bolj skromno. Iz teh bunkerjev so lahko od daleč prek cerkljanske kotline opazovali, kaj se dogaja Na Lanišah, Pri Vrhovcu in tam okoli rapalske meje in bi po potrebi hitro oddrveli na pomoč.

Pri prej omenjenem Jugu je bila tiste čase gostilna, približno takega ranga kot ona na Kladju, Pri Orehovcu pa trgovina z mešanim blagom. Pri Jugu je bil doma tudi učitelj Ignac Jug, s katerim ni bilo priporočljivo zbijati šale. Šimanov Jernejc je seveda rad zahajal k Orehovcu po to in ono, obenem pa je izkoristil priložnost in stopil še do Juga na kozarček ali dva. Če sem bil za daljši čas pri teti v Zakrižu, me je rad vzel s sabo, ker svojih otrok ni imel. Sovaščanom pa je za zabavo razlagal, da sem njegov. Celo lesene igrače mi je izdeloval in se z mano igral.

Od Orehovca se da po razmeroma položni cesti, ki je speljana po zahodni strani Velikega Kovka, priti v Ravne, ki se ponaša s svojo aragonitno jamo, ki ima celo razsvetljavo, a je bolj zaprta za obiskovalce kot ne, in z bogato kulturno tradicijo. V tej vasi je nekoč služboval gospod Ivan Mozetič[46], ki se je dobro spoznal na zdravilstvo, je pa malo ponagajal tudi Italijanom med obema vojnama. Ko se je upokojil, se je vrnil v Ravne, kjer je tudi pokopan. V Ravnah je takoj po prvi svetovni vojni delovalo kulturno društvo Zora, v Zakrižu pa Zarja. Moja mama je sodelovala pri Zarji, dokler niso Italijani vsa taka društva ukinili.

Počasi se je, ko smo se lotili opazovanja mrka, vračala tema, skozi steklo se je videlo tako, kakor da Luna požira Sonce. Ker je bilo pozimi in tudi kar precej snega je ležalo naokrog, je postajalo vedno bolj hladno. Nekateri so privlekli s seboj na opazovanje mrka tudi sanke. Uboge ptice, ki so že veselo

[46]Ivan Mozetič (1889–1971) – duhovnik, dolgoletni cerkljanski dekan, ljudski zdravnik.

letale naokrog in se tistega jutra veselile življenja, so bile čisto zmedene in so nehale čivkati ter se poskrile, kure s petelini vred pa so se vračale v svoje kurnike. Nastal je nekakšen sumljiv mir in nepričakovani pokoj, okrog desetih pa se je od Sonca videl samo še tanek obroč in nastala je skoraj popolna tema, tako da so se celo videle najsvetlejše zvezde na nebu. Ljudje so tulili, ženske cvilile in vreščale, učiteljice pa so nas mirile in krotile, kakor so vedele in znale. Pravilno! Saj zato so bile, so in bodo. Naravoslovje je del učnega načrta, otrokom je vendar treba pojasniti, kaj se dogaja okoli njih. Večkrat so rekle, da so ljudje verni in vraževerni, ker si ne znajo razložiti naravnih pojavov. Sončev mrk je bila idealna priložnost, da se v razlaganju izkažejo.

Potem se je postopoma videlo več in več Sonca, opoldne je bilo že vse tako kot po navadi. Kokoši in ptice so se vrnile k zjutraj začetim opravkom. Nato smo se počasi vračali v Cerkno. Nekateri pa so se kar s sankami peljali navzdol, dokler je pač to šlo, kajti zaradi prometa, ki ga takrat sicer ni bilo prav veliko, so cesto redno plužili in posipali s peskom. Ko smo prišli v Cerkno, so v cerkvi ravno končali z obredom zaznamovanja vernikov s pepelom, tako kot ga opisuje Simon Gregorčič[47], Goriški slavček:

A čuj! ... Nék duh zakliče mi:
"Kar zrèš jih pred sebój,
zapíši mej mrlíče mi
s pepelom tem nocój!"

(S. Gregorčič, V pepelnični noči)

V Cerknem so obred zaznamovanja s pepelom tistega dne izvedli podnevi, saj ni bilo pričakovati, da bi po hrupni pustni obsodbi in vsemu tistemu, kar je sledilo, kdo takoj po polnoči odšel v cerkev. Na pepelnično sredo opoldne ali popoldne pa morda že. Kot vidimo tudi v drugih pesmih, je Gregorčič rad uporabljal naglasna znamenja. Namesto predloga *med* je uporabljal predlog *mej*. Morda tiči v tem razlaga cerkljanske beseda *meja* v pomenu *gozd*.

[47]Simon Gregorčič (1844–1906) – slovenski duhovnik in pesnik.

Naravna meja med posestvi na Cerkljanskem je velikokrat gozd. Ko so se ljudje naselili v teh krajih, so krčili gozdove, nekaj so ga med posestvi pa le pustili, Ta del gozda je bil *mej* posestvi, nekakšna gozdna meja med njimi, pa so ljudje, da ne bi uporabljali preveč besed, gozdu začeli praviti *meja*.

Sončevi mrki so na ljudi od nekdaj delali nepozabne vtise. Nekateri so ostali zabeleženi. Iz antičnih časov se nam jih je ohranilo kar nekaj. Oglejmo si Plutarhov[48] zapis v njegovem delu *Življenje velikih Grkov* v prevodu Antona Sovreta.

V želji, da bi našel zdravilno sredstvo zoper to črnogledo razpoloženje, obenem pa motil in vznemirjal sovražnika, je Perikles[49] *opravil 150 ladij*[50] *ter jih zasedel z velikim številom najboljših hoplitov in kónjikov. Ta vojna sila je bila tolikšna, da je meščane navdalo trdno upanje, sovražnike pa nič manjši strah. Že je bilo ladjevje nared za odhod, že se je tudi Perikles vkrcal na svojo triero, ko je sonce zatemnelo in legel mrak na zemljo*[51]*. Nastal je splošen preplah, ker so si ljudje razlagali prikazen kot pogubno znamenje. Ko je Perikles videl svojega krmarja vsega v strahu in skrbeh, mu je podržal svoj plašč pred oči, ga zakril z njim in ga vprašal, ali nemara misli, da je v tem kaj strašnega oziroma napoved česa strašnega.*

"Ne!" je odvrnil krmar.

"Kaj pa potem hočeš?" je dejal Perikles. "Mar je sončni mrk kaj drugega? Razlika je samo v tem, da je predmet, ki je zatemnil sonce, nekoliko večji kakor moja bunda!" ...

To poslanstvo je pridobilo Pelopidu po vrnitvi domov nemajhno naklonjenost, ker je dosegel naselitev Mesene in avtonomijo drugih Grkov. Vtem

[48]Mestrij Plutarh (48–127) – starogrški zgodovinar, biograf, filozof in svečenik.

[49]Perikles – rojen v letih od 495 do 490, umrl za kugo leta 429 pr. n. št., atenski državnik in vojskovodja.

[50]Poleti leta 430 pr. n. št.

[51]Po Tukididu je bil Sončev mrk 3. avgusta leta 431 pr. n. št., to je v času prve ekspedicije okoli Peloponeza, te pa se Perikles ni udeležil osebno.

pa je Aleksander Ferski[52] *padel spet v svojo staro napako, izropal celo vrsto tesalskih mest in nastanil vojaške posadke po vsem ozemlju ftiotske Ahaje*[53] *in Magnesije*[54]*. Ko so torej občine zvedele, da se je Pelopidas vrnil, so takoj po poslancih prosile v Tebah pomoči, in sicer s pogojem, da bo četam poveljeval Pelopidas. Tebanci so jim radi ustregli. Že je bilo vse nared, vojska je stala pripravljena za na pot, ko je nenadoma sonce mrknilo*[55]*, da je mesto podnevi zagrnila temà. Ko je Pelopidas videl splošno osuplost, ki jo je zbudila prikazen, si je rekel, da bi ne bilo prav, če bi preplašeno in obupano moštvo silil na odhod in življenje sedmih tisočev meščanov lahkomiselno postavljal na kocko; zato je Tesalcem ponudil zgolj svojo osebo ter vzel s seboj le tri sto domačih jezdecev in mezdnikov, ki so se priglasili iz proste volje, navzlic svarilu vedežev in zoper voljo drugih meščanov: zakaj vsi so imeli sončni mrk za znamenje z neba, ki je bilo usodno možu na visokem položaju.*

Zanimiv je tudi Herodotov[56] zapis v njegovih nepozabnih *Zgodbah,* spet v prevodu Antona Sovreta.

Ko je bilo delo z mostovi pri kraju, se je vojska, ki je prezimila v Sardah, spomladi odpravila na pot proti Abidu. Toda v trenutku, ko je hotela kreniti, je sonce zapustilo svoj sedež na nebu in nehalo sijati, čeprav je bilo ozračje jasno in brez oblakov, in dan se je spremenil v noč[57]*. Ko je Kserkses to videl, je osupnil pa je vprašal mage, kaj pomeni ta prikazen. Magi so mu razložili, da bog s tem napoveduje Helenom pogubo njih mest, zakaj Grkom je sonce naznanjevalec prihodnosti, Perzijcem pa mesec. Ko je Kserkses to slišal, je bil na moč vesel in je dal ukaz za odhod.*

[52]Fere – mesto v južni Tesaliji, Aleksander Ferski zasede prestol leta 370 pr. n. št.

[53]Ftiotska Ahaja – pokrajina južno od Tesalije.

[54]Magnesija – obmorska pokrajina vzhodno od Tesalije med gorama Oso in Peliom.

[55]Dne 13. julija leta 364 pr. n. št.

[56]Herodot iz Halikarnasa (485–420 pr. n. št.) – starogrški zgodovinar, imenovan *oče zgodovine.*

[57]Sončev mrk za ta čas je astronomsko izpričan. Kserksov pohod nad Grčijo se je vršil od spomladi do novembra leta 480 pr. n. št.

Ko sem prvič pripeljal svojo ženo še kot dekle v Planino pri Cerknem, pa tam zato niti zagodli niso, kot je bila včasih navada, bilo je leta 1973, potem ko sem bil uspešno opravil diplomo, je bil ravno delni Sončev mrk. Pa kaj bi z godci! Navsezadnje nisem niti pošteno najavil tistega znamenitega prihoda. Pa kaj! Ona pa mi le, če sem le zdrav, prinese vsak dan kavo v posteljo! Če človek na vsak način hoče izvedeti, kdaj je bil ali pa bo kakšen mrk, požene pravi računalniški program. Sam sem pogosto, dokler še ni bilo danes nepogrešljivih "Oken", uporabljal "Dance of the Planets", "Ples planetov", pa sem izvedel, kako je s tem. Lahko pa vse v zvezi z mrki najdete tudi na svetovnem spletu, samo iskati je treba znati. Za leto 1973 se prav lepo da ugotoviti, de je bil Sončev mrk zadnjega junija. Pri nas ni bil popoln, pa tudi v nobenem Dolu ali Logu ni bil, je pa bil popoln nekje v Afriki. Takrat sva se pripeljala skozi Hotavlje in Podpleče po starodavni cesti čez Vrhulce, kjer sva si ogledala predvojno italijansko kaverno, potem pa sva obiskala tudi teto Franco Pri Cigaletu, kasneje pa še partizansko bolnišnico Franjo. Naš oče je ravno opazoval mrk skozi okajen kos stekla, tako kot mi šolarji precej let prej, meni pa so v času obiska seveda rojile druge reči po glavi. Tisti dan je bilo prav lepo vreme, nikjer žive duše in srne so si dale duška. Ena si je sredi obiska na njivi privoščila malo fižolove solate. Ni bilo lepšega za plaho žival kot obirati stročje s prekle, saj se ji še skloniti ni bilo treba. Nekdo je pogledal še skozi kuhinjsko okno in opazil da gobe, dežnikarice, rastejo nekaj metrov vstran. Pa smo se jih privoščili po skrbni pripravi stare in nove gospodinje.

Očeta je astronomija že od nekdaj zelo zanimala, mrki vseh vrst pa tudi. Vedno je bil na tekočem, kdaj je kak Lunin ali Sončev mrk, pa najsi bo popolni, delni ali kolobarjasti. Večkrat je rad pripovedoval, da so kot otroci v Porurju v Nemčiji, kjer je preživel prvih štirinajst let svojega razgibanega življenja, opazovali Sončev mrk v zrcalni podobi kar v škafu vode. Danes bi rekli, da je bilo to nevarno početje, saj človek lahko hitro oslepi. V nemški šoli se je dobro naučil tudi gotice, stare nemške pisave. Še dolgo po drugi svetovni vojni je prevajal neki ženici z druge strani razvodnice v tej pisavi napisana pisma, ki jih je pošiljala iz Amerike njena sorodnica, vešča le svoje nemščine in stare gotice.

Oče se je spoznal tudi na Lunine mene. Marsikdo ima težave s tem še dandanes, čeprav si poskušamo zapomniti, da se Luna **d**ebeli ob prvem krajcu in ima obliko črke D, ob zadnjem krajcu pa, vulgarno rečeno, **c**rkuje, in ima obliko črke C. Oče pa je uporabljal za pojasnitev rokopisno gotico in nemščino: ob prvem krajcu Luna raste, po nemško je to **z**unehmender Mond, tisti *z* pa se v gotici piše $\mathfrak{z}$, približno tako kot v cirilici з, s poudarjenim krožnim lokom, obrnjenim v desno, kot pri latinski črki D. Ko pa je zadnji krajec, Luna pojema, po nemško je to **a**bnehmender Mond, gotsko črko $\mathfrak{a}$ pa se zapiše s poudarjenim krožnim lokom v levo, kot pri latinski črki C. Morda bi to še danes koristilo ljudem, saj imajo bolj malo možnosti opazovati nočno nebo in manj časa za razmišljanje o Luni in nebesnih pojavih.

Pri hiši dolgo nismo imeli nobenega dostojnega atlasa sveta, le včasih pa smo si ga izposodili pri stricu Bernardu. Nekoč je pač na deželi vladala velika revščina. Če pa je bilo pri hiši kup otrok, so seveda imele prednost druge nabave, ne pa nabave nepotrebnih knjig. Privoščili smo si komaj Mohorjev koledar in nekaj, večinoma nabožne literature. Na srečo smo tista leta v Planini in v šoli imeli še kar dobro, s knjigami založeno knjižnico. Eden od mojih bratov je kot nižji gimnazijec z največjo vnemo prebiral Karla Maya. Tako se mu je priljubil Winnetou, da je pozabil na učenje, zaradi česar se je mama kar naprej jezila, kar pa ni kaj prida zaleglo. Morda je res bil rezultat tega strastnega branja, da je moral en razred nižje gimnazije ponavljati.

Brati se nekateri pač le stežka naučijo. Tudi govoriti ne znajo še vsi otroci pri dveh letih. Pravijo, da je celo Albert Einstein spregovoril šele pri svojih štirih letih. Ko pa znajo, jih je težko ustaviti. Zase pa je brat hitro našel opravičilo: "Mi pa novih šolskih knjig ne bo treba kupovati." Takrat so šolske knjige veljale kar nekaj let, ne tako kot danes, ko jih menjavamo vsako leto in se celo izmišljujemo, katero bi izbrali.

Zase moram takoj priznati, da debelih romanov nikoli nisem maral, tudi takrat ne, ko so bili na gimnaziji za obvezno branje. Roman kot je Dostojevskega *Idiot* bi bil zame prava pokora. Na srečo so bistroumni profesorji kmalu odkrili moja prava nagnjenja in me z branjem debelih kolomonov niso utrujali. Za marsikoga pa so bili prava poslastica. Nekaj zaporednih poletnih počitnic je bilo potrebnih, da sem do konca prebral Gogoljeve *Mrtve duše*, ki jih je sestra od nekod pritihotapila k hiši. Pohvalno pa je, da je taista sestra bila naročena tudi na naravoslovno revijo Proteus, kjer sem prebral marsikaj zanimivega, sicer meni ne ravno do obisti razumljivega. *Proteus*, grško Πρωτεύς, je bil možakar v grški mitologiji, ki je živel na otoku Faros, Φάρος, na katerem je stal znameniti svetilnik, eno od sedmerih čudes starega sveta. Tam je pasel Pozejdonove tjulnje in morske pošasti. Omenja ga celo Homer v četrtem spevu Odiseje.

> Πωλεῖταὶ τις δεῦρο γέρων ἅλιος νημερτὴς
> ἀθάνατος Πρωτεὺς Αἰγύπτιος, ὅς τε θαλάσσης
> πάσης βένθεα οἶδε, Ποσειδάωνος ὑποδμώς.
>
> *Stalno na otok prihaja nezmotni pomorski ti starec,*
> *neumrljivi Protéus, Egipčàn; navajen je morju,*
> *slednjo globino pozna, podložnik boga Poseidóna.*
>
> *(Homer, prevod A. Sovrè)*

Proteus je slovel po svoji zmožnosti spreminjanja svoje podobe in izmikanju. Po njem se imenuje naš čudoviti *močeril* ali *človeška ribica*, ki domuje v vodah kraškega podzemlja. Celo dve vrsti močerila imamo: prvi ima kožo take barve kot je koža belca, drugi pa kot je koža črnca. Proteus nastopa tudi v *Kraljevem baletu noči*, ki ga bomo omenili pri francoskem kralju Ludviku XIV., Sončnem kralju.

Očetov brat, stric Bernard, je bil kar razgledan mož. Imel je to smolo, da je moral služiti v italijanski delovni četi na Sardiniji, kjer se je nalezel malarije. Bil je zelo siten in živčen zaradi tega, z drugimi se je malo družil.

Živel je samsko življenje Pri Cigaletu in obdeloval nekaj zemlje. Ni prenesel mladostne razposajenosti v svoji bližini. Ko je moj brat, tisti, ki je ponavljal šolo, nekega dne veselo požvižgaval po senožeti, se je silno razhudil, češ mladi se že lahko veselijo življenja, on pa, betežen in bolan, tega ne more. Njegova mati ga je komaj zadrževala in jokaje je prosila brata, naj se izogne izzivanju svojega strica. Pogosto se je sprl s sosedom, ki je imel gozd pod Cigaletom. Sosedova otroka sta mu šla strašno na živce, če sta se drla, ko sta prišla s starši, ki so prišli delat v senožet ali gozd. Rad je pisaril po tramovih in obcestnih kamnih ter s tem tudi koga ujezil. Črk N, S, Z, J skoraj nikoli ni prav zapisal. Pogosto je nastala zrcalna slika teh črk glede na njihovo pokončno os: И, Ƨ, Ƹ, ⅃. Takih primerov tudi danes ne manjka.

Zaradi svoje bolezni se je stric najraje izogibal ljudem. Cigaletova hiša je sicer nosila hišno številko, toda registrirana je bila kot razvalina. Rudnik spodaj je povzročil, da se je zidovje razmajalo in ena stena je bila videti, kot da se bo zdaj, zdaj podrla. Pod v izbi je bil že toliko postrani, da je bilo potrebno omaro dodatno podložiti, da je stala pokonci. Kljub temu se nismo bali vstopiti. Stric si je na podstrešju uredil zasilno ležišče, samo pozimi se je zadrževal okoli kmečke peči. Hiša je imela še črno kuhinjo, je pa dobila javno elektriko takrat kot Podpleče. Stric je bil pravi mojster v izdelovanju lesenih letal, katerih propelerji so se vrteli v vetru, raznih igrač, ki so delovale na vodo pri bližnjem studencu, lesenih ptic, jajčastih teles in drugega. Pogosto se je pogovarjal sam s sabo. Nekoč sem ga zasačil, ko je filozofiral o atomski bombi. Toliko je vedel o hladni vojni, da je bil prepričan, da jo bodo prej ali slej spet uporabili. Kljub vsemu pa je bilo Cigaletovše zame prav čarobno. Okoli hiše je dišalo po praženi kavi, kajti babica po očetovi strani, je bila s kavo vedno založena in jo je kar sama pražila, popila pa zelo malo. Učakala je lepo starost in preživela svojega sina Bernarda.

Neki babičini sorodniki so živeli v ZDA. Pogosto so poslali k Cigaletu kak paket, v glavnem s surovo kavo in rižem, pa tudi s fotografijami in prospekti s Floride. Otroci smo radi gledali ameriške palače in letala. Zgodilo se je, da je neko letalo strmoglavilo in k Cigaletu se je vrnilo pismo, ki je bilo na tem letalu. Bilo je precej ožgano, vendar se je še dalo prebrati naslov pošiljatelja, komu je bilo namenjeno, pa ne. Pri Cigaletu sta bila v izbi na dodatno podprti omari oba dela Biblije, Stari in Novi testament. Zajetni knjigi, ki smo ju otroci radi prelistavali, ker je bilo v njih veliko lepih slik z Jutrovega. Napisani sta bili v stari slovenščini, izhajali pa sta v zvezkih v Celovcu nekje v drugi polovici 19. stoletja. Takrat smo se čudili, ko smo brali besede *solnce, črevelj, črez* in druge.

Obe knjigi Biblije sta se preselili v Cerkno, ko je še teta Franca zapustila Cigaletovše. Ena je ostala v krogu sorodnikov, drugo pa je nekdo posodil Monovemu Janku, ki je v Cerknem slovel kot slikar, črkoslikar in hribolazec. Znan je bil po tem, da ni bil zdrav, če se ni povzpel vsak teden na Porezen. Ko so Cerkljani zgradili nov gasilski dom tik ob pokopališču pri sv. Jerneju, je Janko risal po fasadi, pri čemer pa je padel z odra in se huje poškodoval, tako da je svoja zadnja leta preživel na Marofu med Spodnjo Idrijo in Idrijo. Marof, po cerkljansko *Maraut*, kjer je dom za starejše, je bil mnogim zadnji dom. Simbol za tiste, ki niso imeli na stara leta kam. Skratka, Janko je enega od Testamentov uporabljal za to, da bi iz njega prerisal neko sliko, verjetno sv. Florijana, usoda pa je verjetno hotela, da je knjiga končala na Marofu in nato neznano kje. Tako je šel po zlu družinski zaklad.

Nekega dne jo je stric Bernard Planincem resno zagodel. Kuril je v naravi, potegnil je veter in vnela se je trava in grmovje na južnem pobočju Škofja. Takrat sem bil še majhen. Spominjam se samo še tega, kako so ljudje mimo Očanca hiteli gasit v tisto strmino. Stric je umrl razmeroma mlad, le malo čez petdeset let je učakal. Smolo s kurjenjem v naravi je imel dosti let kasneje tudi moj najstarejši brat, kateremu je ogenj ušel izpod nadzora nekje nad Zašurkovico. Skušal ga je pogasiti sam, tako da je z vejo udrihal po njem, zaradi česar se je v dimu hitro upehal in skoraj zadušil, če ne bi dobil pomoči. Nazadnje so morali ogenj ukrotiti gasilci, ki so porabili dve cisterni vode. Za razliko od Bernardove nesreče so bratovemu ognju stale v napoto še počitniške hiše na Kresu.

Tudi sam sem imel izkušnje s požarom v naravi. Nekega dne sem z Dreškovim Štefanom[58] obiskal vas Police vzhodno od Šentviške planote. Vas je že precej zapuščena, ima pa zanimivo vaško arhitekturo in zelo staro cerkev, kar sva si želela ogledati. Namesto ogleda pa sva precej časa gasila travniški požar. Nekdo je kuril pod cerkvijo poljske in travniške odpadke, pa mu jo je ogenj v suhem vremenu pobrisal v suho travo in grmovje. Nekaj časa smo na vse pretege mlatili po ognju s čimerkoli, kar je bilo na razpolago, nazadnje nesreči nismo bili več kos in smo poklicali gasilce, sicer bi lahko zagorela vsa planota. Ti so oddrveli s svoje postaje, se na Reki obrnili proti Bukovemu, zgrešili odcep za Police, se na Bukovem obrnili in šele nato našli pot za Police. Ogenj so hitro ukrotili, prispela je tudi policija, ki je Štefana kot prijavitelja malo spraševala, da so sestavili zapisnik, kaj so naredili z osebo, ki je ogenj zanetila, pa ne vem. Nesreča je prišla v lokalni časopis, pri čemer so na Štefana in mene kar pozabili, pa tako sva se trudila z gašenjem požara, da bi skoraj izdihnila.

Omenjena sopotnika Andrej in Peter imata imeni po sv. Andreju in sv. Petru. Oba sta bila apostola, po grško je apostol ἀπόστολος, kar je prvotno pomenilo *odposlanec, poslanik, potnik*. Oba svetnika sta si bila brata in zaradi globoke vere križana. Stric Bernard je vedel povedati, da je bil sv. Andrej privezan na križ, ne pribit. Križan pa tudi ni bil na križ v obliki Kristusovega, ampak na križ v oblike znaka za krat, torej $\times$, oziroma rimske desetke, to se pravi X. Cestnoprometnemu znaku pred prehodi brez zapornic ali polzapornic čez enotirno železnico v ravnini še dandanašnji zato pravimo *Andrejev križ*. Sv. Peter, prvi papež, je bil sicer križan na tak križ kot Zveličar, ampak z glavo navzdol, ker po svojem mnenju ni bil vreden, da bi ga križali kakor Gospoda in Odrešenika, ki ga je utegnil kar trikrat zatajiti, še preden je petelin v kurniku komaj dvakrat zapel. Prvo jutranje petelinje petje

[58]Štefan Rutar (1939–2015) – ljubiteljski domoznanec, prejemnik Bevkovega priznanja Občine Cerkno leta 2014.

je nekdaj dalo ime tretje nočne straže, *gallicinium*. Pri tem se spomnimo, da je bil naš skladatelj Gallus[59] tudi Petelin. Gallicinium je trajal v starem Rimu od polnoči do treh.

Takrat, ko sem prvič videl znameniti Veliki atlas sveta strica Bernarda, sem se nemalo čudil, kako v Združenih državah Amerike, kjer je babica po očetovi strani imela sorodnico, ponekod meje potekajo po poldnevnikih in vzporednikih. V mojih otroških letih so se veliko pogovarjali o meji med Jugoslavijo in Italijo, o Svobodnem tržaškem ozemlju, pa tudi o Aljaski, ki so jo Rusi leta 1867 prodali Američanom za tistih ušivih 7 200 000 ameriških dolarjev. Leta 1959 je Aljaska postala ena od držav ZDA. Sam resnih ambicij, da bi obiskal ZDA, nikoli nisem imel, čeprav so o njih pripovedovali vse mogoče, dobro in slabo. Kljub temu, da imam tam daljne sorodnike, s katerimi sem vzpostavil stike prek svetovnega spleta, pa bi se tja le težko odpravil.

Besedo *atlas* je v zemljepis vpeljal Mercator[60] v 16. stoletju. Na gimnaziji smo se pri geografiji učili o Mercatorjevi projekciji, ki nam svet projicira na plašč valja in so zato celine, otoki in morja v smeri tečajev na zemljevidih, narisanih na ta način, videti popačeni in pretirano veliki. Nima pa tale Mercator nobene zveze z našim najboljšim sosedom. Običajno z besedo *atlas* poimenujemo knjigo, v kateri so zbrani zemljevidi, ki kažejo države, pokrajine, gorovja, mesta, reke, potoke, jezera, puščave in drugo na nekem delu sveta. Besedo *atlas* uporabljamo tudi na drugih področjih. Tako imamo, kot zbirko natančnih slik, na primer *anatomski atlas, astronomski atlas, dialektološki atlas, zvezdni atlas, atlas Vesolja* in druge atlase. Atlas je tudi vrsta svilene tkanine, v tekstilstvu pa zraven platna in keper tudi ena osnovnih vrst vezav, in sicer pri mehkejših tkaninah. V grški mitologiji je Atlas, Ἄτλας, polbog, eden od Titanov, Τιτᾶνες. Atlasa so pogosto upodabljali kot silaka, ki nosi na svojih plečih zemeljsko oblo. Ni pa taka upodobitev v soglasju z

[59]Jacobus Gallus Petelin (1550–1591), slovenski poznorenesančni skladatelj.
[60]Gerardus Mercator (1515–1594) – flamski geograf in kartograf.

mitologijo. Atlas je bil namreč zaradi sodelovanja v uporu Titanov kaznovan tako, da je moral na skrajnem zahodu nositi nebeško gorovje. Zato se ne smemo čuditi, če je v anatomiji človeka prvo vratno vretence imenujemo *atlas*, ker nosi glavo, ki je lahko mlada, stara, siva, plešasta, otroška, fantovska. dekliška, lepa, grda, debela in zalita, koščena, podolgovata, okrogla, široka, ozka ali kakršna že je, samo da po možnosti pametno upravlja telo, ki ji je do konca življenja zaupano.

Ker je bil polbog Atlas upodobljen v Mercatorjevem atlasu, so ljudje dolgo časa zmotno menili, da je atlas kot knjiga zemljevidov dobila ime po Atlasu. Šele kakih deset let pred mojim znamenitim pohodom od Očanca v Cerkno so učenjaki ugotovili, da je Mercator svoj atlas imenoval po nekem istoimenskem mavretanskem kralju. V Maroku pa se dviga v kar spodobne višave tudi gorovje Atlas, arabsko جبال الأطلس. Maroko pišejo zelo različno. Nemci, Finci, Danci, Norvežani in Nizozemci Marokko, Švedi Marocko, Angleži in Italijani Marocco, Španci Marruecos, Francozi in Romuni Maroc, Luzitanci ali Portugalci Marrocos, Grki Μαρόκο, Turki Fas, Rusi Марокко, Arabci pa المملكة المغربية, kar je polno ime in dobesedno pomeni Zahodno kraljestvo. Dandanes je to Kraljevina Maroko z glavnim mestom Rabat, arabsko الرباط.

Nedvomno je beseda *mitologija* nastala iz grške μῦθος, ki pomeni kup reči: *beseda, govor, izrek, pripoved, zgodba, poročilo; pogovor, razgovor, razmišljanje, misel, sklep, naklep, svet, zapoved, ukaz; izmišljena povest, govorica, vest, basen, pravljica, bajka; dogodek, zgodovina, predmet govora, stvar*. Beseda λόγος pa nam je že znana. Profesor Pirnik[61] je pri pouku umetnostne zgodovine na gimnaziji rad pripovedoval, zakaj so ljudje od nekdaj bogovom, ki so jih sami definirali, žrtvovali: živalsko meso, rastlinsko hrano, vino, olje in celo ljudi. "Da bi se bogovom prilizniliˮ, je goreče pojasnjeval. Lahko bi rekli, v sodobnem jeziku, da bi jih podkupili. Toda ne z denarjem, nesramno dragimi darili in nagradami, kot se to vse prepogosto dela danes, ampak s

[61] Makso Pirnik (1902–1993) – slovenski skladatelj, glasbeni pedagog, zborovodja in kritik.

tistim, kar jim je bilo pri roki, jim je bilo ljubo in je bilo nekaj vredno.

Na gimnaziji smo imeli priložnost spoznati tudi filozofa Valentina Kalana, rojenega sredi vojne vihre, v istem letu kot moja sestrica, ki je umrla, ko sem bil star komaj tri leta. V mojih gimnazijskih letih je bil Valentin še študent in se je vozil v Idrijo, da bi nas učil filozofijo. Ni trajalo dolgo, potem pa je filozofske vajeti vzel v roke Niko Mozetič, ki nas je učil že zgodovino in sociologijo. Kalan, ki ni bil kot Tavčarjev Khallan oziroma Khallain, je na Filozofski fakulteti v Ljubljani postal uspešen profesor in obranil kar dve doktorski disertaciji: *Tukididovo zgodovinsko mišljenje s posebnim ozirom na njegove antilogije* leta 1973, ko sem jaz komaj diplomiral, in *Dialektika in metafizika pri Aristotelu* tri leta kasneje, ko sem služil domovini in maršalu Titu v JLA v Titovem Velesu. Že na gimnaziji se je videlo, da mož ni kar tako, in da ni ravno naravnan na to, da bi nas dijake učil temelje filozofije. Najbolj sem si pri njem zapomnil definicijo filozofije, ne vem več, katerega avtorja: "Filozofija je skrb za smrt." Nekaj Hölderlinovih[62] verzov iz predgovora te knjige nam je napisal na tablo in že takrat so naredili name, z mojim kar dobrem znanjem nemščine, precejšen vtis, zato sem na stara leta, ko mi beseda ne gre več prav gladko z jezika, poiskal še preostale verze. Pogosto nam je Valentin napisal z grškimi črkami na tablo kakšno staro grško modrost ali citat, na primer:

Ἓν καὶ πᾶν. Πάντα ῥεῖ. Ἦθος ἀνθρώπῳ δαίμων.

Avtor zadnjih dveh je Heraklit iz Efeza, Ἡεράκλειτος ὁ Ἐφέσιος.

Pogosto je Kalan navajal Aristotelovo knjigo v treh delih Περὶ φύσεως, *O naravi*, in dela drugih antičnih filozofov. Veliko naslovov se začne s Περὶ, kar so ljudje še dolgo posnemali. Zato se na primer veliko latinskih naslovov začenja z *De*, nemških pa z *Über*. Počasi sem tudi dojel, da je treba pri grških učenjakih paziti, da se kaj ne zameša. Stari Grki namreč niso poznali priimkov, ampak so imeli samo imena. Ker se je hitro zgodilo, da sta dve

[62] Friedrich Hölderlin (1770–1843) – nemški pesnik in filozof.

osebi imeli isto ime, tako kot sem v sorodstvu kar naenkrat imet tri Tonete in kot smo v Planini imeli tri Jakobe, so Grki dodajali še očetovo ime ali pa kraj, od koder je kdo izhajal. Ker je bil Perikles Ksantipov sin in Atenec, so na njegov spomenik zapisali Περικλῆς Ξανθίππου Ἀθηναῖος. Napis ima sicer same velike črke in nobenih diakritičnih znakov: ΠΕΡΙΚΛΗΣ ΞΑΝΘΙΠΠΟΥ ΑΘΗΝΑΙΟΣ. Pravi Grk bo pač že vedel, kako to pravilno prebrati.

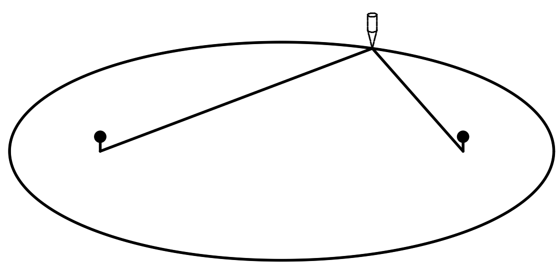
Vsi smo že slišali za *Hipokratovo prisego* v medicini. Pomembna Hipokrata pa sta bila dva: Hipokrat s Kosa, Ἱπποκράτης ὁ Κῷος, antični zdravnik, in Hipokrat s Hiosa, Ἱπποκράτης ὁ Χῖος, matematik in astronom, ki se je ukvarjal tudi s problemom podvojitve kocke in s kvadraturo kroga. V zvezi s tem se v geometriji omenjajo *Hipokratovi mesečki*. Kos, Κῶς, in Hios, Χίος, sta otoka v Egejskem morju. Oba sta danes Turkom tik pred nosom. Dobesedno pa pomeni Hipokrat človeka, ki je močan kot konj. Beseda ἵππος pomeni konj, κράτος pa sila, moč, krepost.

Navedimo za ilustracijo samo nekaj besed iz znamenite Hipokratove prisege, ki jo izrekajo zdravniki na koncu svojega študija:

> **Hipokratova prisega**
>
> Prisežem na Apolona Zdravnika in Asklepija in Higiejo in Panakejo in na vse bogove in boginje ...
>
> Prav tako ne bom nobeni ženski dal pripomočka za uničenje telesnega ploda ...
>
> **Ἱπποκράτους Ὅρκος**
>
> Ὄμνυμι Ἀπόλλωνα ἰητρὸν, καὶ Ἀσκληπιὸν, καὶ Ὑγείαν, καὶ Πανάκειαν, καὶ θεοὺς πάντας ...
>
> Ὁμοίως δὲ οὐδὲ γυναικὶ πεσσὸν φθόριον δώσο ...

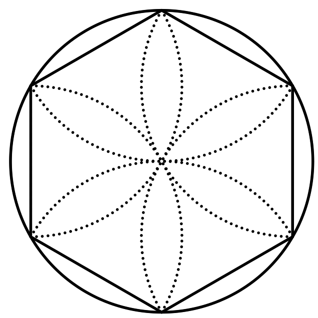
Pri Očancu je bila tudi knjiga o astronomiji, in sicer *Osolnčje in osvetje*, ki jo je napisal Šlibarjev Polde. Izšla je leta 1930, se pravi sredi italijanske okupacije naših krajev in najhujše raznarodovalne politike. Priložena ji je bila celo vrtljiva zvezdna karta. Knjigo še vedno imam, nima pa naslovnice. Morda jo je nekdo iztrgal, ker je bil na njej podpisan, da se ne bi izvedelo lastništvo. Veliko zanimivih reči je v tej knjigi, celo vrtnarska konstrukcija elipse s količki in vrvico. V tla zabijemo dva količka in na vsakega privežemo po en konec vrvice tako, da lahko vrti okoli količkov. Nato s tretjim, priostrenim količkom vrvico napnemo in z njim zarišemo krivuljo po zemlji tako, da je vrvica ves čas napeta (slika 6). Dobljena krivulja je elipsa. Lavo Čermelj, njegov psevdonim je bil Šlibarjev Polde, je zapisal tudi *pakrog*. Bolj ko je vrvica dolga v primerjavi z medsebojno razdaljo v tla zabitih količkov, bolj je elipsa podobna krožnici, in bolj ko sta količka narazen, bolj je elipsa podolgovata.

V mojih študentskih letih je neki dijak na Vipavskem na tej lastnosti elipse celo konstruiral posebno šestilo za risanje elips, toda s patentiranjem naprave žal ni bilo nič. So pa o tem pisali po časopisih. Študentom pa sem vedno rad opisal navedeno konstrukcijo in kakšno še zgodbo povrh.



Slika 6: Vrtnarsko načrtovanje elipse.

Šestilo? Nepogrešljivo geometrijsko orodje je to. Poznajo ga mnogi poklici. Celo v prostozidarski emblem je zašlo, pa v marsikateri grb ali zastavo. Precej zgodaj smo otroci tako ali drugače spoznali, da se da s šestilom početi še marsikaj drugega, ne le risati kroge. Prej ali slej smo pričeli risati vsem znane šestperesne deteljice. V nekem obdobju je bilo takih deteljic vse polno po zvezkih, straniščih in opažih. Polmer kroga lahko nanesemo točno šestkrat zapored, od točke do točke kot tetivo po obodu kroga (slika 7). Očitno je naprava zaradi te lastnosti dobila v nekaterih slovanskih jezikih lepo ime na osnovi števnika *šest*: v slovenščini *šestilo*, v hrvaščini *šestar* in v srbščini шестар. V nemščini uporabljajo besedo *Zirkel*, v cerkljanskem narečju smo



Slika 7: Pravilni šestkotnik.

nekoč rekli *cíerkle*. V Bezlajevem Etimološkem slovarju izvemo, da se je v 18. stoletju na Slovenskem za šestilo uporabljal izraz *šrestovilo*. Vsi ti izrazi imajo izvor v klasičnih jezikih: *circulus* oziroma *circus* v latinščini in κύκλος v grščini. Latinska izraza za šestilo sta *circinus* in *sextarius*. Zvenelo nam je kar domače, saj so Cerkno nekoč pisali *Cirkno*, v latinščini in italijanščini pa *Circhina*. Po antičnem zgledu so se ravnali še Poljaki, ki šestilu pravijo *cyrkiel*, in Rusi, ki mu pravijo циркуль. Slovaki so razvili svojo besedo *kružidlo*, Čehi pa *kružítko*. Šestilo je po italijansko *compasso*, po francosko *compas*, po angleško *compass*, po špansko *compás*, kar se je razvilo iz druge latinske besede, namreč *passus*, kar pomeni korak, oziroma *compassare*, odmerjati s koraki. Katalonci pišejo akcent v drugo smer, namreč *compàs*, uporabljajo pa tudi kar latinski *circinus*, Portugalci pa *compasso*. Na severu pravijo šestilu: Danci in Norvežani - *passeren*, Švedi - *passaren*, Finci - *harppi*, Islandci - *hringfarinn*. V baltskih državah pa: Estonci - *sirkel*, Latvijci - *cirkulis*, Litavci - *skriestuvas*. Turki rečejo šestilu *pergel*, Madžari - *körzo*, Nizozemci - *kompas*, esperantisti - *cirkelo*, Irci - *an compás*, Škoti - *an roinneadair*. Grki pa διαβήτες. Bolgari so besedo za šestilo, пергел, prevzeli od Turkov, ti pa iz arabščine: فرجار.

Čemu sedaj taka reč zaradi navadnega šestila? Pač. Nekatere konstrukcije v geometriji se dajo izvesti samo s šestilom. V 18. stoletju se je z njimi ukvarjal Mascheroni[63], v Bergamu rojeni matematik. Takim konstrukcijam, sicer rahlo neupravičeno, kot bomo videli kasneje, pravimo *Mascheronijeve konstrukcije*. Šestilo je bilo poleg trikotnikov geometrijsko orodje, ki ga je bilo treba na gimnaziji pri urah geometrije obvezno imeti s seboj, sicer ni bilo usmiljenja. Seveda je bilo vedno potrebno imeti tudi ošiljen svinčnik, za uporabo pripravljeno šestilo in nepoškodovane trikotnike.

Šestila, ki se uporabljajo v praksi, so različna po obliki in izdelavi. Mizarji, kolarji, sodarji, kovači, ključavničarji in drugi imajo svoja šestila, učenci, dijaki, študenti, učitelji ter profesorji pred tablo in tehnični risarji pa svoja. Tako poklici poznajo objemna, merilna, paličasta, votlinska in druga šestila.

Nekoč smo v šoli uporabljali preprosto šestilo, ki smo ga nasadili kar na običajni svinčnik. Važno je bilo, da je naprava imela ostro kovinsko konico in da je bil svinčnik ošiljen, in že smo veselo risali krožne loke po papirju. Bolj imenitna in dražja so bila pokromirana šestila z vsem priborom v posebnih škatlicah, ki so se odpirale na tečajih in ki so bile znotraj obložene z blagom. V zaprtem položaju se je škatla zaščitila s posebnim zapahcem, da se ni vse skupaj nekontrolirano odprlo in raztreslo. V škatli so bila narejena posebna ležišča, v katerih so počivali posamezni kosi šestila, ki so se po potrebi sestavljali v obliko, ki je bila trenutno najprimernejša za delo. Za risanje s tušem je bilo tudi poskrbljeno, dodan je bil namreč poseben nastavek. Osnovni je bil seveda tisti z grafitno minico, ki je morala biti pravilno ošiljena. Obstajala so tudi solidna šestila v posebnih etuijih z najnujnejšo opremo.

Za risanje po tabli smo v šoli uporabljali lesena ali plastična polmetrska šestila. Konica je bila ogromna, življenjsko nevarna. Uboga tabla je zelo trpela od neštetih vbodov. Zraven vsega je bilo treba skrbeti še za kredo v drugem kraku. Na srečo so izumili taka šestila, da se je en krak prisesal

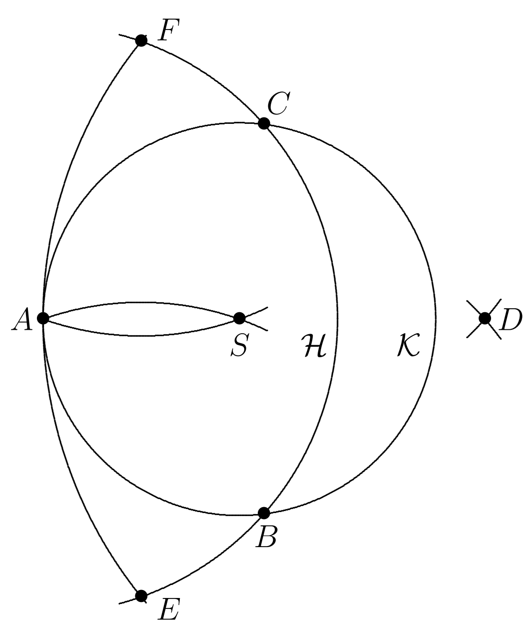
[63]Lorenzo Mascheroni (1750–1800) – italijanski matematik, fizik in pesnik.

na tablo. Črno tablo je zamenjala zelena, obe pa je s časom nadomestila bela, kredo pa raznobarvni flomastri. Nekateri so omenjene spremembe imeli za strašno velik korak v razvoju šolstva. Prevladovalo je mnenje, da zelena tabla deluje v primerjavi s črno bolj pomirjujoče.

Za brisanje table so že v starih časih uporabljali pravo morsko spužvo, kasneje gobo iz penaste umetne snovi, pravi krik mode pa je bila goba iz klobučevine. Za brisanje s flomastri popisane bele table so izumili spet neko drugačno izvedbo gobe. Flomastri so postali prava pokora po uvedbi projekcijskih platen, ki so jih namestili nad tablo tako, da so se dala dvigati in spuščati. Na platno so dolga leta profesorji projicirali svoje prosojnice z grafoskopom, v zadnjih časih pa s elektronskimi projektorji, ki so povezani z računalnikom. Pogosto se dogaja, da se predavatelj spozabi in kaj načečka na platno namesto na tablo, ker je v svoji vnemi in predavateljski ekstazi platno pozabil dvigniti. Snažilke niso nič kaj srečne, če morajo vse to očistiti. Čačko se le stežka pobriše, sled brisanja pa ostane. Zadnja leta pa smo dobili še elektronske table, po katerih se piše z napravo falične oblike, ki ne pušča fizične sledi, ampak mahanje po površini table sproti beleži računalnik in z rahlo zakasnitvijo projicira črte na tablo.

Prosojnice so imeli svoj čas za velik napredek pri predavanjih. Predavatelj jih je pripravil, nato pa med predavanjem metal na grafoskop in jih menjaval ter zraven vneto razlagal. Včasih se je to dogajalo tako hitro, da so ubogi študenti komaj kaj zapisali in so zato milo prosili, naj se vrne h kredi in tabli. Razvila se je cela znanost, *grafoskopija*, ki je učila, kako pripraviti prosojnice, da bo poslušalcem le kaj šlo v glavo. Beseda *grafoskopija* je nastala iz dveh grških: γράφω, *pišem*, in σκοπέω, *gledam, opazujem*. Danes namesto prosojnic pripravimo predstavitve z računalnikom. Dosti laže je prikazovati stran za stranjo, da se skočiti za nekaj strani nazaj ali naprej, hitro se da kaj popraviti, odvzeti ali dodati. Za vsak primer pa je bil grafoskop še dolgo na voljo po predavalnicah, kajti zlasti starejši predavatelji svoja predavanja še niso pripravljali na elektronskih prosojnicah. Žal se je pogosto dogajalo, da niti klasičnih niti elektronskih prosojnic niso obnavljali in dopolnjevali, ampak so kazali stare, že velikokrat nekje videne.

Konstrukcija središča dane krožnice z ravnilom in šestilom ni težka. Izberemo dve primerni tetivi in konstruiramo njuni simetrali, ki se sekata ravno v središču krožnice. Velik vtis pa je name naredila konstrukcija središča dane krožnice $\mathcal{K}$ samo s šestilom. Videl sem jo že zelo zgodaj, na osnovni šoli, zahvaljujoč Čermelju v neki stari številki Proteusa, na katerega je bila naročena sestra, tista, ki je dala del sebe Eskulapu[64]. Kdo ve, kdo je prvi uporabil tako konstrukcijo. Nekdo je že moral biti. Sam Mascheroni je našel bolj zapleteno od tiste v Proteusu. Je pač tako, da je tudi v matematiki najteže nekaj odkriti in dokazati, potem pa se običajno hitro najde nekdo, ki stvar poenostavi.



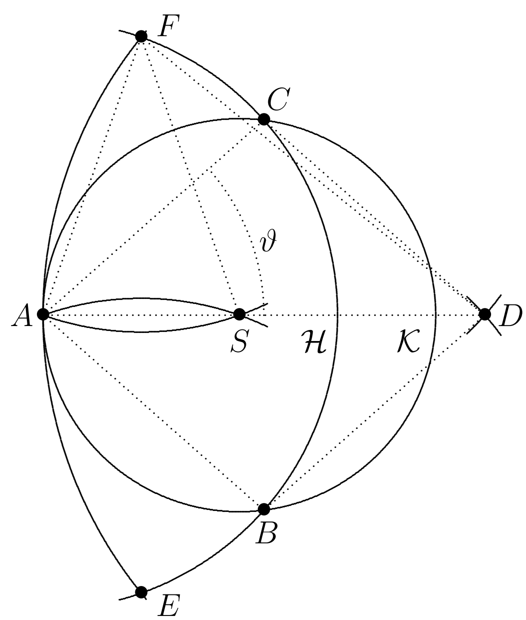
Slika 8: Konstrukcija središča krožnice samo s šestilom.

Dana je krožnica $\mathcal{K}$ z neznanim središčem (slika 8). Recimo, da smo jo narisali na papir z okroglim, primerno velikim loncem ali s šahovsko figuro.

[64]Eskulap (latinsko), Asklepij (grško) je bil rimski oziroma grški bog zdravilstva.

Lahko tudi s šestilom, pri čemer smo pozabili označiti središče in se nikjer več ne pozna, kje smo bili zapičili šestilo.

Na krožnici $\mathcal{K}$ izberemo kjerkoli točko A in načrtamo krožnico $\mathcal{H}$ poljubnega polmera s središčem v točki A, tako da preseka krožnico $\mathcal{K}$ v točkah B in C. Nato načrtamo krožna loka s središčema v točkah B in C in polmerom $|AC|$, ki se sekata v točki D. Nato načrtamo krožni lok s polmerom $|AD|$ in središčem v točki D, ki seka krožnico $\mathcal{H}$ v točkah E in F. Krožna loka s polmerom $|AF|$ in središčema v točkah E in F se potem sekata v točki A in v točki S, ki je iskano središče krožnice $\mathcal{K}$.



Slika 9: Dokaz pravilnosti konstrukcije središča krožnice.

Zakaj je konstrukcija pravilna? Štirikotnik $ABDC$ je očitno romb s stranico $|AC|$. Naj bo ϑ kot ob oglišču A trikotnika ADC in R radij iskane krožnice (slika 9). Potem je prav tako očitno

$$|AC| = 2R\cos\vartheta \quad \text{in} \quad |AD| = 2|AC|\cos\vartheta = 4R\cos^2\vartheta.$$

Trikotnika ASF in FAD pa sta enakokraka in sta si podobna, ker se ujemata v enem kotu, kar pomeni, da velja: $|AS|/|AF| = |AF|/|AD|$. Iz tega razmerja dobimo $|AS|/|AC| = |AC|/|AD|$. Nazadnje imamo po kratkem računu:

$$|AS| = \frac{|AC|^2}{|AD|} = \frac{4R^2 \cos^2 \vartheta}{4R \cos^2 \vartheta} = R.$$

S tem smo konstrukcijo v celoti utemeljili. Z računom, pri katerem smo uporabili nekaj preproste trigonometrije, smo pokazali, da je pravilna.

Nekatere Mascheronijeve konstrukcije so precej bolj zapletene in so pravcato mojstrsko delo v geometriji. Že razpoloviti dano daljico samo s šestilom zahteva nekoliko miselnega napora, jo dvakrat podaljšati, pa še več. Marsikdo se bo vprašal, kaj pa imamo od tega, če rešimo neki matematični problem. Nekdo bi na tako vprašanje odgovoril. "Probleme rešujemo zato, ker so tu in nas izzivajo."

Glede reševanja matematičnih problemov obstaja cela teorija. Izvedenci za to so potratili ure in ure časa, napisali učene razprave in debele knjige. Nekateri so iz tega diplomirali, magistrirali in celo doktorirali. Drugi so vneto raziskovali, anketirali in testirali, kako bi vse to najlaže šlo od rok v šoli. Vse skupaj učencem, dijakom in študentom ne koristi kaj prida, če niso sami pripravljeni pošteno tuhtati in v potu svojega obraza reševati probleme, od preprostejših prek malo težjih do zares težkih. Tudi moj učitelj matematike in fizike, Maks Pagon, je zagovarjal tezo, da vse šole, akademije in fakultete ne koristijo v pridobivanju učenčevega znanja kaj prida, če učitelj ne opravlja svojega dela s srcem in pravim pedagoškim erosom. "Praeparate corda vestra!", "Pripravite svoja srca!", je zapel Jacobus Gallus Petelin. Sicer z nekim drugim, teološkim namenom. Kot parola pa je Gallusov stavek ravno tako dober za spopad z matematičnimi problemi.

4 Matematični konstanti

Enemu od največjih matematikov vseh časov, Leonhardu Eulerju, gre v matematiki zasluga za dve števili, to sta osnova naravnih logaritmov, ki se njemu v čast označuje z e, in malo manj znana *Eulerjeva konstanta*, tudi *Euler–Mascheronijeva konstanta*, ki jo nekateri označujejo z γ, drugi s $\mathbf{C}$ ali pa s C. Mascheroni je ni odkril, jo je pa prvi izračunal na precej več decimalk kakor Euler. Še do danes pa se nikomur ni posrečilo dokazati, kakšno število je γ, racionalno ali iracionalno, algebrsko ali transcendentno.

Lorenzo Mascheroni se je rodil 13. maja 1750 v Bergamu. Najvažnejši so njegovi prispevki v matematični analizi, zlasti na področju integralskega računa in naravnih logaritmov, ter v geometriji, kjer je dokazal, da se konstrukcije, ki se dajo izvesti z ravnilom in šestilom, da opraviti že samo s šestilom. Ukvarjal se je tudi s trdnostjo obokov v gradbeništvu. Bil je sin Marije Ciribelli in Paola Mascheronija dell'Olmo, bogatega veleposestnika. Namenjen je bil za cerkveno kariero, v starosti 17 let je postal opat in bil posvečen v duhovnika pri svojih 24 letih.

Leta 1773 je začel s poučevanjem, najprej retorike v bergamskem semenišču (Seminario di Bergamo) in nato na Marijanskem kolegiju (Collegio Mariano), prestižni ustanovi iz 16. stoletja, ki je sedaj Klasični licej Sarpi. Kmalu potem je opustil neuporabno in abstraktno sholastično filozofijo in se strastno posvetil eksperimentalnim znanostim in matematični analizi. Zaradi svojih sposobnosti je bil 3. septembra 1775 sprejet na Akademijo vzbujenih v Bergamu (Accademia degli Eccitati).

Leta 1778 je pričel še s poučevanjem filozofije, ki je v tistem času zajemala tudi logiko, metafiziko in fiziko. Učne načrte na Marijanskem kolegiju so temeljito prenovili leta 1784, pri čemer je izdatno sodeloval tudi Mascheroni, in prišel v spore z učitelji tradicionalisti. Mascheroni je postal učitelj fizike in eksperimentalne fizike. Kmalu po tistem (1785) je v Bergamu objavil svojo fundamentalno matematično delo v statiki: *Nove raziskave o ravnovesju* *obokov, Nuove ricerche sull' equilibrio delle volte*. Postopoma je napisal tudi zbirko nalog iz matematične analize in geometrije. Leta 1786 je bil imenovan za profesorja algebre in geometrije na Univerzi v Pavii, kjer sta med drugimi poučevala Lazzaro Spallanzani (1729–1799) in Alessandro Volta (1745–1817). Imenovanje je pomenilo veliko priznanje enemu od vodilnih znanstvenikov iz obdobja razsvetljenstva.

V letih 1788-1791 je bil tudi vodja Pavijske akademije zaupljivih (Academia pavese degli Affidati), v letih 1789–1793 pa celo rektor univerze v Paviji. Med drugim je bil za svoje znanstvene dosežke sprejet tudi v Akademijo v Padovi in v Akademijo v Mantovi (Accademia Reale di Mantova), pa tudi v Italijansko znanstveno društvo (Società Italiana delle Scienze).

Naredil si je tudi politično kariero, saj je bil leta 1797 izvoljen za delegata Cisalpinske republike (Repubblica Cisalpina, 1797–1802, glavno mesto Milano), ki ga je poslala leta 1798 v Pariz, kjer je sodeloval v komisiji za dokončno določitev dolžine enega metra. Leta 1791 so določili, da je dolžina pariškega poldnevniškega kroga 40 milijonov metrov, nakar so začeli s poskusnimi meritvami (pod vodstvom Delambreja (1749–1822)) in potrebni so bili natančni izračuni. Komisija je svoje delo končala 10. decembra 1799, vendar pa se Mascheroni ni mogel vrniti domov zaradi avstrijsko–ruske (Aleksander V. Suvorov (1729–1800)) zasedbe Milana (konec aprila 1799) in je po kratki bolezni umrl v Parizu naslednje leto, 14. julija 1800.

Mascheroni je veliko pripomogel k popularizaciji in razvoju infinitezimalnega računa, ki so ga pričeli študirati Leibniz (1646–1716), Newton (1643–1727) in Euler (1707–1783) v prvi polovici 18. stoletja. Zanimivo, da so se sto let kasneje še vedno prerekali o tem, ali bi infinitezimalni račun vpeljali v gimnazije ali ne. Od naših matematikov je posegel v to razpravo Franc Hočevar (1853–1919), rojen v Metliki.

Leta 1790 je Mascheroni objavil delo *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, kjer je med drugim objavil prvih 32 decimalk konstante γ. Mascheronijev rezultat je napačen na 20., 21. in 22. decimalki, predstavlja pa napredek glede na prvih 13 pravilnih decimalk, ki jih je izračunal Euler leta 1736. Konstanto γ Euler prvič omenja v svojem delu *De progressionibus harmonicis observationes*, 1734/35.

Mascheronijevo najbolj znano delo pa je nedvomno *Šestilna geometrija, La geometria del compasso*, ki je izšlo leta 1797, kjer je pokazal, da je mogoče vse geometrijske konstrukcije, ki so izvedljive z ravnilom in šestilom, izvesti že samo s šestilom, če le privzamemo, da je premica določena, čim imamo konstruirani dve njeni točki.

Najprej pokaže, kako samo s šestilom in razpolovimo dani krožni lok, nato, kako seštevamo in odštevamo dolžine daljic, kako najdemo četrto sorazmernico treh daljic, kako poiščemo presečišče danih dveh premic in kako najdemo presečišče dane premice s krožnico. Potem Mascheroni dokaže, da je mogoče vse osnovne geometrijske konstrukcije, ki se dajo narediti z ravnilom, opraviti samo s šestilom. V duhu razsvetljenstva vse te konstrukcije niso le same sebi namen, ampak so uporabne tudi pri konstruiranju preciznih inštrumentov.

Prve teorije o konstrukcijah samo s šestilom pravzaprav ni razvil Lorenzo Mascheroni, ampak manj znani danski matematik Jørgen (Georg) Mohr (1640–1697), ki jo je objavil v knjigi *Euclides Danicus* leta 1672. To delo pa je, nihče ne ve zakaj, ostalo neznano vse do leta 1928, ko so en ohranjen izvod knjige odkrili po golem naključju. Oba matematika sta teorijo razvila povsem drugače. Zato danes odkritje pripisujejo večinoma samo Mascheroniju. Po Mohru se imenujejo danska gimnazijska matematična tekmovanja.

Napoleon Bonaparte (1769–1821) je Mascheronija srečal med svojimi vojaškimi pohodi po Italiji in takrat mu je v roke prišla Mascheronijeva knjiga o integralskem računu. V Parizu so jo pokazali slavnima in uveljavljenima matematikoma Lagrangeu (1736–1813) in Laplaceu (1749–1827), 11. februarja 1797, takoj po mirovni pogodbi v Campoformido (tudi Campoformio, furlansko Cjampfuarmit). Lagrange in Laplace bi morali biti študentom, ki se vsaj malo srečajo z matematiko, znani imeni. Imamo na primer Lagrangeev izrek, Lagrangeevo formulo, Lagrangeeve enačbe ter Laplaceov diferencialni operator, Laplaceovo diferencialno enačbo, Laplaceovo transformacijo.

Spomnimo se, da neki izrek o trikotniku pripisujejo cesarju Napoleonu, enega redkih pomembnih izrekov o trikotniku, ki je bil dokazan po zatonu grške geometrije. Mascheronijevo knjigo *La geometria del compasso* so hitro prevedli v francoščino in jo natisnili pri založbi Charette (Pariz 1798). Med zgodovinarji matematike so potekale živahne razprave o nekaterih geometrijskih izrekih, ki jih pripisujejo Napoleonu, v resnici pa so verjetno kar Mascheronijevi.

V njegovo čast so poimenovali 8. decembra 1996 odkriti asteroid (observatorij Prescott v Arizoni, astronom Paul G. Comba) z začasnim imenom 1996 XW8 po Mascheroniju: 27922 Mascheroni. Mascheroniju so odkrili tudi spominsko ploščo v njegovem rojstnem kraju (v Castagneti, danes del Bergama) in doprsni kip v središču Bergama (Sentierone). Po njem se imenuje tudi Liceo Scientifico Statale Lorenzo Mascheroni v Bergamu.

Mascheroni je tudi pesnil, in sicer v italijanščini in latinščini. Verze je pisal ob različnih priložnostih. Celo posvetilo Napoleonu v knjigi *La geometria del compasso* je sestavil v verzih. Glavno Mascheronijevo pesniško delo je *L'invito di Dafni Orobiano a Lesbia Cidonia*.

Stari kosci se bodo še spomnili na bergamaške osle. S tem ne mislimo na trmaste tovorne živali, ampak na tiste podolgovate brusilne kamne, ki so jih nosili med delom za pasom v oselnikih. Oselnik je bila podolgovata posoda, narejena iz lesa ali govejega roga, v katerem je morala biti vedno voda, po možnosti sveža. Osla je ravno lepo ustrezala oselniku in bila stalno pripravljena za uporabo. Kosec je z oslo nabrusil koso kjerkoli in kadarkoli med delom, ko je bilo to potrebno. Oselnik je imel tudi nastavek, kamor se je vstavilo ognjilo. To je jeklena ost, približno taka, kakršno imajo mesarji po mesnicah, da z njo vsake toliko časa naostrijo nože. Kosec pa je z ognjilom poravnal klep, to je najostrejši del kose, če je med košnjo zadel v kamen, kar se je pogosto dogajalo, in s tem hudo skrhal klep. Skratka, bergamaške osle so slovele daleč naokoli in so bile za vsakega kosca pravo bogastvo in ponos.

Med obema vojnama so Italijani v naših krajih imeli svojevrsten odnos do naših moških, zlasti mlajših, saj so zanje predstavljali potencialne sovražnike. Niso pa spregledali naših deklet in marsikatero se je vdalo, precej pa jih je v Italiji, tudi v Bergamu, našlo nov dom. Vse niso imele take sreče. Italijanski partnerji so odšli brez njih, marsikateri pa je pustil nekaj svojih genov na Cerkljanskem. Menda je rajnki dekan Mozetič kar dobro poznal te reči in je tiste, ki so izgubili oblast nad svojim telesom, ne glede na spol in narodnost, kar krepko obdelal z besedami.

Vrnimo se k naši prvi pomembni konstanti, brez katere v matematiki in drugih naravoslovnih znanostih enostavno ne gre. Število e navadno definiramo z limito številskega zaporedja:

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{1}$$

Samo po sebi ni takoj razvidno, da zgornja limita sploh obstaja, saj osnova $1 + 1/n$ z rastočim n konvergira proti 1, eksponent pa gre proti ∞. Čeprav je 1 na katerokoli naravno število še vedno 1, pa tega ne moremo trditi za 1^∞, saj ∞ sploh ni število. Zato mora limita (1) biti deležna posebne pozornosti in natančne obravnave. Šele ko potrdimo njen obstoj, lahko na običajni način vpeljemo eksponentno funkcijo exp z osnovo e:

$$\exp x = e^x .$$

Brez težav vpeljemo njeno inverzno funkcijo, naravni logaritem ln kot logaritemsko funkcijo z osnovo e. Pravimo, da je realno število y naravni logaritem pozitivnega števila x, izraženo v simbolih $y = \ln x = \log_e x$, če je $e^y = x$. Seveda je $\ln 1 = 0$ in $\ln e = 1$.

Drugo, Eulerjevo konstanto γ, pa definiramo z rahlo bolj zapleteno limito:

$$\gamma = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) . \tag{2}$$

Vsota

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

je n-ta delna vsota divergentne harmonične vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots$$

Tudi sedaj moramo biti previdni. V limiti (2) delna vsota harmonične vrste in $\ln n$ z rastočim n gresta proti ∞. Čeprav je za vsako realno število a preprosto $a - a = 0$, pa ne moremo kar tako trditi, da je tudi $\infty - \infty = 0$, saj ∞ sploh ni število. Zato moramo tudi limiti (2) posvetiti posebno pozornost in natančno obravnavo.

Za neučakane pa zapišimo decimalna zapisa obeh konstant na nekaj decimalk:

$$e = 2.718\,281\,828\dots, \quad \gamma = 0.577\,215\,664\dots$$

Ali limiti (1) in (2) zares obstajata? V matematiki se pač nima nobenega smisla ukvarjati z rečmi, ki ne obstajajo. Da bi odgovorili na to zapleteno vprašanje, pripravimo najprej pomembno Bernoullijevo[65] neenakost, ki pravi: za vsako celo število n in vsako realno število $x > -1$ velja neenakost

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{3}$$

Za $n \neq 0$ in $n \neq 1$ velja v (3) enačaj samo za $x = 0$.

Primer $n = 0$ ni prav nič zanimiv, ker tedaj (3) za vsak $x > -1$ očitno drži. Bernoullijevo neenakost (3) dokažemo posebej za pozitivne in posebej za negativne eksponente n.

Naj bo najprej eksponent n v (3) poljubno naravno število. Neenakost potem dokažemo s priljubljeno metodo matematične ali popolne indukcije, ki je posledica Peanovih[66] aksiomov. Za $n = 1$ velja v (3) kar enačaj: $1 + x = 1 + x$. Predpostavimo, da velja $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ za neko naravno število n za vsak $x > -1$. Potem velja

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) =$$

[65] Jakob Bernoulli (1655–1705) – švicarski matematik.

[66] Giuseppe Peano (1858–1932) – italijanski matematik.

$$= 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x.$$

Torej res velja (3) za vsako naravno število n in vsak $x > -1$. Hkrati opazimo, da za $x = 0$ velja enačaj.

Kako je v primeru, ko je n negativno celo število? Tedaj pišemo $n = -m$, kjer je m naravno število. Dokazati moramo, da velja

$$(1+x)^{-m} \geq 1 - mx \tag{4}$$

za vsako naravno število m in vsak $x > -1$. Ker je $1 \geq 1-x^2 = (1-x)(1+x)$, dobimo po deljenju z izrazom $1+x > 0$ neenakost $(1+x)^{-1} \geq 1-x$. Torej (4) drži za $m = 1$. Predpostavimo, da je neenakost (4) pravilna za neko naravno število m. Potem velja za $-1 < x < 0$:

$$(1+x)^{-m-1} = (1+x)^{-m}(1+x)^{-1} \geq (1-mx)(1-x) =$$

$$= 1 - (m+1)x + mx^2 \geq 1 - (m+1)x.$$

Za $x = 0$ velja v naših neenakostih povsod enačaj.

Za $0 < x < 1$ je

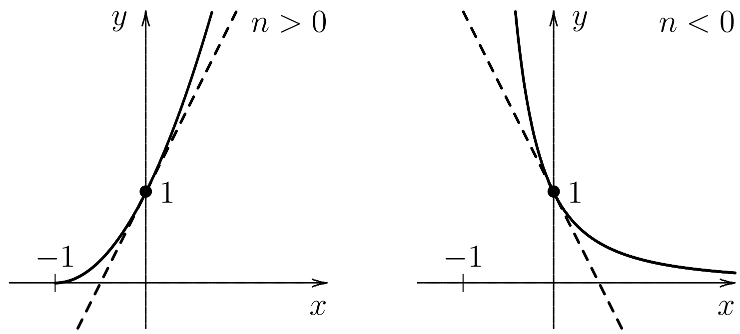
$$(1+x)^{-m} \geq (1-x)^m = (1+(-x))^m > 1 + m(-x) = 1 - mx\,,$$

ker je sedaj $-x > -1$ in lahko uporabimo že dokazano neenakost (3).

Za $x \geq 1$ pa je $(1+x)^{-m} > 0$, medtem ko je $1 - mx \leq 0$, tako da tudi tedaj velja $(1+x)^{-m} > 1 - mx$.

Neenakost (3) smo s tem v popolnosti dokazali. Morali pa smo biti precej previdni pri sklepanju, kajti rokohitrstvo in nepazljivost, ko pomotoma množimo ali delimo z negativnim številom, nas pogosto zapelje v napačne sklepe. Tukaj smo se morali sklicevati na to, da lahko med seboj pomnožimo le neenakosti pri določenih pogojih. Konkretno: če je $0 \leq a \leq b$ in $0 \leq c \leq d$, potem je $0 \leq ac \leq bd$. Če namreč prvo neenakost pomnožimo s $c \geq 0$, drugo pa z $b \geq 0$, dobimo $ac \leq bc$ in $bc \leq bd$, na koncu pa $0 \leq ac \leq bd$. Takšne so pač lastnosti realnih števil in pri tem nam ni pomoči!

Kakšna je preprosta geometrijska razlaga Bernoullijeve neenakosti? Na poltraku $(-1, +\infty)$ ni nikdar krivulja $y = (1 + x)^n$ pod svojo tangento $y = 1 + nx$, tako kot kaže slika 10. Vse skupaj bi lahko dokazali v nekaj vrsticah,



Slika 10: Geometrijska razlaga Bernoullijeve neenakosti.

če bi upoštevali, da je krivulja $y = (1 + x)^n$ na poltraku $x > -1$ konveksna za vsako celo število, različno od 0 in 1. Konveksna je krivulja na intervalu, če je, gledano v koordinatnem sistemu v smeri naraščajočih ordinat, krivulja nad vsemi njenimi tangentami na tem intervalu.

Za števili 0 in 1 Bernoullijeva neenakost očitno velja, za ostale cele n pa je produkt $n(n-1)$ pozitiven. Tedaj je pozitiven tudi drugi odvod $y'' = n(n-1)(1+x)^{n-2}$ za $x > -1$, kar pomeni konveksnost krivulje. Pri konveksni krivulji na intervalu pa so njene tangente vselej pod krivuljo.

Za dokaz obstoja limite (1) vpeljemo zaporedji $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in $b_1, b_2, b_3, \ldots$ s členi

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad \text{in} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Očitno velja $a_n < b_n$ za vsak indeks. Z Bernoullijevo neenakostjo pa bomo brez težav dokazali, da je prvo zaporedje naraščajoče, drugo pa padajoče in da postane razlika $b_n - a_n$ z rastočim n poljubno majhna.

Naj bo n naravno število, večje od 1. Iz Bernoullijeve neenakosti za pozitiven eksponent n dobimo za $x = -1/n^2$:

$$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n > 1 + n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1 - \frac{1}{n}.$$

Izraz na levi najprej razstavimo po znanem pravilu in imamo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n > 1-\frac{1}{n}.$$

Očitno je iz te neenakosti možno sklepati, da je:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n > \left(1-\frac{1}{n}\right)^{1-n} =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{1-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1} = a_{n-1}.$$

Naj bo n spet naravno število, večje od 1. Iz Bernoullijeve neenakosti za negativen eksponent $-n$ dobimo za $x = -1/n^2$:

$$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^{-n} > 1-n\left(-\frac{1}{n^2}\right) = 1+\frac{1}{n}.$$

Izraz na levi zopet najprej razstavimo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > 1+\frac{1}{n}.$$

Iz dobljene relacije je naprej

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

oziroma

$$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} < \left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n} =$$

$$= \left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n} = b_{n-1}.$$

Nazadnje smo pa le ugotovili, da velja naslednja verigo neenakosti:

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < b_3 < b_2 < b_1.$$

Zaporedje s členi a_n je torej naraščajoče in navzgor omejeno z b_1. Osnovni izrek o zaporedjih pravi, da je tako zaporedje konvergentno, kar pomeni, da se z rastočim indeksom n členi a_n poljubno približajo nekemu realnemu številu, ki ga označimo z e. Za vsak indeks n velja neenakost $a_n < e$. Zaporedje s členi b_n pa je padajoče in navzdol omejeno z a_1. Osnovni izrek o zaporedjih pa pravi, da je tako zaporedje konvergentno, kar pomeni, da se z rastočim indeksom n členi b_n poljubno približajo nekemu realnemu številu, ki ga začasno označimo z e'. Ker je $b_n = a_n(1+1/n)$, imata očitno obe zaporedji isto limito, torej mora veljati $e' = e$. Za vsak indeks n je izpolnjena neenakost $e < b_n$.

Torej sta res obe zaporedji konvergentni in velja:

$$e = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Hitro ugotovimo, da število e leži med 2 in 3. Najprej je $a_1 = 2 < e$, nato pa najdemo še $e < b_5 < 3$. Število e očitno ni naravno. Tudi racionalno ni, ne da se ga zapisati v obliki kvocienta dveh naravnih števil. Še huje, ni algebrsko, je transcendentno, to pomeni, da ni ničla nobenega polinoma s celimi koeficienti. Pa tako veliko jih je! Med realnimi števili so algebrska zelo majhna manjšina.

Zgornji postopek so matematiki uporabljali dolgo vrsto let, od Arhimeda iz Sirakuz naprej. Rekli so mu *metoda izčrpavanja* ali *izsesavanja*, s tujko *ekshavscijska metoda*. Dokler ni bilo na razpolago izpopolnjenega in zanesljivega integralskega računa, so računali na primer ploščine likov, dolžine krivulj in prostornine ter površino teles s to metodo. Skoraj za vsak lik, krivuljo ali telo posebej je bilo treba iznajti prijem, ki je vodil prek metode izčrpavanja do rezultata.

Število e je iracionalno, kot pokaže nekoliko bolj zapleten račun, in za vsako naravno število n velja relacija:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Z naravnim logaritmiranjem dobimo iz zgornje relacije

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Njeno levo polovico prepišemo v obliko

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}\,,$$

desno polovico pa v obliko:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n. \tag{5}$$

Namesto n pišemo raje k in najdemo relacijo

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}\,, \tag{6}$$

ki velja za vsak naraven k. Če zapišemo (6) posebej za $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ in vse dobljene relacije seštejemo, dobimo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Vsota na sredini

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \ldots + (\ln(n+1) - \ln n)$$

se preprosto sesede in od nje ostane samo še člen $\ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$. Vsota

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

je n-ta delna vsota harmonične vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots \tag{8}$$

Relacijo (7) najprej zapišemo kot

$$h_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < h_n. \tag{9}$$

Če izberemo dovolj velik n, preseže $\ln(n+1)$ vsako, še tako veliko pozitivno število M. Iz desne polovice relacije (9) vidimo, da potem tudi h_n preseže M. To pomeni, da harmonična vrsta nima končne vsote. Zelo, zelo počasi, a vendar, harmonična vrsta divergira. Neverjetno, če seštejemo dovolj mnogo njenih členov, lahko presežemo še tako veliko pozitivno število.

Zakaj pravzaprav rečemo vrsti (8) *harmonična*? Zagotovo imena ni dobila po harmonikah, s kakršnimi so nekdaj koledovali po vaseh, ali pa po harmoniju, kakršnega je že pred prvo svetovno vojno kupilo planinsko prosvetno društvo, ki je imelo svoj pevski zbor. Celo naš ata je pel v njem, dokler niso italijanske oblasti taka društva povsem prepovedale. Harmonij so včasih odnesli na kor planinske cerkve sv. Janeza Krstnika, preostale dneve pa je stal Pri Mežnarju v hiši sredi vasi. Mežnarjev Peter je študiral glasbo in je bil svoj čas zagotovo glasbeno najbolj izobražen Planinec. Ko je doma umrl gospodar, se je moral vrniti iz šol in se posvetiti kmetovanju. Če pa je le imel čas, je kaj zaigral tudi ob navadnih dnevih. Ker z ženo nista imela potomcev, je kmetija propadla in tudi hiše ni več. Harmonij pa je končal v stavbi planinske mlekarne. *Harmonika* in *harmonij* in podobne besede imajo izvor v grščini: ἁρμονία namreč pomeni med drugim *pravilno razmerje, sorazmerje, skladnost, soglasje*.

Harmonična sredina $H(a,b)$ pozitivnih števil a in b je definirana kot obratna vrednost povprečja njunih obratnih vrednosti:

$$H(a,b) = \left(\frac{1}{2}\left(a^{-1} + b^{-1}\right)\right)^{-1}.$$

V vrsti (8) je vsak člen od vključno drugega naprej harmonična sredina svojega levega in desnega soseda:

$$H\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}((n-1)+(n+1))\right)^{-1} = \frac{1}{n}.$$

Zato torej pravimo vrsti (8) harmonična vrsta.

Brucem je bilo na prvih predavanjih rečeno: "Poglejte svojega levega in desnega soseda, samo eden od vas treh bo ostal." S tem je bilo mišljeno, da bo malokdo vztrajal na fakulteti vse do diplome. Pa še res je bilo, kakor se je izkazalo čez nekaj let.

Da bi dokazali obstoj limite (2), vpeljemo pomožno zaporedje $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3. \ldots,$ kjer je $\gamma_n = h_n - \ln n$. Dokazati moramo, da ima zaporedje s členi γ_n limito. Najprej je seveda $\gamma_1 = 1$, iz leve polovice (9) pa dobimo $\gamma_{n+1} = h_{n+1} - \ln(n+1) < 1$ za $n \geq 1$. Torej velja $\gamma_n \leq 1$ za vsak naraven n. Če upoštevamo desno polovico v (9), dobimo

$$\gamma_n = h_n - \ln n > \ln(n+1) - \ln n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) > 0$$

za vsak naraven n. Zaporedje s členi γ_n je torej na obe strani omejeno: $0 < \gamma_n \leq 1$.

Po definiciji števil γ_n in zaradi (5) imamo hitro:

$$\gamma_{n+1} - \gamma_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n < 0.$$

Zaporedje s členi γ_n je torej padajoče, saj je $\gamma_{n+1} < \gamma_n$ za vsak indeks n. Omejeno padajoče zaporedje s členi γ_n pa je konvergentno in njegovo limito označimo z γ in to je *Eulerjeva konstanta*.

Eulerjeva konstanta γ je tudi limita zaporedja s splošnim členom $h_n - \ln(n+1)$. To ni nič čudnega, saj lahko očitno zapišemo

$$h_n - \ln(n+1) = h_{n+1} - \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) = \gamma_{n+1} - \frac{1}{n+1}\,,$$

iz česar dobimo:

$$\lim_{n\to\infty}(h_n - \ln(n+1)) = \lim_{n\to\infty}\left(\gamma_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) = \gamma.$$

Zato v nekaterih knjigah definirajo Eulerjevo konstanto za spoznanje drugače:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right). \tag{10}$$

Definiciji (2) in (10) sta enakovredni.

Zaporedje s splošnim členom $h_n - \ln n - \gamma$ ima limito 0. Za dovolj velik n je potemtakem $\ln n + \gamma$ poljubno blizu n-ti delni vsoti divergentne harmonične vrste (8). Kako počasi divergira harmonična vrsta, povesta na primer relaciji $h_{1000} \approx 7.48$ in $h_{1000000} \approx 14.39$, o čemer se lahko prepriča bralec sam.

Kot primer uporabe, da ne bi kdo rekel, da je vse to le sebi namen, izračunajmo

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right).$$

Očitno lahko izrazimo z delnimi vsotami harmonične vrste in s števili γ_n:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}=$$
$$=h_{2n}-h_n=(\gamma_{2n}+\ln(2n))-(\gamma_n+\ln n)=\gamma_{2n}-\gamma_n+\ln 2.$$

Podzaporedje $\gamma_2,\gamma_4,\gamma_6,\ldots$ konvergentnega zaporedja s členi γ_n je tudi konvergentno z isto limito γ. Torej imamo rezultat:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)=\ln 2.$$

Eulerjeva konstanta γ se pojavlja v precej zapletenih računih, ki jih tu ne bomo delali. Število e pa rado nastopa pri opisu naravne rasti ali naravnega odmiranja. Nima sicer tako velikega slovesa kakor število π, krožna konstanta, razmerje med obsegom in premerom kroga. Študentje pa si navadno zapomnijo vsaj znamenito formulo, ki povezuje pet matematičnih konstant: $0, 1, i, \pi$ in e. Pri tem je i imaginarna enota, za katero je $i^2 = -1$. Formula, zapisana marsikje, včasih tudi na spominkih, lončkih in majicah, je:

$$e^{\pi i}+1=0.$$

Število e se da razmeroma enostavno izračunati, če seštejemo dovolj členov vrste

$$1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots,$$

ki ima za vsoto ravno število e. Eulerjeva konstanta γ pa ni več tako preprosta reč. Razvili so zapletene postopke, s katerimi lahko γ izračunamo poljubno natančno. Sam Euler je svojo konstanto računal na 15 decimalk.

Pri računalniškem praktikumu nam je pokojni profesor Egon Zakrajšek (1941–2002) razdelil naloge, ki smo jih morali najprej temeljito analitično obdelati, nato pa do končne rešitve priti z računalnikom. Na fakulteti je bil takrat nameščen stroj IBM 1130. Deloval je seveda na kartice z luknjicami. Nekaj let pred tem so računali na ZUSE Z-23, ki je uporabljal trakove z luknjicami. Če ne drugega, so se programerji dobro naučili, kako varčevati s pomnilnikom. No, naš IBM 1130 je bil pravo razkošje, čeprav je imel le kakih 32 kilobajtov spomina. Za delovanje je uporabil 3 sobe, vsaka je bila velikosti povprečnega profesorskega kabineta. V enem so tajnice luknjale kartice. Programe je bilo treba pisati na posebne obrazce, kjer je bil vsak stolpec nečemu namenjen. Programirali smo v fortranu tako, kakor nas je naučil profesor Zakrajšek v enem semestru. V drugem prostoru je bila škatla, kamor smo študenti odlagali paketke kartic, ki jih je računalniški operater vstavil v stroj, ko ni imel pomembnejšega dela. V drugi škatli pa smo dobili nazaj paketke in rezultate, seveda če je program sploh deloval. V tem prostoru je stal poseben luknjač za študente in take, ki niso imeli časa čakati sicer prijaznih in zalih tajnic, da bi jim luknjale kartice. Luknjanje kartic je potekalo na posebnem stroju prek tipkovnice. Da ne bi kdo mislil, da so kartice luknjale z dletom in kladivcem v roki!

Tretji prostor, najvažnejši, je bil namenjen samemu računalniku z vsemi pomožnimi napravami. Tu noter so smeli vstopati le posvečeni, navadno v belih delovnih haljah in s kravatami. Prostor, za stopnico više od drugih, je moral imeti stalno temperaturo in vlago, računalnik pa je terjal tudi stalno električno napetost in frekvenco. Modri stroji so delovali za današnje pojme dokaj počasi, toda zanesljivo. Pravilno zložene kartice je operater vstavil nad poseben požiralnik in jih obtežil z ročajastim pokrovom, ki jih je potiskal navzdol, eno za drugo pa jih je sistem grabil on odčitaval. Videti je bilo kot mletje orehovih jedrc doma, kjer smo tudi tiščali s primerno silo navzdol leseno klado, tako da je valj lahko grabil jedrca in jih mlel. Lega luknjic je povedala zapis znaka, ki ga je razumel stroj. To požiranje kartic je za čuda potekalo kar hitro. Naši programski paketi so bili navadno bolj tanki. Ko pa je šlo za profesionalne probleme, so bili paketi debeli tudi za ped ali več. Gorje, če ti je paket padel po tleh in kartice niso bile oštevilčene!

Tiste čase, ko smo bili še študentje, me je Miro Kline, ki je stanoval v istem študentskem domu kot jaz, prosil, da mu sestavim preprost program, ki bi poiskal vse take besede s štirimi črkami, pri katerih sta prva in tretja črka soglasnika, druga katerikoli samoglasnik in zadnja samoglasnika A ali I. Vseh možnosti je v slovenščini $20 \cdot 5 \cdot 20 \cdot 2 = 4\,000$. IBM 1130 je poznal samo velike črke, številke in nekaj ločil. Nato so se na podlagi izpisa na oddelku za revije pri časopisni hiši Delo odločili za ime *Jana*, kar je še danes, kljub hudim težavam v času globalne krize, naslov znane ženske revije. Delo je takrat imelo svoje prostore razmetane po središču Ljubljane, visoko današnjo stavbo v bližini železniškega nadvoza čez Dunajsko cesto, je dobilo kasneje. Nekajkrat sem bil v tej stavbi. Enkrat sem naročil objavo osmrtnice za svojo pokojno mamo, nekajkrat pa opravil korekture za svoje prispevke v računalniški reviji Moj mikro.

Nato kakih 10 let z računalniki nisem imel kaj dosti opraviti, dokler se niso pojavili majhni hišni računalniki, ki so lahko za monitor uporabili kar hišni televizor. Pomnilnika so imeli več kot tista pošast na fakulteti, vse skupaj pa je bilo v prostoru, manjšem od škatle za čevlje. Medtem so se razširila tudi žepna računala, tako da je šolskim logaritemskim tablicam, brez katerih nekdaj na gimnaziji ni šlo, počasi odklenkalo. Uporaba televizorja in hišnega računalnika je vodila tudi do družinskih prepirov, saj niso bili vsi družinski člani navdušeni nad hišnim računalnikom in bi raje gledali kakšno zanimivo oddajo ali film. Kljub vsemu pa so v domove računalniki nezadržno prodirali, nekaterim v korist, drugim za zabavo. Del mladine je postal naravnost zasvojen z računalniškimi igricami.

No, pri računalniškem praktikumu sem izbral nalogo, izračunati število e na 1000 decimalk natančno. Beseda *praktikum* je grškega izvora, πρακτίκος pomeni *spreten, vešč, izveden, delaven, podjeten*. To je stroj je število e kar hitro izračunal, hitreje kot kolegu, ki pa je imel za nalogo izračunati krožno konstanto, to je število π na tisoč decimalk. Ker je računanje potekalo predolgo, je bil profesor Zakrajšek nazadnje zadovoljen s petstotimi decimalkami. Danes z lahkoto tako delo s primernim programom opravimo v trenutku na več tisoč decimalk celo z osebnimi računalniki.

Za število e je vse skupaj precej preprosto. Seštevješ dovolj členov vrste

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \ldots ,$$

pri čemer računaš člene na nekaj več kot 1000 decimalk zaradi zaokrožitvenih napak. Da se vnaprej oceniti, na koliko decimalk več. Poleg tega se da naslednji člen izračunati z deljenjem iz prejšnjega, saj velja

$$\frac{1}{(n+1)!} = \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Decimalke členov in delnih vsot vrste so ždeli vsak v svojem v celoštevilskem vektorju, zapisati je bilo potrebno samo to, kako se dva taka vektorja sešteje z upoštevanjem prehoda, tako kot smo delali v osnovni šoli z dosti krajšimi števili, in kako se tak vektor deli z naravnim številom tako, kot bi človek računal na papir. Proti vsem pričakovanjem se je na izpisu že prvič pojavil na 1000 decimalk pravilen rezultat v nekaj vrsticah, po 5 in pet decimalk, ločenih s presledkom, tako kot sem sprogramiral. Po knjigah sta bili že takrat objavljeni števili e in π na še več decimalk, tako da se je dalo kontrolirati dobljene rezultate.

Navadno avtorji in predavatelji kar malo poonegavijo, ko pravijo, da je očitno

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots \quad \text{in} \quad e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Njim je morda to že očitno ali pa se samo delajo, da jim je. V resnici pa se je treba pri tem le nekoliko potruditi. Z binomsko formulo imamo najprej:

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Pri tem je $1 < k < n$. Členi vsote na desni so pozitivni in zato za poljuben tak k velja neenakost:

$$a_n > 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k}.$$

desno stran neenakosti prepišemo v drugo obliko in dobimo:

$$a_n > 2 + \frac{1-1/n}{2!} + \frac{(1-1/n)(1-2/n)}{3!} + \ldots + \frac{(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n)}{k!}.$$

Sedaj naj $n \to \infty$ pri stalnem k. Dobimo:

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{k!}.$$

Na desni strani je k-ta delna vsota konvergentne vrste

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Ko naredimo nazadnje še limitni prehod $k \to \infty$, dobimo:

$$e \geq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

Po drugi strani pa za k-ti člen v razvoju števila a_n po binomski formuli velja neenakost:

$$\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1)}{k!n^k} =$$

$$= \frac{(1-1/n)(1-2/n)\ldots(1-(k-1)/n)}{k!} < \frac{1}{k!}.$$

Torej velja tudi neenakost

$$a_n < 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Ko $n \to \infty$, dobimo najprej

$$e \leq 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$$

in nazadnje enakost:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \ldots$$

Iracionalnost števila e lahko dokažemo ravno z zgornjo vrsto. Za vsak $n > 1$ lahko ocenimo vsoto

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \ldots$$

takole:

$$r_n = \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \ldots\right) <$$
$$< \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+1}} =$$
$$= \frac{n+1}{(n+1)!n} = \frac{1}{n!n}\,.$$

Vzemimo, da je vsemu navkljub število e racionalno, recimo $e = a/b$, kjer sta si a in b tuji naravni števili. Imenovalec b ne more biti 1, ker bi bilo v takem primeru število e naravno, vemo pa, da je $2 < e < 3$. Torej je $b \geq 2$. Ravno s številom b pa sedaj zapišimo:

$$e = \frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{b!} + r_b\,.$$

Torej bi veljala relacija:

$$\alpha_b = b!\left(\frac{a}{b} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} - \ldots - \frac{1}{b!}\right) = b!r_b\,.$$

Število

$$\alpha_b = (b-1)!a - b! - \frac{b!}{1!} - \frac{b!}{2!} - \ldots - 1 = b!r_b$$

bi bilo potemtakem očitno naravno število. Hkrati pa bi veljala relacija

$$b!r_b < b! \cdot \frac{1}{b!b} = \frac{1}{b} < 1\,.$$

Torej bi imeli relacijo

$$0 < \alpha_b < 1\,,$$

kateri pa naravno število α_b ne more ustrezati, saj med 0 in 1 ni nobenega naravnega števila. To pomeni, da je bila predpostavka o racionalnosti števila e napačna. Število e je zares iracionalno.

Čemu zdaj še zagonetno število e? Mar ni že π dovolj? V resnici pa do števila e pridemo precej naravno. Že od zdavnaj ljudje poznajo denar in obresti. Ko položimo svoje piškave prihranke na bančni račun, nam začnejo teči obresti. Letna obrestna mera p v odstotkih pove, kolikšno vsoto nam bodo po enem letu prišteli glavnici a, ki smo jo morda s tresočo roko položili. Teh obresti po enem letu bo ap. Tedaj bomo imeli vsega $a + ap = a(1 + p)$. Če bi sedaj pustili pri isti obrestni meri p ta znesek nedotaknjen na banki še eno leto, bi imeli čez eno leto že $a(1+p)(1+p) = a(1+p)^2$ denarja, torej po vsega dveh letih varčevanja. Po n letih bi na tak način imeli znesek $a(1+p)^n$. Kapital nam bi torej naraščal v geometrijskem zaporedju s kvocientom $1 + p$ in obresti bi se nam pripisovale letno.

Sedaj si pa mislimo, da nam obresti pripisujejo že sproti med letom, denimo r-krat na leto. Seveda potem ni p več obrestna mera za dobo, ki traja r-ti del leta, ampak je ustrezno p/r. V n letih nam banka pripiše obresti vsega nr-krat na koncu obdobja, ki traja r-ti del leta po obrestni meri p/r. Torej imamo na banki po n letih vsoto

$$a\left(1 + \frac{p}{r}\right)^{nr} = a\left(\left(1 + \frac{p}{r}\right)^{r}\right)^{n}.$$

Kaj se s tem kapitalom dogaja, če število pripisov r večamo v nedogled? Procesu tedaj pravimo *neprestana kapitalizacija*. Govorili bi, da imamo po n letih kapital

$$A = a\lim_{r\to\infty}\left(\left(1 + \frac{p}{r}\right)^{r}\right)^{n} = a\left(\lim_{r\to\infty}\left(1 + \frac{p}{r}\right)^{r}\right)^{n}.$$

Zadnja limita je $e^p = \exp p$, kar bomo spoznali malo kasneje, in nazadnje imamo:

$$A = a(\exp p)^n = a\exp(pn).$$

Pri enem milijonu evrov, ki jih premore morda kak tajkun, zelo bogat in vpliven podjetnik z močnimi političnimi povezavami, in bi jih položili pred enim letom, bi bila razlika med kapitalom pri neprestani kapitalizaciji in kapitalom pri letni kapitalizaciji pri $p = 2\%$ samo 201 €, pri $p = 10\%$ pa že 5 171 €.

Dolžni smo še vsaj na grobo pojasniti, zakaj je

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{p}{r}\right)^r = \exp p.$$

V resnici velja še bolj splošno. Za vsako realno število x je

$$\lim_{r\to\infty}\left(1+\frac{x}{r}\right)^r = \exp x.$$

Najprej velja

$$\lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{m\to\infty}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{-m} = \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^m =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m-1}\right)^{m-1}\left(1+\frac{1}{m-1}\right) = e.$$

Torej lahko zapišemo:

$$\lim_{|n|\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$$

V tej limiti se spreminja n po celih vrednostih. Za katerikoli realni $x > 1$ vzamemo celo število $m = [x]$, za katero je $m \le x < m+1$. Potem veljata tudi relaciji

$$1+\frac{1}{m+1} < 1+\frac{1}{x} \le 1+\frac{1}{m}$$

in

$$\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m < \left(1+\frac{1}{x}\right)^m \le \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{m+1} \le \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1}.$$

Uporabili smo lastnost, da je potenčna funkcija z osnovo, ki je večja kot 1, naraščajoča. Ker je očitno

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m+1}\right)^m = e$$

in

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m+1} = e\,,$$

mora biti tudi

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,,$$

kjer se x spreminja po pozitivnih realnih številih.

Za limito v $-\infty$ delamo podobno kot prej. Na koncu dobimo limito

$$\lim_{|x|\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} = e\,,$$

iz katere sledi

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x} = e.$$

Potem res lahko izračunamo

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n} = \lim_{y\to 0}((1+y)^{1/y})^{x} = e^{x} = \exp x.$$

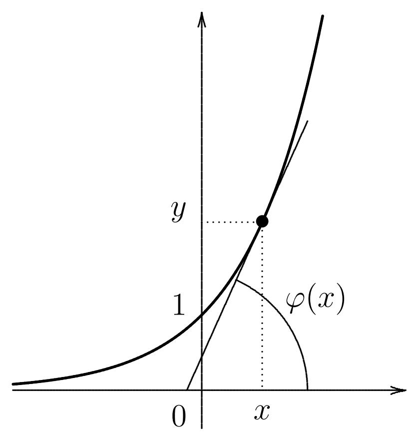
Eksponentno funkcijo exp odlikuje še ena lepa lastnost. Strmina tangente (slika 11), to je tangens naklonskega kota tangente na eksponentno krivuljo $y = \exp x$ v točki x je kar $\exp x$. Do strmine $k(x) = \tan\varphi(x)$ tangente pridemo z limito strmine sekante skozi točki $(x, \exp x)$ in $(x+h, \exp(x+h))$, ko $h \to 0$:

$$\begin{aligned}
k(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\exp(x+h)-\exp x}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\exp x\exp h-\exp x}{h} = \\
= \exp x\lim_{h\to 0}\frac{\exp h-1}{h} &= \exp x\lim_{u\to 0}\frac{u}{\ln(1+u)} = \\
= \exp x\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{1/u}} &= \exp x\frac{1}{\ln(\lim_{u\to 0}(1+u)^{1/u})} = \exp x.
\end{aligned}$$

Z odvodom bi preprosto zapisali:

$$(\exp x)' = \exp x.$$

Odvajanje eksponentni funkciji z osnovo e ne pride do živega. Če bi se vprašali, ali je še kakšna funkcija s to lastnostjo, bi ugotovili, da v bistvu ne. Vse funkcije, zvezne in odvedljive na vsej realni osi, ki jim odvajanje nič ne more, so oblike $c \exp x$, kjer je c poljubna realna konstanta.



Slika 11: Strmina eksponentne krivulje.

Na gimnaziji smo precej časa posvetili obrestno-obrestnemu računu, ker se pri njem da praktično uporabiti geometrijsko zaporedje in vrsto. Obenem pa dijak dobi nekaj občutka za delo z denarjem: o varčevanju, rentah, dolgovih. Celo o denarni plati Nobelovih[67] nagrad smo mimogrede nekaj povedali. Poleg tega naletimo na čudne enačbe, čim postavimo dovolj zvito nalogo.

Recimo, da smo nekomu posodili znesek a za 3 leta po letni obrestni meri p v prvem letu, $2p$ v drugem in $3p$ v tretjem letu. Kolikšen naj bo p, da nam bo dolžnik čez 3 leta moral vrniti z obrestmi vred dvojni posojeni mu znesek? Po prvem letu nam je dolžan $a(1+p)$, po drugem $a(1+p)(1+2p)$, po tretjem pa $a(1+p)(1+2p)(1+3p)$. Nazaj moramo dobiti pa $2a$, torej mora veljati enačba:

$$a(1+p)(1+2p)(1+3p) = 2a.$$

[67] Alfred Nobel (1833-1896) – Švedski kemik in izumitelj.

Problem je očitno neodvisen od a, saj z njim zgornjo enačbo pokrajšamo in ugotovimo, da mora p zadoščati kubični enačbi

$$(1+x)(1+2x)(1+3x)=2$$

oziroma po preoblikovanju

$$6x^3+11x^2+6x-1=0.$$

Poiskati moramo torej pozitivno ničlo polinoma

$$P(x)=6x^3+11x^2+6x-1.$$

Ker je $P(0)<0$ in $P(1)>0$, leži ničla med 0 in 1. Ker polinom $P(x)$ za $x>0$ narašča, je med 0 in 1 samo ena ničla, iskana obrestna mera p.

Na gimnaziji smo potratili precej časa, ko smo iskali racionalne ničle polinomov s celimi koeficienti. Kandidati za take ničle našega polinoma $P(x)$ so vsi količniki deliteljev konstantnega člena -1 z delitelji vodilnega koeficienta 6. To so: $\pm1, \pm1/2, \pm1/3, \pm1/6$. Toda noben od teh kandidatov ni ničla. V učbeniku smo imeli na razpolago postopek za določevanje mej realnih ničel realnega polinoma, Hornerjevo[68] shemo in, če je bilo potrebno, logaritemske tablice. Računanje in osamevanje ničel polinoma nam je odščipnilo precej dragocenega časa od naše že tako in tako kratke mladosti, naučili pa se nismo kaj posebno novega. Takrat ni bilo še nobenih žepnih kalkulatorjev. O računalnikih smo lahko tista leta le sanjali. Nekaj jih je na svetu sicer že bilo, še na elektronke, kartice in trakove. Ko bi imeli vsaj računovodske računske strojčke! Danes iskanje ničel funkcij opravijo računalniki v delčku sekunde. Ne le to, znajo tudi razstavljati, odvajati, integrirati, delati z matrikami itd. Vsa srednješolska analiza in algebra sta tako rekoč zbrani na eni majhni računalniški disketi.

Polinom, po domače *mnogočlenik*, je seveda beseda grškega izvora, nastala iz πολύς in νόμος. Prva pomeni *mnogo*, druga pa *zakon, pravilo, načelo.* Večinoma smo na gimnaziji delali s polinomi z eno spremenljivko, pri stožnicah

[68]William Horner (1786–1837) – britanski matematik.

smo prvič srečali polinome z dvema spremenljivkama, na univerzi pa smo spoznali tudi polinome z več spremenljivkami. Polinome lahko seštevamo, odštevamo in množimo, pa je rezultat spet polinom. Pri deljenju pa se seveda zaplete. Polinom ima lahko realne ali kompleksne koeficiente, ni pa to nujno.

Zgoraj dobljeno enačbo moramo rešiti približno, z numeričnimi metodami. Na voljo je precej bolj ali manj zapletenih postopkov. Tudi Cerkljan, matematik in pedagog vitez Franc Močnik se je ukvarjal z enim od njih, preden je postal šolmošter in se v rajnki Avstriji ni povzpel v šolstvu kar zavidljivo visoko in postal von Močnik.

Nekaj osebnih doživetij v zvezi z Močnikom morda na tem mestu ne bi bilo odveč. V času svojega osnovnošolskega in srednješolskega izobraževanja (1956-1968) v Cerknem in Idriji sem skoraj vsak dan hodil mimo Jamškove ali Pavletove hiše v Cerknem. Na Cerkljanskem je včasih, kar je treba večkrat poudariti, vsaka družinska ali kmečka hiša imela svoje ime, navadno v mestniku, čeprav se njeni stanovalci niso vselej tako pisali ali pa gospodarju oziroma lastniku ni bilo tako ime. Zato smo govorili, da smo to in ono kupili Pri Jamšku, kajti v pritličju so Jamškovi imeli trgovino, ki je to ostala tudi po drugi svetovni vojni. Starejši ljudje, ki so odraščali v času, ko Jamškovih v Cerknem še ni bilo, pa so rekli, da je tam Pri Pavletu, po nekem Pavlu, ki je bil nekoč lastnik hiše pred Jamškovimi. Skratka, tam se je reklo Pri Jamšku oziroma Pri Pavletu. Nič posebnega, bi kdo rekel, saj so v Cerknem še druge hiše s trgovsko ali gostinsko preteklostjo, na primer Pri Gabrijelu, Pri Balantaču, Pri Makucu, Pri Jušku.

Toda Pri Jamšku, zdaj je to na Močnikovi ulici, je nekaj posebnega: na severni fasadi Jamškove hiše je vzidana spominska plošča častitljive starosti, posvečena vitezu Francu Močniku kot lahko preberemo. Plošča je kljubovala obema svetovnima vojnama in italijanski okupaciji. Pod ploščo, ki so jo odkrili že leta 1894, komaj dve leti po smrti tistega, komur je bila posvečena, smo šolarji hodili skoraj vsak dan, ne da bi se zavedali, kdo je mož, katerega spominu je obeležje tam, kjer pač je. Ne spominjam se, da bi nam kdo v šoli o njem kdaj kaj več pripovedoval. Tudi na fakulteti sem spoznal, da učitelji Močnika slabo poznajo.

Pri Jamšku smo se navadno zbirali po pouku učenci iz Čepleza in Planine, pa tudi Podpleč, da smo potem, oboroženi z novim znanjem, ki smo si ga pridobili tisti dan v šoli, pa tudi z bolj ali manj dobrimi ocenami, krenili na težaven vzpon proti Škofju.

Čakajoč na pot domov Pri Jamšku sem počasi le začel odkrivati, kdo je bil vitez Franc Močnik. Kratica Fr. na tabli pomeni Franc ali pa tudi Fran. Nekoč je bilo ime Fran namesto Franc pač bolj v modi. Cerkljani običajno rečejo Frenčk, nekaterim pa je bolj všeč Frančišek. Kakorkoli že, na plošči piše, da je bil Močnik sloveči matematik, ki je bil odlikovan z viteškim redom Franca Jožefa in še z redom železne krone. Človek si ne more predstavljati, kaj vse to pomeni, dokler se v zadevo ne poglobi. Za vse to pa je potrebno znanje splošne in šolske zgodovine ter seveda matematike. Ker je bilo o Močnikovem življenju in delu že dovolj napisanega na drugih mestih, bi dodal samo tisto, kar je name naredilo največji vtis, in tisto, kar sem osebno doživel.

Ker nikoli ni bilo pravega časa, da bi se na predavanjih spuščali v podrobnosti o tem ali onem matematiku, ni nič čudnega, da nismo tam nikoli izvedeli, kako je Francoz Augustin-Louis Cauchy (1789–1857), veliki francoski matematik, po katerem se v matematični analizi, kakršno predavajo brucem na fakulteti, imenuje skoraj vsak drugi izrek, v tridesetih letih 19. stoletja nekaj časa živel v Gorici, in sicer kot osebni učitelj vojvode Bordojskega. Je pač tako naneslo, da je Franc Močnik ravno tista leta študiral bogoslovje v Gorici, kjer je potem nekaj let tudi poučeval na tamkajšnji normalki in se obenem pripravljal za doktorat, ki ga je uspešno opravil na univerzi v Gradcu. Zelo očitno je Močnik pod Cauchyjevim vplivom napisal skoraj sto strani dolgo učeno in natančno matematično razpravo o Cauchyjevi metodi reševanja enačb, ki je bila objavljena v gotici na cesarskem Dunaju leta 1839 pod naslovom *Theorie der numerischen Gleichungen mit einer Unbekannten:*

mit besonderer Rücksicht auf die neueste von Cauchy erfundene allgemeine Auflösungsmethode – dargestellt von Franz Seraphin Mozhnik. S to razpravo si je Močnik utrl pot v matematično skupnost, v katero, tako kot danes, tudi v njegovem času ni bilo kar tako preprosto priti, kakor si marsikdo predstavlja.

Kaj je Močnika gnalo v matematiko, saj je študiral bogoslovje v Gorici, tako kot precej kasneje še en znameniti Cerkljan, ki je tudi doktoriral, to je Frančišek Sedej, ki je postal celo goriški nadškof? Morda tega ne bomo nikoli izvedeli. Lahko pa sumimo, da ga je za matematiko pregovoril Leopold Karl Schulz von Straßnitzki (1803-1852), ki je konec tridesetih let predaval matematiko na ljubljanskem liceju, ali pa je morda Močnik sam opazil blišč in bedo avstrijskega šolskega sistema ter sklenil, da ga korenito prevetri. Poleg tega je bil Straßnitzki svobodoljuben in uspešen matematik, ki je napisal nekaj knjig in se proslavil z izračunom krožne konstante, to je števila π, na takrat rekordnih 200 decimalk. To mu je uspelo z odkritjem preproste formule

$$\pi = 4(\operatorname{arc\,tg}(1/2) + \operatorname{arc\,tg}(1/5) + \operatorname{arc\,tg}(1/8)).$$

S števili $1/2, 1/5, 1/8$ se da udobno in natančno računati. Uporabiti pa je bilo treba znano potenčno vrsto:

$$\operatorname{arc\,tg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots,$$

ki absolutno konvergira pri pogoju $|x| < 1$. Ker takrat še ni bilo primernih računskih strojev, je Straßnitzki samo računanje zaupal Nemcu Zachariasu Dahseju, tudi Daseju (1824–1861), ki je slovel kot nekakšen živi kalkulator in se je s tem preživljal. Delo je uspešno opravil v dveh mesecih. Rezultat je bil tudi objavljen in vseh 200 decimalk je točnih.

Za izračun števila π je torej treba izmenoma sešteti in odšteti dovolj členov zaporedja

$$a_n = 4\left((1/2)^{2n-1} + (1/5)^{2n-1} + (1/8)^{2n-1}\right)/(2n-1), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Uporabimo moderne računalniške pripomočke in računajmo zaporedne vsote, približke števila π, $s_1 = a_1, s_2 = s_1 - a_2, s_3 = s_2 + a_3, s_4 = s_3 - a_4, \ldots$ Sledimo Daseju in zapišimo vsak četrti približek na samo 65 decimalk (tabela 1).

3.3000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	0000000000	00000
3.1417393280	0660414922	8050595238	0952380952	3809523809	5238095238	09523
3.1415929811	6997570830	8416648576	3463358045	8315763204	3201896143	07261
3.1415926533	8154134184	0878093685	3103191641	6335128383	3125612461	00660
3.1415926535	8915738280	2799494243	1252100566	3216199933	8438519383	41778
3.1415926535	8979119987	4815735073	1691221678	8196955750	3424323000	47058
3.1415926535	8979323170	9960723994	8861583398	7625284308	1408939390	58276
3.1415926535	8979323843	9746653607	3459656793	6938995481	1935313423	42950
3.1415926535	8979323846	2564370352	9397769931	1071504046	4696259071	49203
3.1415926535	8979323846	2643106862	3911486928	9373623570	0545945607	93685
3.1415926535	8979323846	2643382301	8341948352	7215649445	3699786109	95371
3.1415926535	8979323846	2643383276	0137521543	3070617828	1386449069	03681
3.1415926535	8979323846	2643383279	4903384854	9194630714	3742750519	32606
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028388001	5186747393	1650235801	13605
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028840320	0299912663	9037410682	04866
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841965	6563880248	4385503385	35523
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6718321380	3146354780	25900
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939121076	1171765029	28587
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939934493	0678436199	60122
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937499	3970545755	10214
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5405293461	20192
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5819426446	50824
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820969163	70434
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974922	96854
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	51127
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	59200
3.1415926535	8979323846	2643383279	5028841971	6939937510	5820974944	59230

Tabela 1: Približki števila π.

Število π, točno na 65 decimalk, je:

3.1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 59230.

V ta namen je bilo treba izmenoma sešteti in odšteti 105 členov. Najšibkejši člen v izrazu za a_n je tisti s potenco $(1/2)^n$. Ker je vrsta za π izmenična, lahko vnaprej napovemo, koliko členov moramo upoštevati za predpisano natančnost. Prvi opuščeni člen, ki ne sodeluje v izmenični vsoti dolžine n, je, če se ne oziramo na predznak, a_{n+1}. Če predpišemo natančnost $\varepsilon > 0$, moramo poiskati tak najmanjši indeks n, za katerega je $|a_{n+1}| < \varepsilon$. Za $n = 105$ dobimo $|a_{106}| < 3 \cdot 10^{-66}$, kar zagotavlja točnost našega sicer dolgočasnega izračuna števila π na spodobnih 65 decimalk.

Koliko členov a_n je moral izmenoma sešteti ubogi Dase, da je dobil točnih 200 decimalk števila π? Podoben račun pokaže, da 330, ker je $|a_{331}| < 1.3 \cdot 10^{-201}$.

Kasneje so izumili še boljše vrste za računanje števila π na osnovi funkcije arc tg. Takim formulam pravimo *formule Machinovega tipa*. Po Machinu[69], za katerega niti Angleži niso enotni, kako se njegov priimek izgovarja, se imenuje formula

$$\pi = 16 \operatorname{arc\,tg}(1/5) - 4 \operatorname{arc\,tg}(1/239).$$

Pri tej 1/239 ni ravno lep ulomek, pa vseeno, čeprav počasi, kar gre. Če seštejemo samo 46 členov ustreznega razvoja v vrsto, imamo π točno kar na zavidljivih 65 decimalk.

Tudi Størmerjeva formula

$$\pi = 24 \operatorname{arc\,tg}(1/8) + 8 \operatorname{arc\,tg}(1/57) + 4 \operatorname{arc\,tg}(1/239)$$

ni prav lepa, a so leta 1961 z njeno pomočjo izračunali število π na nekaj deset tisoč decimalk. Za izračun števila π na 65 točnih decimalk je dovolj sešteti le 36 členov ustreznega razvoja v vrsto. Carl Størmer (1874-1957), norveški fizik in matematik, je poznal še bolj zapleteno formulo:

$$\pi = 176 \operatorname{arc\,tg}(1/57) + 28 \operatorname{arc\,tg}(1/239) - 48 \operatorname{arc\,tg}(1/682) + 96 \operatorname{arc\,tg}(1/12943).$$

[69] John Machin (1686–1751) – angleški matematik in astronom.

Z njo je japonski matematik Yasumasa Kanada leta 2002 izračunal π na 1 241 100 000 000 decimalk.

Računanje števila π je postal nekakšen tekmovalni šport, v katerem je šlo za to, kdo bo najhitreje na čim več decimalk točno izračunal to znamenito matematično konstanto. Računanje je dobro tudi za preizkus hitrosti in zmogljivosti kakšnega novega računalnika. Omenimo še "Dan pi", 14. marec, ko ljudje tekmujejo v recitiranju decimalk števila π. Zakaj ravno na *dan pred marčnimi idami*, po latinsko *Pridie idus Martias*? Zato, ker v ZDA pišejo 14. marec v obliki 3.14, mi pa 14.3.

Doslej smo že srečali *kalende*, sedaj pa še *ide*. Manjkajo samo še *none*, pa bomo obvladali rimski koledar, iz katerega izvirata julijanski in gregorijanski koledar. S koledarjem sem se pobližje seznanil, ko smo leta 2002 praznovali 200-letnico smrti barona Jurija Vege, dve leti kasneje pa 250-letnico njegovega rojstva. Takrat smo organizirali *Vegove dneve*. Vega se je dobro spoznal tudi na koledarje, ki so bili v rabi po Evropi in Bližnjem vzhodu, ne pa samo na matematiko in balistiko. Za Vegove dneve sem pripravil nekaj prispevkov ravno o koledarju.

Velik uspeh osnovne šole je med drugim tudi ta, da učenci dobro poznajo koledar: da vejo za imena mesecev in njihove dolžine ter imena dnevov v tednu. Navadno se tega hitro naučijo, saj jih najbolj zanima, kdaj bo kak praznik in kdaj se začnejo počitnice. Spoznajo, da ni vsako koledarsko leto enako dolgo. Večina let šteje 365 dni, nekatera pa 366 dni. Prvim pravimo *navadna leta*, preostalim pa *prestopna leta*.

Če želimo narediti uporaben koledar za katerokoli leto, moramo poznati pravilo, po katerem izvemo, katera leta so prestopna, katera pa navadna. S točnim koledarjem v roki pa lahko uvrščamo dogodke v čas, tudi praznike in delovne dni, rojstne dneve, delo na vrtu in polju, vozne rede v prometu in drugo. Spoznali bomo, da ima naš koledar globoke korenine v starem Rimu, da so možni tudi drugi koledarji in da so izrazi za prestopno leto pri drugih narodih precej različni.

Osnovna enota vsakega koledarja je dan. Prestopna leta pa je treba vpeljati, kar so ljudje spoznali že zdavnaj, kajti dolžina Sončevega ali tropskega leta T ni celo število dni. Preprosto povedano, tropsko leto T je čas, ki preteče med zaporednima spomladanskima enakonočjema. Poleg tega pa se T tudi s časom silno počasi spreminja. Zato najdemo v literaturi različne podatke, na primer: $T = 365.24219$ dni, $T = 365.242199$ dni, $T = 365.242195$ dni, $T = 365.2421985$ dni. Na splošno lahko zapišemo:

$$T = 365 + \Delta T \text{ dni.}$$

Navadno pa smo zadovoljni z dosti dobrim racionalnim približkom (izražen v dnevih):

$$\Delta T \approx \frac{p}{q},$$

kjer sta si p in q tuji naravni števili. Res! Če imamo časovni cikel q let, od katerih je p prestopnih po 366 dni in $q - p$ navadnih let po 365 dni, dobimo:

$$366p + (q - p)365 \approx q(365 + \Delta T)\,.$$

Kratek račun pokaže, da je res

$$\Delta T \approx \frac{p}{q}\,.$$

Do najboljših približkov pridemo z verižnimi ulomki. Za $T = 365.2422$ dni imamo:

$$\Delta T = [4, 7, 1, 3, 4, 1, 1, \ldots] = \\ = \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

in za $T = 365.242199$ dni

$$\Delta T = [4, 7, 1, 3, 5, 20, 5, \ldots] =$$

$$= \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}$$

V prvem primeru je zaporedje racionalnih približkov naslednje:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{132}{545}, \ldots$$

V drugem primeru pa:

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{31}{128}, \frac{163}{673}, \ldots$$

Ulomek 1/4 pomeni, da je eno prestopno leto v ciklu 4 let. To je osnova *julijanskemu koledarju*. Julijansko leto je dolgo 365.25 dni.

Modrost sestavljanja koledarja na podlagi dolžine tropskega leta je ravno v razporeditvi prestopnih let s 366 dnevi med navadnimi leti s 365 dnevi. Koledarji, ki temeljijo na dolžini tropskega leta, so *solarni koledarji*. Islamski svet uporablja svoj koledar, ki temelji na periodičnem gibanju Lune okoli Zemlje, in je poseben primer *lunarnega koledarja*.

Ljudje so kmalu prišli do spoznanja, da je tropsko leto dolgo med 365 in 366 dnevi. Če bi vpeljali prekratko leto, recimo s točno 365 dnevi, bi bilo spomladansko enakonočje po takem koledarju vsako leto kasneje. Počasi bi se pomikalo proti koncu marca. Če pa bi vzeli predolgo leto, recimo s 366 dnevi, bi se pa po takem koledarju spomladansko enakonočje še hitreje pomikalo proti začetku marca.

Julij Cezar (100–44 pr. n. št.) je po izkušnjah egipčanskih astronomov popravil stari, vse prej kot dober rimski koledar tako, da je bilo po koledarski reformi vsako četrto leto prestopno s 366 dnevi. Tri vmesna leta pa so bila navadna s 365 dnevi. V ciklu 4 let je leto v takem koledarju dolgo povprečno

$$(3 \times 365 + 366)/4 = 365.25 \text{ dni}\,.$$

Tako leto je *julijansko leto*, koledarju, ki temelji na njem, pa pravimo *julijanski koledar*. Julijansko leto je predolgo, zato se spomladansko enakonočje pomika proti začetku marca. V 1600 letih se je pomaknilo že za 10 dni nazaj, kar ni bilo malo. Zato je konec 16. stoletja (leta 1582) prišlo do reforme koledarja. Spornih 10 dni so preprosto izpustili: 4. oktobru leta 1582 je sledil kar 15. oktober. Takemu koledarju pravimo *gregorijanski koledar* po papežu Gregorju XIII. Niso ga povsod takoj sprejeli, zlasti ne v protestantskih deželah, saj je bil za njih vsiljen s strani osovražene katoliške Cerkve. Vzhodna, pravoslavna Cerkev pa je ohranila julijanski koledar do današnjih dni. Gregorijanski koledar je v bistvu izboljšan julijanski. Pri obeh je pravilo za prestopna leta preprosto. Odkar štejemo leta po Kristusovem rojstvu[70], je v julijanskem koledarju prestopno vsako leto, katerega letnica je deljiva s 4. Pri gregorijanskem koledarju pa je pravilo rahlo bolj zapleteno, a še vedno enostavno: prestopno je tisto leto, katerega letnica je deljiva s 4, pa ni deljiva s 100. Od tistih, ki pa so deljiva s 100, označujejo navadno leto le tista, ki niso deljiva s 400. Tako imamo v ciklu 400 let 97 prestopnih let: $97 = 100 - 4 + 1$. Zaradi tega je dolžina gregorijanskega leta povprečno

$$(303 \times 365 + 97 \times 366)/400 = 365.2425 \text{ dni}\,.$$

To je še vedno nekoliko preveč, kar prinese razliko 26 sekund na leto. Za toliko je po tem koledarju spomladansko enakonočje prej. Pomika se proti sredini marca. Razlika 1 dan bo nastopila šele v 4. tisočletju pri pogoju, da bo tropsko leto do takrat enako dolgo kot danes. V gregorijanskem letu je

[70] Navadno raje uporabljamo izraz *naše štetje (n. št.)*, *naša era (n. e.)*, ker se je Kristus po nekaterih izračunih rodil nekaj let pred našo ero.

torej v ciklu 400 let 97 prestopnih. To pomeni, da je

$$\Delta T \approx \frac{p}{q} = \frac{97}{400}\,.$$

Tega ulomka ne dajo prej omenjeni verižni ulomki. Stari perzijski koledar (312 pr. n. št.) je temeljil na ulomku

$$\Delta T \approx \frac{p}{q} = \frac{349}{1440}\,,$$

ki ga tudi ni med njimi.

Iz verižnih ulomkov takoj razberemo, da bi lahko imeli tudi koledar, v katerem bi v 29-letnem ciklusu imeli 7 prestopnih in 22 navadnih let, ali pa koledar, v katerem bi imeli 33-letni ciklus z 8 prestopnimi in 25 navadnimi leti. Mikaven bi bil tudi koledar, v katerem bi imeli v 128-letnem ciklu 31 prestopnih in 97 navadnih let. Omar Hajjam (1048–1131) – عمر خيام, staroperzijski matematik, astronom in pesnik, je tak cikel vzel za osnovo tako imenovanemu *želaledinskemu koledarju*. V teh primerih bi morali izdelati le še pravilo, kako pametno razporediti prestopna leta med navadna. Bralec lahko samostojno hitro izračuna točnost predlaganih koledarjev in premisli, na vsake koliko let bi ga morali popravljati za en dan, kajti ulomki $7/29, 8/33$ in $31/128$ so le približki za ΔT v dnevih. Računanje na pamet s števci in imenovalci teh ulomkov pa tudi ni kaj prida primerno in estetsko, zato ostajamo pri našem gregorijanskem koledarju, ki smo ga navajeni in kjer z lahkoto operiramo z letnico in s števili 4, 100 ter 400.

Vrnimo se ponovno v stari Rim, ki nam je dal tudi imena mesecev, ki jih uporabljamo. V 8. stoletju pr. n. št. so Rimljani imeli mesece *Martius, Aprilis, Maius, Iunius, Quintilis, Sextilis, September, October, November, December*. Leto se je začelo z marcem in končalo z decembrom, v preostalem času pa se ni nič posebnega dogajalo in ta čas sploh ni bil uvrščen v koledar. Konec omenjenega 8. stoletja so uvedli meseca *Ianuarius* in *Februarius* in v 2. stoletju začetek leta pomaknili na 1. januar. Število dni po mesecih se je tudi spreminjalo, dokler se ni ustalilo pri današnjih v času vladanja cesarja Avgusta (63 pr. n. št. – 14 n. št.). Cezarju v čast so mesec *Quintilis* preimenovali v *Iulius*, *Sextilis* pa v *Augustus*, oba po 31 dni, da kdo od veljakov ne bi bil kaj prikrajšan. Imena mesecev izvirajo v rimski mitologiji in zgodovini, nekatera imena pa v latinskih števnikih. Podrobnosti lahko bralec najde v specializirani literaturi.

Koledar je bil spočetka v rokah rimskih svečenikov, ki so odločali o tem, kdaj se kak mesec začne oziroma konča. Pred Cezarjevo koledarsko reformo je rimsko leto štelo 355 dni, zato so vsako drugo leto izmenično vrivali, ampak ne povsem dosledno, dodatni mesec z 22 oziroma 23 dnevi, in sicer takoj po 23. februarju, ko je bil praznik *Terminalia*. Nato je sledilo zadnjih 5 dni februarja. Temu mesecu so rekli *Mercedinus* ali *Mercedonius* in kasneje *Mensis Intercalaris* in z njim so za silo usklajevali svoj koledar s tropskim letom. Štiriletno povprečje takega koledarja pa je 366.25 dni, kar je preveč.

Nekateri pravijo, da je mesec Mercedonius štel 27 oziroma 28 dni in mu je takoj sledil mesec marec, drugi pa menijo, da je Mercedonius imel 27 dni, da pa se je začel takoj po 23. oziroma po 24. februarju, pa še druge razlage lahko zasledimo. Kakorkoli je že bilo, zagotovo drži eno: Rimljani so do Cezarjeve koledarske reforme poznali dodatni mesec, ki so ga vrivali v februar, da so se nekako uskladili s tropskim letom. Zmešnjava s koledarjem v starem Rimu pred več kot 2000 leti pa je zagotovo obstajala.

Po potrebi, zlasti politični, so kak mesec malo podaljšali ali skrajšali, tako da je bilo v Cezarjevem času leto 46 pr. n. št. pravo *leto zmešnjav* – *annus confusionis*, ki je štelo kar 445 dni. S Cezarjevo koledarsko reformo je postal koledar javna dobrina, saj je bil dostopen vsakomur in vsakdo je vedel za dolžino mesecev in let. Cesar Avgust pa je omenjen v zvezi s koledarjem zato, ker je odpravil nespoštovanje principa, da je po Cezarju vsako četrto leto prestopno. Šele od leta 8 n. št. naprej so se tega strogo držali.

Stari rimski koledar ni poznal dnevov v mesecu in tednov v današnji obliki. Opredeljeni so bili le trije dnevi v mesecu: *kalende, none* in *ide*, latinsko *Kalendae, Nonae, Idus*. Kalende so bile v vsakem primeru prvi dan meseca, none petega in ide trinajstega razen v marcu, maju, juliju in oktobru, ko so bile none sedmega in ide petnajstega. Iz besede *kalende* se je razvila beseda *koledar*, kot smo že omenili. Rimljani so šteli dneve nazaj od omenjenih treh datumov. Dan tik pred temi so imenovali *pridie*. Za nas je pomemben primer, da so 24. februar, potem ko je le-ta štel v navadnem letu 28 dni, imenovali *šesti dan pred marčnimi kalendami*, latinsko *ante diem sextum Kalendas Martias*. Šteli so nazaj, vključno s 1. marcem, zato 6 dni: 1. marec, 28. februar, 27. februar, 26. februar, 25. februar, 24. februar (tabela 2). Tradicija vrivanja po 23. februarju pa je ostala še po Cezarjevi reformi, ko je v prestopnem letu februar štel 29 dni. Tedaj pa je bilo treba vriniti le en dan, *Dies Intercalaris*. Današnja 24. in 25. februar so šteli za en dvojni dan, oba sta bila *šesti dan pred marčnimi kalendami*, le da so slednjemu rekli *ante diem bissextum Kalendas Martias* – drugi šesti dan pred marčnimi kalendami. Obstajajo učene razprave o tem, kateri dan je vsako

navadno leto		prestopno leto	
24. feb.	a. d. VI. Kal. Mar.	a. d. VI. Kal. Mar.	24. feb.
25. feb.	a. d. V. Kal. Mar.	a. d. bis VI. Kal. Mar.	25. feb.
26. feb.	a. d. IV. Kal. Mar.	a. d. V. Kal. Mar	26. feb.
27. feb.	a. d. III. Kal. Mar.	a. d. IV. Kal. Mar	27. feb.
28. feb.	pridie Kal. Mar.	a. d. III. Kal. Mar.	28. feb.
1. mar.	Kal. Mar.	pridie Kal. Mar.	29. feb.
		Kal. Mar.	1. mar.

Tabela 2: Zadnji dnevi februarja v rimskem koledarju.

prestopno leto v februarju pravzaprav dodan: 24., 25. ali 29. februar. Mi si s tem ne bomo belili glave. Za nas je važno samo to, da ima februar v navadnih letih 28, v prestopnih pa 29 dni.

Zanimivo je, kako prestopnemu letu rečejo drugi narodi? Sčasoma pa so zaradi vrivanja enega dneva v februar v prestopnem letu začeli prestopno leto imenovati *Annus Intercalaris* ali *Annus Bissextus* ali *Annus Bissextilis*. Rimski način datiranja se je potem ohranil dolgo, do renesanse in ponekod še dlje. Tudi pri nas na nekaterih starih nagrobnikih najdemo po rimsko zapisan dan rojstva oziroma smrti pokojnika. O tem se prepričamo, če se sprehodimo po ljubljanskem Navju. Tam sem bil prvič kot bruc. Stanoval sem namreč v Akademskem kolegiju, od koder je do Navja le nekaj korakov. Nazadnje pa sem bil na Navju, ko sem obiskal Peternelov spomenik.

Tiste čase Akademski kolegij še ni imel centralne kurjave in smo morali študentje, če smo hoteli biti na toplem, sami kuriti. V kleti smo kupovali premog in ga navzgor po stopnicah vlačili v svoje sobe. Priskrbeti smo si morali tudi les, da smo sploh zakurili, pepel pa smo spet odstranjevali sami. Problem je bil, da sta sostanovalca, imenovana *cimra*, imela različne urnike na fakultetah in da so premog izdajali le ob določenih dnevih. Tako je zlahka prihajalo do prepirov med sostanovalci, češ da je en od njiju bolj garal kot drugi. Edina moja zima v kolegiju je pokazala svoje zobe. Čez novoletne praznike se je tako shladilo, da je bilo treba kuriti kar nekaj ur, da se je kaj poznalo, čez noč pa sva se cimra pokrila z vsemi odejami in plašči, kar sva jih imela. Soba je namreč takoj nad nama imela slabo izolirano streho. Na srečo sem stanoval v Akademskemu kolegiju le eno leto, nato pa sem se preselil bliže svoji fakulteti.

Rimski način izražanja ima še dandanes posledice v romanskih jezikih. Italijani rečejo prestopnemu letu *anno bisestile*, Furlani *an bisest*, Ladini *ann besest*, Retoromani v Švici *onn basest*, v Piemontu *ann bisest*, Korzičani *annata bisestile*, na Sardiniji *anu bisestu*, Kalabrijci *annu bisestu*, Kastilijci *año bisiesto*, v Galiciji na Iberskem polotoku *ano bisesto*, Asturijci *añu bisiestu*, Katalonci *any bixest*, Portugalci *ano bissexto*, Baski *urte bisustu*, Romuni *an bisect*, Valonci *anêye bizete*, Francozi *année bissextile*, Okcitanci v južni Franciji *an bissèst*, Bretonci *bloavezh bizeost*, na otoku Jersey *annais bissextile* in na Malti *sena bisestili*. Grki, ki niso imeli kalend, pa so poznali vrinjeni mesec, ἐμβόλιμος μήν, nova grščina pa uporablja besedi δίσεκτο ἔτος za prestopno leto. Latinsko besedo *bissextus*, v precej popačeni obliki, srečamo v izrazu za prestopno leto še celo pri Rusih – високосный год, pri Belorusih – высакосны год, pri Ukrajincih - високосний рік, pri Bolgarih in Makedoncih pa високосна година.

Podobno kot Slovenci, ki rečemo *prestopno leto*, govorijo tudi Hrvati – *prijestupna godina*, Srbi – преступна година, Čehi – *přestupný rok*, Slovaki – *priestupný rok*, Poljaki – *przestępny rok*, zgornji Lužiški Srbi – *přestupne lěto* in spodnji Lužiški Srbi – *pśestupne lěto*.

Angleži rečejo prestopnemu letu *leap year*, Nemci *Schaltjahr*, švicarski Nemci *Schaltjohr*, Luksemburžani *Schaltjoer*, v jidišu *ibur yahr*, Frizijci *skrikkeljier*, Nizozemci in Flamci *schrikkeljaar*, Valižani *blwyddyn naid*, Irci *bliain bhisigh*, Škoti *bliadhna-leum*, na otoku Man v Irskem morju *blein vishee* in na Cornwallu so nekoč rekli *blydhen lamm*.

Poglejmo še skandinavske jezike: dansko *skudår*, švedsko *skottår*, norveško *skuddår* (bokmål) in *skotår* (nynorsk), islandsko *hlaupár*, fersko *skotár*, laponsko *gárgádusjahki*, karelijsko *kargavusvuozi* in finsko *karkausvuosi*.

Madžari pravijo prestopnemu letu *szökőév*, Letonci *garais gads*, Litavci *keliamieji metai*, Estonci *liigaasta*, Turki *artık yıl*, Albanci *vit i brishtë* in v umetnem mednarodnem jeziku esperanto pa *superjaro*.

Ne pozabimo na Franca Močnika, ki ga je z doktoratom pot zanesla v Lvov in Olomuc, kjer je opravljal delo profesorja matematike in računstva, nakar je postal šolski svetnik ter nadzornik ljudskih šol v Ljubljani, nato pa je podobno funkcijo opravljal v Gradcu, kjer je bil, zagotovo precej prezgodaj, upokojen. Danes ni nič bolje: marsikoga na hitro upokojijo, če ne zlepa, pa zgrda. Tudi umrl je v Gradcu, na avstrijskem Štajerskem, in bil tam pokopan. Žal njegovega groba ni več. Pomrli so mu bližnji sorodniki in za grob nihče ni več skrbel, kar se pogosto dogaja.

V tistem koncu Avstrije sta kasneje umrla še znana matematika Franc Hočevar (1853–1919) in Rihard Zupančič (1878–1949), ki se je pisal tudi Richard Suppantschitsch. Slednji je bil celo drugi rektor ljubljanske univerze, in akademik, kateremu bomo posvetili še kakšno besedo. Hočevar in Zupančič sta se udeležila mednarodnega matematičnega kongresa v Heidelbergu leta 1904, ko je bil moj rajnki oče star približno štiri leta, mama mi pa še ni bila niti rojena. Prav tako sta bila čez štiri leta na takem kongresu v Rimu. Takrat pa sta bila moja starša že na svetu, pa tudi kup tet in stricev.

Močnika se bomo vedno najbolj spominjali po njegovih številnih matematičnih učbenikih. Pisal jih je za vse mogoče takratne šole nižjega in srednjega izobraževanja, in to v nemščini. Drugi pa so jih prevajali v vse druge jezike takratne monarhije. Napisal je tudi navodila, kako učbenike uporabljati, skratka, kako matematiko pravilno in uspešno poučevati. Zato imamo lahko Močnika tudi za pomembnega didaktika matematike. Bil pa je tudi trden in klen mož, ki je vztrajal, da je treba mladino na slovenskih šolah poučevati v slovenščini. Pred reformo slovenske pisave se je podpisoval z *Mozhnik*. Po uvedbi gajice pa se je dosledno podpisoval kot *Močnik*. Ko so v Ljubljani ustanovili prvo realko, je Močnik pregovoril vodiškega kaplana, laniškega gospoda Mihaela Peternela, da je postal prvi ravnatelj te šole.

Peternel je bil doma na Lanišah, takrat v Podjelovem Brdu, danes v Podlanišču v občini Cerkno. Zagotovo sta se rojaka veliko pogovarjala o slovenskih strokovnih matematičnih izrazih, ki jih je bilo treba takrat šele najti. Zanimive rešitve so bile na primer: *vštričnici* za vzporednici, *vštričnik* za paralelogram, *polvštričnik* za trapez, *štirjak* za kvadrat.

Močnik se je zelo prizadeval tudi za gmotni položaj učiteljev in njihovo izobraževanje. Njegove učbenike odlikujejo nazornost, jasnost, izpiljenost, uporabnost in preprostost. Zato ni nič čudnega, če so jih ponekod uporabljali še dolga leta po razpadu monarhije. Avstrijski kolegi so mi zaupali, da so jih v Avstriji uporabljali vse do zloglasnega Anschlussa (1938). Prav tako sem imel priložnost srečati tudi nekaj čeških matematičnih zgodovinarjev, ki jim je Močnik tudi zelo znan. Veliko drugih, kasnejših piscev matematičnih učbenikov se je zgledovalo po Močniku.

Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije (DMFA) je leta

1964, ob 150-letnici Močnikovega rojstva, organiziralo v Cerknem svečano akademijo. Prav tako se je društvo spomnilo nanj v letih 1983, 2004 in 2005, ko je ravno v Cerknem priredilo svoj vsakoletni občni zbor. Cerkljani pa se Močnika spominjajo na svoj občinski praznik 1. oktobra. Leta 1997 pa so mu na starem trgu v Cerknem odkrili tudi doprsni kip. Leto prej pa je bil odkrit podoben kip tudi v Slovenskem šolskem muzeju v Ljubljani. Bil sem navzoč na obeh odkritjih in vedno je bilo za Močnika veliko zanimanja. To pomeni, da je treba še bolj spoštovati velikane naše preteklosti, če želimo obstati in ostati na tem planetu kot narod.

Na osnovni šoli v Cerknem smo leta 1996 priredili strokovno srečanje matematičnih pedagogov, na katerega je prišlo veliko ljudi od blizu in daleč. Beseda je tekla samo o Francu Močniku in njegovem delu. Prispevke smo pripravili večinoma lokalni matematiki in kasneje izdali knjigo z naslovom *Po stopinjah dr. Franca Močnika*, ki je sicer občino nekaj stala, je pa vsaj nekaj ostalo za nami. Da bi Močnika poznali čim širše, je nastalo na fakulteti tudi nekaj diplomskih del, ki natančneje obravnavajo kak segment njegovega ustvarjanja. Kot rezultat brskanja po njegovih sledeh smo pred leti našli tudi njegov viteški grb, do katerega je bil upravičen, ko je leta 1862 postal vitez, kar seveda ni bilo od muh. Ni namreč prav veliko ljudi, ki so si s pisanjem šolskih matematičnih učbenikov in z delovanjem na področju šolstva pridobili tako laskavi naslov. Zato je latinski napis *Virtute et opera*, kar pomeni *Z vrlino in delom*, na Močnikovem viteškem grbu, več kot na mestu. Založba Jutro v sodelovanju z Občino Cerkno pa je okoli leta 2000 smelo izdala faksimile nekaterih Močnikovih računic in drugih knjig, ki nam povedo, kako pravilno poučevati matematiko. Po Močniku je poimenovanih tudi nekaj ulic po nekaterih slovenskih krajih.

Ob 200-letnici Močnikovega rojstva je bilo v Cerknem več dogodkov: DMFA je imel tam vsakoletno srečanje s strokovnim delom, v glavnem o Močniku, in občnim zborom, v muzeju je bila razstava, posvečena Močniku, izšel je ustrezni katalog, izdana je bila posebna poštna znamka in ovojnica prvega dne z žigom. Žal pa se je zataknilo z znamko, ki naj bi jo Pošta Slovenije izdala ob 150-letnici rojstva Josipa Plemlja. Eden od dedičev ni bil za to, da bi Plemljevo fotografijo dali na znamko.

Dejansko je Močnik v strogem znanstvenem smislu res napisal in objavil edinole tisto razpravo, ki se mota okoli reševanja enačb. Po metodah, ki jih je opisal, bi lahko reševali tudi tisti problem obrestne mere, ki smo ga začeli obravnavati, preden smo se ustavili pri Močniku.

Obstajajo tudi natančne Cardanove formule za korene kubične enačbe. Najprej nam jih je na fakulteti razvil profesor Ziegler, nato pa še profesor Križanič. Žal nastopi najhudobnejši primer (casus irreducibilis) takrat, ko ima kubični polinom tri realne ničle. Naš polinom jih na srečo nima, Cardanove formule nam dajo en realni koren in dva konjugirano kompleksna. Za ilustracijo dobimo za iskani p tiste naloge iz obrestnega računa:

$$p = -\frac{11}{18} + \sqrt[3]{\frac{937}{5832} - \frac{\sqrt{2703}}{324}} + \sqrt[3]{\frac{937}{5832} + \frac{\sqrt{2703}}{324}} \approx 0.1322750359.$$

Iskana obrestna mera je torej že kar oderuška, približno 13.23%.

Omenili smo Šlibarjevega Poldeta. V mojih mladih letih je bilo slišati kar naenkrat polno podobno se glasečih besed: v Planici je skakal odlični smučarski skakalec Janez Polda, v Oberstdorfu je postavil nov svetovni rekord v smučarskih skokih Jože Šlibar, sestra se je poročila na Opčine, bratova žena je delala na občini, v šoli smo pri zgodovini govorili o plemenskih zvezah, pri kemiji pa o plamenskih reakcijah. Pri teoriji množic imamo komplemente, pri komuniciranju z ljudmi, zlasti z ženskami, pa komplimente. Nič čudnega, če je kdo v šoli vse skupaj malo pomešal in smo se včasih vsaj malo nasmejali, kar tudi ni bilo slabo. Doma smo pa v pogovorih imeli kar naenkrat opravka s tremi Toneti: bratom, stricem in svakom. Nič čudnega, če je včasih prihajalo do nesporazumov. Zato smo poudarjali naš Tone, tvoj Tone in stric Tone, Koritni Tone, Rajdarski Tone. V šoli smo se učili o Titu in Kumrovcu, pri verouku pa o Kristusu in Betlehemu. In to približno istočasno. Ali je potem kaj čudnega, če je kdo v šoli rekel, da se je Tito rodil v Betlehemu, Kristus pa v Kumrovcu?

Kot strela z jasnega se je nekega dne razvedelo, da si je Janez Polda vzel življenje. Po neki planiški prireditvi naj ga ne bi povabili na zaključek, kar naj bi ga je zelo prizadelo in razočaran je storil usodno dejanje. Vsaj tako so takrat ljudje govorili. Res je, da je njegova zvezda do tistega leta že zbledela in verjetno take ignorance ni prenesel, toda vseeno je le nekaj pomenil za Planico. O tej tragediji raje po lepi in preizkušeni slovenski navadi nihče ne govori. So pa vsaj planiškemu junaku v čast uvedli tekmovanje Memorial Janeza Polde. Prireditelji! Pazite, da s svojo nepremišljenostjo in pozabljivostjo ne delate takih napak!

Pri Grkih je znan Ajaks Veliki, tudi Ajant ali Ajas, Αἴας, junak pred Trojo, ki je odnesel Ahilovo truplo z bojišča, da ne bi prišlo v roke Trojancev, vendar ni bil deležen za nagrado njegovega orožja, ki mu je vsekakor pripadalo. Dodeljeno je bilo zvitemu Odiseju. Zato je Ajas zblaznel, pobil čredo ovac, misleč, da so Grki, nazadnje pa naredil samomor, tako da se je vrgel na pokonci postavljen meč in se prebodel.

Ko je bil Lavo Čermelj, Šlibarjev Polde, urednik naravoslovne revije Proteus, na katero je bila naročena že pokojna sestra, kasneje pa tudi sam, sem imel nekaj opravka z njim. Poslal sem mu nekaj odgovorov na vprašanja v rubriki *Za bistre glave*, potem sem mu pa poslal prispevek o relativističnem podaljšanju časa in skrčenju dolžine. Zadevo je objavil in zelo sem bil seveda tega vesel. Dejansko sem geometrijsko interpretiral formuli

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \ \ell' = \ell\sqrt{1-(v/c)^2}.$$

Precej kasneje, že v tretjem tisočletju, pa sem Sončev mrk celo sam fotografiral. Leta 1999 žal še nisem bil na to pripravljen. Udeležil pa sem se avtobusnega izleta na Gradiščansko, kjer naj bi bil po vseh izračunih viden popolni Sončev mrk. Ljudje po Evropi so ga pričakovali, žal pa so marsikje nebo zastirali oblaki. Na Gradiščanskem smo imeli srečo: 11. avgusta 1999 je bilo nebo skoraj brez oblakov, samo rahla tančica ga je zastirala. To pa niti ni bilo slabo, saj je bila svetloba vsaj malo šibkejša. Opazovali smo popolni Sončev mrk sredi nekega polja ob reki, ki se imenuje Pinka, in to od začetka do konca. Škoda, da ni bilo to 10. avgusta, na najino srebrno poroko. Imela bi za najin praznik izvrsten *light-show*. Žal takrat nisem bil oborožen z daljnogledom in fotografskim aparatom, da bi ovekovečil tako redek dogodek. Imel pa sem vsaj primerna očala s folijo za opazovanje mrka.

Sin in hči sta imela takrat že vozniški izpit in sta se odpeljala opazovat mrk kar na Madžarsko, nekam ob Blatno jezero, po madžarsko *Balaton*. Tam nekje je bil v 9. stoletju sedež kneževine Spodnja Panonija.

Za kontrolo, kako dobro računa "Dance of the Planets", lahko testiramo nekaj datiranih mrkov, na primer.

12. dec. 2697 pr. n. št. (Peking)

22. okt. 2137 pr. n. št. (Peking)

16. okt. 1876 pr. n. št. (Kitajska)

21. apr. 899 pr. n. št. (Cheng)

28. maj 585 pr. n. št. (Tales)

2. okt. 480 pr. n. št. (bitka pri Salamini)

3. avg. 431 pr. n. št. (Periklej)

13. jul. 364 pr. n. št. (Pelopidas)

15. feb. 1961 (doma)

30. jun. 1973 (doma)

11. avg. 1999 (doma)

Vnesti pa je treba tudi vsaj približno lokacijo, s katere je bil Sončev mrk viden, in upoštevati je treba tudi dejstvo, da leto 0 našega štetja ne obstaja. Za leto 1 pr. n. št. moramo vtipkati 0, za leto 2 pr. n. št. vtipkamo -1, za leto 585 pr. n. št. pa -584 in tako naprej. Letu 1 pr. n. št. je v koledarju sledilo leto 1 n. št. *Nič* si je v zgodovini matematike moralo šele izboriti status števila. Starim filozofom ni šlo v račun, kako je 0 lahko število, saj označuje nekaj, kar ne obstaja. Za 0 so nekateri v zapisu števil uporabljali kar prazen prostor, kar je vodilo do goljufij. Znak za 0 so zares vpeljali v Indiji.

Astronomskih računalniških in drugih sorodnih programov je danes še več, tako da ni težko spremljati tire zvezd, planetov, lun in drugih nebesnih teles v preteklosti in prihodnosti. Tako lahko zavrtimo čas nazaj in z veliko zanesljivostjo preverjamo tudi mrke za nazaj, lahko jih pa tudi napovedujemo. Prav pa pridejo tudi astrologom pri sestavljanju horoskopa.

Slika 12: Štefkove svisli.

5 Rapalska meja

Prva svetovna vojna Cerkljanske ni neposredno prizadela. So pa prek njenega ozemlja oskrbovali avstro-ogrsko vojsko, ki se je borila ob Soči. Marsikateri cerkljanski fant se je boril na avstro-ogrski strani v Galiciji in na soški ali kaki drugi fronti. Dokler jim je dobro šlo, so jih celo premeščali sem ter tja. Zgodilo se je, da je kdo tudi dezertiral in se klatil ter skrival naokrog, tudi po Cerkljanski. V farni cerkvi sv. Ane so uredili celo začasno bolnišnico. Iz Planine in Čepleza se je pa že kar dobro slišalo grmenje topov na soški fronti, ponoči pa tudi bliskanje za hribi v tisti smeri. Od Očanca je treba stopiti samo sto metrov od hiše, pa se med Bukovskim vrhom in Kojco vidi vrh Matajurja, sedaj na meji med Slovenijo in Italijo.

Leta 1917 je moral k vojakom tudi naš ata, star 17 let. Večkrat je pripovedoval, kako sta z Mrtviškim Lojzetom šla s kovčkom na železniško postajo v Hudajužni v Baški grapi. To pomeni, da sta kamerada iz Planine morala navzdol v Cerkno po poti, ki je meni znana kot šolska, nato navzgor skozi Zakriž, kjer je bila doma moja mama, nato čez Vrh Križa, kjer smo neko pepelnično sredo cerkljanski učenci osnovne šole opazovali Sončev mrk, nato pa skozi Jesenico, Vrh Ravni do Zakojce, rojstnega kraja pisatelja Franceta Bevka. Ker je to pešačenje bilo pozimi in zemlja zmrznjena, sta se usedla vsak na svoj leseni kovček in se odpeljala navzdol v Hudajužno. Očetov kovček se je srečno vrnil domov k Očancu. Bil je znotraj ves popisan z imeni krajev, skozi katere je potoval. Škoda, da ga ni nihče arhiviral. Je pa prišel prav, saj smo v njem v pepelu hranili doma narejene salame.

Vas Hudajužna je po ljudskem ustnem izročilu dobila ime zaradi nekdaj pogostih turških vpadov v naše kraje. Ljudje v Baški grapi so imeli nekoč navado, da so za južino najprej pojedli navadno hrano, recimo močnik, zelje, repo, krompir, na koncu so si pa privoščili kaj boljšega, recimo štruklje. Nekega dne pa je Turek vpadel v vas sredi južine, ko se štrukljev še niso bili lotili, in ljudje so bili ob najboljše dobrote, ker so morali bežati in se poskriti.

Od takrat, kot pravijo, v Hudajužni pojedo najprej najboljše, kar je na mizi, da tega ne bi storil kdo drug, potem pa pospravijo še ostalo.

Druga zgodba iz tistih krajev pripoveduje o Turkih v Bukovskem Žrelu. Farni patron na Bukovem je sv. Lenart. Turkom je šlo zvonjenje v njegovem zvoniku na živce in vodja njihove ekspedicije je izjavil, da naj sv. Lenart kar zvoni kolikor hoče, saj bodo njegove mule zobale oves z oltarja v cerkvi še nocoj, njegovi junaki pa pili rujno vino. Toda na poti na Bukovo se je mulam začelo v Žrelu vdirati v razmočena ilovnata tla, da niso mogli napredovati in je prej zazvonilo pri sv. Lenartu preden se je kdo izkobacal iz blata. Pohod so Turki prekinili in se zakleli, da jih Bukovo ne bo več videlo in vas je bila srečno oteta. So pa še druge variante tega dogodka.

Naša kamerada pa sta v Hudajužni stopila na vlak in se prek Jesenic odpeljala v Ljubljano v kasarno. Tam so jih za silo usposobili in poslali na soško fronto. Ata je pripovedoval, da so se fronti približali prek Banjščic, kjer je bilo vse polno kraterjev od granat in o nekem vojaškem čevlju, v katerem je še bil ostanek človeške noge. Veliko se od njegovega pripovedovanja nisem zapomnil, ker me tudi ni posebno zanimalo. Škoda! Moral bi si vse zapisati. Oktobra se je zgodil čudež pri Kobaridu, ko sta avstro-ogrska in nemška vojska prebili fronto pri Kobaridu in se razširili po Furlaniji ter nazadnje dosegli reko Piave. Oče je pripovedoval, da so avstrijski vojaki v Furlaniji še leta 1918 imeli na koruznem polju nekakšne vaje, pri katerih so morali strumno dvigniti neke table visoko nad glave, kar je bilo od daleč lepo videti in oficirjem zelo všeč. Do Piave so res prišli, toda vojska je bila zdelana, sita vojskovanja in shirana. Oskrba ni delovala, kot bi morala, povprečno je avstro-ogrski vojak na Piavi tehtal le kakih 50 kg.

Sile Antante seveda niso mirovale in so skupaj z Italijani udarili nazaj, tako da so se morale avstro-ogrske in nemške sile, že v razsulu, umikati. Novembra 1918 je bilo vojne konec. Sestradani in izčrpani vojaki so odhajali domov, tudi prek Cerkljanske. Večkrat so pripovedovali, kako so na svoji poti celo brskali po odpadkih, da bi našli kakšen košček kruha ali krompirja.

Takrat so še po koncu vojn vojaki odhajali naravnost domov na zapeček. Moja babica je izvedela, da prihaja naš ata domov, pa mu je šla nasproti z loncem zabeljene kisle repe. Srečala sta se nekje pri planinskem znamenju, to se pravi pri kapelici. Naši očetje in dedi očitno niso kaj dosti razmišljali, kaj bo s kraji ob Soči, in so, kot drugi, odšli domov. Nismo imeli drugega generala Maistra, ki bi branil naše zahodne meje. Izkazal se je vsaj podpolkovnik Stevan Švabić, Srb, ki je Italijane zaustavil pri Vrhniki.

Tihi sporazum sil Antante pa je Italiji prepustil dobršen del naše zemlje z ljudmi vred. Nihče jih ni nič vprašal, italijanska vojska z novimi oblastniki je zasedla kraje do razvodnice in še malo čez. Nastrojenost proti vsemu slovanskemu in avstrijskemu je bila seveda dobro premišljena. Ni bilo dobro, če so Italijani izvedeli, da se je kdo preveč vneto boril proti njim na avstrijski strani. Silam Antante ni bilo do tega, da bi obe veliki nemški cesarstvi imeli preveliko besedo v Evropi, zato ju je bilo treba pač sesuti. Kaj je bilo laže, kot Italijanom obljubiti kose slovenskega in hrvaškega ozemlja, če stopijo na stran Antante. Poleg tega so jim prišla prav še zgodovinska dejstva. Balkan je bil nekoč del Rimskega imperija, Italijani pa se imajo na neki način za dediče Rimljanov. Barbari so jim imperij sesuli, Slovani so se po njihovem mnenju priklatili v te kraje in imperij bi bilo treba sedaj, ko so močnejši in razvitejši, spet obnoviti. Pa še tako lepo se s Krasa vidi Nanos. Zakaj ne bi bilo njihovo vse vsaj do tam!

Cerkno, ki je bilo pod Avstro-Ogrsko vajeno imeti svojo občino, kjer je bilo nekaj žandarjev, dacarjev in uradnikov kot simbol oblasti, je dobilo nove gospodarje, vojaško postojanko, nove učitelje, nove zdravnike. Utrjevali so svojo vzhodno mejo, zgradili na kilometre cest v vojaške namene, postavili cel sistem utrdb in s tem popolnoma spremenili življenje navadnih ljudi. Zato ni nič čudnega, če je marsikdo še dolgo trdil, da je bilo pod rajnko Avstrijo in Francem Jožefom bolje. Novembra 1920 so v letoviškem mestu Rapallo v provinci Genova ob ligurijski obali predstavniki Kraljevine Italije in Kraljevine Srbov, Hrvatov in Slovencev podpisali tako imenovani *Rapalski* *sporazum* in s tem zakoličili rapalsko mejo, ki je potekala nedaleč od Očanca, en del od Groga čez hribe do Joškovca.

Če bi iz Rapalla nadaljevali pot ob ligurski obali, bi po kakšnih 150 km prišli v Sanremo. Ko je na Cerkljansko prodrla televizija, smo radi gledali prenose tamkajšnjih glasbenih festivalov, ki so potekali konec januarja. V četrtem letniku gimnazije je tako naneslo, da je sedel v našem razredu tudi Idrijčan, katerega so vsi, tudi sam sebe, klicali *Mef*. Kot ponavljalec ni bil več nevemkako zainteresiran za pouk, pa si je vzel nekaj dni prosto in jo z avtostopom prek severne Italije mahnil naravnost v Sanremo na festival. O tem podvigu je govoril že nekaj časa. Ker mu nismo verjeli, smo mu naročili, da nam mora poslati vsaj razglednico. Ta je zares prispela čez nekaj dni v Idrijo. Sicer pa je Mef pripovedoval, kako je bilo v Sanremu in da se je celo pretihotapil v dvorano, kjer je potekal festival. Tisto leto je v Sanremu zmagal v Pulju rojeni pevec Sergio Endrigo s pesmijo *Canzona per te*.

Kakšnih 10 km severozahodno od Sanrema leži Perinaldo, kjer je bil doma znani astronom in matematik Giovanni Domenico Cassini (1625–1712). Po njem se imenujejo neke algebrske krivulje četrte stopnje *Cassinijevi ovali*. Francoski kralj Ludvik XIV., imenovan tudi *Sončni kralj, Le Roi-Soleil*, ker je, kot pravijo, pri svojih petnajstih letih v *Kraljevem baletu noči, Ballet Royal de la Nuit*, na glavi nosil veliko masko Sonca, ga je povabil v Pariz, da bi uredil pariški astronomski observatorij. Nekateri pa pravijo, da je vzdevek *Sončni kralj* dobil zato, ker v njegovem kraljestvu Sonce nikoli ni zašlo. Morda se je zgledoval po nekaterih faraonih, si so se imeli za bogove Sonca. *Kraljevi balet noči* je skomponiral Jean-Baptiste Lully (1632-1687), libreto pa je napisal Isaac de Bensérade (1612–1691).

Sčasoma se je Cassini preimenoval v Jean Dominique Cassini. Njegov sin Jacques Cassini (1677–1756), vnuk César-François Cassini de Thury (1714–1784) in pravnuk Jean-Dominique Comte de Cassini (1748–1845) so bili sami astronomi na pariškem observatoriju. Zadnji je padel v nemilost ob veliki francoski revoluciji in mu je že grozila bridka britvica, a se je nekako izmazal in živel še celo vrsto let, a ne kot direktor slovite zvezdarne. Začetni meridian je za Francoze potekal skozi to zvezdarno, tako kakor danes poteka skozi Greenwich. Morda bi merili zemljepisno dolžino vzhodni in zahodno od Pariza, če ne bi Napoleon vsega izgubil, tako pa je končal na otoku Sveta Helena. Vesoljska sonda, imenovana Cassini, pa se je leta 2004 hudo približala planetu Saturn, ki ga označujejo z znakom ♄, in naredila fenomenalne posnetke Saturnovih obročev. Stari Cassini je leta 1675 odkril vrzeli v Saturnovih obročih, ki se imenujejo po njem.

Od Sanrema je ob obali do kneževine Monako še dobrih 30 km. Od tam pa po kakšnih 100 km ob obali pridemo prek mondene Nice in Cannesa v Saint-Tropez z najbolj znano žandarmerijo na svetu. Spomnimo se na francoskega komika Louisa de Funèsa, ki nas je zabaval v naših dijaških in študentskih časih, na primer v filmih *Žandar iz Saint-Tropeza, Žandar v New Yorku, Žandar se ženi, Fantomas, Fantomas proti Scotland Yardu* in *Vesele počitnice*. Pri tem ne smemo pozabiti na Monte Carlo v Monaku. Znan je zlasti po številnih igralnicah, kjer vladajo zakoni verjetnostnega računa in kapitala. Kaj ima vse to opraviti z matematiko? Ima! Izumili so namreč metode, s katerimi lahko računamo določene integrale z uporabo verjetnostnega računa. To so *metode Monte Carlo*, ki se nepoučenemu ne zdijo resne. Ni težko razumeti, zakaj jim tako pravimo. *Metoda* je na prvi pogled beseda grškega izvora, izvira iz besede μέθοδος, kar pomeni *pot, ki vodi k čemu, način učenja ali preiskovanja, preiskava, preiskovanje*. Beseda je nastala s sestavljanjem dveh krajših: besede μετά, kar med drugim pomeni *potem, pozneje*, in besede ὁδός, *pot, steza*.

Z očetom sva se nekega dne podala na pot v Novo Oselico, kjer so v tamkajšnji cerkvi sv. Janeza Nepomuka blagoslovili nove orgle. Zelo naju je zanimalo, kako poteka tak obred. Radoveden sem pa tudi bil, ker so rekli, da bo predstavitev orgel vodil neki *kanónik*. Beseda *kanónik* je bila zame popolnoma nova, saj sem do takrat v cerkveni hierarhiji vedel samo za kaplane, dekane, škofe in papeže. Slišal pa sem tudi za kanóne, topove.

Zanimalo me je pa tudi, kako se kanónik kot cerkveni dostojanstvenik oblači. Ima kakšno posebno kapo ali poseben plašč? Krenila sva čez Kladje proti Slamovju, nato pa po ravnem mimo Matorja in Stotnikarja proti Novi Oselici. Takrat so v tamkajšnjem zvoniku imeli namesto bronastega zvona, ki ga je najbrž vzela vojna za svoje nepogrešljive topove, železnega. Dajal je poseben zven, ki se je razlikoval od običajnega, za kar ni bil potreben ravno absolutni posluh. Cerkveni zvonik se je dalo videti celo s Kladja, ravno toliko je kukal izza smrek. Železni zvon so kasneje preselili v Staro Oselico, na Ermanovec, ker so ga v Novi Oselici nadomestili z bronastim. Na novi lokaciji je obešen pod posebno streho za tamkajšnjo kapelico in služi kot *zvon želja*.

Ime Stotnikar, Pustotnik ali kakorkoli že je, kmetiji Cerkljani pravijo tudi V Stat, malo spominja na Pustoto, roman Vladimirja Kavčiča, ki se je rodil nekoliko kasneje kot moj najstarejši brat Tone, in sicer v Podgori, vasi med Hotavljami in Trebijo. Skozi te vasi se vozimo, če želimo iz Poljanske doline priti čez Kladje v Cerkno. Zgodba v romanu se dogaja v času velikega tolminskega punta, kmečkega upora, ravno v hribih, kjer je Stotnikar. Roman, vreden branja! Lahko da je razvoj besede šel takole: Pustotnik, Pstotnik, Stotnikar, kdo ve. Ko se je dogajal omenjeni tolminski punt, se ga Cerkljani niso udeležili, baje zato, ker so ravno takrat na vse pretege gradili cerkev sv. Ane. Verjetno ni Stotnikar v zvezi s kakšnim stotnikom, kapetanom ali hauptmanom. Enega poznamo iz Cankarjeve črtice Gospod stotnik, enega pa z Golgote, ki je bil navzoč ob Kristusovi smrti in je prišel v evangelij:

> *Ko je stotnik videl, kaj se je zgodilo, je slavil Boga in dejal: "Zares, ta človek je bil pravičen."*
>
> Ἰδὼν δὲ ὁ ἑκατόνταρχος τὸ γενόμενον ἐδόξασε τὸν Θεὸν λέγων· Ὄντως ὁ ἄνθρωπος οὗτος δίκαιος ἦν.
>
> *(Lk 23. 47)*

Nekje med Stotnikarjem ter Novo Oselico je potekala rapalska meja in ko sva šla čez to nevidno črto, se je videla še cela vrsta mejnikov, ki so stali v vrsti kakor vojaki proti dolinama na obeh straneh Pagonovega griča, kjer je stal glavni mejnik 36 (cippo trentasei). Na osojni strani so se mejniki spuščali proti Trahu in Grogu dol v dolino in se na drugi strani vzpenjali proti Vrhovcu. Izsekan gozd ob meji pa se še tudi ni kaj prida opomogel, saj je bil najin obisk Nove Oselice kakih petnajst let po koncu druge svetovne vojne in komaj nekaj let po ukinitvi Svobodnega tržaškega ozemlja. Tako sem prvič videl, kje je potekala meja, o kateri so večkrat pripovedovali nekdaj izkušeni kontrabantarji. Poslušali smo jih odprtih ust. Kontrabantali so predvsem riž, sladkor in tobak. Nekateri so se takrat kar opomogli, sicer ne tako na debelo kot v Gorici ali Trstu, ko so se odprle meje proti Zahodu in so Jugoslovani množično drli tja po nakupih.

Skoraj z nekakšno spoštljivostjo in pobožnostjo v čast vsem, ki so po nedolžnem preminili v teh krajih zaradi rapalske meje, sem okoli štirideset let kasneje obiskal glavni mejnik 36, ki je že precej zdelan, obtolčen in popacan z barvo, a še kljubuje času, ter nekaj malih, še kar ohranjenih mejnikov v smeri juga, torej v naraščajočem vrstnem redu njihovih številk.

Zelo sem se čudil in odprtih ust zijal, kako je potekala predstavitev novih lepih orgel, nameščenih na cerkvenem koru v Novi Oselici. Kanonik, grško κανονικός, stoječ pred glavnim oltarjem, jo je spretno in kompetentno vodil, organist pa je moral po njegovih inštrukcijah pritiskati na tipke po klaviaturi in številne registre, da je iz glasbila izvabil prave glasove. Ko se je slednji enkrat rahlo zmotil, je prečastiti kanonik skoraj ponorel, kar seveda pomeni, da je imel strašansko dober, morda celo absolutni posluh. Nisem pa v vsej gneči mogel opaziti, da bi kanonik nosil na sebi kakšno posebno opravo, na primer plašč ali kapo.

Pri analitični geometriji smo na gimnaziji svoj čas obravnavali enačbe stožnic v kánonski obliki, na fakulteti pa prevedbo integralov v kánonsko obliko, kánonski sistem diferencialnih enačb in morda če kaj kánonskega. S topom, kanónom, pravzaprav beseda kánonski je na neki način povezana, če le pogledamo grški pomen besede κάνων. Pomeni namreč *trs, palica, cev, ravnilo, vzorec*, v prenesenem pomenu pa *pravilo, predpis, vodilo.* Kanonik je v cerkvenih krogih običajno škofov svetovalec, pa tudi izvedenec za *cerkveno ali kanonsko pravo.*

Na gimnaziji smo stožnicam posvetili precej časa. Najprej je bilo treba znati definicije teh krivulj, nato pa njihove enačbe v kanonski obliki:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(elipsa)}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \qquad \text{(hiperbola)}$$

$$y^2 = 2px. \qquad \text{(parabola)}$$

Pri tem je bilo treba vedeti, kaj so a, b in p, koordinate gorišč, enačbe tangent v dani točki, pogoje, kdaj je premica $y = kx + n$ tangenta na stožnico. Še sreča, da smo stožnice le vzporedno premikali po koordinatnem sistemu, ne pa tudi vrteli.

Razložili smo besedi *kanon* in *kanonik*. Kaj pa beseda *hierarhija*? Nastala je s sestavljanjem grških besed ἱερός, *svet, posvečen, božji, vzvišen*, in ἀρχή, kar pomeni med drugim tudi *gospostvo, vlada, oblast, poveljstvo, vladavina.* Za besedo *dekan*, pravijo, da pride iz latinske besede *decem, deset.* Lahko pa tudi iz grške δέκα, kar pomeni isto. Na fakulteti se mi je čudno zdelo, da je njen najvišji predstavnik tudi dekan, nekakšen desetnik. Čudnega nič za nekoga, ki je bil do takrat navajen slišati samo za cerkljanskega in idrijskega dekana kot cerkvenega dostojanstvenika. Beseda *škof* je grškega izvora, ki se je razvila iz besede ἐπίσκοπος, kar pomeni *nadzornik, varuh, čuvaj, zaščitnik, branitelj, ogledovalec, opazovalec.* Je sestavljena beseda, in sicer iz predloga ἐπί, *na, v, z*, in σκοπέω, kar lahko med drugim pomeni *opazujem, gledam, ogledujem, motrim.* Besedo *papež* lahko izvajamo iz latinske *papa* ali grške πάππας. Oboje pomeni *oče, očka, papa, ata.* Za spoznanje drugačna je beseda πάππος, kar pomeni stari *oče, ded.*

Matematiki poznamo Papusa in Papus-Guldinovi pravili za prostornino in površino vrtenine. Πάππος ὁ Αλεξανδρεύς je bil Papus iz Aleksandrije, ki je poznal to pravilo že v antiki, ponovno pa ga je odkril švicarski jezuitski matematik in astronom Paul Guldin s pravim imenom Habakkuk Guldin (1577–1643). Beseda *kaplan* pa prihaja iz latinske *capellanus*. Kaplan se navadno imenuje mladi duhovnik takoj po mašniškem posvečenju in običajno pomaga župniku pri cerkvenih zadevah.

Rapalsko mejo sem kot mladenič prečkal tudi med Vrhovcem in Ermanovcem. V Stari Oselici so neke nedelje imeli novo mašo in doma so me uspeli pregovoriti, da sem šel kar z ljudmi s Cerkljanske, ki so tja peš romali v razmeroma lepem številu, tudi po strmem klancu mimo Očanca. Tiste čase je bilo na naših cestah še malo osebnih avtomobilov. Na razpolago je bila samo ena avtobusna proga, Cerkno–Ljubljana prek Škofje Loke. Seveda po makadamski cesti, ki je dobila asfalt šele potem, ko sem bil diplomiral. Nekateri so izkoristili to priložnost in se odpeljali po cesti, kakršna je pač bila, na Trebijo. To je tista vas v Poljanski dolini, kjer se odcepi cesta v drugo dolino ob Poljanski Sori proti Žirem. Sora je navadno pohlevna reka, ki pa ob dolgotrajnejših nalivih čisto podivja, spodkopava bregove, poplavlja in odnaša vse, kar ji je v napoto. S Trebije pa je do Stare Oselice navzgor še nekaj poti, malo po gozdu, malo skozi travnike in polja. V vseh letnih časih je v lepem vremenu to kar prijeten sprehod.

Hodili smo in hodili po prostranih gozdovih, med lepo obdelanimi njivami in urejenimi senožetmi, mimo Ratovža, čez Ogel, mimo Laniš, okoli Šanc in se Pri Vrhovcu začeli polagoma spuščati proti cerkvi sv. Pavla v Stari Oselici. Imel sem torej do takrat enkratno priložnost v živo videti, kako poteka nova maša, kajti v Cerknem še nisem imel te priložnosti, toda zaradi gneče sem v resnici videl bolj malo. Ne da bi vedel, pa sem prehodil del poti, po kateri je šest let pred odkritjem Amerike hodil na vizitacijo Paolo Santonino kot tajnik odposlanca oglejskega patriarha. Leto kasneje se je vračal z neke druge cerkvene vizitacije v obratni smeri. Lahko se potolažim vsaj s tem, če že nove maše nisem mogel dostojno spremljati.

Kakšnih štirideset let kasneje sem sam prepešačil del še kar zahtevne Santoninove poti na še daljšem odseku, za kar sem porabil kar dva dneva: od Bukovega do Hotavelj. Santonino žal ni zapisal, kje je sestopilo sveto odposlanstvo iz Stare Oselice v Poljansko dolino. Morda na Trebiji, morda kje drugje, jaz sem jo mahnil kar čez Slajko in se dolini pridružil pri cerkvi na Hotavljah. Morda je Santonino šel po južni strani Šanc, morda po severni. Tega ni zapisal, kakor tudi ni zapisal, ali so šli po prisojni strani skozi Planino mimo Očanca in Ratovža, ali po osojni strani skozi Gopalše in Kalarše. Jaz sem na Lanišah izbral pot mimo Kisovca in Mekinovš in od tam do Vrhovca. Pri Kisovcu se mi je pridružil odvezan pes, srednje pasje velikosti, črnuh, in tekel za mano vse do Hotavelj. Nisem se ga mogel ali znal znebiti. Malo mi je pokvaril dan. Na srečo je na Hotavljah hitro zavohal sebi podobnega in se mu pridružil, jaz pa sem potem imel pred njim mir.

Kaj tako posebnega pa je zapisal Santonino v svoj dnevnik? Predvsem to, kje so hodili, koliko časa so hodili, koliko milj so prehodili, kje so prenočevali, kaj so jedli in pili, katere cerkve in samostane so obiskali, kakšne obrede so opravili, s kom so se srečali, kaj so pred tem uničili Turki. Če so slednji kje onečastili cerkev ali pokopališče, je presvetli škof sveti kraj znova blagoslovil in cerkveno življenje je teklo dalje. Zanimivi so zapisi krajevnih imen, navade prebivalstva in hrana ter pijača, ki so ju bili deležni. Navedimo odstavka, ki se tičeta naše Cerkljanske:

> *Tridesetega avgusta smo zjutraj odšli iz Cerknega in se povzpeli na goro Oslice, t. j. Asinae ali Asinarium, in se z nje spustili v dolino; gora je s te in one strani nadvse težavna in zato tudi nosi tako ime. Po grebenu teče meja beneške oblasti in od tod naprej je gospostvo mesta Loke. Hudo lakoto trpeč smo opoldne prispeli v Poljane; ta kraj je oddaljen od Cerknega dvanajst milj.*

Čez leto dni so se vračali skozi Cerkno z neke druge vizitacije v obratni smeri.

Sedmega v mesecu smo prišli na kosilo v faro Cerkno, kjer smo v hiši gospoda vikarja Gašperja z dobrimi postrvmi končali kvatrni post. Po kosilu smo odšli v Tolmin, štirideset milj daleč od mesta Loke.

(Popotni dnevniki Paola Santonina v prevodu Primoža Simonitija, 1991.)

Na novo mašo v Stari Oselici je prišlo veliko ljudi od vsepovsod, tako da jih je večina, z mano vred, ostala zunaj majhne cerkve. So se pa prireditelji potrudili, da so postavili mikrofone in zvočnike, da smo vsaj slišali, kaj se je dogajalo v cerkvi, če smo že videli bolj malo. Okoli cerkve sv. Pavla je urejeno pokopališče, kjer počivata tudi eden od stricev po mamini strani in njegova žena. Stric je služil italijansko vojsko v Etiopiji, ki so ji po domače rekli *Abesinija*. Grško ime za to deželo je Αἰθιοπία. Pokojnino si je prislužil kot čevljar, nekaj pa je kanilo tudi iz Rima, ko so Italijani svojim nekdanjim vojakom, tudi Primorcem, začeli izplačevati, kar so si prislužili v Abesiniji, Somaliji, Tunisu in drugje. Stric je imel navado prihajati za vahti na grob svoje matere, z leti pa mu stroga žena tega ni več dovoljevala, ker je navadno pregloboko pogledal v kozarec, ko se je srečal s svojimi starimi prijatelji, sorodniki in znanci. Dokler je prihajal, se je oglasil tudi pri nas, da je videl svojo sestro in njene otroke.

Tega strica je moj mlajši brat nekega dne prosil, da naj ga nauči zavezovati kravato, samoveznico. Rad bi se postavil pred prijatelji, s katerimi so šli naslednji dan na šolski izlet. Za vsak primer mu je stric kravato pripravil tako, da bi jo zjutraj samo vrgel čez glavo in zategnil. Toda mlajši brat, ve se kdo, je od nekje pritekel in v svoji nerodnosti kravato odvozlal, tako da s postavljanjem pred prijatelji ni bilo nič. Kako se jo zaveže, pa tudi ni več znal. Stric pa je prejšnji večer tudi že odšel čez nekdanjo rapalsko mejo domov k svoji ženi. V družinskem spominu ni ostalo, ali je brat vzel na izlet kravato na elastiko ali je šel kar brez nje. Vsekakor pa je bil zelo hud. Tista leta so bile v modi kravate na elastiko, za katero ni bilo potrebne nikakršne spretnosti in znanja. Na zadnji strani vratu se je zapela tako kot nedrček. Mnogi so nekdanje samoveznice predelali na kravate z elastiko. Kasneje pa so take prišle iz mode in moški so prešli nazaj na samoveznice. Francoz, ki je nekaj časa skupaj s še nekaterimi sošolci obiskoval gimnazijo, je imel navado preskušati, kakšno kravato kdo nosi, tako da je potegnil za vozel. Če je bila na elastiko, je z velikim veseljem potegnil do konca in izpustil, kakor da bi ustrelil s fračo. Lastniku to ni bilo ravno všeč.

Iz vozlov pa so matematiki ustvarili celo znanost, *teorijo vozlov*, angleško *Knot theory*, nemško *Knotentheorie*, rusko Теория узлов, francosko *Théorie des nœuds*, špansko *Teoría de nudos*, portugalsko *Teoria dos nós*. Na fakulteti smo študentom tretjega letnika ponudili izbirna predmeta: *Izbrana poglavja iz analize* in *Teorijo vozlov*. Študenti so praktični: izbrali so tisti predmet, pri katerem je bilo potrebno najmanj študirati.

Nič čudnega torej, če so Italijani imeli apetite po naši zemlji. Kraje okoli Šanc so imeli za mejo beneške oblasti. Pa tudi dlje vzdolž rapalske meje dolgo ni bilo natančno opredeljeno, kaj spada pod tolminskega grofa in kaj pod prečastitega škofa v Loki. V resnici so na Šancah ostanki neke trdnjave, o kateri je pisal celo laniški gospod, Mihael Peternel, prvi ravnatelj ljubljanske realke in mojster raznih del. Kot kaplan je v Šmartnem pod Šmarno goro celo opazoval Elijev ogenj, razelektritvene pojave med in po nevihti. Eksperimentiral je tudi s telegrafom, ko je služboval v Vodicah. Takratnim oblastem to ni bilo ravno všeč in problem so rešili elegantno: niso mu dovolili nabave kabla, da bi se povezal čez polje v sosednje Zapoge, kjer je služboval njegov kolega. V njegovem času je bilo zanimivo vse, kar je bilo povezano z elektriko. Nemška beseda *Schanze* pomeni *okop, nasip*. Kot deček je lahko Mihael Šance obiskoval vsak dan, saj so blizu laniške hiše. Starodavni trdnjavi pa so med obema svetovnima vojnama dodali še dve kaverni, kakršnih je na Cerkljanskem še več.

Kaverne so po kapitulaciji Italije ljudje popolnoma izropali. Vojaško pobarvani pogradi so pristali po senikih, kozolcih in skednjih kot koristen dodatek za opaže ali odre. Še pri nas doma jih je bilo nekaj. Okna in vrata so izginila kot kafra, še keramične ploščice, kvadratne oblike, in talne ploščice, šestoglate oblike, so ljudje z veseljem potrgali. Pravijo, da so kar same odstopile, če so v prostoru zakurili primeren ogenj. Tako opustošene kaverne so ponekod uporabili za drva, seno in butare, nekaj za skladišča, na Kladju celo za kulturno dvorano, pogosto pa za staro ropotijo. Ker so postale opustošene kaverne samotni kraji, so jih ljudje hitro napolnili z napisi in risbami take in drugačne vsebine, od umetniške, politične, ljubezenske pa vse do pornografske. Stene so, kolikor se je le dalo, počečkali večinoma z lesnimi ogorki, ki so bili še najbolj pri roki. Beseda *pornografija*, ki jo pogosto uporabljamo, malokdo pa ve, od kod se je vzela, je grškega izvora. Njen drugi del je pogost in znan: γράφω pomeni *vrežem, pišem*, prvi del pa izvira iz besede πόρνη, kar pomeni *nečistnica, nesramnica, prešuštnica, malikovalka*. Najbrž je pornografija obstajala, ne da bi zanjo imeli besedo, čim je človek spregovoril in začel vleči črte po pesku ali po jamskih stenah. Zagotovo je stara kot najstarejša obrt. V Razodetju je ta beseda uporabljena večkrat, na primer:

> Καὶ ἐπὶ τὸ μέτωπον αὐτῆς ὄνομα γεγραμμένον, μυστήριον· Βαβυλὼν ἡ μεγάλη, ἡ μήτηρ τῶν πορνῶν καὶ τῶν βδελυγμάτων τῆς γῆς.
>
> *Na čelu je imela napisano ime, ki je bilo skrivnost: "Véliki Babilon, mati vseh vlačug in gnusob na zemlji."*
>
> *(Raz 17,5)*

Nekoliko naprej sledi še temeljita razlaga:

> Καὶ λέγει μοι· Τὰ ὕδατα ἃ εἶδες, οὗ ἡ πόρνη κάθηται, λαοὶ καὶ ὄχλοι εἰσὶ καὶ ἔθνη καὶ γλῶσσαι.
>
> *Rekel mi je še: "Vode, ki si jih videl, kjer sedi vlačuga, pomenijo ljudstva in množice, narode in jezike."*
>
> *(Raz 17,15)*

Po kavernah in okoli njih se je začela z leti nabirati različna nesnaga, ropotija vsake vrste, zavrženi izdelki tako imenovane civilizacije. Celo iz tovarne je nekdo pripeljal za celi tovornjak nekakšnega polivinila in ga stresel v gozdu pri kaverni nad Cigaletom. Pri tem si vedno predstavljam šefa, delovodjo, šefa izmene ali samega takšnega in drugačnega direktorja, ki ne ve, kam s tehnološkimi odpadki. Urejen odvoz je drag, pa raje nadrejeni najbrž skrivaj ukaže naložiti na tovornjak vso svinjarijo in naroči šoferju in mogoče še njegovemu pomočniku, naj skrivaj odpelje zadevo nekam na skrivno mesto v naravi in jo tam strese ali razlije. Takim ni pomoči. Nič jim ni za usodo planeta niti naše domovine, na katero smo tako ponosni. Kaverne so primerne, ker do njih navadno vodijo še kar ohranjene ceste, ki so jih zgradili pod Italijo.

V Podplečah, nekoliko naprej od Joškovca proti Jezbircu in Kopačnici, je bila od leta 1920 naprej do tistega leta, ko so se v Rapallu sporazumeli za novo mejo, stara, seveda nepravična rapalska meja med Italijo in Jugoslavijo. Zgodovina pove, kako je do nje prišlo, ne da bi nas za to kdo kaj vprašal, pa tega tukaj ne bomo pogrevali. Tam je bila cestna carina. Še zdaj je videti tam kaverno in stražnice. Takrat je zelo vzcvetel kontrabant v teh krajih, kar je povedal tudi stari Logar v eni svojih pesmi. Iz cerkljanske kotline se pride v podpleško dolino čez cestni prelaz Vrhulce, kakor smo že omenili. Tu se popotniku ob lepem vremenu odpre lep razgled na kranjsko stran, na Blegoš, Škofje, Kovški grič in druge hribe. Kot pomol v prostor sega ne levi strani doline znamenito Ptičje Brdo. Po domače pa smo tistemu koncu rekli tudi *Konec sveta*, seveda v krajevnem pomenu.

Človeku, ki je vajen gledati samo cerkljansko kotlino in v njej živi, se dobesedno razširi obzorje, kakor hitro se povzpne malo više, na primerno razgledno točko. Vrhulce so na tistem koncu tak kraj, Škofje pa še veliko lepši. Pred in med prvo svetovno vojno je potekal živahen promet ravno čez Vrhulce, manj čez Kladje. Kasneje se je to obrnilo. Škoda, da so to cesto precej zanemarili. Z Lapanja, kjer se z glavne ceste Cerkno–Kladje odcepi cesta za Podpleče, je do Hotavelj namreč le 11 km. Z Vrhulc sega proti vzhodu pogled nekako ravno do rapalske meje. Rajnki stric Bernard je bil vešč kontrabanta. Običajno je nosil listje v kaki vreči. Če je naletel na Italijane, jo je zalučal po bregu navzdol, Italijani pa za njo, misleč, da je v njej cenjeni jugoslovanski tobak iz Makedonije. Stric Bernard pa medtem veselo naprej po opravkih.

V drugi grapi, pod Kladjem, je bilo z rapalsko mejo ravno tako, samo da je bilo to nekoliko naprej od Slavka proti Sovodnju, točneje Pri Grogu, kakor smo domačiji pravili doma, Sovodenjčani pa Pri Šinkovem mlinu. V mojih mladih letih smo celo nosili mlet žito h Grogu. Mlinov je bilo nekoč na Cerkljanskem mnogo. Postopoma so propadali malo zaradi tega, ker nova oblast ni bila naklonjena zasebništvu, malo pa zaradi nezanimanja mladih za to vrsto dejavnosti. Mi smo največ nosili mlet v Cerkno Pod Grivo in v Podlivec v Stiske. Mline so že takrat kar po vrsti ukinjali, tako da nam je ostal najbližji ravno tisti Pri Grogu. Tu so imeli tudi stope za phanje ječmena. Rapalska mejnika ob cesti Pri Grogu še stojita kot nekakšna nema pomnika nekdanjim časom.

Kladje in Vrhulce imata skupnega to, da sta prelaza iz cerkljanske kotline v poljansko dolino, oba kraja sta bolj ali manj pomembni križpotji in pod obema sta bili italijanski kaverni na cerkljanski strani. Toda Kladje se je razvilo v majhno naselje, kjer je bila nekdaj šola, trgovina in gostilna. Vrhulce tega niso imele. Pač pa je pod Vrhulcami bil rudnik, pod Kladjem pa ne. Na Kladju je dovolj vode, na Vrhulcah pa suša. Nekoliko bolje je šele nekaj sto metrov niže. Hrib Škofje s senožetmi je namenjen Planincem, Čepležanom, Novačanom in še komu. Ime je dobil ta skoraj 1000 m visok hrib po škofih iz Loke, ki so imeli nekoč tu svoja posestva. Tu ni bilo grofovega posestva, niti ne dekanovega ali kanonikovega, ampak je bilo škofovo ali škofje posestvo, kar se je skrajšalo v Škofje. Najbrž so Pri Ratovžu odločali, kako in kje se sme pasti in kositi, tudi na Škofju. Pri Ratovžu je še ohranjena kamnita miza, za katero so o tem odločali. *Rathaus* namreč pomeni po nemško *hiša posveta,* *mestna hiša*. Ponekod poznajo besedo *rotovž* v istem pomenu. Še dandanes ima vsako malo večje mesto svoj rotovž.

Na glavne mejnike, ki so označevali mejo med državama, so bile napisane arabske številke, ki so bile tudi številke mejnih odsekov, na eni strani je bila zapisana črka I za Italijo, na drugi pa črka J za Jugoslavijo. Ni treba biti posebno učen, da ne bi takoj videli, da je prvotno na kamnih pisalo SHS. Te črke so spretno zapackali in čeznje napisali črko J. Številčenje mejnih kamnov se je začelo na tromeji Peč. Danes se tam stikajo Slovenija, Avstrija in Italija. Med dvema glavnima kamnoma so stali manjši kamni. Na teh pa je pisalo, za kateri mejni odsek gre in zaporedna številka mejnika, ki so jo zapisali z rimskimi številkami. Na griču nad Novaškimi Krnicami še danes stoji glavni kamen številka 34. Pri Vrhovcu je bil tak kamen s številko 35. Vmes je meja šla najprej v grapo, nato čez cesto malo pod Joškovcem in nato navkreber na Mekinovše in do Vrhovca. Ptičje Brdo je bilo pod Italijo, Kovški grič pa pod Jugoslavijo. Od Vrhovca naprej v naslednjo grapo so bili postavljeni mejniki odseka 35 in še danes se to da prebrati Pri Grogu. Na Pagonovem griču, od koder se vidi naravnost v Novo Oselico, je glavni mejnik 36 (cippo trentasei), kjer se je začel nov mejni odsek. Precej zdelan je kamen 36/I, nekoliko nad potjo sredi resja. Mejniki so bili narazen približno po petdeset metrov. Mejnik 36/II je bil napoti pri košnji, pa so ga odstranili. Malo niže je kamen 36/III, od koder se vidi prejšnjega, sto metrov stran od njega, ki še stoji. Nekoliko niže je tudi moči videti mejnik 36/IV. Če se je meja ukrivila, je bilo to označeno na kamnu. Dobro je ohranjen kamen 36/XVII, ki je romal v muzej v Ljubljani, kjer si ga lahko ogledajo obiskovalci, en dan v letu celo zastonj, in jim ni treba hoditi, da bi ga videli, v oseliške hribe, med grmovje in trnje, gože, gade, modrase in kuščarje.

Eden od Vrhovčevih sinov je enega takih kamnov, in sicer 34/LXIX, odkopal, ga pripeljal iz gozda, ga temeljito očedil, ga obnovil in postavil na starodavno deželno mejo med Krajnsko in Goriško. Tako ljudem ni treba stikati za mejniki po gozdovih in trnju.

Nekoč je na Kladju nasproti kapelice ponosno stal deželni kamen, ki je označeval mejo med Krajnsko in Goriško, toda Italijani so ga po prvi vojni odstranili in v svoji osvajalski vnemi svoje kraljestvo razširili prek starodavnih deželnih meja, kot smo že zapisali, vse do Groga oziroma Šinkovega mlina na vodo.

V obdobju, ko je rapalska meja služila svojemu namenu, je bilo živahno tudi okoli Kanavca na poti iz Jazen na Sovodenj, prav tako pa tudi okoli Robidnice med Novaki in Leskovico. Ob rapalski meji so se v času njenega delovanja dogajalo marsikaj, o čemer pa tu ne bomo razpravljali, ker je o tem več napisal profesor Tomaž Pavšič v knjigi. Tomaž nas je spremljal na maturantskem izletu v Dubrovnik, poleti leta 1968. Ni bil ravno moj profesor, tu pa tam je koga nadomeščal in prišel v naš razred. Bil pa je tudi dijak takoj po drugi svetovni vojni ustanovljene nižje gimnazije v Cerknem. Pri večkrat omenjenem Joškovcu v Podplečah je bila še po vojni gostilna. Nekaj metrov naprej, proti Kopačnici, so še do nedavnega bili ostanki nekdanjega mejnega prehoda, v ne prestrmem bregu na levi strani doline, pa kar dobro ohranjeni bunkerji, kaverne in drugi obmejni objekti.

Ko se spuščate po serpentinasti cesti z Vrhulc skozi Dolenjčevše v dolino in če ste srečno zvozili zadnji ostri ovinek pod Šmičkarjem, vas kmalu, pod Tomažkom, pozdravita zapuščeni betonski stražnici petkotnega tlorisa na drugi strani potoka. Sta pa očitno prestregli precej strelov. Ena taka, tudi precej zdelana, še stoji v sosednji dolini, pri Slavku, ob cesti Kladje–Sovodenj. Zakaj petkotnega tlorisa? Iz takih stražnic se je skozi line zaradi geometrijskih lastnosti skoraj pravilnega petkotnika bolje dalo nadzirali okolico na vse strani kakor iz stražnic štirikotnega tlorisa.

Po vojni se je pri Joškovcu ali v njegovi bližini zgodila tragedija. Ko sem še hodil v osnovno šolo, se je nekega jutra kot blisk po Cerkljanski razvedelo, da pogrešajo Vrhovčevega Jakoba, ki je sicer živel kot nekakšen hlapec pri Dolenjcu. Pravili smo mu tudi Dolenjčev Jok. Pozimi je kot pravi, izkušen mesar klal prašiče po kmetijah, pa tudi kakšne druge živali se ni ustrašil.

Svoje delo je korektno opravljal, tako da so na koncu kožo prodali ali pa dali v strojenje, meso je šlo v hišno obdelavo, prašičjo kri so uporabili za krvavice, parklje in glavo je naprej obdelal hišni gospodar, nekaj mesa in drobovja so predelali za klobase in salame, stegna in rebra so romala v slanico in nato še malo v dimnik, skratka: za vse je bilo lepo poskrbljeno in nič ni bilo odvrženega razen vsebina prašičjih črev, ki je končala v kakšni grapi.

Uporaba prašičje krvi me je vedno spominjala na Špartance, Lakedaimonce, o katerih smo se nekaj učili v prvem letniku gimnazije pri zgodovini. Vsem je ostala v spominu skrajno stroga, vojaška špartanska vzgoja in skupna črna jed, ki so jo poznali. Skuhali so jo v kotlu iz prašičje krvi, kateri so dodali nekaj mesa, kisa in soli. To so bile *sisitije*, grško συσσίτια. Beseda je nastala iz besede συν, *skupaj*, in σιτιον, *jed, hrana*.

Tudi pri nas doma je Jok bil večkrat v tej vlogi. Spominjam se, da je tudi našo ovco spretno dal iz kože. Lahko bi tudi rekli, da jo je odrl na meh. Po tistem dolgo nismo imeli pri hiši več ovac razen tistih pri jaslicah. Ob prelomu tisočletij pa se je starejši brat lotil vzreje ovac pri Očancu, sicer bolj zato, da mu ni treba skrbeti, kdo bo pokosil naš Kotel, Grič, Rupe in Brinje v najbolj nerodnih predelih.

Ker Joka nekega poletnega dne ni bilo domov k Dolenjcu, so ga iskali povsod, kjer bi lahko bil, a ga niso našli. Po nekaj dneh iskanja so ga našli obešenega v grmovju v precejšnji strmini nad Joškovcem, lahko zapišemo, zelo blizu nekdanje rapalske meje. Pravili so, da ga je verjetno nekdo prej ubil, saj naj bi našli neki okrvavljeni kovinski predmet v bližini Joškovca. Nato so ga odvlekli po strmini navzgor in ga obesili tako popolno, da je bilo videti, kot da je naredil samomor. Tega verjetno ni mogel narediti en sam človek. Na dan pa je prišlo samo to, da so ga bili pri Joškovcu pred tem zločinom precej popili in se sporekli. Osumljenca za zločin so sicer imeli, nisem pa ob vseh svojih drugih obveznostih več sledil, kaj se je potem dogajalo.

Besedo *jok* v pomenu *ne, nikakor ne, nak* so mladi na veliko uporabljali, ko sem bil še mlad, podobno kot danes *full, cool*. Kasneje sem izvedel, da je *jok* turška beseda, negacija besede *var*. Slednja pomeni *je, obstaja*, *yok*, ki se izgovarja kot *jok*, pa *ni, ne obstaja*. Slišalo se je tudi kletvico *šejtan te*. Morda je kdo tudi malo drugače izgovoril. *Šejtan* je turška beseda in pomeni *hudič, vrag, satan, peklenšček, hudir*, le da se napiše malo drugače: *şeytan*.

Eden od Joškovčevih sinov se je v pustnem času neke nedelje v Cerknem na smrt stepel z enem od slovitih laufarjev, ki so tekali po vasi. Cerkljanski laufarji se pojavijo nekaj tednov pred pustom, takoj po nedeljski maši. Skratka, Joškovčev se je spoprijel z enim od ta terjastih, v katerega je bil našemljen Kovačinov Janko iz Cerknega, doma blizu živinskega trga. Komaj so ju umirili in dali narazen. Čez nekaj let je Janko tragično končal v Idrijci. Pravili so, da so ga prej ubili. Na Cerkljanskem so se dogajale smrti različnih vrst: utopitve, padci z dreves in streh, zdrsi, samomori tako ali drugače, podhladitve, prometne nesreče. Po drugi svetovni vojni pa ubojev in umorov niti ni bilo prav veliko, zato pa je vsak toliko bolj odjeknil, na primer tragedija v družini šefa vojaškega muzeja pred leti v Trebenčah.

Nepravična rapalska meja je razdelila precej družin in posestev. Nekateri kmetje so postali dvolastniki, hitro pa se je razvil kontrabant in dogajali so se ilegalni prehodi meje in marsikdo jo je pri tem tudi skupil. V obmejnih krajih na jugoslovanski strani so zrasle trgovinice, ki jim je na račun kontrabanta kar dobro šlo, podobno kot kasneje onim v Trstu in Gorici, kamor so romali z avtobusi, vlaki in osebnimi avtomobili novejši kontrabantarji iz cele Jugoslavije po osimskih sporazumih med Italijo in Jugoslavijo. Sicer je pa kontrabant v naših krajih od nekdaj tako rekoč nacionalni šport, Martin Krpan pa je tipičen zgled, čeprav samo literarni.

Ko smo bili pod Italijo, so v kontrabant radi pošiljali tudi otroke, ki še niso bili polnoletni in so jih obravnavali drugače kot odrasle. Vsak je nekaj malega nesel v Jugoslavijo in nekaj malega prinesel nazaj. Čez mejo so kontrabantali tudi ljudi, zlasti tiste, ki so jih Italijani še posebej preganjali, na primer intelektualce. Odrasli moški so bili v naših krajih med obema vojnama bolj redki, saj so morali služiti v italijanski vojski ali pa delati v posebnih delovnih četah na Sardiniji in drugje. Tako so od moških doma ostali samo še mladi fantje in starci.

Moj ded, stari Očanec, Ivan Raspet, tudi Respet, ki je kupil mojo rojstno domačijo v Planini, rojen 24. junija 1874, je menda v kontrabantu lahko nosil breme, težko kakšnih 50 kg. Sicer je prek ZDA nekajkrat potoval v Kanado, kjer je delal v rudniku, se vračal domov in vsakokrat kupil kakšen kos zemlje. Kanadske dolarje je baje zelo slabo zamenjal za lire, ker v Cerknem niti ni bil znan točen menjalni tečaj. Se pa je nekdo kar opomogel od tega, ko je kanadske dolarje ugodno zamenjal za lire v Gorici ali Trstu. Ded je v svoji vnemi kupil senožet v razmeroma oddaljenih Marinkovšah, ki pa so bile zanj usodne. Seno je bilo treba neke zime, tik preden se je pri nas začela druga svetovna vojna, spraviti na saneh domov v Planino. Ded si je pred tem zvil nogo v gležnju, a je misleč, da je še vedno tak hrust kot nekoč, podal s pomočniki na pot. V Marinkovšah, nekoč veliki kmetiji, katere gospodar je sčasoma zapil grunt, se je hotel pogreti na kmečki peči, ki je bila za peko kruha ravno krepko ogreta. Žal je na peči preveč zadremal in se opekel po hrbtu, zaradi česar je hudo zbolel. Nekako je še prišel domov, kjer ga je obiskal zdravnik Antonio Sticchi, morda nekoč Anton Štih, iz Cerknega. Po pregledu je izavil: "Ancora tre giorni." Hotel je reči, samo tri dni življenja ima še pred seboj. Res je čez tri dni, 21. februarja 1940 umrl. Ko sem šaril po svetovnem spletu, sem našel naslednja zapisa:

> *Johann Respet, Gorje, Austria, arrival Ellis Island, May 6, 1903, age 28.*
>
> *Giovanni Raspet, Planina, Italy, arrival Ellis Island, September 8, 1920, age 46.*

To je lahko samo stari Očanec. V Gorjah je imel sorodnike, tudi žena mu je bila od tam. Tudi starost se ujema: 6. maja 1903 še ni dopolnil 29. let. Iz Gorij se je več ljudi izselilo v Ameriko. V Planini pri Cerknem Raspetov ni bilo drugje kot pri Očancu. Da pa bi bil Giovanni Raspet iz kakšne druge Planine, pa tudi ni verjetno. Zapisano je tudi, da se je prvič vkrcal na parnik *Königin Luise* v Bremnu, drugič pa na parnik *America* v Trstu. Doma sta se še dolgo valjali dedovi že precej zdelani knjigi, napisani v nemščini, in sicer v gotici. Danes bi rekli, da sta bili to francoščina oziroma angleščina za potovanja in prosti čas. Škoda, da sta se izgubili, saj je bilo v njej precej na roko zapisanih opomb. Pogosto sem kaj pogledal vanju, tako da sem se mimogrede naučil brati tudi gotico, kar mi je kar prav prišlo, ko je bilo treba prebirati dvesto let stara dela barona Jurija Vega.

V Marinkovše je moja mama napotila med drugo svetovno vojno otroke, ko je zaropotalo in so Nemci bombardirali Cerkno. Ko pa so zavezniki bombardirali Nemčijo, so včasih šteli bombnike, ki so leteli z juga proti severu: deset, dvajset, sto, dvesto. Bilo jih je veliko, veliko in so se jih naveličali šteti. Po vojni smo hodili v Marinkovše zaradi košnje. Tam je bilo zelo živahno, kajti Vrhovčev Pepi, kovač, je imel tam številno družino, zato ni tista leta tam nikoli zmanjkalo otroške razposajenosti in radosti nad življenjem.

Pohod v Marinkovše je, kjub razmeroma veliki oddaljenosti od Očanca, bil vedno poseben dogodek. Pot je vodila skozi Zašurkovico in sosedov gozd v Cigaletovše, kjer smo lahko pozdravili teto, strica in babico. Po nekaj korakih vzpona smo bili že na razvodnici na Vrhulcah, od koder se je videlo vse do Tičjega Brda in Blegoša. Nato smo nadaljevali pod Škofjem mimo Logarjevega in Jerebovega senika, se spustili po Bridnikovi senožeti v gozd, šli po gozdni poti skozi tako imenovani Ključ in na drugi strani prispeli na Dolenjčevo senožet, od koder se je že videl cilj in vsa poslopja v Marinkovšah. Če bi pot od tam nadaljevali, bi skozi Novine prispeli v Robidnico in v Novake.

Nikomur nikoli ni bilo jasno, zakaj je ded kupil s težko prigaranem denarjem onstran velike luže ravno v Marinkovšah tisto senožet, saj bi nemara lahko kupil kakšno primernejšo. Merila je okoli dva hektarja, bila je strma, naslonjena na hrib, na njej je stal senik, raslo pa je na njej tudi nekaj sadnega drevja, nekaj smrek in nekaj listnatega drevja in grmovja, nakosili pa smo za kakšna dva voza sena. Od doma pa je bilo treba tja koscem in ostalim nositi hrano in pijačo. Vožnja sena domov je bil vedno velik projekt. Ker sami nismo imeli vprežne živine, smo morali najeti nekoga, da nam je pripeljal seno. Navadno je bilo treba to uslugo poplačati tako ali drugače kar s fizičnim delom. Tudi mene je ata, ne da bi jaz vedel za to, kar obljubil, da sem k temu ali onemu moral poleti hoditi kosit travo in pospravljati seno.

S senožetjo v Marinkovšah smo se po svoje mučili tudi mi mlajši. Na kmetih je bila košnja nekoč pravi projekt s ciljem, da je živina imela pozimi kaj jesti. Najbolj mi je ostalo v spominu vračanje od tam domov. Mama, mlajši brat in jaz smo nekega dne se vračali proti večeru domov, ker je kazalo na slabo vreme. Sredi gozda, v Ključu, se je vlilo kot iz škafa. Pokrili smo se s šotorskim krilom in pohiteli, potem pa je nekje blizu tako treščilo, da nas je skoraj kap. Doma v Planini je bilo proti vsem pričakovanjem sončno. Izkazalo se je, da je takrat Pri Vrhovcu treščilo v hlev in da je strela ubila kravo. Ko sem jaz študiral in tudi kasneje, so senožet v Marinkovšah dajali komurkoli, ki jo je bil voljan pokositi, nazadnje pa jo je moj najstarejši brat, ki je po materi dedoval domačijo, enostavno prodal. Nazadnje sem jo videl od daleč, od Mekinovš.

Veliko je o rapalski meji napisal idrijski profesor Tomaž Pavšič v svoji knjigi. Žalostno je, da je ob rapalski meji pod Italijo in kasneje, dokler ta meja tudi z mednarodnimi sporazumi ni bila odpravljena, po nepotrebnem prihajalo do tragedij. Ko sem pešačil skozi Mekinovše, sem se spomnil na profesorja Tomaža, ki ga je kot fantiča mama vodila iz Otaleža na to hribovsko kmetijo ob rapalski meji, da bi bil tam za pastirja. Ker pa ju je ujelo neurje nekje v Cerkljanskem Vrhu, sta se, ko je ponehalo, obrnila in odšla raje domov. Mekinovše je tako Tomaž videl šele, ko je pisal knjigo o rapalski meji in si je ogledal stanje na kraju samem. Jaz pa sem Mekinovše, zapuščeno in propadajoče, nazadnje videl, ko sem prehodil del poti, po kateri je hodilo sveto odposlanstvo oglejskega patriarha in njegov tajnik Paolo Santonino.

6 V sedmem razredu

V šesti razred sem hodil v šolskem letu 1961/62. Nekaj nepozabnih utrinkov iz tega obdobja je opisanih na nekem drugem mestu. V resnici sem se šele takrat seznanil s pravim predmetnim poukom. Sedmi razred osemletke, ki sem ga obiskoval v šolskem letu 1962/63, je bil že sam po sebi nenavaden. Zame je prišel na vrsto natančno štirideset let, ki so zares hitro minila, ko se človek na stara leta ozre nazaj, pred znamenitim pešačenjem od Očanca v Cerkno. To je bilo takrat, ko so v Cerknem odstranjevali še zadnje ruševine iz druge svetovne vojne in ko je bila tovarna Eta v nezadržnem razvoju. Izdelati pa je bilo treba ta presneti sedmi razred vsaj zato, da je človek lahko napredoval v osmega. Razen če je kdo v prejšnjih letih zaostal in se mu po osmih letih ni več dalo hoditi v šolo. Saj navadno takega za to nihče ni prav posebno priganjal. Takrat tudi še ni bilo posebne potrebe, da bi ljudje končali osemletko. Kmetje so doma potrebovali delovno silo, zato je vsak par pridnih rok prišel prav, in to čim prej. Kaj bi s šolo! Fantje naj bi začeli delati, čim jim je pognal prvi puh pod nosom, za dekleta pa je bilo pomembno, da so se čim prej omožila. Marsikdo, in takih ni bilo malo, pa je bil mnenja, da bo za v Eto, največjo tovarno na Cerkljanskem, že nekako dober, četudi brez popolne osnovne šole.

Po svoje takim zavidam: zaposlili so se s petnajstimi ali šestnajstimi leti, v svojih najlepših letih, in so kmalu lahko šli v pokoj. Nekateri pa smo po osnovni šoli še dolgo gulili šolske klopi po srednjih šolah in fakultetah, da smo se potem prvič zaposlili, ko smo bili stari že krepko čez 20 let. Medtem so si oni drugi lahko že zgradili dom in se poročili. V tistih časih se je zlahka dalo dobiti posojilo za hišo, stanovanje, avto. Počasi so ga odplačevali, inflacija pa je veselo rastla. Razpravljati bi se dalo le o vrstnem redu izgradnje doma in poroke. Danes brez osemletke le malokdo kam prileze. Če pa imaš fakulteto, pa to včasih tudi ne pomeni kaj prida. Svobodna odločitev, kaj bo kdo študiral, ima za posledico, da imamo nenadoma ogromno diplomantov, ki ne dobijo stalne službe. Nekaterih je preveč, drugih pa premalo. Primanjkuje zlasti tistih, ki morajo resno študirati in po diplomi znati kaj otipljivega narediti.

Posojila so dandanes popolnoma nekaj drugega. Lahko so tvegana reč. Dobiš posojilo z oderuškimi obrestmi in ga ne moreš vrniti. Zarubijo ti, kar se da, še več, kot je potrebno. Edino z vezami in poznanstvi nekateri izbranci in tajkuni pridejo skozi. Slab sistem, pohlep, požrešnost, plačilna nedisciplina in drugi naglavni grehi so svet pripeljali do velike krize, ki se je otepamo že vrsto let. Ali je res treba, da imajo nekateri razkošna stanovanja, počitniške hiše na morju in v hribih, najdražje avtomobile, jahte in drugo? Kaj bi jim bilo hudega, če bi svoje bogastvo zmanjšali za 10 %?

Ni se pa vedelo, kdaj naj bi se v sedmem razredu, predzadnji stopnici takratnega osnovnošolskega izobraževanja, zares izplačalo začeti bolj učiti in koliko, na začetku ali na koncu, da bi potem v osmem vse lepo in prav teklo in da bi bil prehod na srednjo šolo za tiste, ki bi se zanjo odločili, čim manj moteč in boleč. Zato, ker pač sedmošolci niti ne vedo, kaj bi pravzaprav radi, jim navadno oslovska leta pridejo ravno prav, da zagodejo tudi kako neumnost. Mi smo to delali zelo na skrivaj, kajti tista leta so obstajali še zelo strogi učitelji, ki niso poznali šale in so uporabili tudi leskove obkladke, če drugače ni šlo. V sedmem razredu pa o srednji šoli še niti nismo kaj prida razmišljali, saj nas je čakal še osmi razred.

Prvi in najbrž edini udarec, ki smo ga sedmošolci doživeli, je bila selitev razreda v poslopje stare osnovne šole, v tisto nasproti Karuza. Naš šesti razred je bil prejšnje leto v prostorih nekdanje nižje gimnazije, kjer je bila pod Italijo sodnija. Te stavbe smo se bili že lepo privadili, bili tam med velikimi, nič več med prvošolčki in malčki. Potem pa jeseni razočaranje. Padla je odločitev: ena paralelka sedmega razreda, tisto leto sta bila namreč dva sedma razreda, bo v poslopju stare osnovne šole, pod rajnko Avstrijo ljudske šole. In to je bila ravno moja paralelka. Skupaj z otročaji! Kakšna sramota! Druga paralelka, sedmi a razred, pa je ostala v poslopju, kjer je bila zbornica. Tisto leto je bilo učencev dovolj za dve paralelki sedmega razreda, saj so prihajali na primer tudi iz Novakov, s Šentviške planote in Bukovega. Nekateri so stanovali v dijaškem domu. To je bilo obdobje, ko so začeli ukinjati podružnične šole v celoti ali pa njihove višje razrede. In tako je moralo biti, kajti takratni ravnatelj Jože Štucin (1922–1984) je bil neomajen. Nazadnje smo se vdali v usodo in moj sedmi b razred je bil v prvem nadstropju stare šole in pika. Više so nas dali baje zato, ker so nas imeli za pametnejše in so od nas pričakovali, da ne bomo tako rogovilili, da bi se udrl strop. Ta nas je še zdržal, kar je posebna čast in sreča, saj je menda kasneje popustil. Pa saj tudi za učitelje ni bilo lahko. Hoditi so morali iz zbornice, ki je bila v drugi stavbi, in nositi s seboj vso potrebno kramo. V ta namen so med dvoriščema obeh šol odprli poseben prehod, skozi katerega smo učenci in učitelji lahko hodili sem ter tja. Da, tudi učenci, saj je bilo treba hoditi v drugo stavbo po malico, pa tudi po kako učilo so nas učitelji včasih poslali tja. Tako je bila pot iz zbornice do našega sedmega razreda le nekoliko krajša. Navsezadnje pa smo se učenci obeh paralelk po tem koridorju tudi med seboj obiskovali, če smo le utegnili.

V vsakem primeru pa je bil križ s telesno vzgojo, ki smo jo imeli v telovadnici EGŠ[71], to se pravi pri stari Eti. Selitev nam je seveda vzela kar nekaj časa, saj se je bilo treba sprehoditi praktično od ene cerkljanske palacine, dijaškega doma, mimo druge, zdravstvenega doma, na dvorišče nekdanje italijanske vojašnice, in to v času enega šolskega odmora, glavnega ali pa tudi ne. EGŠ je odigrala na povojnem Cerkljanskem kar pomembno vlogo. V Cerknem je bila šola za malo večje učence iz raznih krajev Slovenije, prišli so izobraženi profesorji in vsi so dali svoj prispevek k obnovi Cerkljanske, zlasti k elektrifikaciji. Na zidu, ki gleda proti zdravstvenemu domu, je pisalo z velikimi črkami: ELEKTROGOSPODARSKA ŠOLA. Dolg napis, ki je name kot otroka naredil velik vtis, saj je bil najbrž najdaljši, ki sem ga do takrat kje videl. Z ogljem sem poskusil nekje v prvem razredu osnovne šole ta napis

[71] Elektrogospodarska šola, sedaj Tehniški šolski center Nova Gorica.

ponoviti doma na hlevskem opažu, toda zmotil sem se že pri četrti črki, pa še v dolžini sem se zaplaniral, tako da mi je zmanjkalo prostora za drugo besedo. Napis je bil na deskah še dolgo, malokdo ga je opazil in vzel ga je zob časa. Nekoč sem celo razmišljal, da bi se po osnovni šoli vpisal na EGŠ, toda ta ustanova se je preselila v Novo Gorico, kjer se je pouk začel 1. oktobra 1963, ko sem začel obiskovati v Cerknem 8. razred. Ko sem pa slišal za tehnično risanje na EGŠ in da so prepotentni profesorji pri tem predmetu silno strogi, da dijakom izdelke trgajo in čečkajo po njih kakor s krampom, sem se raje odločil za gimnazijo v Idriji, ki mi je bila bliže in pa še v dijaškem domu mi ni bilo treba stanovati. Nikoli mi ni bilo, ko sem bil še mlad, do tega, da bi se držal reda, vstajal in legal na ukaz, se učil na ukaz in jedel v menzi. V JLA sem bil že starejši in mi je bilo kaj takega že laže.

Sicer je pa šolsko leto minevalo brez večjih pretresov. Bilo je nekaj tradicionalnih športnih dnevov, delovnih akcij in drugih, že utečenih šolskih prireditev. Za globlje razumevanje mojega šolanja v Cerknem se vrnimo nekaj let nazaj. V šolskem letu 1960/61 se je zame na cerkljanski osemletni osnovni šoli začela druga polovica osnovnega izobraževanja. V začetnih štirih razredih se je z nami mučila Vida Peternelj, po domače Cinkova Vida. To se pravi, da nas je v petem razredu v glavnem obdelovala razredničarka Angela Bevk, po domače Migučeva, ki je tradicionalno v tistih časih imela pete razrede. Učencev pa nas je bilo takrat toliko, da je bilo treba oblikovati dva paralelna peta razreda. Razlika med njima pa ni bila le v razredničarkah, ampak tudi pri predmetu telesna vzgoja. Mi nismo hodili tako kot paralelka v telovadnico, ki je bila v sklopu EGŠ, ampak smo se malo razmigali kar v učilnici ali v najboljšem primeru na šolskem dvorišču. Predmet, ki ga je izvajal učitelj od zunaj, je bila v petem razredu nemščina, ki jo je poučeval Anton Bolko (1925–2023). Učencev v petih razredih pa se je nabralo veliko zato, ker so prihajali iz podružničnih šol, na primer iz Novakov in Raven. Kasneje so se nam pridružili tudi učenci iz drugih vasi. Precej jih je stanovalo v cerkljanskem dijaškem domu. Ta je z leti izgubljal namembnost in propadal.

Gojencev v njem ni bilo več, čim je skoraj v vsako vas začel voziti avtobus po delavce in šolarje. Na zunaj so ga sicer hitro uredili: obnovili so fasado, zamenjali kritino in okna, ki pa so bila večinoma nekaj let zaprta. Vsake toliko časa se je ponujala rešitev, da bi v nekdanjem dijaškem domu nekaj bilo. Končno pa je le postal Center šolskih in obšolskih dejavnosti.

Pravi predmetni pouk, s kupom novih predmetov in učiteljev, nas je čakal šele v šestem razredu v šolskem letu 1961/62. Dobili smo nove učitelje: za slovenščino legendarnega Viktorja Jereba, nekoč šolskega nadzornika, s katerim ni kazalo zbijati šal, za računstvo in geometrijo Maksa Pagona, za zemljepis in zgodovino Ano Štucin (1927–2017)[72], ravnateljevo soprogo, za nemščino in srbohrvaščino Ljerko Sedlak, ki se je, kjer je bilo to potrebno, podpisovala tudi kot Љерка Седлак, za prirodopis in gospodinjstvo Marijo Zajc, za glasbeno in telesno vzgojo Antonijo Doljak ter za risanje in tehnični pouk Gabrijela Miklavčiča, Dalenikovega učitelja. Zahvaljujoč nekaterim od naštetih učiteljev kot dijaki srednjih šol nismo imeli kasneje posebnih težav. Nekaj dobrih učiteljev v regiji pač vtisne na več generacijah učencev neizbrisni pečat v njihovi osnovni izobrazbi. Tudi na idrijski gimnaziji sem imel to srečo.

Eden takih je bil zagotovo Maks Pagon. Stanoval je v sosednjem poslopju in je imel zares kratko pot v službo. V šestem razredu nas je začel poučevati računstvo in geometrijo, čemur smo krajše rekli matematika, v spričevalu pa vendarle piše prvo. Pogosto je povedal kakšno zanimivost iz zgodovine matematike, na primer, kako je Tales iz dolžin senc palice in egiptovske piramide izračunal višino slednje. Stari Grki so Talesa prištevali med sedem modrih, οἱ ἑπτὰ σοφοί. Njihov spisek se je menjaval. Na enem so na primer našteti: Kleobulos, Solon, Hilon, Tales, Pitakos, Bias, Periandros. V grški pisavi: Κλεόβουλος, Σόλων, Χίλων, Θαλῆς, Πιττακός, Βίας, Περίανδρος. Eden bolj moder od drugega! Nekaj Talesovih misli:

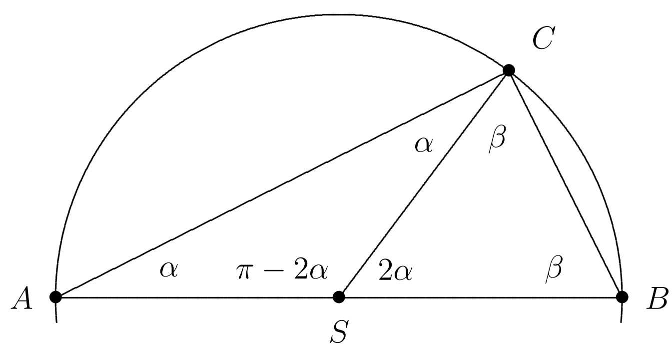
[72]Znana tudi kot Metodova Anica, hči učitelja in zborovodje Metoda Peternelja (1888–1956).

Ne pridobivaj bogastva z nepoštenostjo! Neizobraženost je breme.
Ne zaupaj vsem! Če imaš oblast, drži sam sebe v redu!

Baje je Tales prvi prinesel geometrijo iz Egipta v Grčijo in prvi povedal, da sta v enakokrakem trikotniku kota ob osnovnici enaka. Napovedal je Sončev mrk za maj leta 585 pr. n. št.

Talesov izrek v geometriji pove, da je trikotnik, ki ima za eno stranico premer krožnice in eno oglišče na tej krožnici, pravokoten.

Krajišči premera krožnice naj bosta A in B, S pa njeno središče. Točka C naj bo kjerkoli na krožnici. Trikotnik ABC je pravokoten, njegov pravi kot ima vrh v točki C. Trikotnika ASC in SBC sta enakokraka. Zato lahko



Slika 13: Talesov izrek.

označimo kote tako, kot kaže slika 13. Vsota kotov trikotnika ABC je potem $(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)=\pi$. Zato je $\measuredangle ACB=\alpha+\beta=\pi/2$.

Lahko pa se dokaza lotimo tudi z vektorji. Vektorja $\overrightarrow{AS}$ in $\overrightarrow{SB}$ sta enaka, njuna dolžina pa je polmer kroga r. Tudi vektor $\overrightarrow{CS}$ ima dolžino r. Očitno lahko zapišemo:

$$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{AS}\,,\ \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{AS}.$$

Nato skalarno zmnožimo vektorja $\overrightarrow{CA}$ in $\overrightarrow{CB}$:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{AS})\cdot(\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{AS})=|\overrightarrow{CS}|^2-|\overrightarrow{AS}|^2=r^2-r^2=0.$$

Vektorja $\overrightarrow{CA}$ in $\overrightarrow{CB}$ sta eden na drugega pravokotna, kar lahko sklenemo v trditev: trikotnik ABC je pravokoten.

To nalogo nam je dal profesor Karčnik na gimnaziji pri izbirnem predmetu. Skoraj bi jo rešil tako, pa je nisem bil tisto pot. Takrat smo sicer že doumeli, kaj je matematični dokaz, le da smo imeli v dokazovanju bolj malo izkušenj. Po polomu mi je svetoval, naj bi vse skupaj postavil v pravokotni kartezični koordinatni sistem z izhodiščem v točki S, z abscisno osjo vzdolž premera kroga in ordinatno osjo pravokotno nanjo. Nato naj bi točke A, B, C, S izrazil s koordinatami:

$$A(-r, 0)\,,\ B(r, 0)\,,\ C(u, v)\,,\ S(0, 0).$$

Pri tem je seveda $u^2 + v^2 = r^2$. Nato naj bi izrazil vektorje:

$$\overrightarrow{CA} = (-r - u, -v)\,,\ \overrightarrow{CB} = (r - u, -v).$$

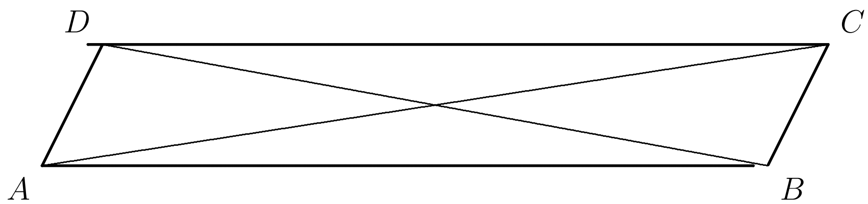
Njun skalarni produkt je namreč potem:

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -(r + u)(r - u) + v^2 = u^2 - r^2 + v^2 = 0.$$

Torej je trikotnik ABC res pravokoten.

Dokaz profesorju Ivanu Kuščerju ne bi bil posebno všeč, saj je vedno poudarjal: "S koordinatami pa jaz nisem poročen." S profesorjem Kuščerjem nisem imel kot študent nobenega opravka, le fizikalne knjige, ki sta jih napisala profesor Moljk in on, smo pogosto prebirali in jih zelo cenili. Še danes so v uporabi, pa še posodobili so jih. Več sem imel s profesorjem Kuščerjem opraviti nekaj let pred njegovo smrtjo, ko je s profesorjem Kodretom pripravljal knjigo za ugledno založbo Springer. Takrat je potreboval nekoga, ki bi mu narisal skice z računalnikom. Profesorja Križanič in Kuščer sta tista leta slovela po tem, da sta se kljub častitljivi starosti spopadla z računalnikom in se naučila uporabljati LaTeX, močno orodje za elektronsko stavljenje besedil, zlasti matematičnih, na osebnem računalniku. Marsikateri mlajši kolega je s tem še dolgo odlašal.

Nekoč je neki sošolec, ki se je nekoliko prenaglil v svojem sklepanju, trdil, da diagonali paralelograma razpolavljata njegove notranje kote. Profesor Karčnik je takoj reagiral in narisal na tablo precej dolg paralelogram z diagonalama vred (slika 14) in dijaka vprašal, če še verjame v svojo nekoliko prenagljeno trditev. Pač pa v rombu (slika 15) diagonali razpolavljata nje-



Slika 14: Razpotegnjeni paralelogram.

gove notranje kote. Vsaka diagonala razdeli romb na skladna enakokraka trikotnika. Vedno se mi je zdel lep in enostaven dokaz trditve, da se diagonali romba sekata pravokotno, in to z vektorji. Imejmo romb $ABCD$. Veljajo relacije:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}\,,\ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}\,,\ |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{DA}|.$$

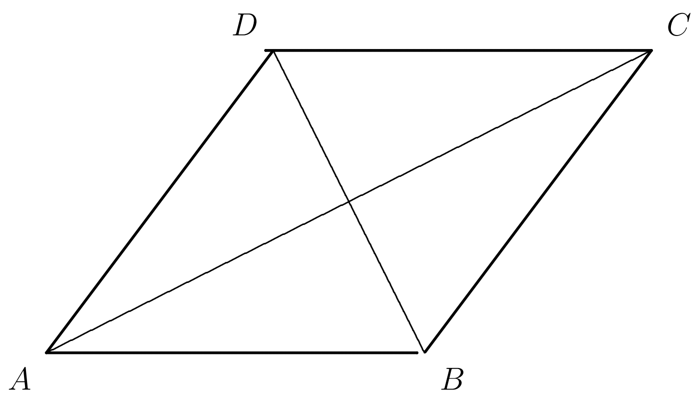
Vektorja na diagonalah pa lahko izrazimo z vsoto in razliko:

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\,,\ \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}.$$

Nato izrazimo:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}) = |\overrightarrow{BC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2 = 0\,,$$

kar pomeni, da sta vektorja $\overrightarrow{AC}$ in $\overrightarrow{BD}$ drug na drugega pravokotna. Torej se diagonali romba res sekata pravokotno. Dokazano lastnost romba lahko marsikje s pridom uporabimo. Profesor Karčnik nam je dal celo pri šolski nalogi najti kakršenkoli vektor $\vec{c}$, ki razpolavlja kot med danima vektorjema $\vec{a}$ in $\vec{b}$. Slednja sta bila podana v koordinatah in različnih dolžin. Take



Slika 15: Romb je enakostranični paralelogram.

naloge sploh do takrat nismo delali in tudi videl je nisem nikjer v meni znani literaturi. Ali bi si dandanes upal kak profesor dati tak problem za šolsko nalogo, ko marsikateremu dijaku že skoraj teče voda v grlo?

Čim sem ugotovil, da vektorja nista enako dolga, sem krajšega podaljšal za tak skalarni faktor, da sta bila enako dolga, nato pa ju seštel, ker sem se spomnil, da v rombu diagonali razpolavljata kote. Kasneje me je profesor opozoril, da bi bilo bolj elegantno oba vektorja najprej normirati in nato sešteti. Iskani vektor je potem:

$$\vec{c} = \frac{1}{|\vec{a}|}\,\vec{a} + \frac{1}{|\vec{b}|}\,\vec{b}.$$

Rešitev pa je katerikoli vektor, ki je s tem kolinearen v isto smer.

Vse to početje z vektorji, njih skrajševanje in podaljševanje, nas spominja na Prokrusta, tistega hrusta, roparja iz antične mitologije. Prokrust, Προκρούστης, je deloval ob poti med Atenami in Elevzino. Nesrečne tujce je zapeljal s svojim lažnim gostoljubjem, jih oropal, privezal na posteljo in nesrečnikom predolge noge posekal, prekratke pa raztegnil. Prokrusta, Pozejdonovega sina, je ugonobil Tezej, Θησεύς, na podoben način: skrajšal ga je za glavo in s tem naredil red na tem področju. Pozejdon, Ποσειδῶν, je bil bog morja. Upodabljali so ga s trizobom v roki. To so tiste vile, ki se končajo v obliki grške črke psi, to pomeni črke Ψ.

Risanje mi nikoli ni šlo dobro od rok. Prava muka je bila meni, brucu, risati s tušem pri opisni geometriji, ki sta jo izvajala profesor Oton Sajovic (1907–1996) in asistent Franc Lebedinec. Marsikdo je raje plačal kolegu arhitektu, da mu je z veliko bolj vajeno roko načrtal potrebne risbe, ki so bile predpogoj za opravljanje izpita. Že v času mojega študija je prišlo do punta zaradi tega risanja s tušem in odkrito smo povedali, nekje v četrtem letniku, da to počne sam le malokdo. In zaleglo je: kasneje so risali samo še s svinčnikom. Ko pa je profesor Sajovic odšel v svoj zaslužen pokoj, so opisno geometrijo na oddelku za matematiko ukinili.

Tiste čase smo študenti tehnične matematike imeli kup nematematičnih predmetov, menda zato, ker smo po diplomi postali diplomirani inženirji. In inženir ne bi bil inženir, če se ne bi malo spoznal tudi na fiziko, mehaniko, elektrotehniko, programiranje in tehniško risanje. Njega dni je bil študij matematike na ljubljanski univerzi v sklopu Filozofske fakultete, in to ena sama smer, predvidena predvsem za srednješolske profesorje. Nato je prišlo do razcepa na tehnično matematiko, ki je bila najviše rangirana matematika in so jo vpisovali vsi, ki so dali na področju matematike kaj nase, in na pedagoško matematiko, zraven katere pa je bilo treba študirati tudi fiziko. Kasneje pa je nastalo še več drugih smeri, toda o tem bi morali napisati posebno knjigo.

Naziv *diplomirani inženir matematike*, ki ga nam je podelila ljubljanska univerza, so nam v samostojni Sloveniji, meni nič, tebi nič, zamenjali z nazivom *univerzitetni diplomirani matematik*. Da se vidi, kaj je oblast. Kako je potem z avtonomnostjo univerze?

Na veliko srečo so se z osebnimi računalniki pojavili tudi zelo izpopolnjeni programi za risanje. LaTeX sam ima nekaj ukazov za preproste risbe. Boljši pa je dodatek PiCTeX, ki je bil profesorju Kuščerju všeč in se je udeležil celo predavanja o njem. Ker je videl, da sam ne bo zmogel vseh potrebnih skic za novo knjigo, je iskal nekoga, ki je imel s tem že nekaj izkušenj. In našel je ravno mene. Ker je bilo skic le okoli 25, sem mu jih hitro načrtal. Dobila sva se trikrat ali štirikrat in se o vsem potrebnem pomenila. Ker pa sem hotel delo opraviti čim bolje, sem ga prosil za celotno besedilo, ki je bilo v nemščini. Nekaj skic predstavlja grafe tako imenovanih *specialnih funkcij*, na primer Besselovih[73], katerih tabele sem preprosto sprogramiral, saj se mi kot tehničnemu matematiku ni spodobilo, da bi jih prepisoval iz knjig. Predvsem mi je tu koristilo znanje, ki nam ga je posredoval profesor Zakrajšek. Dandanes bi skice narisal s čim drugim, denimo z GeoGebro.

Nemško besedilo, ki sem ga dobil v roke, je bilo že precej sčečkano s Kuščerjevim svinčnikom, njegov nemški kolega pa je bil seveda pri branju še bolj neusmiljen. Tako so bile korekture od enega rdeče, od drugega pa zelene. Tu pa tam sem pa še jaz našel kako napako in jo označil. Nemec nikakor ni doumel, kaj je profesor Kuščer mislil z nemškim samostalnikom *die Tetive*. To naj bi bila tetiva v krogu. Morala bi biti *die Sehne*. Etimologi pravijo, da je beseda *tetiva* prvotno pomenila *kito*, potem je dobila svoj pomen pri loku, nato pa je zašla v geometrijo. Pravijo tudi, da imata beseda *tetiva* in *tenzor*, ki je tudi matematični pojem, skupni indoevropski izvor. Obe besedi imata neko zvezo z napenjanjem. Če pomislimo, da obstaja veliko primerov, kjer je bil nekoč namesto samoglasnika ustrezen nosni samoglasnik, bo to že držalo. Tetiva je bila *tętiva*, kot *dęd* namesto *ded* v brižinskih spomenikih. Poljaki imajo nosni ę in ą še danes, recimo *język*, kar pomeni *jezik*, in *mąż*, kar pomeni *mož*.

Po vseh mojih pripombah glede nemščine, je profesor Kuščer baje pripovedoval drugim nekako takole: "Kot rojen Dunajčan sem menil, da znam dobro nemško. Pa ti pride neki matematik, pa najde v moji nemščini kup napak." Napake, predvsem tiskovne, so bile tudi v matematičnem delu knjige in sem jih seveda označil, kar sem jih le opazil, in profesor mi je bil za to prav hvaležen. V knjigi je že tako in tako prav hitro preveč napak.

Prav mi je prišlo znanje nemščine še z osnovne šole in gimnazije. Na

[73]Friedrich Bessel (1784–1846) – nemški astronom in matematik.

osnovni šoli me je prve nemške lekcije v petem razredu učil Anton Bolko, nato pa dve leti Ljerka Sedlakova, v osmem razredu pa njen soprog Dušan Sedlak. Pravili so, da je po rodu Slovak in večkrat smo ga prosili, da naj kaj pove v slovaščini, da bi se sami prepričali, koliko je zares ta sestrski jezik podoben našemu. Dolgo je okleval, nato pa je le nekaj rekel, česar pa nismo razumeli. Morda je celo rekel, da smo vsi skupaj osli. Če je rekel "Vy te somariny", zagotovo nismo razumeli. Sedlakova dva sta znala kup jezikov, celo esperanto. Kratek čas smo imeli celo esperantski krožek, ki pa je v obilici drugih obveznosti kmalu zaspal. "Kiu ne progresas, tiu malprogresas."

Anton Bolko je bil zanimiva oseba. Rodil se je v Franciji, blizu Pas-de-Calaisa, kjer je delal njegov oče kot rudar. Tudi moj oče je delal kot rudar v Franciji, in sicer v Stiring-Wendlu. Bolkovi so se iz Francije preselili na Nizozemsko, od tam v času gospodarske krize pa domov. V šoli v Slovenj Gradcu je imel pri slovenščini jezikovne težave podobne vrste kot naš Francoz na idrijski gimnaziji. Zato je presedlal v Dravograd, na gimnazijo pa je hodil v Celje, vpoklican je bil v nemško vojsko, ki jo je služil pol leta in pri tem prepotoval dobršen del Evrope. V Franciji so ga zajeli zavezniki in prek Splita se je vrnil domov. Moral pa je odslužiti še nekaj mesecev v JLA. Bil je zraven, ko so v Dravogradu ustanavljali EGŠ, ki pa je zaradi kadrovskih težav bila preseljena v Cerkno v prostore nekdanje italijanske vojašnice. Na Višji pedagoški šoli v Ljubljani, predhodnici Pedagoške akademije in Pedagoške fakultete, je končal dvopredmetni študij slovenščine in nemščine. Bolko je dobrih deset let poučeval nemščino na cerkljanski nižji gimnaziji in kasneje na osemletki. Po potrebi je poučeval tudi likovni pouk in telovadbo. Ko je odbrenkal moj 5. razred, se je preselil v Idrijo, kjer je opravljal razne šolske dejavnosti. Po upokojitvi se je naselil v Tolminu. Tam je počel marsikaj: učil nemščino odrasle, prevajal strokovna besedila, oblikoval figure iz naplavljenega lesa in sodeloval v planinskem društvu in pevskem zboru. Zadnjič sem ga srečal na dvorišču idrijskega gradu na premieri nekega filma ob 100-letnici idrijske realke. Rekel je, da ima Cerkljane v lepem spominu.

Če se ozrem v tista leta, ugotavljam, da bi bilo takrat veliko bolje imeti dober tečaj angleščine. V matematiki namreč nisi nič, če ne znaš dobro angleščine. Nekateri za takega, ki je šibak v angleščini, takoj menijo, da tudi dober matematik ne more biti. Najbolj zoprni so glede tega nekateri izmed tistih, ki jim angleščina sploh ni materni jezik in so se jo učili tako kot mi. Morda so imeli srečo v življenju, da so se jo naučili bolje. Slabega govorca v angleščini kaj hitro začno zbadati, ga zaničevati in obrekovati. Okoli razglašajo, kako ga je tu in tam lomil, kakšen obupen naglas da je imel in tako naprej.

Srbohrvaščina nam je v šoli še kar šla, le cirilice se nismo nikoli dobro naučili. Resnično smo bili potencialni kandidati za pridobitev slabe karakteristike v JLA: полуписмен. Navadno je po razredu kar završalo, ko je Sedlakova najavila narek kakšnega srbohrvaškega besedila v cirilici. Navadno je bilo nekaj odstavkov iz dela kakšnega priznanega pisatelja. Če je le-ta pisal v cirilici, je bil ukaz učiteljice neizprosen: ћирилицом.

Na gimnaziji pa je bil glede prvega tujega jezika pravi mali Babilon. Cerkljani in Colčani smo imeli nemščino, Idrijčani in Prifarci, to so tisti iz Spodnje Idrije, angleščino, Črnovršci pa francoščino. Drugi tuji jezik pa mi je bila ruščina, ki nas jo je vsa štiri leta poučeval profesor Cuderman[74]. Za njegov predmet smo uporabljali na začetku stare učbenike. Meni je prišla prav še stara *Ruska vadnica za I. razred gimnazij*, ki se je valjala skupaj s starimi knjigami in zvezki na domačem podstrešju. Vadnica je bila natiskana v Ljubljani leta 1946 in sem jo dobesedno podedoval po že pokojni sestri. Nekateri so imeli malo novejše ruske vadnice. Razlika med mojo staro in novo je bila le v tem, da je v moji še bil narisan in hvaljen veliki Stalin. In iz takih vadnic se je ruščine učil tudi naš Francoz, ki je verjetno o cirilici do takrat komaj kaj slišal. In mu je po nekaj tednih kar dobro šla. Kasneje smo uporabljali neke srbske ruske vadnice. Sam profesor Karčnik, ki se je s

[74]Vinko Cuderman (1933–2011) – profesor slovenščine in ruščine na idrijski gimnaziji, dramatik, publicist, šahist, nagrajenec Republike Slovenije na področju šolstva leta 2009.

profesorjem Cudermanom dobro razumel, jih je s svojim fičkom nekega dne pripeljal iz Ljubljane, in to za celi letnik. Knjige niso lahke in za čuda mu fičko ni obstal nekje v Zali. Srbom je ruščina lahka, vsaj s pisavo nimajo težav. Nekaj dodatnih črk ter trdi in mehki znak se naučijo mimogrede. Res pa je, da Rusi ne berejo, tako kot pišejo. Dogodilo se je, da smo v neki lekciji obravnavali, koliko besed iz tujih jezikov je zašlo v ruščino. Profesor je hudomušno pripomnil, da ni prav nič čudnega, če v tisti stari ruski vadnici že na prvi strani piše:

Русский язык полнейший и богатейший
из всех европейских языков.

(Гоголь)

Zgornji stavek da začetniku slutiti, s kako izrazno močnim jezikom bo imel opravka. Z jezikom, v katerem so ustvarjali Dostojevski, Tolstoj, Puškin, Gogolj, Lermontov, Solženicin, Gorki, Pasternak, Majakovski, Čehov, Jesenin, Šolohov, Nabokov in še mnogi drugi veliki ruski pesniki in pisatelji. Ruščino so nekaj let po drugi svetovni vojni z velikim zanosom poučevali tudi na osnovni šoli v Cerknem.

Če ni bilo v Cerknem primernega učitelja, je to rade volje počel kar ravnatelj šole Jože Štucin, ki se je svoj čas boril z Rusi ramo ob rami. Še dandanašnji, po toliko letih, pa po Cerknem srečaš, sicer vedno bolj redke ljudi, ki iz tistih časov znajo rusko pesmico *Čižek*:

Чижик

Чижик, чижик, где ты был?
»На фонтане воду пил.
Выпил рюмку, выпил две,
Зашумело в голове,
Покатался по траве,
Стало легче голове.«

Nekoč nam je Štucin pripovedoval, da je v Rusiji pozimi tako strašen mraz, da marsikomu zmrznejo uhlji, ki človeku kar hitro z žvenketom padejo na tla in se tam zakotalijo v blagem loku, če preveč mahneš po njih. Zelo sem se zabaval in smejal ob teh besedah. Ubogemu ravnatelju je nesrečno spodrsnilo in se je ubil, ko so začeli raziskovati arheološko najdišče Divje Babe pod Šebreljami nad dolino Idrijce.

Homer, Ὅμηρος, in starogrška literatura, o katerih smo se na gimnaziji v Idriji učili že v prvem letniku, profesorica Mundova, profesor Cuderman, Štucinova smrt pri Divjih Babah in najdba neandertalčeve piščali so me v zrelih letih navdihnili, da sem se poskusil v zlaganju epa v grških heksametrih o Divjih Babah, in to kar v cerkljanskem narečju. Tudi naslov epa je kajpak cerkljanski: *Deuje bábe.* Prav vesel sem bil, ko je pesnitev izšla v knjižni obliki konec septembra leta 2006 in so v ta namen pripravili čudovito predstavitev na cerkljanski osnovni šoli. Zbralo se je veliko ljudi, celo moja nekdanja profesorica Draga Urbasova si je vzela čas in se pripeljala v Cerkno, in pa kamerad Ivan Kolenc, s katerim sem bil pri vojakih v daljnem Titovem Velesu leta 1976. To je bilo ravno takrat, ko je profesor Cuderman doma zaradi revije *Kaplje* preživljal težke trenutke. Ivana nisem do te prireditve videl natančno 30 let. Prišlo je tudi nekaj takih, s katerimi sem hodil skupaj še v osnovno šolo in jih nisem videl še več kot štirideset let. Moje *Deuje bábe* med drugim opisujejo prehod neke vojske prek Jeramovih Vrat, o katerih je bilo govora že na začetku knjige, iz Poljanske doline na Cerkljansko.

Učiteljev za nemščino ni bilo lahko dobiti. Cerkno pa je že tako in tako slovelo po tem, da so le redki zdravniki, zobozdravniki, veterinarji, farmacevti in učitelji od drugod tam obstali dlje časa. Nemščina je bila za čuda dolgo prisotna na cerkljanski osnovni šoli. Morda je tovarna Eta, ki se je navezala na nemški sistem E.G.O., postala uspešna vsaj nekoliko tudi po zaslugi ljudi, ki so v Cerknem obvladali nemščino.

Nemščino in angleščino sta na gimnaziji poučevali profesorici Vestova in Grumova. Po slednji, ki je bila moja prva razredničarka na gimnaziji, sva dala svoji hčerki tudi ime: Alenka. Tu pa tam je katera od profesoric manjkala, pa smo imeli oba jezika kar istočasno v isti učilnici. Tako sem se nehote naučil še kako angleško besedo. Za učbenike pri teh dveh jezikih ni bilo problemov, le da je pouk bil za današnje pojme staromoden, čemur pa se zaradi takratnih pogojev ni treba čuditi. Treba pa je poudariti, da je za matematike kar hitro postala angleščina pomembnejša od nemščine. Ponekod pa z angleščino že kar pretiravajo. Samo napise po stavbah poglejte! Nekateri menijo, da bodo bolj uspešni samo, če bo v imenu firme kakšen q, x, y ali w. Sram jih je, da bi uporabili naše č, š in ž. Bojijo se, da bodo tujci imena in napise napačno brali in izgovarjali. Morda si domišljajo, da pa oni nemška, francoska in druga imena naravnost briljantno berejo. Nekateri bi namesto Žiri imeli rajši *Sairach*, namesto Žužemberk pa *Seisenberg*. Celo na slovenski univerzi se ponekod prav trudijo, da bi predavanja potekala v angleščini. Lastne izkušnje pa mi pravijo, da veliko študentov slabo obvlada celo slovenščino, zlasti takrat, ko je treba kaj napisati. Morda pa v angleščini pišejo vsaj tako dobro kot James Joyce ali pa Ernest Hemingway. O tem bi lahko razpravljali ure in ure.

Glede jezika v matematiki je zanimivo povedati, do česa vse lahko pride zaradi nepoznavanja strokovnega izrazoslovja. Slovenci smo se v preteklosti zgledovali po nemških izrazih, iz katerih je nastalo precej dobesednih prevodov. Tak primer je izraz *verižni ulomek*, po nemško *Kettenbruch*. Beseda *Kette* pomeni v nemščini *veriga*, *Bruch* pa *lom, prelom, razdor, razkol, podrtje, usad, razpoka, kila, utrga, ulomek, guba, rob*. Iz tega smo dobili narečno besedo *pruh* za kilo. Po nemški varianti so se zgledovali še Poljaki, ki verižnemu ulomku rečejo *ułamek łańcuchowy*, Čehi *řetězový zlomek* in Srbi верижни разломак. Angleži pa so izbrali drugačen izraz, namreč *continued fraction*, prav tako Francozi *fraction continue*, Italijani *frazione continua*, Španci *fracción continua*, Luzitanci *fração contínua* in celo Rusi непрерывная дробь. Marsikateri študent, ki uporablja angleško literaturo in ki ne ve, da je angleški *continued fraction* kar *verižni ulomek*, prevede izraz po svoje, na primer *kontinuirana frakcija*. Beseda *kontinuiran* pomeni *nepretrgan, neprekinjen*, *frakcija* pa je beseda, znana predvsem v politiki. V političnih strankah imamo frakcije, skupine, ki niso istega mnenja kot večina.

Če razvijemo racionalno število v verižni ulomek, se proces prej ali slej konča. Zato angleški izraz morda ni na mestu. Če pa razvijemo v verižni ulomek kakšno iracionalno število, se proces nikoli ne konča, tako kot se ne decimalke števila 1/3. Lep razvoj v neskončni verižni ulomek ima *zlato razmerje* τ:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Tak verižni ulomek spravimo v škatlico:

$$\tau = [1; 1, 1, 1, \ldots].$$

Pred podpičjem je celi del števila τ. Da je to res predstavitev zlatega razmerja, vidimo iz zapisa

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau},$$

ki je enakovreden zapisu $\tau^2 = \tau + 1$ oziroma $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Pozitivna rešitev te enačbe pa je res $\tau = (1+\sqrt{5})/2$. Same enke, kajne! Kot bi gledali v redovalnici ocene kakšnega zanikrnega dijaka pred štiridesetimi leti. Dandanes si v šoli že skoraj nihče ne upa dati nekomu cveka, čeprav je le-ta zaslužen. Kajti takoj bi pridirjali v šolo nad profesorja starši ali skrbniki prizadetega, premožnejši celo z izkušenim in dragim odvetnikom.

Neskončni verižni ulomek s samimi dvojkami je, zaprt v škatlico,

$$\varrho = [2; 2, 2, 2, \ldots].$$

Ustreza nekoliko boljšemu dijaku, ki se je izognil popravnim izpitom. Verižni ulomek je oblike

$$\varrho = 2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Ni težko najti, kateremu številu ustreza, ker je

$$\varrho = 2 + \frac{1}{\varrho},$$

iz česar dobimo $\varrho^2 = 2\varrho + 1$ oziroma $\varrho^2 - 2\varrho - 1 = 0$. Pozitivna rešitev te enačbe je $\varrho = 1 + \sqrt{2}$. To je *srebrno razmerje*.

Neskončni verižni ulomek, ki ustreza povprečno dobremu dijaku je, zaprt v škatlico,

$$\sigma = [3; 3, 3, 3, \ldots].$$

Ustrezni verižni ulomek je oblike

$$\sigma = 3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}}.$$

Tudi sedaj ni težko najti, kateremu številu ustreza, ker je

$$\sigma = 3 + \frac{1}{\sigma},$$

iz česar dobimo $\sigma^2 = 3\sigma + 1$ oziroma $\sigma^2 - 3\sigma - 1 = 0$. Pozitivna rešitev te enačbe je $\sigma = (3 + \sqrt{13})/2$. To je *bronasto razmerje*. Števila τ, ϱ in σ so prva tri *kovinska števila*. Ker na olimpijadah prvi dobi zlato, drugi srebrno in tretji bronasto medaljo, je poimenovanje v soglasju s števili 1, 2 in 3, ki nastopajo v razvojih kovinskih števil v neskončne verižne ulomke.

Če od pravokotnika, ki ima stranici v razmerju $\sqrt{2} : 1$, odrežemo kvadrat, ki ima za stranico manjšo stranico takega pravokotnika, dobimo pravokotnik, ki ima razmerje stranic

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = 1+\sqrt{2},$$

kar je ravno srebrno razmerje ϱ. List pisarniškega papirja formata A4 ima stranici v razmerju $\sqrt{2} : 1$. Prav tako prepolovljeni list, ki je formata A5.

Marsikdaj je ugodno kakšno pozitivno število zapisati v obliki verižnega ulomka, na primer dolžino tropskega leta v dnevih, kot smo že nekje videli. Verižni ulomek nam da dobre približke tega števila.

V sedmem razredu pa se nam je pridružila še fizika, ki jo je prav tako poučeval Maks Pagon. V zadovoljstvo nas vseh pa nas pri obeh predmetih ni izpustil iz rok do osmega razreda. S polno glavo matematičnega in fizikalnega znanja smo potem nekateri nadaljevali šolanje na srednjih šolah. Nikoli mi ni bilo znano, zakaj smo prva štiri leta uporabljali besedi *in* ter *manj* pri osnovnih dveh računskih operacijah, v petem razredu pa smo prešli na *plus* in *minus*. Ali ne bi bilo vseeno, če bi že v prvem razredu rekli *plus* in *minus* tako kot od petega razreda naprej. Pri učitelju Pagonu in kasneje smo seveda uporabljali le slednje. Še dobro, da se za deljenje in množenje kdo ni spomnil kakih latinskih izrazov. Poleg matematike in fizike je Maks Pagon vodil tudi fotokrožek, kjer nikoli ni zmanjkalo sodelavcev, in matematični krožek, kjer smo se temeljito pripravljali na tekmovanja iz matematike. Bil je izvrsten podajalec in razlagalec učne snovi in odličen splošni in matematični didaktik. Večkrat je poudaril, da se dobro poučevati matematiko ne naučiš na učiteljišču, fakulteti ali akademiji, ampak moraš za to imeti nekaj srca in talenta ter da moraš sam kaj storiti v tej smeri. V šestem razredu smo se prvič srečali z negativnimi števili. Takrat smo še uporabljali izraz *relativna števila*. S kakšno lahkoto smo dojemali računanje z njimi skupaj z vsemi oklepaji vred! Bili smo ponosni na to, da na primer končno vemo, koliko je 3 minus 5 in koliko bo kazal termometer, ki sedaj kaže 15° C, potem pa temperatura pade za 18° C. Prej, v nižjih razredih, so nam preprosto pravili, da se večjega števila od manjšega ne da odšteti. Nihče nam ni povedal, da se to v resnici da, a da bo treba na to še nekoliko počakati. Šlo je pravzaprav za zgodovinski koncept uvajanja števil in računskih operacij. V antiki in še precej stoletij kasneje negativnih števil niso poznali in so se trudili na primer s tem, kako polinomsko enačbo zapisati s samimi pozitivnimi koeficienti. Kasneje sem izvedel, da se vse da, edinole deliti z nič ne. Velik napredek smo naredili, ko smo se naučili računati z ulomki in decimalnimi števili. Takrat sem prvič slišal za praštevila, največji skupni delitelj in najmanjši skupni večkratnik dveh in več naravnih števil.

Težave nam nista delala niti sklepni niti procentni račun. Pagon je že znal poskrbeti za to, da so celo najslabši učenci znali reševati najbolj vsakdanje naloge. Koliko stane kilogram moke, ki sedaj stane toliko in toliko, če se podraži za 6 %? Evrov takrat seveda še ni bilo, samo tip naloge smo navedli. Nekoliko težji korak je bil po šestletnem šolanju, ko smo računali samo s števili, preiti na obča števila, računanje s črkami. Nič hudega! Veliki Piaget[75] tako in tako pravi, da tako mora pač biti: ko smo dovolj stari in dozoreli, je čas, da se naučimo novih, bolj zapletenih reči. "Doslej vam je še kar šlo. Boste že videli, ko pridete v osmi razred, kjer boste reševali probleme!", nas je svarilo nekaj starejših, ki so bili razred ali dva pred nami. "Problem." Kaj je pa sedaj to? Tujka iz grške besede πρόβλημα. Pomeni marsikaj, na primer: *pomol, štrlina, nos, rt, skala, strma obala; nasip, bramba, obrana, zaščita; branilno orožje (oklep, ščit, sulica); pretveza, izgovor; znanstvena naloga (problem)*. Po drugi strani pa so nas učili, kako naj bi očistili in opleli svoj jezik vsega, kar ni slovenskega. Komaj smo se naučili pisati nove latinične črke q, w, x, y, nemške ä, ö in ü ter famozno črko ß in spoznali celo azbuko cirilskih, sedaj naj bi se pa človek ukvarjal še s problemi. Ali ni

[75]Jean Piaget (1896–1980) - švicarski psiholog, filozof in naravoslovec.

teh že povsod dovolj, še preveč! Še odrasli ljudje jih ne znajo sproti reševati ali pa jim gre to le težko od rok, sedaj pa naj bi mi otroci, nepolnoletni šolarčki, reševali kar probleme. No, Maks Pagon nam je znal hitro pojasniti, za kaj gre pri matematičnih problemih. V resnici so bili to linearni problemi z eno neznanko, na koncu pa z dvema, na primer: V hlevu so kure in zajci. Koliko je enih in drugih, če imajo vsega skupaj 9 glav in 22 nog? Takoj se je oglasil hudomušni učenec in vprašal: "Kaj pa, če ima kakšen zajec le tri noge?" Pagon se je hitro izmotal iz nastale situacije in porabil tudi do pol ure za dodatna pojasnila. Pogosto je bila to običajna ukana, da se je učitelj razgovoril o čem drugem in da ni spraševal za oceno.

Pagon se je pri enačbah pogosto zatekal k klasični analogiji pri tehtanju na tehtnici s skledama. Enakost je ustrezala ravnovesju tehtnice. Če v obe skledi tehtnice dodamo ali odvzamemo enaki masi, bo tehtnica še vedno v ravnovesju, kar pomeni zopet enakost. Če je tehtnica v ravnovesju, potem bo še vedno v ravnovesju, če masi v obeh skledah podvojimo, potrojimo itd. Prav tako bo tehtnica v ravnovesju, če masi v obeh skledah razpolovimo, raztretjinimo itd.

Seveda smo spoznali, da je lahko več enakovrednih postopkov reševanja matematičnega problema. Predpostavimo idealni primer, ko ima vsak zajec štiri noge, vsaka kura pa dve, vsaka od omenjenih živali pa eno glavo. Označimo z x število kur, z y pa število zajcev v omenjenem hlevu. Za glave potem velja enačba $x + y = 9$, za noge pa $2x + 4y = 22$. Tako smo prispeli do sistema ali sestava dveh enačb z dvema neznankama. Drugo enačbo lahko očitno poenostavimo z deljenjem obeh njenih strani z 2 in tako dobimo njej enakovredno, oklešćeno enačbo $x + 2y = 11$. Sistem enačb nato zapišemo v lepši, urejeni obliki:

$$\begin{aligned} x + y &= 9 \\ x + 2y &= 11 \end{aligned}$$

Nato smo eno neznanko izrazili iz prve enačbe in jo vstavili v drugo in dobili eno enačbo z eno neznanko:

$$y = 9 - x\,, \quad x + 2(9 - x) = 11.$$

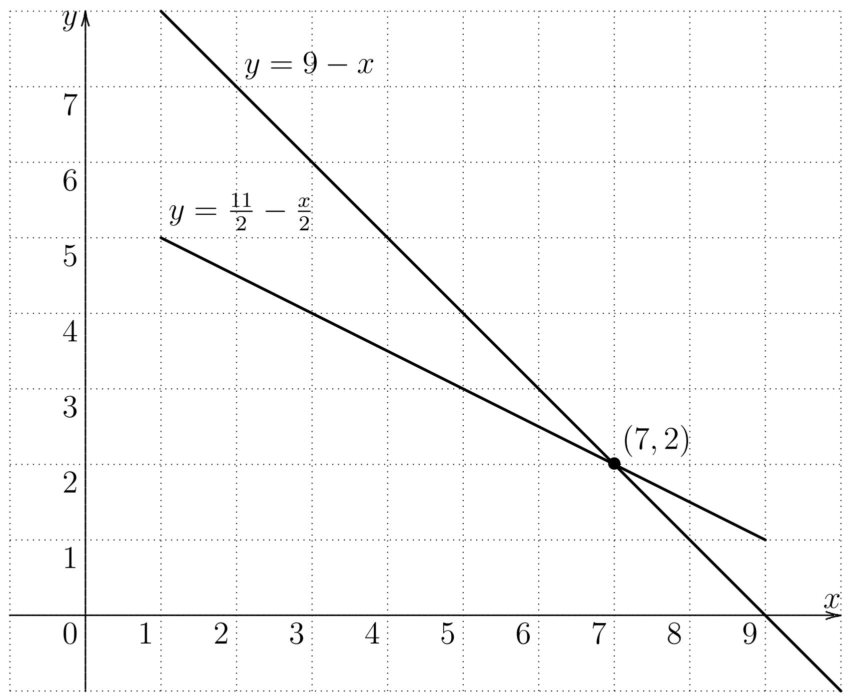
Po poenostavitvi imamo $x+18-2x = 11$ in s tem $-x = -7$ in končno $x = 7$. Nazadnje je $y = 9 - 7 = 2$. Odgovor: V hlevu je 7 kur in 2 zajca. Navadno smo naredili še preizkus: $7+2 = 9$ in $2\cdot 7+4\cdot 2 = 14+8 = 22$. Odgovarjanje v stavku in delanje preizkusa je potihoma izginilo iz učne prakse. Pa ni prav!

Izvedeli smo tudi, da lahko sistem enačb rešimo tudi drugače, z izločanjem ene neznanke s seštevanjem ali odštevanjem obeh strani enačb, morda s predhodnim množenjem obeh strani enačb s primernim faktorjem. Prastara metoda, ki so jo poznali na Vzhodu že davno. Predpostavili smo seveda, da je sistem rešljiv. Ker sta koeficienta pred neznanko x v zgornjem sistemu enaka, enačbi odštejemo in dobimo: $2y - y = 11 - 9$ oziroma $y = 2$. Ker sta pa koeficienta pred neznanko y v sistemu različna, najprej pomnožimo prvo enačbo z 2 in dobimo: $2x + 2y = 18$. Nato od nje odštejemo drugo enačbo $x + 2y = 11$. Dobimo enačbo $2x - x = 18 - 11$ in s tem $x = 7$. Ta način je boljši, ker deluje tudi pri sistemih več enačb z več neznankami. Toda več o tem sem izvedel šele na gimnaziji in fakulteti. Marsikomu ni bilo jasno, da smo našli edino rešitev sistema enačb. Res je, da sta neznanki dve, toda kot urejeni par je rešitev samo ena: $(x, y) = (7, 2)$. Izvedeli smo tudi, da kakšen sistem nima nobene rešitve, lahko pa jih ima celo neskončno mnogo.

Sem pa tja smo se lotili tudi priljubljene grafične metode. Iz obeh enačb smo izrazili neznanko y:

$$y = -x + 9, \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{11}{2}.$$

Geometrijsko predstavljata sedaj obe enačbi premici v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu (slika 16). Prva očitno poteka skozi točki $(1, 8)$ in $(9, 0)$, druga pa skozi točki $(1, 5)$ in $(9, 1)$. Dve točki pa seveda premico natančno določata. Presečišče (x, y) obeh premic pa predstavlja rešitev sistema. Hvala Descartesu, da se je izmislil koordinatni sistem. Če že ni trpel pod Poncijem Pilatom, se je pa moral pogovarjati ob 5. uri zjutraj v nezakurjeni dvorni knjižnici s švedsko kraljico Kristino in je zato, mraza nevajen, že prvo zimo bivanja v Stockholmu, kamor ga je povabila, podlegel pljučnici.



Slika 16: Grafično reševanje sistema enačb.

Matematikom pogosto očitajo, da svojega znanja ne znajo dobro unovčiti. Za marsikoga so pravili, češ toliko let je študiral, medtem pa so si drugi že zgradili cele gradove, okoli se vozijo z avtomobili prestižnih znamk, počitniško hišico imajo tu in tam, na morju jahto in še kaj. Tedaj se nehote spomnimo na Talesa iz Mileta.

Talesa so radi pikali zavoljo uboštva, češ to se vidi, koliko koristi ima od filozofije. Nekoč pa je na podlagi astronomskih opazovanj ugotovil, da bo oljka (naslednje leto) obilno rodila. Ker je imel nekaj denarja, je še tisto zimo zaaral vse stope za olje, v Miletu in na Hiosu. Najemnina je bila nizka, ker mu ni nikdo nabijal cene. Ko pa je prišel čas in je nastalo živo povpraševanje *po oljarnicah, jih je Tales oddajal, za kolikor je sam hotel, ter si nabral lepo vsotico. Tako je dokazal, da bi tudi filozofi lahko bogateli, ko bi jih bilo volja, da pa bogastvo ni cilj, ki si zanj prizadevajo.*

(Anton Sovrè: Predsokratiki)

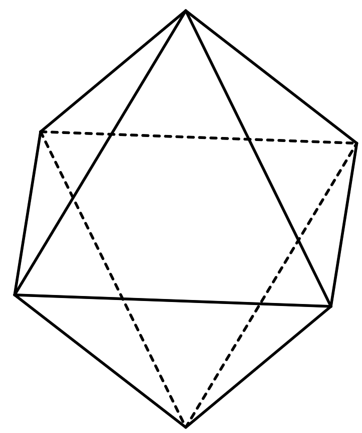
Sedaj je popolnoma jasno, da je sistem dveh enačb z dvema neznankama enolično rešljiv natanko tedaj, ko se ustrezni premici v koordinatnem sistemu sekata, nerešljiv, ko sta vzporedni in sistem ima neskončno mnogo rešitev, ko se premici ujemata.

Cirilica iz osnovne šole nam je na gimnaziji kar prav prišla, saj smo za drugi tuji jezik imeli ruščino in naučiti se je bilo treba samo nekaj novih črk. Poleg tega se je bilo treba brez pardona na gimnaziji naučiti vse grške črke, male in velike:

$$\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\eta\vartheta\iota\kappa\lambda\mu\nu\xi o\pi\rho\sigma\tau\upsilon\varphi\chi\psi\omega,$$

$$\mathrm{AB}\Gamma\Delta\mathrm{EZH}\Theta\mathrm{IK}\Lambda\mathrm{MN}\Xi\mathrm{O}\Pi\mathrm{P}\Sigma\mathrm{T}\Upsilon\Phi\mathrm{X}\Psi\Omega.$$

Mislim, da so bile zadnje tuje črke, ki smo jih spoznali šele na fakulteti, znak parcialnega odvajanja ∂, prva črka hebrejske abecede $\aleph$, ki se črkuje *alef* in se uporablja v teoriji množic, in simbol za Weierstraßovo eliptično funkcijo $\wp$. Simbol ∇, ki ga izgovarjamo *nabla*, pa je le narobe obrnjena črka Δ, *delta*. Simbolov pa je v matematiki kolikor jih hočete, vsaka teorija jih vpelje nekaj. Grške črke dandanes študentje slabo obvladajo, kaj šele dijaki. Morda prve tri ali štiri. Zanimivo je bilo pri geometriji. Ko smo obravnavali kote, je Pagon prinesel v razred kup zobotrebcev, s katerimi smo potem sestavljali ostre, tope in druge kote, pa tudi dvojice kotov s predpisanimi lastnostmi. Obravnavali smo podobnost in skladnost likov, ploščine, prostornine geometrijskih teles in drugo. Modele teles nam je redno prinašal v razred: lesene, papirnate, žične. Papirnate modele smo izdelovali tudi sami, za domačo nalogo. Nekega dne nam je dokazal, da je vsota notranjih trikotnikovih kotov 180°. Morda je bil to prvi matematični dokaz, ki sem ga doživel. Fasciniralo me je, ko smo spoznali, da je pravilnih teles le pe-



Slika 17: Pravilni oktaeder.

tero. Učeni Platon je pred več kot dva tisoč leti že vedel zanje. Notranji kot pravilnega n-kotnika je namreč $180° - 360°/n$. Denimo, da se v vsakem oglišču pravilnega telesa stika m pravilnih skladnih n-kotnikov. Potem mora, da sploh dobimo vogel, očitno veljati neenakost:

$$m\left(180° - \frac{360°}{n}\right) < 360°.$$

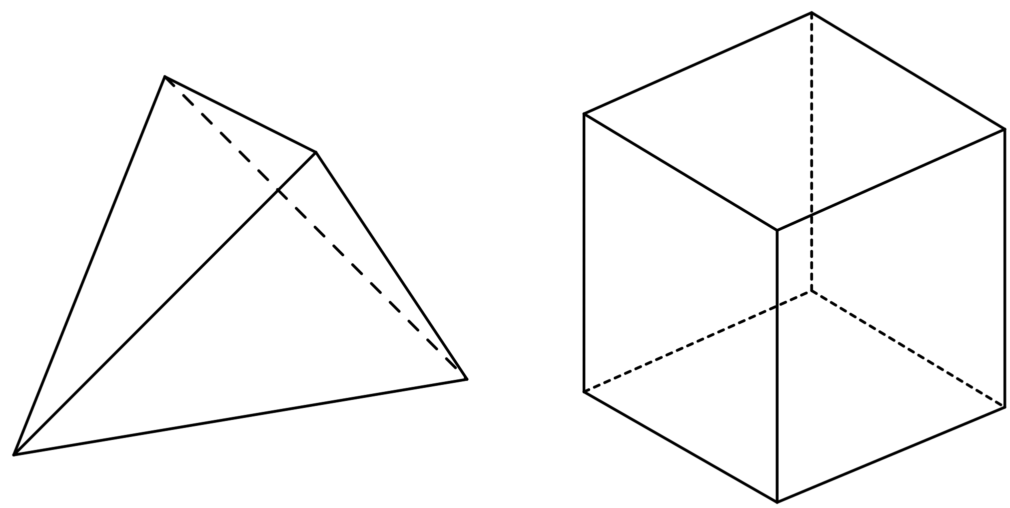
Ko neenakost delimo s $180°$, dobimo:

$$m\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 2.$$

Pri tem seveda veljata pogoja $m \geq 3$ in $n \geq 3$. Neenakost prepišemo v obliko

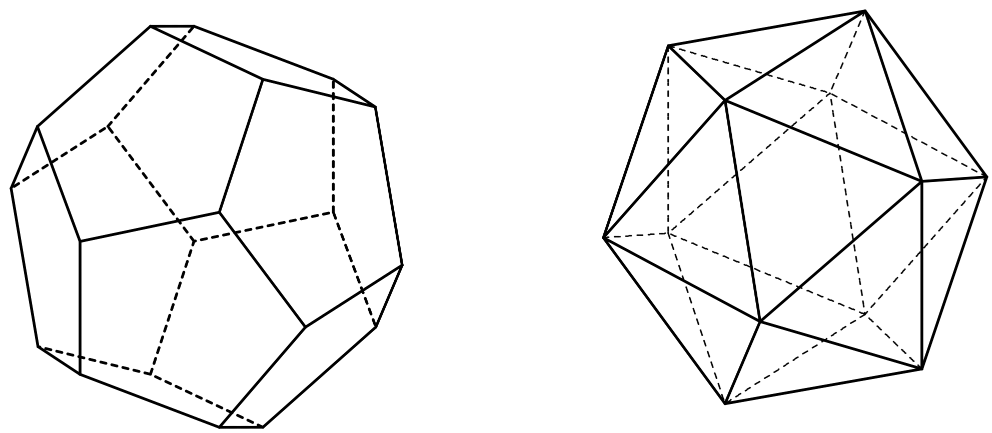
$$\frac{2}{m} + \frac{2}{n} > 1\,,$$

iz katere takoj razberemo, da naravni števili m in n ne moreta biti poljubno veliki, saj sta ulomka na desni poljubno majhna, če sta m in n dovolj velika. Za $n = 3$ mora veljati $m < 6$, kar pomeni $m = 3$, $m = 4$ ali $m = 5$. Za $m = 3$ imamo pravilni tetraeder, ki je omejen s štirimi skladnimi enakostraničnimi trikotniki, v vsakem od štirih oglišč se stikajo po trije, vseh robov pa ima



Slika 18: Pravilni tetraeder in pravilni heksaeder.

šest. Za $m = 4$ imamo pravilni oktaeder, ki je omejen z osmimi skladnimi enakostraničnimi trikotniki, v vsakem od šestih oglišč se stikajo po štirje, robov pa ima dvanajst. Za $m = 5$ imamo pravilni ikozaeder, ki je omejen z dvajsetimi skladnimi enakostraničnimi trikotniki, v vsakem od dvanajstih oglišč se jih stika po pet, robov pa ima vsega kar trideset. Za $n = 4$ dobimo pogoj $m < 4$, torej $m = 3$. Telo je sedaj pravilni heksaeder ali kocka, ki je omejena s šestimi skladnimi kvadrati, v vsakem od osmih oglišč se stikajo po trije, robov pa ima dvanajst. Končno imamo za $n = 5$ pogoj $3m < 10$, kateremu očitno zadošča samo število $m = 3$. Imamo pravilni dodekaeder, ki ga omejuje dvanajst skladnih pravilnih petkotnikov, v vsakem od dvajsetih oglišč pa se stikajo po trije, robov pa ima trideset. Pravilnih teles je torej le petero. Za vse pa velja znamenita Eulerjeva poliedrska formula, to je $o - r + p = 2$, kjer pomeni o število oglišč, r število robov, p pa število stranskih ploskev. Ugotovitve zapišimo bolj pregledno še v razpredelnico. Dolgoletne izkušnje kažejo, da je treba števila, kakor hitro se pojavijo na kupu vsaj tri, postaviti v primerno organizirano tabelo.



Slika 19: Pravilni dodekaeder in pravilni ikozaeder.

Zanimivo je tudi, kaj dobimo, če med seboj povežemo geometrijska središča stranskih ploskev pravilnih teles: pri tetraedru dobimo spet tetraeder, pri kocki oktaeder, pri oktaedru kocko, pri dodekaedru ikozaeder, pri ikozaedru pa dodekaeder. Pravimo, da sta si kocka in oktaeder dualni telesi, prav tako sta si dualni telesi dodekaeder in ikozaeder. Tetraeder pa je dualen kar sam sebi.

Pripomnimo, da je bil Platon Sokratov (Σωκράτης) učenec, Aristotel (Ἀριστοτέλης) pa Platonov. Platon ni bil od muh. Ustanovil je blizu Aten

Pravilni	o	r	p	n	m
tetraeder	4	6	4	3	3
heksaeder	8	12	6	4	3
oktaeder	6	12	8	3	4
dodekaeder	20	30	12	5	3
ikozaeder	12	30	20	3	5

Tabela 3: Število oglišč, robov in ploskev pravilnih teles.

Akademijo, ki je delovala nekako od 387 pr. n. št. do 529 n. št., ko jo je dal zapreti bizantinski cesar Justinian I., torej vsega skupaj 916 let. Njej v tem pogledu lahko postavimo ob bok le bolonjsko univerzo, ustanovljeno leta 1088. Akademija, grško Ἀκαδήμεια, izvira iz imena Akadem, grško Ἀκάδημος, ki je bil bajeslovni atenski junak in mu je bil posvečen neki gaj v bližini Aten. Platonova Akademija še ni bila šola v današnjem smislu, ampak nekakšna filozofska skupnost, usmerjena v svobodno in ustvarjalno miselno sobivanje. Približno tako se je izrazil v mesecu listopadu leta 2011 tudi profesor Dragan Marušič, tretji rektor tretje slovenske univerze, namreč Univerze na Primorskem, tretji slovenski matematik med rektorji. Med drugim je profesor Marušič namreč povedal, da mora biti univerza prostor svobodne ustvarjalnosti človekovega duha. Pred njim sta bila takoj po prvi svetovni vojni rektorja ljubljanske univerze profesor Josip Plemelj in profesor Rihard Zupančič. Slednji se je s svojim obnašanjem med drugo svetovno vojno tako zelo zameril oblastem, da je bil celo ob članstvo v Slovenski akademiji znanosti in umetnosti in ga tudi po osamosvojitvi Slovenije še niso rehabilitirali, čeprav nekatere druge take vrste so.

Pa smo se naučili pet novih tujk. Da se je treba strogo in dosledno oklepati definicij, sem spoznal na lastni koži. Pagonu sem sestavil telo, ki je imelo za stranske ploskve same skladne rombe. "Romb ni pravilen lik", me je podučil in sem oplel. Tako sem se enkrat za vselej zapomnil, kako pomembna je vsaka beseda v matematičnih definicijah. Mnogo kasneje sem se vendar potolažil, ko sem izvedel, da je Kepler odkril cel kup geometrijskih teles, med drugimi dva *romboedra*, ki sta omejena s samimi skladnimi rombi. S pravilnimi telesi in njihovimi simetrijami smo se na fakulteti ukvarjali pri teoriji grup, nihče pa nam ni namignil, kako izračunati površino in prostornino pravilnega dodekaedra in ikozaedra. Da se to da, sem izvedel veliko kasneje. Na osnovni šoli smo že znali, brez strogega dokaza, samo z ravnilom in šestilom načrtati pravilni petkotnik. Pri tem liku se pojavi zlato razmerje τ, to je razmerje med njegovo diagonalo in stranico. Zlati rez oziroma zlato razmerje sta se pojavljala v srednješolskih učbenikih, žal pa nikoli nismo prišli do njiju čeprav sta bisera matematike. Pogosto pa smo za zlati rez slišali od umetnikov, nismo pa vedeli, o čem točno govorijo. Še pri fotografiji pravijo, da mora biti objekt, ki ga hočemo predstaviti, v zlatem rezu, češ da ga človeško oko najprej opazi. Pri fotokrožku pa smo se mu tudi izognili. Kasneje sem le nekje prebral, da je zlato razmerje ključ do izračunov pri pravilnem dodekaedru in ikozaedru. Zelo smo bili tudi veseli, ko smo znali izračunati obseg in ploščino kroga. Še zdaj me fascinira Arhimedov pristop k računanju števila π, to je razmerja med obsegom in premerom kroga. Seveda smo temeljito predelali Pitagorov izrek in zraven spoznali še precejšen del zgodovine matematike. Do učencev je bil Pagon kljub natančnosti in strogosti prizanesljiv. Ko smo ga nekoč prosili, da naj ne bi tisti dan spraševal, ker je bil ravno veliki petek, dan strogega posta, se je najprej pošalil, češ da ravno na veliki petek bi bilo dobro spraševati, ker je pač to tako velik dan, nato pa nas, ker je predobro razumel, kaj želimo, res ni spraševal za oceno.

Pri fiziki smo pri Pagonovih urah spoznali osnove naravnih zakonov. Opravili smo precej poskusov v razredu. Fizikalni kabinet je bil takrat kar dobro opremljen. Pogosto se učitelji poskusom izogibajo, češ da jim vzamejo preveč časa za izvedbo in pripravo, da je težko ohranjati red v razredu in drugo. Najbrž pa se bolj bojijo, da bodo kaj razbili ali pa da jim poskus ne bo uspel, da jih bodo učenci preveč spraševali in da se utegnejo z vsem le osramotiti. Ravno to je narobe: tudi neuspeh poskusa se da razložiti in učenci imajo tudi od tega nekaj. Morda bo pa uspelo njim! Vprašanja učencev pa bi morala biti nekaj vsakdanjega. Dobro se spominjam, kako je Pagon prinesel v razred posodo in cev z živim srebrom, tako da je pokazal znameniti Torricellijev poskus. V živo smo videli nastanek vakuuma. Veliko smo izvedeli o Galileju in Newtonu ter njunem delu. Ni pa se bilo moč pri fiziki izogniti Arhimedu in drugim antičnim znanstvenikom. Vsak si je lahko zapomnil znamenitega Arhimedovega stavka: "Dajte mi oporno točko in premaknil bom Zemljo!" V dorski grščini: Δῶς μοι πᾶ στῶ καὶ τὰν γᾶν

$\varkappa\iota\nu\acute{\alpha}\sigma\omega$. Maks Pagon je neprestano sledil razvoju znanosti. Takrat sta se že uveljavljala polprevodniška dioda in tranzistor in posvetil jima je vsaj eno uro. Razlago je pričel tako, kakor da so ju odkrili prejšnji dan. Zelo zavzeto je seveda spremljal osvajanje vesolja in prodor radia ter televizije. Radio je takrat bil že v marsikateri hiši, televizijo, novo čudo tehnike, pa smo poznali le iz knjig in časopisov.

V času našega šolanja v Cerknem je naš učitelj matematike in fizike s sinom na kolesu blizu cerkljanskega pokopališča zelo nemarno padel in se precej hudo ranil po glavi zaradi razbitih očal. Bili smo nekaj časa brez njega in bilo nam je kar hudo. Ko smo odstranjevali zadnje ruševine med drugo svetovno vojno večkrat bombardiranega Cerknega, smo pridno sodelovali tudi učenci in učitelji, tudi Pagon. Takrat še ni bilo toliko strojev kot danes, toda naše ročice so le opravile neko pozitivno delo, tako da nam ta pojem pri fiziki ni delal kakšnih posebnih težav.

Matematični krožek pri Pagonu je odlično deloval. Vanj je sam povabil najboljše, ki jih nikoli ni zmanjkalo. Ko smo bili enkrat člani krožka, ni bilo govora, da bi kar tako izstopili. Marsikoga so doma popoldne pogrešali pri kmečkih delih, toda tu se nisem dal: hodil sem na ta krožek in danes mi je žal, da nisem še na katerega. Na žalost ni bilo na razpolago posebne literature z zahtevnejšimi nalogami kot dandanes, toda Pagon se je hitro znašel in privlekel na dan stare avstrijske in italijanske zbirke nalog. Ker smo reševali v glavnem naloge brez posebnega besedila, znanje tujega jezika ni bilo potrebno. Naloge, kjer je bilo to nujno, nam je pa prevedel. Naučil nas je tudi raznih trikov za hitro računanje s števili, šli smo se razne matematične uganke in drugo, tako da krožek ni bil samo kos suhoparne matematike.

Priljubljena je bila tale igra: "Izmisli si neko naravno število. Nato mu prištej in odštej 1. Povej mi produkt slednjih, pa ti povem, katero število si imel v mislih." Vedno je imel prav. Če sem si izmislil število x, potem sem mu povedal število $(x+1)(x-1)$. To pa je isto kot x^2-1. Tako je Pagon temu prištel 1, korenil in dobil x. Hkrati pa je še preveril, če smo prav računali.

Druga praktična reč je bila kvadriranje celih števil, ki imajo v desetiškem zapisu na koncu 5 enic: $25^2 = 625$, $95^2 = 9025$. Pravilo je preprosto: kvadrat se vedno konča s 25, pred tem pa je produkt števila pred tisto začetno 5 in njegovega naslednika: $2 \cdot 3 = 6$, $9 \cdot 10 = 90$. Tako imamo takoj: $115^2 = 13225$, ker je $11 \cdot 12 = 132$. Vsako naravno število n, ki se v desetiškem zapisu konča s 5, lahko na en sam način zapišemo v obliki $n = 10m+5$, kjer je m nenegativno celo število. Za kvadrat pa takoj dobimo:

$$n^2 = (10m + 5)^2 = 100m^2 + 100m + 25 = 100m(m + 1) + 25.$$

Prvi člen se konča z dvema ničlama, vsota pa s 25. Na gimnaziji je to prišlo kar za prav, čeprav raznim trikom hitrega računanja niso bili pretirano naklonjeni. Kljub temu pa sem na gimnaziji od našega Francoza slovenskega rodu, ki je slabi dve leti z nami drgnil šolske klopi, nakar pa se je s starši odselil nazaj v Francijo, izvedel, kako hitro množiš neko število s številom 11. V desetiškem sistemu, da ne bo pomote. $12 \cdot 11 = 132$. Zapisal je 2, pred njo je dodal vsoto $1 + 2 = 3$ in prepisal pred vsem skupaj še 1. Če pa je prišlo do prekoračitve desetice, je zapisal enice in štel 1 naprej: $48 \cdot 11 = 528$. Ker je $4 + 8 = 12$, je napisal najprej 8, pred njo 2, 1 pa je prištel k 4 in vsoto 5 postavil na začetek. Tudi večmestna števila se da hitro pomnožiti z 11 tako, da seštevamo po dve in dve števki prvega faktorja od enic v levo in pri prekoračitvi 10 štejemo 1 naprej. $1949 \cdot 11 = 21439$: 9 prepišem, $4 + 9 = 13$, 3 zapišem, 1 štejem dalje. $9 + 4 + 1 = 14$, zapišem 4, 1 štejem dalje. $1+9+1 = 11$, 1 zapišem, 1 štejem dalje. na koncu zapišem še $1+1 = 2$. Podobno dobim brez veliko pisanja: $5430674 \cdot 11 = 59737414$.

Francoz, žal že pokojni, je na gimnaziji sodeloval celo pri eni uri francoščine, ker je bila nekaterim dijakom takrat obvezni predmet. Žal pa mu ni šla slovenščina, kajti od staršev se je prej v Franciji naučil le cerkljanskega narečja. Zanimivo je bilo slišati kako staro cerkljansko besedo, ki jo tukajšnji Cerkljani niso več uporabljali. Takih izseljencev, ki so še dolgo ohranili znanje narečja, je bilo kar precej. Neka Cerkljanka, ki je živela v Bergamu, je svoja otroka naučila cerkljansko tako rekoč sredi Italije. Ko sta prihajala v Cerkno na počitnice, se jima je samo na zunaj poznalo, da nista Cerkljana.

Beseda je pri cerkljanskem matematičnem krožku nanesla celo na relativnostno teorijo in Alberta Einsteina, ki je pred dobrimi sto leti objavil svoja temeljna dela. Zato smo leto 2005 praznovali kot Svetovno leto fizike. Večina nas ni imela pojma o relativnostni teoriji. Je pa Mitja Močnik, Teškanov, ki je bil sicer en letnik pred menoj, očitno nekaj vedel o tem in ob neki drugi priložnosti sem bil priča njegovemu pogovoru s Pagonom. Doma se je namreč njegov oče Stane ukvarjal z vsem mogočim, kar je povezano z elektriko in elektroniko ter je očitno poznal tudi fiziko z Einsteinom in njegovo teorijo vred.

Mitja in Maks sta vpričo nas prišla do sklepa, da je vse relativno. Mitja je strnil debato z ugotovitvijo: "Potem je pa tudi Einsteinova relativnostna teorija relativna." Zelo modro! Pagon mu je prikimal. Zdelo se mi je prav čudno, da je z učenci s tako lahkoto razpravljal o marsičem. Nemalokrat je namreč med učiteljem in učencem precejšnja distanca. Na koncu, nekaj dni pred tekmovanjem, je izbral ekipo in z avtobusom smo se odpeljali na tekmovanje v Idrijo, kjer smo po navadi na matematičnih tekmovanjih dosegali kar lepe rezultate.

Pri fotokrožku nas je sodelovalo vedno dovolj. Imeli smo še kar dobro temnico tik ob zbornici. Opremljena je bila z vsem potrebnim za razvijanje fotografij in filmov. S šolskim fotoaparatom smo fotografirali največkrat dogodke na šoli, na proslavah in pustovanjih. Fotoaparat je bil bolj skromen, včasih pa je Maks prinesel svojega, ki je bil mnogo boljši. V temnici in na terenu smo člani fotokrožka prebili razmeroma precej časa. Marsikdo je pridobljeno znanje iz fotokrožka s pridom uporabil kasneje v življenju. Najnujnejše v zvezi s fotografiranjem je Pagon tudi napisal, in to na neki star italijanski pisalni stroj, ki ni premogel naših šumnikov. Zato je Maks ročno dodal kljukice na sičnike, kjer je bilo to potrebno. Fotokrožku se lahko zahvalimo za marsikateri posnetek, s katerim smo ovekovečili kak dogodek (proslave, laufarijo), pogled ali motiv, ki ga dandanes ni več mogoče ponoviti. Fotokrožek je vsekakor za vsako šolo in kraj pomemben, saj nam ohranja dokumentirane posnetke, ki jih profesionalne ustanove morda ne. Ali ni škoda, da nihče ne fotografira in opiše stvari, ki danes so, jutri pa jih morda ne bo več?

Težave s šumniki so se ponovile kasneje v računalništvu. Angleška abeceda jih nima in, ker so k nam računalniki v glavnem prihajali iz ZDA, so bile tudi tipkovnice ameriške ali angleške. V začetku je bila velika muka s šumniki, sčasoma pa so tudi ta problem rešili in danes lahko pišemo z vsemi mogočimi abecedami in alfabeti, z leve proti desni, z desne proti levi. Na voljo so nam razne oblike in velikosti črk, tako da večjih težav ni več. Praktično lahko vsakdo napiše sam knjigo z vsemi podrobnostmi in ilustracijami, če le ima nekaj smisla za to in seveda voljo.

Tudi po zaključku osnovnega šolanja je Maks Pagon še vedno stal ob strani svojim nekdanjim učencem, če so tako ali drugače imeli težave pri matematiki. Takih kalibrov nikoli ne zmanjka, toda učiteljev, kot je bil Maks, entuziast, kolega in človek, pa ni ravno na pretek. Leta 1971 mu je Društvo matematikov, fizikov in astronomov na svojem 14. občnem zboru v Novem mestu izročilo društveno priznanje za uspešno pedagoško delo. Nisem imel namena podrobno raziskovati njegovega življenja in dela. Zapisal sem samo misli na nekoga, ki nam je bil blizu pred šestdesetimi leti in ko se je že marsikaj pozabilo. Hvala mu za vse znanje, ki ga nam je nesebično posredoval. Vsekakor mu je marsikateri Cerkljan lahko hvaležen, da ga je toliko naučil in obenem poskrbel, da ni ostal prevelik neotesanec, da je lahko nadaljeval šolanje ter dosegel svoj poklic in našel primerno službo.

To so bili, vsaj zame na srečo, še časi, ko je učitelj nekaj veljal in so ga ljudje spoštovali, če je bil vsaj kolikor toliko dober. Sploh pa nekdaj niti ni mogel kdorkoli postati učitelj. Celoten šolski sistem z učiteljišči vred je bil veliko bolj naravnan na kvaliteto kot je dandanes. Nato so prišli časi, ko je bilo nenadoma vse pretežko, prezahtevno. Preveliko besedo so dali staršem, ki so se začeli vtikati v šolstvo, zlasti tisti, ki so bili tudi sami nekoliko šolani in so menili, da nekaj vedo tudi o poučevanju. Vrstili so se, neredko, razni pritiski na učitelje, moledovanja in morda celo podkupovanja.

Celo pri verouku se je dekan Mozetič nekega dne otepal neke mame, ker se njen obetavni sinček ni naučil na pamet šest božjih resnic ali sedem naglavnih grehov, ne spominjam se več, in ga ni hotel spustiti, da bi prejel zakrament svete birme in bil s tem potrjen za Kristusovega vojaka. Pa že novo obleko mu je kupila, kar v tistih časih ni bil tako majhen strošek. Verjetno mu je našla tudi že birmanskega botra, ki mu je za darilo že kupil najmanj zlato uro. Kako sta uredila, ne vem. Morda je bil v ta namen trdoglavi mulec posebej izprašan.

Učitelji in profesorji so dandanes za marsikoga nebodisigatreba. Menijo, da imajo preveč dopusta in počitnic ter da preveč zaslužijo. Vidijo jih nekaj ur na dan v šoli, ki se začne kasneje in konča prej kot delo v tovarni, ne pomislijo pa na veliko odgovornost, priprave, popravljanje testov, neprestano strokovno izobraževanje in drugo. Za nekatere je pač najpomembnejše na svetu tisto, kar se pridela, zgradi ali proizvede. "Kaj bi z učitelji in profesorji? Lahko njim! Ti nekaj blebetajo tam v šoli in na koncu nimaš kaj prijeti v roke. In to na račun naših žuljev." Bolje, da o tem preveč ne razmišljamo.

V sedmem razredu osnovne šole pa navsezadnje niti ni bilo tako slabo. Spomladi leta 1963 smo namreč organizirali šolski izlet na Vršič, meseca avgusta pa sem imel spet priložnost *iti na lepše*, kakor bi rekli danes. Takrat še nihče v Cerknem ni tako govoril. Zanimivo, da so na cesarskem Dunaju uporabljali (morda jo še) frazo *auf Lepschi gehen* v enakem pomenu. Pobrali so jo pri Čehih.

Počitnice ali dopust na morju si je malokdo lahko privoščil. Ljudje so bili veseli, če so našli kakšno nedeljo ali praznik nekoliko časa, da so se malo okopali v Cerknici ali Idrijci. Bili so to časi, ko je še veliko ljudi živelo in delalo na kmetih, ko je bila zemlja nekaj vredna in so jo spoštovali. Ne pa tako kot danes, ko se s tako lahkoto pogovarjajo o nekem zemljišču, kot bi šlo za kos blaga. Predvsem, kako bi ga prodali, preprodali in ob tem čim več zaslužili, ga pozidali, zabetonirali, asfaltirali, skratka uničili celo del našega planeta z izgovorom, da gre za višje družbene interese.

Med poletnimi počitnicami, preden smo odpotovali v Avstrijo, smo nekateri šli v tovarno Eta delat za en mesec, da smo zaslužili nekaj denarja. To je bilo tisti mesec, ko je bil v Skopju katastrofalni potres, namreč julija 1963. Takrat je vsak delavec dal enodnevni zaslužek za Skopje, z nami, učenci na začasnem delu vred. Najbolj mi je ostal v spominu prvi dan, ko mi je strašansko šel na živce tenko piskajoči strojček Ratovževe Ivanke, cerkljanske pisateljice, ki je delala za tekočim trakom z grelnimi ploščami. S tem strojčkom je delavka na svornik s kakimi 5 cm navoji po dolžini navijala matico. Ta pisk sem potem poslušal v spanju še celo noč.

Ivanka je bila doma pri Ratovžu, kar je tik pod omenjeno razvodnico na jadranski strani. Tam sem prvič videl tisto kamnito mizo, za katero so pomembni možakarji odločali, kaj, kje in kako se bo delalo. S časom pa sem se tudi na Eti navadil na vse mogoče piske, šume in ropote. Srečno in uspešno sem preživel tisti mesec, se v avgustu psihično odpočil, da sem jo septembra lahko mahnil še v zadnji razred osemletke. Že čez eno leto sem bil spet na Eti za en mesec, nazadnje pa sem bil tam 14 dni na delovni praksi kot idrijski gimnazijec. Eta, tovarna elektrotehničnih aparatov, je dolgo časa imela v svojem logotipu grško črko η, katere izgovarjava je bila kar ustrezna. Kasneje so jo zamenjali z bolj osno-simetričnim znakom, ki ustreza zviti žici. Vsekakor smo bili ponosni, da smo imeli priložnost videti Eto od znotraj in celo za en ε povečati[76] njeno proizvodnjo v tistih dneh. Tovarna je takrat imela za današnje pojme še zastarelo proizvodnjo. Marsikatero orodje so nekateri bistroumni delavci tudi sami izumili in izdelali. Vsa Cerkljanska se je začela lepo razvijati, kar se je poznalo tudi na zunaj. Po drugi svetovni vojni na pomoč Ljubljane ali Beograda ni bilo preveč računati, Cerkljani

[76] Z grško črko ε navadno v matematiki označujemo majhno pozitivno število.

so se morali večinoma znajti sami. V nekaj letih se je namreč v centrih odločanja pozabilo na prispevek in žrtve Cerkljanske med NOB. Poleg tega ni bilo takoj trdnega sporazuma glede naše zahodne meje in Ljubljana ni nič kaj rada vlagala v naše kraje, ne v izgradnjo ne v šolstvo.

Pomislite, štirideset let je toliko, kolikor so se Izraelci, ko so hodili iz Egipta v obljubljeno deželo, se cvrli in zmrzovali po puščavi, ker jih je Bog kaznoval, ker so molili in častili zlato tele, pa ne samo njega, in uganjali tudi druge strašne, Bogu nevšečne pregrehe. Pa še Mojzes se je moral kar dvakrat povzpeti na goro Sinaj po kamnite table desetih božjih zapovedi, kakršne so na primer naslikane na cerkvi sv. Ivana v Šebreljah. Zlato tele so ulili zato, ker Mojzesa dolgo ni bilo nazaj z gore, kjer se je nekaj obotavljal pri Vsemogočnem, ljudje so pa menili, da je z njihovim voditeljem v obljubljeno deželo konec. Tudi Odiseja ni bilo dolgo nazaj, pa so že mislili, da je po njem in mu začeli snubit zvesto Penelopo na Itaki. Zato so Izraelci zbrali na kup vse zlate uhane, ki so jih nosili ljudje, ženske, dekleta in fantje. Vse skupaj so stalili in odlili podobo tiste živali, češ da bodo za njo namesto za Mojzesom hodili domov. Potem so priredili okoli teleta, ki so ga postavili na vzvišeno mesto, nekakšen žur, kot bi danes rekli mladi. Ja, že takrat so tudi fantje nosili uhane, kot je navada zadnje čase. Nisem pa bil v stanju ugotoviti, če so takrat fantje nosili uhane na pare ali ne. Pod Italijo so morali ljudje tudi oddati zlatnino, ko je kraljestvu že pošteno šlo za nohte, tisto pot pa za vojake in topove. Pa recite, da se zgodovina nekako ne ponavlja! V zameno za zlate poročne prstane so dobili aluminijaste. Moja mama in ata, ki sta se poročila v medvojni Franciji, sta po nekem naključju uspela ohraniti svoja zlata poročna prstana. Njuni imeni sta bili v prstana celo vgravirani.

Zlato tele (Золотой телёнок) je tudi literarno delo avtorjev Ilfa (Илья Арнольдович Ильф) in Petrova (Евгений Петрович Петров). Zelo sem se zabaval, tulil in skakal do stropa, ko sem ga bral. Prebral sem ga celo dvakrat, kar je sicer manj kot Tavčarjevo Visoško kroniko, ki me še vedno pritegne vsake toliko časa, da jo vzamem v roke in preberem kakšen njen del.

Petdeset let pa bo kmalu minilo od dneva, ko sem na Fakulteti za strojništvo v beli Ljubljani dobil prvo zaposlitev in ko sem postal asistent za matematiko. Ni bilo to ravno lahko delo, kot bi si kdo mislil. Kar naprej nove vaje, nove naloge, ponavljanje ene in iste stvari v več skupinah, pogovori s strogim profesorjem, kolokviji, pregledovanje izdelkov, dolgočasni, včasih pa prav srboriti sestanki katedre in morda še kaj. Zraven vsega tega pa še podiplomski študij. Zabavno je bilo, da je bilo med prvimi študenti strojništva, s katerimi sem imel opravka na vajah, tudi nekaj Cerkljanov. Na kolokvijih in izpitih pa sem srečeval tudi mlajše in starejše od sebe, ki sem jih od nekod vsaj malo poznal.

Vsekakor pa sem ponosen na to, da se nisem sam silil na Univerzo. Nisem prišel nanjo z vezami in poznanstvi, kakor je to ustaljena navada v Dolini Šentflorijanski. Noben brat, ata, mama, teta ali stric, čeprav sem jih takrat še imel, mi ni pomagal. Na matični fakulteti so me predlagali, da bi bil dober za asistenta na fakulteti za strojništvo. Pozanimal sem se za to mesto in ga tudi dobil. Biti na Univerzi in nekaj doprinesti k izobraženosti ljudi je bila zame velika čast. "V življenju ni nič boljšega, kakor poučevati in predavati matematiko", je rekel francoski matematik Siméon Denis Poisson (1781–1840). Podobno misel najdemo še marsikje, tudi v indijskih Vedah.

Poissona v matematiki in fiziki srečamo kar nekajkrat. Po njem imenujemo integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}. \tag{11}$$

Izračunamo ga na dokaj čudne načine, kajti z običajnimi metodama, s substitucijo in per partes, mu ne pridemo do živega. Škot William Thomson (1824–1907), bolj znan kot lord Kelvin, je baje nekoč pred tablo študentom rekel, da je pravi matematik tisti, ki takoj vidi, da velja (11). Po Kelvinu se imenuje stopinja na lestvici absolutne temperature. Prvič smo srečali absolutno temperaturo pri profesorju Karčniku v tretjem letniku gimnazije. Edino tisto leto me je on poučeval fiziko. Naneslo je tako, da me je vsako leto ta predmet poučeval nekdo drug, kar seveda ni bilo v redu. Dika in ponos verjetnostnega računa je standardizirana porazdelitev, ki ima gostoto

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \tag{12}$$

Če hočemo preveriti, da je integral te gostote po vsej realni osi res enak 1, moramo po preprosti substituciji uporabiti Poissonov integral (11).

V verjetnostnem računu je znana Poissonova diskretna porazdelitev z verjetnostno funkcijo

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

pri čemer je parameter λ pozitivno število. Vrsta iz vseh p_k konvergira in njena vsota je, kakor se spodobi, enaka 1.

Pri parcialnih diferencialnih enačbah srečamo Poissonovo enačbo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y),$$

ki jo za $f(x, y) = 0$ imenujemo Laplaceova enačba. Rešujemo ju na nekem prostorskem območju pri določenih robnih pogojih. Za ravninsko Laplaceovo enačbo v polarnih koordinatah

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

na krogu $r \leq R$ pri robnem pogoju $u(R, \varphi) = f(\varphi)$ najdemo rešitev s Poissonovo integralsko formulo

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{r^2 - 2rR\cos(\vartheta - \varphi) + R^2} f(\vartheta)\, d\vartheta.$$

V skladu s svojim priimkom sem bil v svoji prvi službi na Fakulteti za strojništvo razpet kar med tri profesorje: Tomaža Klinca, Bogdana Krušiča in Pavlino Mizori Oblak. Vsak je bil po svoje zanimiv. Tomaževa in Pavlinina dela sem celo kasneje, kot docent in profesor, priporočal študentom ob raznih priložnostih. Od Bogdana pa sem podedoval skripta, skrbno napisana na pisalnem stroju. Pavlina je bila dolgo v Sloveniji edina doktorica matematike, Vidavova študentka. Slovela je po tem, da se je ves čas svojega delovanja na fakulteti odlično upirala vsem najrazličnejšim poskusom goljufanja študentov na kolokvijih in izpitih.

Na Fakulteti za strojništvo sem spoznal, da se je France Dacar, ki me je nadomeščal v času mojega služenja v JLA, ukvarjal z nekimi čudnimi števili, za katere se je izkazalo, da je z njimi operiral že Francoz Henri Auguste Delannoy (1833–1915). Po njem jih imenujemo *Delannoyjeva števila*. Označimo jih z $D(m,n)$. Pri tem sta m in n nenegativni celi števili. Najprej postavimo, da je $D(m,0)=1$ in $D(0,n)=1$ za vsak nenegativen m oziroma n. Nato pa Delannoyjeva števila računamo z rekurzijo

$$D(m+1,n+1)=D(m+1,n)+D(m,n+1)+D(m,n).$$

Skoraj tako je kot pri Pascalovem trikotniku, v katerem so razmeščeni binomski koeficienti

$$B(m,n)=\binom{m+n}{n}=\binom{m+n}{m}.$$

Zanje je tudi $B(m,0)=1$ in $B(0,n)=1$ za vsak nenegativen m oziroma n, rekurzija pa je za člen krajša:

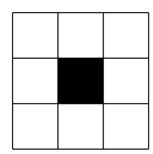
$$B(m+1,n+1)=B(m+1,n)+B(m,n+1).$$

Delannoyjeva števila se pojavijo marsikje v matematiki in njeni uporabi, celo v genetiki. Z rastočim m in n hitro rastejo. Če pa jih računamo po nekem praštevilskem modulu p, tako da jih računamo le z ostanki pri deljenju s p, pa naletimo na zanimive vzorce, ki se na neki način ponavljajo. Temu rečemo *samopodobnost*. Delannoyjeva števila po modulu p označimo s $D(m,n)_p$. Ležijo med vključno 0 in vključno $p-1$. Sistem ostankov po praštevilskem modulu p je komutativen obseg. V njem računamo po modulu p. To pomeni: kakor hitro običajna vsota ali produkt števil v tem obsegu doseže ta ali preseže ta p, odštejemo tolikokrat p, da pridemo v meji

0 in $p-1$. S spreminjanjem modula p najdemo bolj ali manj lep vzorec, če števila $D(m,n)_p$ postavimo v matriko. Za praštevilo $p=2$ dobimo same enke, ker so vsa Delannoyjeva števila liha. Ta primer seveda ni zanimiv. Izkaže se, da je dovolj obravnavati le osnovno kvadratno shemo $D(m,n)_p$ za $m=0,1,2,\ldots,p-1$, $n=0,1,2,\ldots,p-1$. Preostala števila $D(m,n)_p$ dobimo iz te osnovne celice s tako imenovanim *tenzorskim množenjem* po modulu p. V m-ti vrstici in v n-tem stolpcu stoji število $D(m,n)_p$. Vrstice in stolpci se štejejo od 0 do $p-1$. Števila $D(m,n)_p$ imajo tako imenovano *Lucasovo lastnost*. Francoz François Édouard Anatole Lucas (1842–1891) jo je odkril za binomske koeficiente $B(m,n)$, imajo jo pa še nekatera druga dvojna zaporedja.

Posebej bodimo pozorni na ničle v osnovnih celicah. Na mesto ničle bomo postavljali črn kvadratek, ostala polja pa bomo puščali bela. Vzemimo najprej najenostavnejši primer $p=3$.

1	1	1
1	0	2
1	2	1

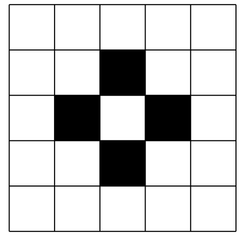


Slika 20: Delannoyjeva števila $D(m,n)_3$, osnovna celica.

Primer za $p=5$ je nekoliko bolj pester kot prejšnji. Seveda pa je z rastočim p osnovna celica vedno večja. Na desni in spodnji stranici opazimo izmenjavo števil 1 in 4. Predvidevamo, da se v splošnem tam izmenjavata 1 in $p-1$, kar se da tudi dokazati. Prav tako ležijo ničle v osnovni celici simetrično, kar tudi zahteva dokaz.

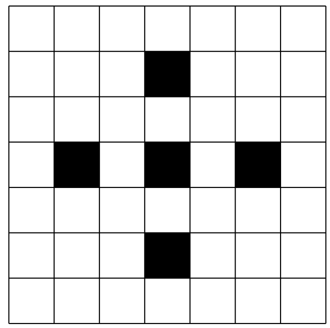
Naslednje praštevilo je $p=7$. Osnovno celico zlahka izračunamo in ni nič posebnega. Število ničel v njej nekoliko naraste. Če bi se vprašali, kako je število ničel v osnovni celici odvisno od p, bi bil pa to že cel projekt, raziskovalna naloga ali nekaj takega. Vprašanje je le, če bi kdo radodarno financiral tako reč. Čim so namreč v nekem problemu praštevila, reševanje navadno ni prav lahko.

1	1	1	1	1
1	3	0	2	4
1	0	3	0	1
1	2	0	3	4
1	4	1	4	1



Slika 21: Delannoyjeva števila $D(m,n)_5$, osnovna celica.

1	1	1	1	1	1	1
1	3	5	0	2	4	6
1	5	6	4	6	5	1
1	0	4	0	3	0	6
1	2	6	3	6	2	1
1	4	5	0	2	3	6
1	6	1	6	1	6	1



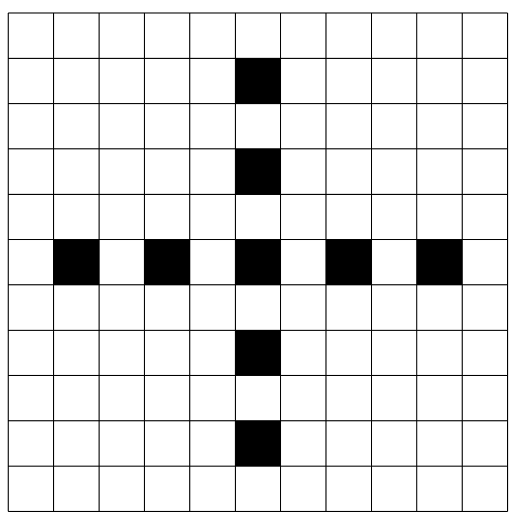
Slika 22: Delannoyjeva števila $D(m,n)_7$, osnovna celica.

Za $p = 11$ označimo s črnim kvadratkom v osnovni celici samo mesta, kjer so njene ničle. Prav tako za $p = 13$, $p = 17$ in $p = 19$. Potem bomo nehali, z računalnikom pa lahko raziščemo osnovne celice za praštevila vse do 211. Vidimo, da so ničle včasih samo na srednjicah osnovne celice, včasih pa tudi izven nje. Samo na srednjicah so zagotovo za $p = 3, 5, 7, 11, 19$. Če pa je tako tudi še za kakšno večje praštevilo kot 211 pa, kot kaže, ni znano.

Proti koncu študija se je študentka Klavdija Kutnar odločala, ali bo diplomirala iz topologije ali česa drugega. Odločila se je, da bo pri meni vzela temo *Delannoyjeva števila*. Zbrala je literaturo in po nekaj iteracijah je bilo diplomsko delo zrelo za zagovor. Obenem je Klavdija opravila vse izpite in uspešen zagovor je bil meseca julija. Absolventskega staža seveda ni izkoristila, ampak je jeseni vpisala podiplomski študij v Mariboru, v Kopru pa je hitro postala asistentka za matematiko. V Mariboru in Kopru je v roku opravila vse študijske obveznosti.

Medtem pa je stekel v Kopru doktorski študij matematike, Klavdija je doktorirala pri profesorju Draganu Marušiču in kmalu za tem postala docentka, izredna in redna profesorica. Zanimivo je tudi tole, da je Klavdija kot prva doktorirala na Fakulteti za matematiko, naravoslovje in informacijske tehnologije (FAMNIT) v Kopru, in to še preden je na tej fakulteti sploh kdo diplomiral. Ko pa je njen mentor postal rektor, pa je Klavdija postala dekanja FAMNIT-a. Je zelo aktivna in uspešna matematičarka v svetovnem merilu, specialistka za teorijo grafov in algebro ter mentorica pri diplomah, magisterijih in doktoratih. Tako se lahko pohvali, da je bila uspešna mentorica kitajski študentki Zhang Cui. Sodeluje pri organizaciji mednarodnih srečanj matematikov s svojega področja. Danes je Klavdija rektorica Univerze na Primorskem.

FAMNIT je mlada fakulteta, njena učiteljska mesta zasedajo mladi in perspektivni ljudje, na njej si kar podajajo kljuke tuji predavatelji s celega sveta in od nje si lahko še veliko obetamo.



Slika 23: Delannoyjeva števila $D(m,n)_{11}$, ničle osnovne celice.

Če pa praštevila $3, 5, 7, 11, 19$ povečamo za 1, dobimo $4, 6, 8, 12, 20$, kar so ravno števila ploskev pravilnih poliedrov. Pet je pravilnih poliedrov, pet pa je videti izjemnih praštevil v zvezi z Delannoyjevimi števili. Ni še znano, ali gre samo za slučaj, dokler nekdo ne odkrije praštevila $p > 211$, za katero ima osnovna celica ničle samo na srednjicah. Problem je bil nakazan v nekem članku v matematični reviji *Discrete Mathematics*. Če drugega ne, je Kitajec Hao Pan, ko je omenjeni članek dregnil vanj, našel precej splošen primer zaporedij z Lucasovo lastnostjo.

Delannoyjevo število $D(m,n)$ ima med več kombinatoričnimi pomeni tudi tega. Pove nam, koliko urejenih n-teric $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ celih števil pri danem nenegativnem celem številu m izpolnjuje pogoj

$$|x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n| \leq m.$$

Odgovor je preprost: natančno $D(m,n)$. Zaključene formule zanje ni, lahko pa jih izrazimo z vsoto:

$$D(m,n) = \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \binom{m}{k}\binom{n}{k} 2^k.$$

Števila $D(m,n)$ so simetrična v svojih argumentih m in n, kar lahko zapišemo kot $D(m,n) = D(n,m)$.

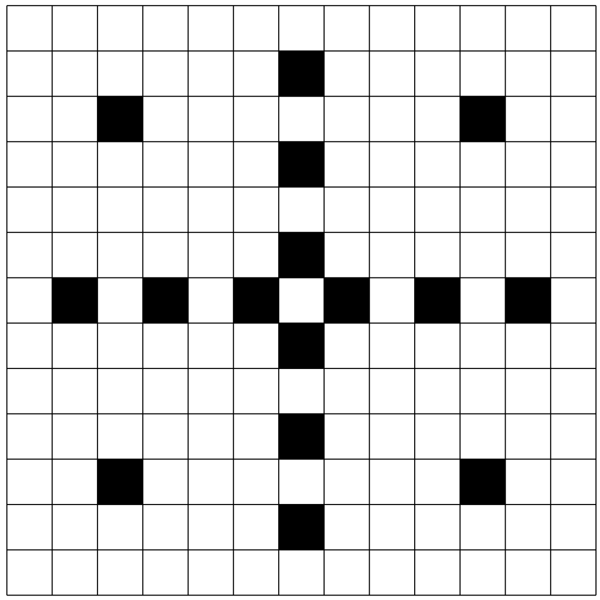
Delannoyjevo število $D(m,n)$ izraža število mrežnih poti v $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ od točke $(0,0)$ do točke (m,n) pri dovoljenih korakih $(1,0), (0,1), (1,1)$. Števila $B(m,n)$ pa število mrežnih poti pri dovoljenih korakih $(1,0), (0,1)$.

Po Lucasu se imenujejo tudi *Lucasova števila* L_n. Opredeljena so z enako rekurzijo kot Fibonaccijeva števila F_n, le začetni dve sta drugačni. Pri obeh dovolimo celoštevilske indekse, tudi negativne. Tako je na primer $F_{-1} = 1, L_{-1} = -1$, splošno

$$L_{-n} = (-1)^n L_n, \quad F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n.$$

Medtem ko je

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$$



Slika 24: Delannoyjeva števila $D(m,n)_{13}$, ničle osnovne celice.

pri pogoju $F_0 = 0, F_1 = 1$, je

$$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$$

pri pogoju $L_0 = 2, L_1 = 1$. Fibonaccijeva in Lucasova števila so precej prepletena. Navedimo kot zgled le, da velja relacija

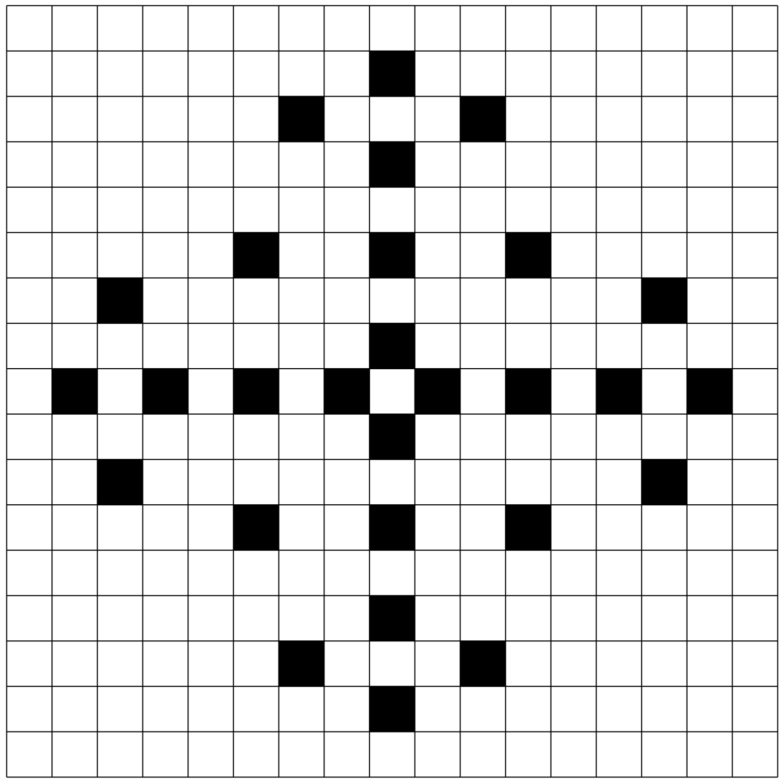
$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \tag{13}$$

Relacijo (13) dokažemo kar tako, za vajo, z metodo matematične indukcije. Očitno velja za $n = 0$.

$$F_{-1} + F_1 = 1 + 1 = 2 = L_0.$$

Opravimo še indukcijski korak. Predpostavimo, da (13) velja za vsa naravna števila do nekega $n > 0$. Potem sklepamo:

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} = (F_{n-1} + F_{n+1}) + (F_{n-2} + F_n) =$$



Slika 25: Delannoyjeva števila $D(m,n)_{17}$, ničle osnovne celice.

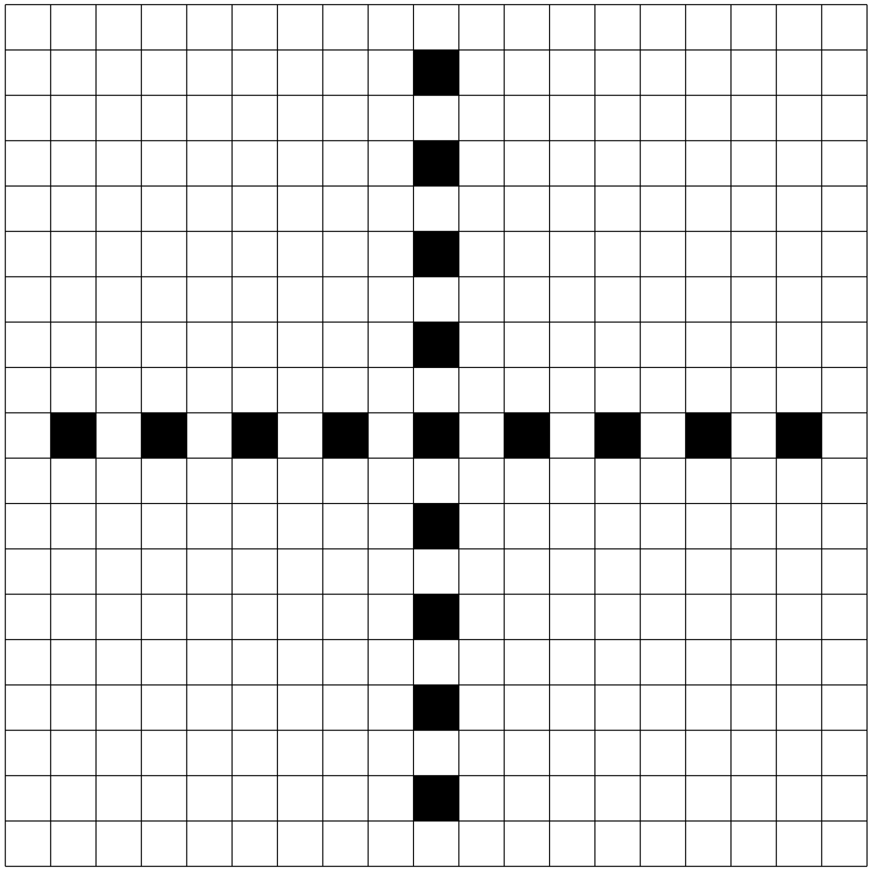
$$= (F_{n-1} + F_{n-2}) + (F_{n+1} + F_n) = F_n + F_{n+2}.$$

Zato očitno velja

$$L_{n+1} = F_n + F_{n+2},$$

kar potrjuje pravilnost relacije (13) za vsa cela števila $n \geq 0$. Za $n < 0$ jo potem zlahka dokažemo.

Ko smo že ravno pri Lucasovih številih, moram zapisati žal tudi trpko izkušnjo v zvezi z njimi. Neka razmeroma dobra študentka, kar ni ravno pogosto, me je prosila za mentorstvo pri diplomskem delu in ponudil sem ji temo *Lucasova števila*. Toda mesece in mesece je ni bilo naokrog. Medtem je diplomiralo pri meni kar nekaj študentov obeh spolov. Nekoč sem jo potem



Slika 26: Delannoyjeva števila $D(m, n)_{19}$, ničle osnovne celice.

le srečal in jo pobaral, kaj je z diplomo. Razočarala me je s tem, da niti naslova teme niti približno ni več vedela. Povpraševanje mi je vse pojasnilo: študentka še nima opravljenega izpita iz nekega družboslovnega predmeta. Za opravljanje diplome je seveda treba imeti vse izpite, seminarje in druge obveznosti, ki jih določa učni načrt ob vpisu.

Navadno se absolventi, ki niso dokončali študija, vedno bolj izogibajo svoji fakulteti in profesorjem. Vsa čast tistim, ki jih dolgo iz najrazličnejših razlogov ni bilo blizu, pa so se le opogumili in diplomirali. Na vsake toliko časa smo nekdanjim študentom pisali, naj pridejo na razgovor, tudi v popoldanskih urah, da ne bi bilo izgovora, da dopoldne nimajo časa. Žal je bil odziv bolj pičel. Dogajalo se je, da k marsikateremu potencialnemu mentorju ni prišel nihče.

Pisanje diplomskega dela je za študente resna stvar. Samo po sebi se razume, da je treba večkrat obiskati mentorja, ki bedi nad tem, da nekaj nastaja, da je vse pravilno zapisano, oblikovano, urejeno in da ne manjkajo uvod, sklepna beseda in seznam uporabljene literature. Paziti je treba na to, da je diplomsko delo ravno prav obsežno, da je izbor črk pravšnji, da je tiskano dvostransko, če je tako predpisano, da je razmik med vrsticami pravilen in morda še na kaj. Prvič je navadno delo napisano tudi jezikovno bolj slabo. Včasih tako zelo, da se človek lahko samo čudi, kaj so študenti delali po šolah celih šestnajst ali sedemnajst let, da je njihova slovenščina tako slaba. Nekdanji cerkljanski učitelj slovenščine Viktor Jereb in še marsikdo bi se začel obračati v grobu, če bi za to izvedel. Na koncu pa je po navadi besedilo le kolikor toliko v redu, da je za med ljudi. Pomembno pa je, in to ne nazadnje, da ni preveč odstavkov dobesedno prepisanih iz virov. Če pa so že, morajo biti njihovi pravi avtorji raje trikrat navedeni kot nobenkrat.

V dobi računalnikov pisanje diplomskega dela ne predstavlja posebnega problema, saj se besedilo lahko dopolnjuje, urejuje, posamezne dele lahko prestavljamo sem ter tja, kakšen del lahko izbrišemo, žal tudi nehote, po nerodnosti. Lahko izbiramo velikost in slog črk in celo različne pisave: latinico, cirilico, grško in arabsko pisavo, devanagari in morda še katero. Na razpolago so številni matematični in drugi simboli. Del tega lahko opazimo tudi v pričujočem delu. Nekateri urejevalniki imajo tudi črkovalnike, ki nas opozarjajo na tiskovne napake. Žal še ne preverjajo slovnice in pravilnosti trditev. Še pred štiridesetimi leti smo diplomska dela tipkali, puščali prazna mesta za simbole, ki jih ni na tipkovnici, nato pa jih ročno vpisovali. Na koncu smo dali vse oblikovane strani razmnožit na čim boljši kopirni stroj in v končno obdelavo knjigovezu. Diplomsko delo je bilo na koncu videti še kar spodobno.

Diplomsko delo je nazadnje treba pred komisijo zagovarjati. Včasih pride zagovor poslušat tudi kdo od diplomantovih prijateljev in sorodnikov. Pogosto pa tudi nihče, tako da zagovor poteka le pred komisijo, v kateri sta zraven mentorja še dva člana, včasih trije, eden od teh pa je predsednik in vodi zagovor. Vsak član komisije diplomanta tudi kaj vpraša. V resnici ga mora, sicer ni pravega zagovora. Zgodilo se je že, da je nekdo nekoga vprašal, koliko je dvakrat tri, da je s tem preizkusil, če je kandidat še pri sebi, ker se mu je zdel nekoliko odsoten. Če je komisija zadovoljna z vsem skupaj, je zadnja preizkušnja na fakulteti za študenta končana in dobi začasno potrdilo, da je diplomiral in kateri akademski naziv si je s tem priboril. Na slovesno podelitev diplomske listine pa mora še počakati kakšen mesec ali pa tudi več. Pogosto ljudje sprašujejo, če kdo tudi ne opravi zagovora. Žal se to tudi dogaja, a zelo redko.

Dogaja se pač, a na srečo le redko, da komu matematika in naravoslovni predmeti na fakulteti gredo kar dobro, ustavi pa se pri predmetu, kjer se je treba kaj naguliti ter prebrati celo goro knjig in člankov. Pri vsem tem se je seveda treba zapomniti, kaj je rekel Konfucij, kaj predsokratiki in sam veliki Sokrat, bolje Σωκράτης, kaj Platon, Πλάτων, kaj Aristotel, Ἀριστοτέλης, sv. Avguštin, sv. Tomaž Akvinski, Avicenna, ابن سينا, Averroes, ابن رشد, Roger Bacon, Erazem Rotterdamski, Friedrich Nietzsche, Immanuel Kant, François-Marie Arouet de Voltaire, krajše Voltaire, Jean-Jacques Rousseau, Denis Diderot, Jean-Paul Sartre, Søren Kierkegaard, Karl Jaspers, Martin Heidegger, Edmund Husserl, Mohandas Karamchand Gandhi, krajše Mahatma Gandhi, महात्मा गान्धी, in ostali modrijani preteklih in sedanjih časov. Vedeti je treba, kako je učila Maria Montessori, kako je učil Jean Piaget, kako Jan Amos Komensky, kako Vigotski, Лев Семёнович Выготский, rojen kot Лев Симхович Выгодский, kako France Strmčnik, Barica Marentič Požarnik in ostali velikani znanosti. Vse te je treba na veliko citirati, zlasti v pisnih izdelkih, da ne bi bilo preveč očitno, da je kaj zraslo na zelniku nadebudnega govorca ali pisca.

Ljudje smo si različni, kar je dobro, sicer bi bilo prebivanje na tem svetu res dolgočasno. Tako na primer nima ravno vsakdo dar govorništva, ki bi bil sicer prepotreben pri družboslovnih predmetih. Poleg tega pa so to veščino v preteklih desetletjih zanemarjali in šele zadnje čase mu spet posvečajo nekaj več pozornosti vsaj s tem, da občasno prirejajo tečaje govorništva. Sicer pa imamo takih, ki veliko govorijo, pa bolj malo povedo, tako in tako preveč. Veliko bolj prav bi nam prišli taki, ki znajo kaj novega izdelati ali izboljšati.

Slika 27: Planina pri Cerknem.

7 Izlet na Vršič in počitnice v Avstriji

Organizacija kakršnegakoli izleta je bila v mojih šolskih letih na Cerkljanskem pravi podvig, pravi projekt, bi rekli danes. Za naš šolski izlet smo najeli manjši tovornjak, mislim da je bil to tisti, s katerim so prej pobirali mleko po Cerkljanskem. Nanj so namestili ponjavo in klopi, in že je bilo vozilo pripravljeno za odhod. Takih voženj smo bili že vajeni, saj nas je Čerinov Janez na precej večjem tovornjaku že vozil v Postojnsko jamo in Portorož, pa v Planico in morda še kam. O dogodku, namreč čolnarjenju in kopanju na Stiskarjevem jezu dan pred šolskim izletom v Portorož, je bilo nekaj govora na drugem mestu. Gasilci so tudi včasih organizirali podobne izlete. Ker navadno zaradi nujnih del doma niso šli vsi, so radi vzeli s sabo še koga, če je le še bil prostor. Seveda je bilo za prevoz živega, razposajenega in nepredvidljivega tovora potrebno imeti posebno dovoljenje pristojnih organov. Prometni miličniki so nas vedno ustavljali in pri šoferju kontrolirali papirje. Avtobusi so bili takrat še zelo redki, pa še ti so vozili večinoma le na rednih progah.

Najprej smo se povzpeli na znamenito Kladje. Vozil pa je Ratovžev Vinko, že kar izkušen šofer, ki je našo začrtano pot že prevozil v podobni vlogi. Ratovževe, tudi pisateljico Ivanko, in njihovo znamenito kamnito mizo sem poznal že od prej. Mama je včasih, ko še v šolo nisem hodil, pri njih pomagala pri žetvi, jaz sem pa medtem na njivi, kjer je zorela rž, nabiral ržene rožičke, ki se jih je dalo prodati in s tem zaslužiti kakšen dinar. Rženi rožički vsebujejo celo vrsto alkaloidov. Od sestre, ki se je spoznala na farmacijo, sem prevzel učbenik organske kemije, ki ga je spisala Marija Perpar (1904–1990), rojena v Tolminu, le kako leto prej kot moja mama. V svojih študentskih letih, ko sem se spoznal tudi s študenti kemije, sem izvedel, da je njihova profesorica in da se znanstveno ukvarja ravno z rženimi rožički. Morda je tudi kateri od moje bere pri Ratovžu končal v njeni retorti. Marija Perpar je pomembno doprinesla k razvoju farmacevtske industrije. Iz njenega učbenika sem se tudi sam marsikaj naučil, kar mi je v osmem razredu, pa tudi na gimnaziji, ko je bila na vrsti organska kemija, prišlo še kako prav. Tiste čase sem celo razmišljal o tem, da bi študiral kemijo, a sem se kasneje odločil drugače. S študenti kemije sem se v Ljubljani pogosto srečeval in so me celo kaj vprašali v zvezi z matematiko, ki jim jo je predaval profesor Niko Prijatelj.

Pri Ratovžu sem prvič videl strelovod. V Planini takih naprav takrat ni bilo. V bližini njihovega velikega kozolca in hleva je bil postavljen visok drog, od njegovega vrha, kjer je bila pritrjena kovinska konica, pa vse do tal je bil speljan kovinski trak. Ivanka, ki je bila zelo razgledana, mi je povedala, da je trak ozemljen, da ga je skratka precej metrov zakopanega v zemljo. Ko sem jo v svoji otroški radovednosti vprašal, koliko strel je njihov strelovod že ulovil, je rekla, da že zelo veliko. Kasneje sem podobnih strelovodov po cerkljanskem hribovju videl še več. Najraje so jih postavljali blizu kozolcev in hlevov, kamor je, kot so pripovedovali, najraje treščilo. Treska pa ob nevihtah povsod po hribih zelo rado in požarov zaradi strele je bilo precej. V šoli smo se že zelo zgodaj učili, zakaj grmi, od kod strele in kako se obnašati, če nas preganja nevihta z grmenjem. Učitelj fizike Maks Pagon nam je veliko pripovedoval o elektriki in razelektritvah v ozračju in seveda strelah in strelovodih. Seveda ni pozabil omeniti vsestranskega Benjamina Franklina (1706–1790), šestega pensilvanskega predsednika, ki je spuščal papirnate zmaje med oblake in med drugim izumil strelovod.

Ratovževi imajo tik nad Očancem senožet, ki se je že sicer precej zarasla, a so jo v mojih mladih letih v času košnje vestno pokosili in odpeljali seno na vozovih domov. Navadno navzdol na cesto, nato pa navzgor do križišča na Lapajnu in deloma po cesti proti Hotavljam domov. To je bilo laže, kakor da bi s senom naložene vozove usmerili po slabem kolovozu po gozdu navzgor, čeprav je ta pot mnogo krajša. Tako smo se srečevali praktično pri nas doma. Rade volje so nam prepustili leskovo in drugo grmovje, ki je raslo sredi senožeti, da smo ga posekali za nepogrešljive butare, s katerimi smo kurili v krušni peči.

Ratovževim smo celo predlagali zamenjavo omenjene senožeti z našo v

Marinkovšeh, ki je bila približno enako velika in strma, pa niso o tem hoteli ničesar slišati, češ da je pot tja predolga. Za nas je bila še daljša.

Zgodilo pa se je celo, da sem, nekaj let kasneje, enega od Ratovževih fantov srečeval na vajah iz matematike, ki sem jih dolga leta vodil na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani.

Takrat, ko nas je Ratovžev Vinko peljal na izlet, cesta čez Kladje in vseskozi po Poljanski dolini še ni bila asfaltirana in se je za nami prašilo, če je bilo suho, ali pa je letelo blato vsevprek, če je bilo deževno. Malokje je bil makadam čisto v redu, pa vendar je bil večinoma boljši kot dandanašnji, saj so cestarji zanj vsak dan vzorno skrbeli. Cestarjev je bilo takrat več, samo v Planini sta bila dva, in vsak je moral skrbeti za svoj odsek. Marsikomu pa na slabi vožnji ni zdržal želodček in se je bilo treba prvič ustaviti že tam pod Kladjem, na bivši italijansko-jugoslovanski meji ali pa morda že prej. V Poljanski dolini se nismo ustavljali, čeprav bi lahko obiskali dvorec Visoko in počastili pisatelja Tavčarja, saj smo ga obravnavali ravno v sedmem razredu. Prvič sem Visoko imel priložnost videti od blizu šele na nekem gimnazijskem izletu. Za dvorec Visoko je kar nekaj časa veljalo, da pravzaprav nihče ni dobro vedel, kaj bi z njim. Vsaj za Tavčarjev rojstni dan pa so vendarle tam vsako leto organizirali prireditve pisatelju v čast. Danes je Visoko zgledno urejen in ga je užitek obiskati.

Tako smo si raje temeljiteje ogledali loški grad, ki kraljuje nad mestom, in tamkajšnji muzej, kjer je Ivanu Tavčarju oziroma Visokemu tako in tako posvečen poseben oddelek. Celo tisto železno blagajno, ki je odigrala pomembno vlogo v Visoški kroniki, imajo na častnem mestu. Niso pa nas, kakor Mihól Schwaiffstrighk v kroniki, peljali pokazat v stolp temačne ječe in mučilna orodja. Verjetno ne bi bilo potrebno, saj sedaj, ko so vsi izletniki že starejši od sedemdeset let ali pa so že pomrli, vidimo, da nihče nima tako hude policijske kartoteke, da bi si zaslužil vklenitev v klado, česar je bil deležen Izidor Khallan, tudi Khallain, kaj šele bivanje v omenjenem grajskem stolpu, kar je doletelo Emo Agato Schwarzkobler, po nedolžnem obdolženo čarovništva.

Navsezadnje pa so nas v Cerknem lepih manir naučili že Cinkova Vida, Migučeva Angela in Masornikov Viktor.

Po Škofji Loki smo bili na izletu po Gorenjskem deležni precej boljših cest. Takrat še ni bilo gorenjske magistrale in viadukta čez Peračico, tako da je bila cesta mimo Posavca na Črnivec za voznike prava atrakcija, ki se je dala prevoziti le s pravim zaletom in v enem zamahu, brez kakršnegakoli ustavljanja sredi klanca. Obiskali smo tovarno Elan v Begunjah, nekdanje nemške zapore, v katerih je trpel tudi marsikateri Cerkljan, Drago pri Begunjah, razvaline gradu Kamen in seveda Prešernovo Vrbo. Za čuda nas tam nihče ni vprašal po kaki Francetovi pesmi, saj nas je vodil učitelj telesne vzgoje in kemije, gospod Milan Eržen iz Idrije. Skoraj mi je njegov priimek ušel iz spomina, na srečo pa sem si ga zapisal na hrbtni strani fotografije, ki smo jo posneli na tem izletu. Pa še novi sosedi v Planini so se tako pisali. Učil me je le eno leto. Navadno se človek najbolj zapomni le svoje najstrožje učitelje. Milan je bil dober, toda v resnici je le malo časa poučeval v Cerknem. Razredničarka je bila na začetku šolskega leta nekdanja sošolka moje pokojne sestre, gospa Marija Zajc, Blažičkova z Reke, ki pa nas je sredi šolskega leta začasno zapustila in se začela resno ukvarjati s prijetnejšimi zadevami. Bila je sošolka moje druge sestre na cerkljanski nižji gimnaziji.

Marija me je učila biologijo in gospodinjstvo. Naučila nas je, kako rokovati s šivanko, tako da smo navsezadnje znali zakrpati luknjo na hlačah in prišiti gumb. Izvedeli pa smo tudi marsikaj o gospodinjskih strojčkih in drugih rečeh, nujno potrebnih doma. Tudi kasneje smo z njo še sodelovali. V mojih gimnazijskih časih smo na njeno pobudo priredili v cerkljanski dvorani recital Kajuhovih pesmi. Povabljen je bil tudi profesor Cuderman, ki je bil po svoje začuden nad mojim sodelovanjem in mi je malo ponagajal, češ da bo profesorju Karčniku povedal, da se ne ukvarjam samo z matematiko. V zvezi s tem recitalom se je zgodil obroben dogodek, ki ga z Marijo nisva pozabila. Del priprav je potekal pri njej doma. Sredi recitiranja je prišel od nekod domov njen sin in Marija me je predstavila: "To pa je moj vasovalec." Čez nekaj časa me je Marijin sin v spremstvu matere od daleč zagledal nekje v Idriji. Na glas je rekel: "Mama, poglej, Tvoj vasovalec!" Ni mi znano, kako se je pri tem počutila, pozabila pa tega ni. Dvakrat me je povabila, da sem prebiral svoje verze na izletih Muzejskega društva Cerkno, potem pa še na sodelovanje ob 60-letnici ustanovitve nižje gimnazije v Cerknem. Pred nekaj leti se je za vedno poslovila. Moja druga sestra, ki se je mlada posvetila Eskulapu, pa še prej.

Takrat so njeni nekdanji učenci v samozaložbi izdali svoje spomine, kopije dokumentov in fotografije v dveh knjigah s pomenljivim naslovom *Ostali smo zvesti tebi, zemlja domača*. Precej avtoric je z mojo pokojno sestro vred stanovalo ravno v že omenjenem *Klapaču*. Med njimi najdemo poleg Marije Zajc tudi Albino Zajc, ki sem jo spoznal ravno na prvem izletu Muzejskega društva Cerkno. Albina in moja druga sestra, ki je žal ni bilo med udeleženci srečanja in ne med avtoricami, sta si bili dobri prijateljici. Če bi bila sestra še živa, bi zagotovo znala veliko povedati o cerkljanski nižji gimnaziji. Albina je napisala svoj prispevek v verzih, Marija pa jih je prebrala, a žal v svoji raztresenosti nisem takoj spoznal, da so namenjeni spominu moje pokojne sestre, kar so navzoči najbrž pričakovali. Še nekaj minut pred tem sem se vozil čez Kladje in po vseh številnih ovinkih vključno z Dreškovo rajdo v Cerkno, da mi je še kar pošteno šumelo v glavi. In po vsem tem pa naj bi takoj zbrano sledil verzom in spoznal, komu je pesem namenjena! Malo preveč za navadnega doktorja matematike! Naj mi vsi iskreno oprostijo. Peta kitica te pesmi se glasi:

Potem smo odšli: ti po svoje, jaz v jati.
Bogu Eskulápu si dala srce.
V njegovi skrivnostni knjigi zdravilstva,
si rekla, da vidiš svoje ime.

Po končani srednji farmacevtski šoli je sestra službovala v lekarnah po raznih krajih: v Komnu, v Sežani, na Kozini, v Vipavi in morda še kje. Nazadnje se je poročila na Opčine pri Trstu, kjer je tudi umrla. Nekaj so se doma jezili, češ koliko jih je stala v času šolanja, sedaj pa je doma zgolj žena, mati in gospodinja. Bila je glede na svoje šole kar razgledana. Ko premišljujem o njej, se takoj spomnim na Sonjo, soprogo profesorja Križaniča, ki je bila doma v Sežani. Sonja je poučevala nekaj časa matematiko na isti gimnaziji kakor gospodarica mojega srca. Sonja je večkrat rekla, da se tudi na metli pozna, če je gospodinja izobražena.

Opčine pri Trstu mi niso ostale v spominu samo zaradi pokojne sestre in openskega tramvaja. Na Opčinah sta se rodila moja nekdanja profesorja in akademika Anton Kuhelj (1902–1980) ter Ivan Vidav (1918–2015). Na Opčinah je živel tudi profesor Aljoša Volčič, ki je priložnostno predaval tudi pri nas. Njegov sin pa je bil celo sošolec mojega nečaka po pokojni sestri. Zapomniti se je treba, da se prebivalci Opčin imenujejo Ópenci, prebivalke pa Ópenke. Openski tramvaj vozi z Opčin v Trst, natančneje na Oberdankov trg, in to po precej hudem klancu, za kar je potreben prav poseben stroj, ki vagon dol grede zadržuje, navzgor pa ga potiska, pri čemer potniki kljub strmini ravno ne spolzijo s sedežev. Hoteli so ga že ukiniti, a je vendarle ostal kot velika znamenitost in tehnično čudo. Pred leti je bil udeležen v večji nesreči, tako da bo za njegov vnovični zagon potreben čas.

Wilhelm Oberdank (1858–1882), po italijansko Guglielmo Oberdan, rojen v Trstu, sin revne Slovenke, se je izognil služenju v avstro-ogrski vojski in pobegnil v Rim, kjer se je pridružil iredentistom, ki so si prizadevali priključiti Trst k Italiji. V Trstu je leta 1882 sodeloval v bombnem atentatu na cesarja Franca Jožefa, ki je bil tam na obisku ob poltisočletni vladavini Avstrijcev v tem mestu, a so ga ujeli in obesili zaradi veleizdaje. Italijani pa ga še danes slavijo kot junaka.

Asklepij ali Eskuláp, latinsko Aesculapius, je bil znani rimski bog zdravilstva. V Rimu je v 3. stoletju pr. n. št. razsajala kuga in takrat so iz Epidavra v Grčiji prenesli Asklepijev kult na neki otoček sredi Tibere, kjer je dobil svetišče. Navadno ga upodabljajo z retorto. Asklepij, ki ga omenja že Homer, je po grško Ἀσκληπιός. Epidaver, mesto v Argolidi na Peloponezu, originalno Ἀργολίς, pa je po grško Ἐπίδαυρος. Znan je po velikem amfiteatru, ki je lahko sprejel do 14 tisoč gledalcev in je kar dobro ohranjen vse do danes. Beseda *amfiteater* izhaja iz grških besed ἀμφί, *okrog, na obeh straneh, ob*, in θέατρον, *gledališče, gledalci, občinstvo*.

Nižja gimnazija v Cerknem je bila po težkih mukah ustanovljena takoj po drugi svetovni vojni, prenehala pa je delovati, ko sem jaz hodil v drugi razred, to pomeni konec šolskega leta 1957/58. Takrat smo prešli na osemletko. Ustanovitvi nižje gimnazije so botrovale številne težave in brez požrtvovalnih domačinov ne bi bilo nič. Predvsem na Cerkljanskem ne živi veliko ljudi in povrh vsega je bilo tisto območje za Ljubljano in Beograd onstran rapalske meje, ki formalno še ni bila ukinjena. Kdo bi potem vlagal v šolstvo, v kraju, za katerega se takrat še ni vedelo, kateri državi bo pripadal. V slovenski prestolnici so hitro pozabili, kaj vse je Cerkljanska pretrpela med NOB. Učencev različnih starosti je bilo seveda za nižjo gimnazijo dovolj. Precej mladih zaradi vojne sploh ni dokončalo nikakršne osnovne šole. Veliko pa jih je hodilo le v italijanske šole. Sestra je pripovedovala, da so imeli neke vrste sprejemni izpit za vpis na nižjo gimnazijo. Spominjala se je Jereba, ki je bil v komisiji. Kdor je znal vsaj za silo po slovensko pisati, brati in računati in je vedel, da je Zemlja okrogla, je bil sprejet. Da je bila šola resna ustanova, priča tudi podatek, da kakih 20 odstotkov vpisanih nižje gimnazije ni dokončalo.

Če pogledamo spisek nekdanjih cerkljanskih učiteljev, najdemo med njimi kar nekaj oseb, ki sem jih tako ali drugače poznal, na primer: Ciril Bevk, Anton Bolko, Viktor Jereb, Ivan Mozetič, Anica Štucin, Jože Štucin. Od nekdanjih gimnazijcev pa na primer: Danilo Bratina, Vinka Cankar, Oton Doljak, Tomaž Pavšič, Jože Bavcon, Antonija Čelik, Rafael Razpet, Stanko Uršič, Cirila Mlakar, Rudolfa Brejc, Antonija in Jože Kristan, Anton Primožič, Anton Razpet, Štefan, Katarina in Franc Rutar, Marjan in Milan Tavčar, Gabrijel Leban, Marija in Valentin Razpet, Zdravko Magajne, Stanislav Bašelj, Ana Hadalin, Metoda Prezelj.

Zanimiva oseba, vsaj zame, je Rafael Razpet, doma na Kartečnah pri Bukovem, gospodarstvenik, politik, direktor Tovarne dušika Ruše in njega dni mariborski župan. Po svoje je zaslovel, ko je malo pred osamosvojitvijo Slovenije v Mariboru prekinil neko kulturno oddajo, ki ni bila še primerna za takratne čase. Posledica tega je bila, da je kar nekaj ljudi mojo soprogo spraševalo, če je kaj v sorodu s tistim Razpetom, ki je v štajerski prestolnici prekinil kulturno oddajo. Po toliko letih je morda Rafael še vedno toliko prisoten v kolektivnem spominu, da je Neodvisni sindikat delavcev ljubljanske univerze na spletni strani objavil novico:

Za življenjsko delo na področju visokega šolstva je nagrado dobil Rafael Razpet (PEF UL), za izjemne dosežke na področju visokega šolstva pa Robert Kroflič (FF UL).

Prav bi seveda moralo pisati Marko Razpet, ne pa Rafael Razpet. Marija Zajc je bila ena redkih oseb na Cerkljanskem, ki mi je čestitala, potem ko sem bil prejel državno nagrado za življenjsko delo na področju visokega šolstva leta 2011. Taka nagrada je čisto v redu, nima je ravno kdorkoli. Vesel sem bil, da jo je pred leti prejel tudi moj nekdanji gimnazijski profesor Vinko Cuderman, ki me je učil ruščino in slovenščino.

Učitelj Milan Eržen pa mi je ostal v spominu tudi zaradi kemijskega krožka, ki ga je postavil na noge po zgledu Pagonovega matematičnega krožka. Nekajkrat smo se popoldne zbrali v neki učilnici in delali poskuse. Proti novemu letu pa se je Milan spomnil, da bi obarvali plamen in nazadnje uprizorili nekakšen ognjemet v različnih barvah. Da bi stvar tudi poletela v zrak, smo potrebovali smodnik. Potrebne sestavine je Milan namešal kar v prazen črnilnik, ki je bil nameščen v šolski klopi. Črnilnik je bil narejen iz precej debelega stekla in ustrezno težak. Za šolsko mladino pač mora biti vse bolj močno in robustno, sicer iz takega ali drugačnega razloga ne zdrži prav dolgo. Milan je dodal še ščepec snovi, ki naj bi obarvala plamen. Nekdo je pristavil vžigalico k mešanici, ki se je vžgala in rezultat so bili seveda ne ravno neznaten pok, nekaj ognja in bliskoviti, skoraj premočrtni polet črnilnika naravnost v strop, kjer se je odbil približno po odbojnem zakonu naravnost nazaj v neko drugo klop. Še sreča, da ni koga zadel, kajti črnilnik ni bil ravno lahek, oseb pa je v učilnici bilo kar nekaj in verjetnost zadetka je bila razmeroma velika. S tem veličastnim dogodkom je kemijski krožek za tiste čase prenehal z delovanjem.

Kemijo na cerkljanski osnovni šoli je poučeval tudi ravnatelj Jože Štucin, tisti, ki se je žal smrtno ponesrečil pri Divjih Babah. Ko nas je komaj naučil nekaj kemije, ni trajalo dolgo, pa je že močno pokalo po Cerknem, kajti mularija je poznala recept za izdelavo smodnika. Do oglja, žvepla in solitra ni bilo težko priti, saj je takrat nekaj kovačij, kjer so uporabljali oglje, še delovalo, na kmetih so žveplali sode, pri izdelavi klobas in salam pa so uporabljali soliter. Ali je bil to kalijev nitrat, imenovan tudi angleška sol, ali kaj drugega, se ne spominjam. Nekateri zaradi drugega naziva za soliter celo menijo, da je Levstikov Martin Krpan tovoril ravno prepovedano angleško sol, torej soliter, ne pa navadno kuhinjsko sol, natrijev klorid. Pokalo pa po Cerknem ni ravno kjerkoli, ampak pretežno okoli glavne cerkve. Slišalo se je, zaradi strnjenosti naselja, tako dobro, kakor da poka povsod, Ravnatelju pa se je celo rahlo imenitno zdelo, ker sta se gospoda, kaplan in dekan, zaradi tega precej razburjala.

Ne spominjam se več, kateri od učiteljev kemije nam je nekega dne pripovedoval o indikatorjih v kemiji. To so tiste spojine, ki s spremembo svoje barve pokažejo kislost oziroma bazičnost drugih. Povedal nam je, da se v lekarni brez recepta dobi fenolftalein, ki se v bazah obarva rdečkasto. Takrat je v Cerknem, na Montu, kjer je bila lekarna, zdravila in drugo, kar sodi v lekarno, prodajal oziroma izdajal neki moški, za katerega se je razvedelo, da je magister, kakor je Martin Krpan na Dunaju pomotoma naslavljal ministra Gregorja. Mišljeno je bilo "magister farmacije". Moja pokojna sestra Marica se je tudi spoznala na farmacijo, a je končala le srednjo farmacevtsko šolo. Magistri farmacije pa so morali dokončati fakulteto. V Cerknem je le malokdo vedel, da so zdravniki oziroma dohtarji doktorji, in sicer doktorji medicine, magistri pa magistri farmacije. Naziva *doktor* in *magister* sta pa nekako po tradiciji že od nekdaj pripadala tema dvema poklicema, nad katerima bdijo nesmrtni Apolon Zdravnik (Ἀπόλλων ὁ Ἰατήρ), Asklepij (Ἀσκληπιός), Higieja (Ὑγίεια) in Panakeja (Πανάκεια). To so imena, ki stojijo na samem začetku Hipokratove prisege.

Šele kasneje sem izvedel, da sta naziva *magister znanosti* in *doktor znanosti* nekaj povsem drugega in da je za njuno pridobitev potrebno študirati še nekaj let, opraviti nekaj izpitov in seminarjev, napisati magistrsko delo oziroma doktorsko disertacijo in oboje zagovarjati pred komisijo. Vsekakor pa velja navesti čim več relevantne literature in jo čim večkrat pravilno citirati. Nekateri v tem naravnost pretiravajo, tako da je težko izluščiti iz dela, kaj so sploh sami dognali in s tem dodali svoj kamenček v mozaik znanosti.

Dandanes je vse skupaj še bolj zapleteno, ker je treba skozi komisije večkrat: prva ugotavlja, če je kandidat sploh goden za doktorat, naslednja potrdi naslov in temo ali pa tudi ne, nadaljnja ocenjuje predloženo delo, zadnja pa posluša še zagovor in kandidata še kaj vpraša. Kdor uspešno preživi vse to, mora potem nekaj časa počakati, da mu potem, ko napoči čas in ko se takih nabere primerno število, slovesno izročijo magistrsko oziroma doktorsko listino.

Zbral sem nekaj poguma in stopil do omenjenega magistra v cerkljanski lekarni, da bi kupil nekaj fenolftaleina. Problem je bil, koliko. En gram? To je za farmacevtske pojme ogromno, tisočkrat preveč za nekega mulca. Ko sem mu povedal, da je učitelj kemije priporočal lekarno za kraj nakupa, sva se dogovorila za nekaj miligramov te čudovite snovi, s katero sem potem doma pri Očancu čaral maloštevilni publiki tako, da je bela voda v kozarcu postala rdečkasta.

K istemu magistru farmacije sem potem stopil samo še enkrat, da bi si nabavil malo solitra. Tega pa mi iz ravnateljevih izkušenj, ki so postale znane po vsej Cerkljanski, ni hotel prodati niti ščepca. Tako so se moja srečanja z magistri farmacije končala. Kot študent sem jih pa kasneje srečal več, še več pa študentov farmacije. Morda imam ravno zato rad znani napev Figara iz Seviljskega brivca.

Mojster kozmetike in farmacije, in farmacije, vraga nabrije sredi pekla.

Lahko pa bi se z našim magistrom farmacije srečal tudi tretjič. Nekega dne sem namreč, bolj za šalo kot zares, stopil v trgovino pri Balantaču v Cerknem. Ne vem, kaj me je pičilo, pa sem prodajalko vprašal, če imajo tudi natrijev klorid. Urno mi je odgovorila, da tega pa nimajo, da ga pa verjetno imajo v lekarni. Mislim, da ji je neka sodelavka prišepnila, da je natrijev klorid navadna kuhinjska sol, ki so jo v trgovini seveda imeli na pretek in bi jo lahko kupil na kilograme, ne pa na miligrame. Prodajalka je spoznala šalo, bila je še kar huda, tako da jo je bilo bolje ucvreti domov, ne pa kam drugam, najmanj pa v cerkljansko lekarno.

Besedi kozmetika in farmacija imata izvor v grščini: κοσμέω pomeni namreč *krasim, lepšam, dičim, opremljam, lišpam*, φάρμακον pa *zdravilno ali čarodejno zelišče, čarodejna pijača, mamilo, zdravilo, lek, strup*.

Zaenkrat toliko o učitelju kemije in telesne vzgoje ter razredniku Milanu Erženu. Kako se je pa naprej odvijal naš šolski izlet? Seveda nismo izpustili Bleda iz svojega programa.

Tje na otok z valovami obdani,
v današnjih dnevih božjo pot Marije;
v dnu zad stojé snežnikov velikani,
poljá, ki spred se spròsti, lepotije
ti kaže Bléški grad na levi strani,
na desni griček se za gričam skrije.
Dežela kranjska nima lepšga kraja,
ko je z okolšno ta, podoba raja.
(F. Prešeren, Krst pri Savici)

Tudi mi smo si privoščili malo romance in se s pletno zapeljali na otoček sredi jezera. To je bila velika odgovornost za našega spremljevalca, saj je le malokdo znal plavati. Na srečo smo bili zelo pridni in je vse šlo brez zapletov. Dandanes so učenci na izletih veliko bolj razposajeni, da o dijakih niti ne govorimo. Niti načelo korenčka in palice se ne obnese več. Srečno smo opravili svojo sveto dolžnost na Bledu, namreč biti enkrat na blejskem otoku. Ne spominjam se več, ali nas je kdo opozoril na tamkajšnji zvon želja, kaj šele, da bi po vseh teh letih še vedel, če sem nanj takrat pozvonil ali ne. Nazadnje smo zavili še v znameniti Blejski Vintgar. Prehodili in občudovali smo prelepo sotesko ter nešteto slapov reke Radovne in jo tudi velikokrat fotografirali. Nato so sledile Jesenice, razvlečen in zakajen kraj, strup za nas Cerkljane, ki smo bili vajeni čistega zraka. Nič čudnega, če nam je na koncu Jesenic, v smeri proti Kranjski Gori, popolnoma odpovedal celo naš tovornjaček, ko se je nadihal dima iz plavžev in drugih peči. Poklicali smo na pomoč tamkajšnjega mehanika, ki je zadevo po nekaj odvitih in nazaj privitih vijakih zopet spravil v gibanje. Medtem ko sta se šofer in mehanik ubadala z motorjem, smo izletniki opazovali avtomobile in električne vlake, ki so vozili po bližnji železniški progi. Marsikdo je takrat prvič videl vlak z električno lokomotivo, morda vlak sploh. Takrat je bilo že znano, da bom meseca avgusta na počitnicah na avstrijskem Koroškem. Milan je takrat rekel, da se bomo po tej progi peljali tja. In tako je res bilo. Ker smo že pri železnici, omenimo, da je takrat po dolini Save Dolinke še vozil vlak na paro in da sta se cesta in proga pogosto križali. Zaradi pridobljene zamude smo Kranjsko Goro kar izpustili in zavili proti Vršiču. Mimo Erike je še šlo, nato pa je naš stroj spet odpovedal. Vinko nas je nagnal s kamiončka, ki je prazen in z našo pomočjo proti večeru le prisopihal po številnih ovinkih do Erjavčeve koče. Ne spominjam se, da bi nas kdorkoli opozoril na tamkajšnjo rusko kapelico, ki so jo postavili v spomin ruskim vojnim ujetnikom prve svetovne vojne, ki so izgubili življenja pod snežnim plazom, ko so gradili cesto čez Vršič. Ker smo bili hoje večinoma vajeni, smo kar hitro prispeli na cilj in navsezadnje spotoma videli še marsikaj, česar bi sicer ne, denimo naravno odprtino pod Prisankom oziroma Prisojnikom, ki smo jo lahko občudovali del poti, pa tudi

Ajdovsko deklico. V koči smo malo posedali in kakšno rekli. V veži so že takrat imeli neko čudno napravo za napoved vremena, narejeno iz oslovega ali morda celo iz konjskega repa. Prespali smo v nekakšni depandansi te koče, zraven nekih macesnov. Miru ni hotelo biti pozno v noč, kot se spodobi za gorska prenočišča z razposajeno mladino.

Spali smo na pogradih. Sredi noči se zbudi šofer in krikne: "Nekdo mi je sunil vzglavnik!" Seveda je to izrekel spontano in čisto po cerkljansko. Zaradi tega smo se skoraj vsi zbudili in iskali manjkajočo reč ter se hihitali brez pravega vzroka. Lepo je bilo. Ni pa bilo lepo, da je bil naš šofer, od katerega je bila tako zelo odvisna nadaljnja vožnja, ob dragoceno spalno pomagalo, pa čeprav le začasno. Posredovati je moral sam Milan. Proti jutru smo le nekako pospali. Zjutraj smo napol prespani in napol zbujeni pojedli, kar smo pač imeli s sabo za zajtrk. Nevemkaj to ni bilo, saj se je takrat Cerkljanska še otepala z revščino. Kakšen čaj, kos kruha, kakšno kuhano jajce, jabolko, krhelj ali suho hruško smo ponesli na pot, pa je bilo za silo. Malokdo si je lahko privoščil pečenega piščanca ali kaj podobnega. Denarja pa nam starši tudi niso dajali na pretek, saj so bili to časi, ko je na kmetih bil že kar velik praznik, ko so spekli ali skuhali jajce, in ko je bil malokdo redno zaposlen. Brez težav smo prevozili prelaz Vršič in občudovali gorske vršace na levi in desni strani, zlasti Jalovec in Prisank. Naslednja postaja je bila izvir Soče. Če bi bil z nami Viktor Jereb, nekdanji šolski nadzornik, ki nas je v sedmem razredu učil slovenščine, in to zadnjič pred svojo zasluženo upokojitvijo, bi nas najbrž gnjavil s slovenskim slovstvom, tako pa smo pod Milanovim vodstvom bolj opazovali rastlinstvo in kamenje okrog sebe. V tistem času so se učitelji precej menjavali: nekateri so odhajali v druge kraje, nekateri pa v zaslužen pokoj. Prihajali so mladi, bolj ali manj izkušeni. Jereb je bil seveda legenda cerkljanskega povojnega šolstva in široko razgledana osebnost. Bil je strog, včasih celo grob, in vse se ga je balo.

Po Cerknem je Viktor tudi izven pouka koga precej trdo prijel, če je bilo to potrebno. Vsak dan je vsaj enkrat opravil obvezno pot od Balantača v

Sigade, kjer je imel kurnik. Navadno je nosil na glavi čepico skoraj bele barve, tako da se ga je spoznalo že od daleč. Če je učiteljica Angela vedno našla nekoga, ki ji je hodil v mesnico po meso, tudi za njenega mačka, pa je Jereb, ki jih je vsak dan kar precej pokadil, kar za nas ni bilo ravno vzgojno, hitro našel nekoga, ki mu je zaupal, med svojimi učenci, da mu je skočil v trafiko na glavnem trgu po cigarete.

Ne vem več, zapisal pa si tega tudi ni nihče, zakaj si je nekdo v Cerknem neko popoldne prislužil klofuto, ki jo je Viktor sklenil realizirati naslednji dan v razredu, pred vsemi sošolci, najverjetneje v poduk, opomin in za zgled. Ko je ravno krepko zamahnil s svojo trdo roko v smeri grešnikove glave, jo je le-ta spretno in urno odmaknil in po buči jih je dobil sosed v isti klopi. Ne spominjam se več, kako so potem med sabo poračunali. Zapomnili pa smo se le, da ga ne gre lomiti po vasi.

Za silo je Viktorju prej ali slej uspelo spraviti na prava pota še tako neotesanega učenca. Pa tudi naučil nas je razmeroma veliko, kar se je zopet zelo poznalo na srednji šoli. Lahko bi še enkrat ponovili pravilo: "Samo nekaj dobrih učiteljev je potrebnih neki regiji, pa se to dolgoročno zelo pozna."

Jereb ni prenašal grdega pisanja v zvezkih z zelenimi platnicami, ki so služili šolskim nalogam pri slovenščini. Pri teh je malokdo iztržil oceno nad tri. Na koncu je marsikomu napisal celotno slovensko abecedo z malimi in velikimi črkami, češ poskusite pisati takole. Tako kot danes je bila že takrat velika težava za nekatere učence, kdaj pišemo predlog *s* oziroma *z*. Na televiziji je napak v zvezi s tem vsak dan na stotine. Jereb nam je skušal vcepiti v spomin stavek:

Ta suhi škafec pušča.

V njem so zbrani vsi tisti soglasniki, tako imenovani nezveneči soglasniki, pred katerimi pišemo predlog *s*, ne pa *z*. Seveda pa je bilo treba vedeti, kaj so soglasniki, samoglasniki, zveneči soglasniki in nezveneči soglasniki. Predlog *z* stoji pred samoglasniki in zvenečimi soglasniki. Pred tistimi soglasniki, ki jih ni v zgornjem stavku.

Druga znamenitost slovenščine je preglas, s čimer je mišljeno prehajanje samoglasnika *o* v *e* v obrazilih. Ko je nastala v zvezi s tem konkretna težava, je Jereb pritresel iz naftalina stavek:

Češnjice že jé.

Za vsemi soglasniki v njem razen *n* prehaja *o* v *e*. Zato ni prav pisati in izgovarjati na primer brucov, beračov, kovačov, mlajov, košov, križov, ampak brucev, beračev, kovačev, mlajev, košev, križev.

V Trenti smo se ustavili pri Kugyjevem spomeniku, v Kobaridu pa pri Gregorčičevem. Tako čisto brez slovenskega slovstva na našem izletu le ni šlo. Milan se je silno jezil, ker v Trenti ni mogel videti alpskega botaničnega vrta, ne vem pa več, zakaj ne. Sam sem ga prvič videl čez kakih 20 let. Navzdol po dolini Soče se nismo obirali, izpustili smo Tolmin in Most na Soči, čeprav bi tam imeli kaj videti. Naenkrat, tik pred železniškim mostom, ko smo bili v Bači pri Modreju, pa je Marko Močnik predlagal, da se ne bi vozili po dolgočasni dolini Idrijce skozi Trebušo in Stopnik do Želina, ampak da bi jo raje ucvrli po Baški grapi do Grahovega, nato pa čez Bukovo v Cerkno. Razlog je bil na dlani: čez Bukovo je do Cerknega bliže, cesta niti ni tako slaba, pa še skozi Kartečne, Markov domači kraj pod Kojco, se bomo peljali. Mimogrede pa bomo obudili še zgodbo, ki pripoveduje o Turkih v Žrelu. Takrat še nisem vedel, da je v srednjem veku tukaj imel gornjegrajski samostan svoje posesti, kot je razvidno iz zapisa:

> *In villis de Cosiça et de Carteçen sunt mansi 8, culti et inculti. Qui pertinent monasterio Obrimburgensi. Supra quibus ecclesia Aquilegensis habet advocaciam. Et solvit pro quolibet manso ut hic continetur.*
>
> *(Tolminski urbar 1377)*

V zgornjih latinskih besedah spoznamo Kartečne kot Carteçen, gornjegrajski pa kot Obrimburgensi. Gornji Grad je bil po nemško Oberburg. Beseda *Cosiça* pa naj bi pomenila *Kojca*. Morda je ta beseda nastala iz besede *kozica.* Pod hribom Kojca, na prisojni strani, je tudi zaselek z imenom Kojca, za hribom, na osojni strani, pa Zakojca, rojstni kraj pisatelja Franceta Bevka. Kojci, ki se vidi z Očančevega grunta v Planini in ki se mi je zdela že v otroštvu nekoliko skrivnostna pojava v našem hribovju, sem posvetil posebno pesnitev v cerkljanskem narečju.

Navsezadnje pa je le potoval približno po tej poti sam *Paolo Santonino*, tajnik odposlanca oglejskega patriarha. Paolo je opisal v svojem znamenitem *Popotnem dnevniku* tudi naše kraje. O tem takrat seveda nisem vedel še ničesar. Pa tudi kot dijak ne, tudi kot študent take in drugačne stopnje ne. Šele nekega dne po osamosvojitvi Slovenije mi je ta slavna cerkvena vizitacija po naših krajih prišla na uho in sem malo pobrskal po literaturi in spoznal omenjeni Popotni dnevnik. In tako je bilo. Naš izlet je bil že tako in tako poln improvizacij, zakaj ne bi bilo tako še na koncu. Potem smo slišali še zgodbo iz časa turških vpadov, dogodek s Turki v Žrelu in o propadlem zobanju ovsa z oltarja v cerkvi sv. Lenarta, o vsekanem turškem križu v neki skali in drugem. Vse nam je še kar dobro šlo, le da je naš kamionček moral na Bukovo voziti prazen, mi pa hoditi za njim peš, tako kot se je zgodilo prejšnji dan pod Vršičem. Tudi porivati smo morali to spako, ki nam je bila edino upanje in rešitev, sicer bi še bolj pešačili. Z Bukovega skozi Kartečne, Orehek in Jesenico smo se pa spet udobno peljali in z Vrha Križa že uzrli drago nam cerkljansko kotlino. Zanimivo se nam je zdelo, da smo se na tem izletu peljali skozi Jesenice, pa tudi skozi Jesenico. Pred dobrima dvema letoma, v petem razredu, smo na Vrhu Križa opazovali skoraj popolni Sončev mrk. Takrat je osnovna šola v Cerknem imela športni dan, dan po pustu, ravno na pepelnično sredo je bilo to.

V vsakem primeru je bil šolski izlet lep in koristen, bolje smo spoznali naše kraje in drug drugega. Pravi balzam za finale, kajti čakala so nas zadnja izpraševanja, popravljanja in zaključevanja ocen ter delitev spričeval. Pri fotokrožku pa smo razvili tudi filme, poslikane na našem izletu, in naredili fotografije. Precej ur smo presedeli v šolski temnici tik ob zbornici. Pri razvijanju filma se je nekega dne zgodila tudi neodpustljiva nesreča. Maks je imel navado dajati sušit razvite filme v stranišče poleg zbornice. Z risalnim žebljičkom je moker film na enem koncu pripel v okenski podboj, na drugem koncu pa je sta kaseta in kolut poskrbela, da je bil film raztegnjen in se je lahko sušil. Toda od nekod se je vzela močnejša sapica in film stisnila ob okenski okvir, od katerega je že odpadala barva, katere koščki so se prilepili ob film. Težko je bilo potem film zopet očistiti, tako da praktično ni bil več uporaben. Po zlu je šlo med drugim nekaj portretov sošolk, ki so se morale še enkrat fotografirati.

Včasih je Maks pripeljal svojega sina Dušana v temnico. Drznil sem se ga vprašati, koliko je pet minus osem, pa je odgovoril, da tri pod ničlo. Takoj sem vedel, da bo še dober matematik, saj je takrat komaj začel hoditi v osnovno šolo. Res, Dušan je postal profesor matematike na mariborski univerzi in si tam prislužil pokojnino. Nedvomno težke študije in doktorat znanosti je opravil v Moskvi.

V mesecu avgustu leta 1963, torej med delom na Eti in pričetkom naslednjega šolskega leta, sem bil skupaj z Bojanom Bratino in Darkom Mavričem v okviru izmenjave avstrijske in slovenske mladine na avstrijskem Koroškem. Tam smo bili skupaj mladenke in mladeniči iz Avstrije in Primorske. Naj omenim le še dve znani osebi, ki sta bili tudi tam: Cveto Koder in Stojan Petrič. Slednji nas je zabaval s harmoniko, Cveto pa bi nas s klarinetom, a ga žal ni imel s sabo. To bivanje nam je uredila cerkljanska osnovna šola skupaj z Zvezo prijateljev mladine. Bili smo pač dobri učenci in radi smo se učili nemščine. Bilo je seveda zaradi izbire nas treh tudi malo zavisti med sošolci. Tisti iz idrijske občine smo se zbrali na železniški postaji Most na Soči, ki so jo nekoč imenovali Sv. Lucija. Ljudje so še dolgo uporabljali ta naziv kraja in postaje. Po daljšem čakanju je le veličastno pripeljal ekspresni vlak. Pomislite! Takrat je z Reke vozil v Avstrijo po bohinjski progi ekspresni vlak. Ena parna lokomotiva ga je vlekla, druga pa potiskala od zadaj. Na vlaku so že bili potniki naše vrste iz južne Primorske skupaj s spremljevalkami. Vlak je s silnim ropotom, pihanjem, piskanjem in sikanjem isker dobro napredoval po Baški grapi, ki smo jo deloma prevozili spomladi na opisanem muhastem tovornjaku. Ustavljali smo se le na pomembnih postajah. Prvič sem se peljal skozi predor od Podbrda do Bohinjske Bistrice. Tam skozi so pod Italijo pretihotapili med drugim tudi cerkljanske larfe v ljubljanski muzej, a takrat tega še nisem vedel. Podbrdo je bila pod Italijo obmejna železniška postaja, kjer so morali potniki pripraviti potne liste za pregled, preden so v Bohinjski Bistrici zadihali jugoslovanski zrak.

Bliskoma smo prevozili tudi most čez Blejski Vintgar, ki smo ga bili videli na izletu na Vršič. Na Jesenicah se nam je pridružil tudi spremljevalec Franjo, ki je dobro znal nemško. Res so nas vpregli v električno lokomotivo, ki je zamenjala upehani parni. Popisali in prešteli so nas obmejni organi in, ko smo se premaknili, smo precej hitro smuknili v karavanški železniški predor in se ustavili v Podrožci na avstrijski strani. Na tamkajšnji postaji so nas pogostili z brezalkoholno pijačo, ki smo jo jemali kar skozi okna vagonov. Po carinskih formalnostih smo nadaljevali pot do Beljaka. Tam smo prestopili na vlak za Celovec. Spomnil sem se na Mrtviškega Lojzeta, ki je nekje v šali pripovedoval, da se je vozil iz Villacha v Beljak cele tri dni. Vzdolž Vrbskega jezera smo občudovali že takrat lepo urejena letovišča in pokrajino. V Celovcu smo spet prestopili. Vlak nas je peljal proti Dravogradu in izstopiti smo morali v Senči vasi. Z avtobusom smo se zapeljali mimo Klopinjskega jezera in prišli na cilj: Grabalja vas ali po nemško Grabelsdorf, kjer smo stanovali pri nekem kmetu. Takrat so tam nekateri še znali slovensko. Njihova narečna nemščina pa je bila taka, da nam naša šolska ni kaj dosti koristila. Obstaja tudi bolj ali manj popoln seznam nemških in slovenskih krajevnih imen Koroške. Ta seznam vzamem v roke, ko obujam spomine na moje prvo bivanje v Avstriji.

Naslednji dan sem pisal domov, da sem že na Koroškem. Podobno kot stric Bernard pred mnogimi leti. Ta je pisal domov: "Sem že v Beljaku." Toda Bernarda je žandar prej pripeljal domov, kot je prispelo sporočilo, kajti stric je šel ilegalno čez mejo in so ga ujeli ter po hitrem postopku poslali tja, od koder je bil prišel. V Planini so še dolgo vedeli za ta dogodek, kateremu so še kaj svojega dodali.

Na žalost je bilo vreme na Koroškem bolj slabo, zato pa smo imeli čas, da smo se dobro spoznali med seboj, poskusili smo se v nemščini, ob lepšem vremenu smo se kopali v Zablaškem jezeru (Turnersee), se šli razne igre, kmetu pomagali pobirati krompir, bili na dveh izletih po Koroški, tudi pri Gospe Sveti, vojvodskem prestolu, na gradu Ostrovica, v dolini Zilje, v Celovcu in Beljaku. V Celovcu smo bili tudi na kratkem sprejemu na jugoslovanskem konzulatu, kjer so nas postregli s sokom.

Vsem so ostali v spominu Minimundus pri Celovcu in številna jezera po pokrajini. Mislim, da si starodavne cerkve pri Gospe Sveti nismo ogledali, čeprav sem si silno želel videti relief rimske kočije. Šele na gimnazijskem izletu na Koroško nekaj let kasneje smo si cerkev natančneje ogledali. Hrano smo imeli zelo dobro in v dobi našega odraščanja smo bili venomer lačni in smo dobivali tudi *repete*, če je tako naneslo. Medtem so po Cerknem na veliko obnavljali hiše, kajti jeseni so ob veliki slovesnosti odkrili ob pokopališču grobnico padlih na Cerkljanskem med drugo svetovno vojno.

Mesec dni na Koroškem je hitro minil. Po isti poti kot smo prišli, smo se tudi vrnili z lepimi in manj lepimi vtisi. Našli pa smo si nove prijatelje in nekoliko spoznali naše severne sosede. Ves čas nas je Cerkljane zelo zanimalo, kako napredujejo doma obnovitvena dela. Ko sva bila z Bojanom na Teškanovem griču, sva se ustavila in preverjala, katere hiše so že ometali. Ugotovila sva, da skoraj vse. Podrobne raziskave so sicer pokazale, da so hiše dobile nov omet le na najbolj vidnih straneh. Tako kot v Benetkah, kjer so zunanje stene hiš najlepše urejene le na tisti strani, ki gledajo proti kanalom.

Osmi razred se mi je začel z mešanimi občutki. Strogega Jereba je zamenjala Katarina Rutar, Dreškova Katica, ki se je svojega poklica izučila na učiteljišču v Tolminu, nato pa dolga leta poučevala v Bevkovi rojstni vasi, v Zakojci. V primerjavi z Jerebom je bila prava milina. Bilo nas je toliko, da nas je kazalo razdeliti v dva razreda, v dve paralelki. Za pravno osnove te delitve je manjkal samo eden ali ena. Pa so se spomnili na Novinčevo Vero, žal sedaj že pokojno, iz Planine. Lahko bi osnovno šolo že obesila na klin, brez dokončanega osmega razreda. V šolo je hodila že osem let, doma pa so komaj čakali na par njenih pridnih rok, da poprimejo za delo na razmeroma veliki kmetiji. Vero so pregovorili, da se je vpisala v osmi razred in delitev v dva razreda je bila možna. Preden je do tega sklepa prišlo, je minilo nekaj tednov, ko smo se gnetli v eni učilnici, v zadnjem nadstropju. Po delitvi pa je tista polovica, ki sem ji po nekem kriteriju pripadal, potegnila krajši konec: nekaj časa smo bili v nekem prostoru, v katerem so prej razdeljevali hrano, ko pa se je čipkarska šola iz prostorov nekdanje slavne nižje gimnazije izselila v nekoč Šavnovo hišo, kjer so bili takrat pošta, matični urad in poročna soba, smo dobili normalno učilnico. To je v pritličju stavbe, od koder se je videlo do Bavconove oziroma Makuceve, Tinčkove in Macjakove hiše in na križišče, kjer se cesta odcepi z glavne proti Mostaniji.

Šavnov Boris je tudi obiskoval gimnazijo v Idriji, prav tako se je vozil tja z avtobusom, bil pa je dva letnika pred menoj. Po gimnaziji je žrtvoval del sebe muzi Klio, po grško Κλειώ, kot študent v Ljubljani pa je stanoval pod isto streho kot jaz.

Tisti šolski leti, ko sem stopil v sedmi in osmi razred, je cerkljanska osnovna šola dobila nekaj svežih učiteljskih moči. Poleg že omenjene Rutarjeve smo med drugimi dobili Elo Špeh in Mimi Petrovčič. Mimi me je poučevala zgodovino in zemljepis, morda celo kemijo, Ela pa v osmem razredu biologijo in morda še kaj, česar pa se ne spomnim več natančno v letih, ko sem že star in betežen. Ravno takrat, ko se je ves osmi razred gnetel v zadnjem nadstropju nekdanje nove sodnije, bolje rečeno nekdanje nižje gimnazije, potem ko so bile že mimo vse proslave v zvezi z odkrivanjem grobnice, se je zgodil incident. Učiteljica Špehova nas je pri uri biologije, kdo ve zakaj, ozmerjala z Butalci. Morda smo bili nemirni, morda nismo česa znali. Beseda *Butalci* je seveda pri priči naletela na neodobravanje. Dandanes bi ob taki besedi zagotovo že naslednji dan prinorel na šolo eden od staršev ali pa oba, morda celo z odvetnikom. Ne vem, kaj me je prijelo, da sem nato izdelal podroben zemljevid Butal, z vsemi gorami, zalivi, rti, morji, trgi, vasmi, mesti, potoki, rekami, toplicami in jezeri. Manjkal je samo še butalski policaj, za katerega je slišal tudi grozanski razbojnik Cefizelj, ki so pravili, da je že sedem ljudi zadušil in tri ženske. Tako pravi Milčinski v svojih Butalcih. Nekaj njegovih zgodb se je prijelo celo prebivalcev Šebrelj.

Največja učilnica v zadnjem nadstropju nekdanje nove sodnije ali, če hočete, nižje gimnazije je slovela tudi po gumbu, s katerim se je dalo aktivirati šolski zvonec. Takrat še ni bilo avtomatike in je eden od učencev, ki je seveda moral imeti točno uro, bil zadolžen za točno najavo začetka pouka, začetka in konca odmorov ter konec pouka. Gumb je bil nameščen pod srednjim oknom, obrnjenim na glavno cesto. Šolski zvonar pa je sedel zraven njega tako, da je bil na njegovi levi strani. Pravili so, navzoč pa nisem bil, da je nekega dne neki učenec bil v hudih težavah, ko ga je proti koncu šolske ure obdeloval Viktor. Pogumni šolski zvonar je pritisnil na gumb kako minuto prej in s tem reveža otel nadaljnjih muk.

Zemljevid kot višek moje ustvarjalnosti in geografske ter literarne znanosti je nekdo izročil Špehovi, ki pa ji izdelek ni bil prav nič všeč, ker so nekateri napisi na njem bili tesno povezani z njenim priimkom. Na račun uradnih priimkov oseb pa ne gre zbijati šal, kar je tudi prav. V zbornici so nato staknili glave, kako me kaznovati. Kazen pa je bila huda: pred vsemi petdesetimi ali šestdesetimi sošolci sem bil vprašan biologijo. Špehova pa je med mojim jecljanjem s prstom sledila v učbeniku besedi za besedo, če bom prav povedal. Ne spominjam se več, kako se je to izpraševanje končalo, res pa je, da z gospo nisem več imel težav, vsaj videti je bilo tako. Moram se na tem mestu zahvaliti svojim učiteljem, ki so verjeli, da iz mene morda nekoč pa le nekaj bo, in me niso preganjali. Še dobro, da mi niso dali ukora, kajti strogi Očanec bi si takoj odpel usnjeni pas in me premlatil, tako kot je to naredil kar pogosto z mojim mlajšim, žal že pokojnim bratom. Ta se je rad potepal po vasi, ker se mu je zdelo doma dolgočasno. Želja staršev je bila, da smo bili otroci doma še preden je zvečer zazvonilo v bližnjem zvoniku. Če je ta rok tako ali drugače zamudil, pa je že pel pas, če je le bil oče doma. Sčasoma si je brat le nabral toliko izkušenj, da se je zatekel pod mizo, kjer ga pas ni mogel doseči. Tako je pač bilo nekoč. Dandanes tak starš ne bi dolgo vozil s tako pretirano, neusmiljeno špartansko vzgojo.

V osmem razredu smo nekega dne imeli strokovno ekskurzijo v Idrijo. Peljali smo se ogledat rudniške naprave in muzej. Rudnik živega srebra je takrat obratoval s polno paro. Najprej smo si ogledali vseh vrst peči za žganje živosrebrne rude, videli, da žlahtno pri normalni temperaturi tekočo kovino pridobivajo podobno kot žganje na kmetih. Postalo nam je bolj jasno, kaj dela tisti pošastni dimnik nad mestom. Ko sem hodil na gimnazijo, sem ga gledal z idrijske avtobusne postaje dan za dnem. Takrat o kaki ekologiji še ni bilo govora. Beseda *ekologija* je grškega izvora, tako kot *ekonomija*. Beseda οἶκος pomeni *hiša, poslopje, stanovanje, koča, šotor, soba, hram, dvorana, svetišče, palača, prestolnica; votlina, ležišče, gnezdo, gospodarstvo, gospodinjstvo, domače življenje rodbinsko imetje, premoženje, rodbina, družina, posli, domovina*, λόγος pa *beseda, nauk* in še marsikaj drugega. Mesto Idrija je cvetelo na račun živega srebra že skoraj petsto let. Da pa so se ljudje nevede zastrupljali z žveplovim dioksidom in živosrebrnimi hlapi, se ni kaj dosti govorilo. Pot nas je zanesla na idrijski grad, Gewerkenegg slišimo in beremo prav pogosto. Na njegovem dvorišču se je kar trlo starodavnih strojev. Glede na to, da je bil moj oče rudar, mi veliko rudniških izrazov ni bilo tujih. Pokazali so nam makete rudnika, raznovrstnih strojev in drugo. Seveda nam ni ušel poskus, ki dokazuje, da železna krogla plava na živem srebru. Tisti, ki je to razlagal, je izustil, da je tistih nekaj ušivih litrov živega srebra v posodi več vredno kot mi vsi skupaj, kar nas je takrat stalo naokrog. Učenci smo to vzeli kot sicer neslano šalo, Dreškovi Katici pa se je v hipu prebudil pravi rovtarski cerkljanski ponos in je ošabnemu, nesramnemu in prevzetnemu možakarju brez zadrege povedala svoje.

Idrija je njega dni veljala za drugo mesto na Kranjskem. Na to so bili Idrijčani vedno zelo ponosni in so verjetno še. Zaradi rudnika živega srebra je imela poseben status: spadala je namreč neposredno pod dunajsko komoro. Zato ni bila podrejena nobeni fevdalni grofiji, medtem ko smo Cerkljani dolgo spadali pod tolminsko. Zato smo z vidika preponosnih in presamozavestnih Idrijčanov bili Cerkljani nekoliko manj vredni. Še dandanes nas ima marsikdo v Idriji za *Kmince*, bolje rečeno *Tmince*, kar je narečna oblika za *Tolmince*. Tolmin je pravilna slovnična oblika mesta v soški dolini, ljudje na Tolminskem pa še dandanes rečejo preprosteje: *Tmin*. Meja med Notranjsko, kamor je nekoč spadala Idrija, in Tolminsko je prečkala cesto Idrija–Tolmin malo niže od Lužnika, o čemer se lahko prepričamo na starih zemljevidih.

Osmi razred nam je ostal v spominu tudi zaradi izleta v Sarajevo. Ne prej ne slej nisem bil več v Bosni. Spremljali sta nas Ljerka Sedlak in Katica Rutar, ki sta prevzeli vso odgovornost, da nas vse žive in zdrave pripeljeta nazaj. Sedlakova je najprej predlagala, da bi nas popeljala v neznano, to je pomenilo, da bi se usedli na vlak in šele na cilju presenečeno izvedeli, kje pravzaprav smo. Temu so se nekateri starši mojih sošolcev uprli, tako da nas na izlet ni šlo prav veliko, čeprav smo vedeli, kam gremo. Cerkljanska je bila takrat še revna in na kmetih so gledali na vsak dinar. Ni tako kot danes, ko se že na osnovnih šolah lahko privoščijo valete, organizirajo izlete v eksotične kraje, da o maturah, maturantskih plesih in izletih raje ne govorimo. Če te ni zraven in ne delaš kot večina, te hitro izločijo. Takrat, ko sem jaz hodil v šolo, tega še ni bilo.

Do Ljubljane smo potovali z avtobusom, naprej pa z vlakom. Vožnja je bila dolga in naporna. V spominu mi je ostal, čudno se sliši, malinovec. Sošolcu se je razlilo po kupeju nekaj nerazredčenega malinovca. Kokta in malinovec sta bili nekoč priljubljeni brezalkoholni pijači za mlade. Drugega skoraj ni bilo moč dobiti na Cerkljanskem. Seveda se je gosti in lepljivi malinovec hitro raznesel po celem vagonu. Nekdo je razgrnil časopisni papir čez packe, kar pa je povzročilo trganje in zoprne, srh spreletajoče glasove.

Čez noč smo poležavali in skušali spati po sedežih, tleh in celo policah za prtljago. Proti jutru smo se znašli v Sarajevu. Ljerka, ki je dobro poznala pol Jugoslavije, nas je potem vodila po muzejih, mošejah, tržnicah, celo s tramvajem do Ilidže, kakor da je tam doma. Prespali smo v dijaškem domu Ivana Cankarja. Še prej pa smo šli v kino. Spomnim se, da sta se v filmu dva ravsala z železnima kljukama, kakor gladiatorja. Mislim, da je bil naslov "Pogled z mostu", "Vu du Pont", "A View from the Bridge", v režiji Sidneyja Lumeta po drami Arthurja Millerja.

Sarajevo mi je ostalo v trpkem spominu, ker sem dobil žulj na desni nogi. Pa ne zaradi hoje, ki sem jo bil vajen, ampak zaradi premajhnih čevljev. Tista leta sem hitro rastel in čevlji, ki so mi bili prav pred pol leta, so bili premajhni in v svoji skromnosti se niti nisem upal prositi staršev, naj mi kupijo nove. Raje sem potrpel. Nekemu sošolcu pa so čez noč padle kolikor toliko zlikane hlače na tla. Ker zaradi skromnih življenjskih razmer doma niso bile iz bogve kako kvalitetnega blaga, so se ležeče nekaj ur na tleh popolnoma zmečkale, tako da je revež ostal do konca izleta v precej pomečkanih hlačah. To še ni bilo tako hudo, če primerjam to nesrečo z drugo, v kateri se je neka gospa po nerodnosti že v Ljubljani polila z jogurtom po svojem modrem kostimu in s takim preživela celo ekskurzijo v Ravenno, Rimini in žepno državico San Marino, ki ji vladata dva kapitana regenta.

Na poti domov smo se ustavili v Banja Luki, kjer je Katičin brat Štefan ravno služil v JLA. Srečali smo se z njim, se malo razgledali po mestu in nadaljevali pot proti Zagrebu in Ljubljani. Z deset let starejšim Štefanom sem se kasneje, v dobi svetovnega spleta, elektronske pošte in mobilne telefonije, spoprijel s cerkljanskim narečjem, šegami in navadami. Zbirala sva slikovno in vsakršno gradivo in postavila nekaj bogato slikovno opremljenih in v javnosti odmevnih spletišč. Cerkljansko narečje me je zanimalo že v osnovni šoli, proti koncu drugega tisočletja pa me je spet začelo. Cerkljani so se mi v začetku tretjega tisočletja oddolžili z občinsko Bevkovo nagrado za urejanje spletišč in za prispevke k matematični tradiciji na Cerkljanskem.

Po uspešnem zaključku osnovne šole se je bilo treba odločiti, kam. Nekateri smo šli v Idrijo, kjer je bila nam najbližja srednja šola, gimnazija. Nekateri pa so se vpisali v druge srednje šole v Novi Gorici, Ljubljani, Kranju, na Jesenicah in drugje, nekateri so izbrali poklicne šole, nekateri nič. Mnoge sošolke, v katerih se je začel ravno prebujati materinski duh, pa so komaj čakale, da bo šole enkrat za vselej konec in da se čim prej poročijo. Gimnazija v Idriji se je takrat imenovala po Juriju Vegi. Pa smo spet pri matematiku! Šola ima bogato tradicijo, ki se je začela z ustanovitvijo prve slovenske realke na začetku 20. stoletja. Italijani so jo seveda ukinili, po drugi svetovni vojni pa se je spet postavila na noge. Kmalu po tistem, ko sem bil gimnazijo zapustil, se je preorganizirala v šolski center, sedaj pa spet nosi prejšnje ime.

Šolski sistem so, kot je še danes navada, na vsake nekaj let prenavljali po dolgem in počez. Pred vpisom na gimnazijo smo imeli nekakšen sprejemni izpit. Niso se vsi, ki so bili na njem, tudi vpisali. Nekateri so izbrali drugačno pot do znanja. Cerkljani smo imeli marsikje rahlo prednost: praviloma smo bili v povprečju boljši v matematiki kot ostali. Zahvala za to pa gre seveda predvsem učitelju Maksu Pagonu.

Obilica dela, študija in drugih obveznosti je pripomogla, da se nekdanji sošolci z osnovne šole nismo prav pogosto srečevali. Še največ smo se videvali na pokopališču ob Dnevu mrtvih. Smo se pa le dobili v večjem številu na enem mestu, in sicer ob enainštirideseti obletnice zaključka osnovne šole. Nekam, kasno, a vendar. Nikoli ni prepozno. Bilo je lepo srečanje, ki je trajalo ob večerji, pijači, živi glasbi in kramljanju še dolgo v noč. Žal Ljerka Sedlak, nekdanja razredničarka, ni mogla priti, nas pa je z obiskom počastila Katarina Rutar, razredničarka paralelke. Marsikoga ni bilo iz tega ali onega razloga, nekaj pa jih je do takrat že umrlo.

8 Začetki televizije na Cerkljanskem

Kolikor se spomnim, so prvi televizor imeli pri Slabetu na Bevkovem vrhu. Nekoč smo s celo šolo za športni dan vreli čez Lajše in skozi Cerkljanski Vrh tja gor, videli pa smo žal le testno sliko. Tudi drugi so radi hodili k Slabetu, le da jih je včasih Rošpov Petko peljal na tovornjačku. Televizijski program se je pa tam gori dalo dobro spremljati, ker je pri Slabetu precej visoko nad morjem. Še najmočnejši je bil italijanski televizijski signal.

Takrat je bilo pri Slabetu tudi planinsko zavetišče in z avtom se je dalo tja gor kar udobno pripeljati, o čemer pričajo stare fotografije. Petko je svoj čas vsak dan opravil krožno vožnjo skozi Čeplez, Planino, Kladje, Cerkljanski Vrh, Otalež, Plužnje, Lazec, Pirhovo Luknjo in Želin, da je pobral vse mleko, ki so ga pripravili kmetje za cerkljansko mlekarno, ki je slovela daleč naokrog po izvrstnem maslu in siru. Cerkljansko maslo so nekoč vozili celo v Trst. Sedaj Na Ravan z avtom še nekako prideš, potem je pa od stare ceste ostal le še kolovoz skozi Hmenico. Z malo sreče nazadnje le prispeš na otaleško cesto, ki pa je dobro prevozna, le avtobusa ni priporočljivo srečati, ker je ozka. So pa vsaj postavili obvestila ob cesti, kdaj vozi. Če človek nima ravno terenca, mu te poti nihče ne priporoča. Televizijo je marsikdo prvič videl tudi na razstavi na Kladju, potem ko so bili elektrificirali Podlanišče, Podpleče in Cerkljanski Vrh. Takrat so v kaverni pokazali različne stroje in vsakovrstne gospodinjske in druge električne aparate. Na koncu pa so na prostem pred kaverno odvrteli tudi film Dolina miru. Platno so razpeli kar med dva gasilska drogova.

Televizor je cerkljanski osnovni šoli podaril pisatelj France Bevk. V Cerknem se je na televizijskem zaslonu komaj kaj videlo, ker takrat še ni bilo televizijskih posrednikov na Lajšah in Bevkovem vrhu. Zato so tisti zaboj, ki smo mu rekli televizor, in nekakšne grablje, to je anteno tipa Yagi, vlačili vsepovsod po bližnjih gričih, kjer je bil pri roki električni tok, predvsem zato, da bi lahko gledali kakšno športno tekmo. Natančneje bi morali zapisati antena tipa Yagi–Uda, ker sta jo leta 1924 razvila Japonca Hidetsugu Yagi in Shintaro Uda.

Neke nedelje, po roditeljskem sestanku na šoli, je učitelj matematike in fizike Maks Pagon želel staršem in tudi nam učencem predstaviti televizijo. Spremljali smo prenos smučarskih skokov na Bloudkovi velikanki v Planici. Televizor je namestil v največji učilnici nekdanje nižje gimnazije. Videlo se je zelo slabo, slika je bila vsa zasnežena, skakalce pa se je za silo dalo spremljati. Komentatorja prenosa pa se skoraj ni slišalo. Pagon se je hitro znašel, skočil je domov po radijski sprejemnik, da smo vzporedno na srednjem valu lahko tudi poslušali.

Tem komedijam v zvezi s televizijo je za nekaj let naredil konec gostilničar Vilček na Kladju, ko si je nabavil televizor in se je televizijski spored zaradi primerne nadmorske višine gostilne kar dobro videl. Potlej so se ljudje vozili k njemu, če so želeli kaj gledati, pa še posel so mu naredili. Bili so tudi nepozabni zimski pohodi na Kladje, takoj za tem, ko so splužili cesto Cerkno–Kladje. Ljudje so odhiteli s sankami na Kladje, pri Vilčku kaj popili, malo gledali televizijo, nato pa se spustili na sankah po cesti proti Cerknemu. Če je bilo ravno prav hladno, je kar dobro šlo. Tudi iz Zakriža skozi Benat so sankali ob takih priložnostih, še hitreje je šlo, ker je tam cesta še bolj strma. Ko so cestarji posuli gramoz, pa je bilo veselja konec.

Pluženje cest je bil še precej let po vojni pravi podvig. Aktivirali so kmete, ki so imeli konje, da so jih dali na razpolago. V plug v obliki črke V so vpregli nekaj parov konj, nekaj mož je skrbelo, da so konji šli pravo pot, nekaj pa jih je imelo nalogo, da je plug pravilno drsel, kajti hitro bi se lahko znašel s konji vred kje pod cesto. Seveda je bilo poskrbljeno tudi za konjsko krmo. Tako so plužili vse do Cerknega, kjer so se obrnili in konji so morali plug odvleči po isti poti nazaj na Kladje. Po enakem postopku so splužili tudi druge pomembnejše ceste. Danes vse to delo opravijo za to usposobljeni stroji in strokovno osebje.

Ko so pa Cerkljani nazadnje le dobili televizijske posrednike, repetitorje, releje ali karkoli so že, na Lajšah in Bevkovem vrhu, jih pa ni bilo več moč spraviti iz hiš. Kamorkoli si prišel na obisk, povsod so buljili proti tistemu zaboju, da človek nikoli ni vedel, ali se sme kaj naglas reči ali ne. Ko so pa dobili še kabelsko televizijo, pa sploh. Še projekcije filmov v kinodvorani so zato kar hitro zamrle, tako kot še marsikje drugje. Vse to v škodo prijetnega druženja pred kinom in zvečer na vasi.

Stara Očančeva hiša v Planini pri Cerknem je nekoč nosila številko 59, po drugem svetovnem klanju pa 35. Ime *pri Očancu* je dobila domačija po prvih ljudeh, ki so živeli tam gori in so se pisali Očanc, kar so svoj čas, pod rajnko Avstrijo, zapisali kot Ozhanz, dokler niso modri možje, jezikoslovci, izumili kljukic za pisanje črk *č, š, ž*. Očanci so prvotno prebivali v Planini *pri Cornu* v Rižah.

Prvi gospodar s priimkom Očanc, ki je vpisan pri Cornu, je Očanc Ivan, rojen v isti hiši (številka 29). Podatki, ki se jih je dalo stakniti v cerkljanskem župnišču, so:

OČANC Ivan	roj.	6.	6.	1779	umrl 4. 4. 1866
MESG Marjeta	roj.			1781	umrla 24. 3. 1840
Marija	roj.	30.	5.	1807	poročena k Markušu
Marija	roj.	11.	7.	1811	umrla 4. 4. 1843
Matej	roj.	1.	9.	1813	umrl: ni podatkov
Luka	roj.	15.	8.	1820	umrl: ni podatkov
Mihael	roj.	17.	9.	1823	umrl 17. 4. 1892

Tabela 4: Očančevi po Ivanu.

Med letoma 1857 in 1860 so se preselili v hišo Planina 59, to se pravi k Očancu. K Cornu pa so prišli novi ljudje: Primožič Janez, Štefkov iz Planine, in Marija, rojena Obed.

Opazimo lahko, da so sredi 19. stoletja otroci veliko umirali, le redki so učakali polnoletnost. To je bil splošen pojav v tistih časih po celi Evropi.

OČANC Mihael	roj.	17. 9. 1823	umrl 17. 4. 1892
BRELIH Neža	roj.	28. 12. 1826	iz Oselice, umrla 15. 2. 1861
Anton	roj.	7. 1. 1846	umrl 5. 8. 1854
Ana	roj.	8. 7. 1849	umrla 21. 8. 1850
Lovrenc	roj.	4. 8. 1853	umrl 18. 8. 1854
Matija	roj.	24. 2. 1857	umrl: ni podatkov
Marija	roj.	22. 9. 1860	umrla 7. 4. 1861

Tabela 5: Očančevi po Mihaelu in Neži.

K Očancu se je preselil tudi stari oče Ivan, rojen leta 1779, ki pa je užival starost v novi hiši le kakih 6 ali 8 let. Njegov sin Luka pa se je od Očanca preselil v Trst, kjer se je oženil.

Morda pa je mama Neža prinesla k hiši za doto kos zemlje, ki je spadal pod Loško gospostvo, kot pričajo stari papirji na katastru. Kje je to bilo, pa bo treba še raziskati.

Gospodar pri Očancu je bil Miha, ki se je še enkrat oženil, in to z Barbaro Cveticij, morda Svetik iz hiše številka 32 (ta hiša je pogorela, stala pa je med Mrtvičarjem in Mehajnom v Planini. Miha in Barbara sta imela otroke

OČANC Mihael	roj.	17. 9. 1823	umrl 17. 4. 1892
CVETICIJ Barbara	roj.	30. 9. 1833	umrla 15. 2. 1906
Jurij	roj.	16. 4. 1863	umrl 25. 9. 1930
Katarina	roj.	2. 11. 1866	umrla 13. 12. 1936
Ana	roj.	10. 7. 1872	umrla 7. 11. 1874
Jera	roj.	7. 2. 1876	umrla 9. 1. 1917

Tabela 6: Očančevi po Mihaelu in Barbari.

Nova gospodinja Pri Očancu v Planini je postala Jera, ki se je poročila 7. novembra 1904 z Urbanom Prezljem, rojenim 23. maja 1876 v Cerkljanskem

Vrhu 197, pri Petru, danes pri Lojzetu, Podlanišče 47. Imela sta dva otroka. Vsi pa so se odselili v Cerkljanski Vrh 111, na Ravan, kjer je umrla Jera.

OČANC Jera	roj.	7. 2. 1876	umrla 9. 1. 1917
PREZELJ Urban	roj.	23. 5. 1876	umrl: ni podatkov
Jakob	roj.	17. 7. 1906	umrl: ni podatkov
Ivan	roj.	30. 4. 1909	umrl: ni podatkov

Tabela 7: Očančevi po Urbanu in Jeri.

Očančeva hiša pa je vzela pod streho družino Respet. Priimek Respet so uradniki po pisarnah in šolah sčasoma predelali v Razpet. V Ameriki pa ga je ljudem le uspelo ohraniti do današnjih dni. Morda je bil Urban tisti, ki se je tako bal živeti pri Očancu, češ da se lahko velik kamen vsak hip privali doli s Plazov. Pogosto je hodil v strmino merit, koliko se je že premaknila neka velika skala. Zato je rajši vse skupaj prodal in se preselil na Ravan. V kronikah je zapisano, da se je kakšna skala že marsikje res utrgala in se zakotalila naravnost v hišo. Čudnega ni nič, če je mlada Ravnanka krstila njihov kravji sir po Očancu! Naneslo pa je tako, da se je tam gori, na Ravan v Cerkljanskem Vrhu, v zadnjih sto letih zvrstilo kar troje priimkov: Prezelj, Grögl in Demšar. Gozda v grapi nad Skrajnkom pa Urban ni prodal, tako da so še v moji mladosti hodili k Očancu vedrit ali pa se malo pogret, ko so drvarili tam. Tistemu gozdu smo pravili *Jurčkova meja*. Ne vem, ali zaradi jurčkov, ki so radi rasli tam, ali zaradi Jurija Očanca, ki je bil Mihov sin.

V letu, ko sem zaradi svoje starosti že izpolnil minimalni pogoj za upokojitev, sem slučajno odkril, da je v tabeli 7 omenjeni Ivan Prezelj bil odpeljan na Sardinijo. Italijani so se namreč po napadu na Jugoslavijo leta 1941 na Primorskem in v Istri ustrašili fantov in celo družinskih očetov, ki so bili sposobni nositi orožje. Lahko bi pač odšli v partizane in se borili proti njim. Nekateri Slovenci so to namreč že bili naredili. Veliko moških je že tako in tako služilo v italijanski vojski, preostale pa so dobesedno polovili, letnik za letnikom vse tja do 1900, in mnoge poslali v posebne delovne čete, *battaglioni speciali*, na Sardinijo, ki je slovela kot malarični otok. Veliko jih je tam zbolelo in pomrlo, le redkim pa je uspelo uiti. Sardinija je v tem pogledu bila prava kletka. Po kapitulaciji Italije leta 1943 so bili premeščeni k zaveznikom prek Korzike v Južno Francijo in so se šele jeseni 1945 vrnili domov. Niti Italijanom niti zaveznikom ni bilo preveč všeč, da bi bili naši možje in fanti prehitro doma. Bili so formalno italijanski državljani in doma bi se pač borili za priključitev Slovenskega primorja in Istre k Jugoslaviji oziroma priključili bi se Titovi vojski. Zaradi političnega mešetarjenja so se vrnili domov tako pozno, kar pa morda glede na zgodnje povojne dogodke v domovini niti ni bilo tako slabo.

Ivan Prezelj je služil na Sardiniji v 331. slovanski četi. Sosedov Franc Svetik, ki je bil z mojim stricem Bernardom večkrat na bojni nogi, je služil na istem otoku v 229. slovanski četi, Viktor Prezelj[77] iz Raven pri Cerknem pa v 232. slovanski četi. Viktor je na stara leta napisal nekaj besedil o cerkljanskih zadevah skozi čas. Kot upokojenec je celo bil za turističnega vodiča po Cerkljanskem, kajti v Italiji se je dobro naučil italijanščine, med zavezniki pa angleščine. Stric Bernard, rojen leta 1905, je služil v 327. slovanski četi, v kateri so bili predstavniki vseh letnikov, od vključno 1905 do vključno 1926. Slednji letnik je bil najbolj zastopan, iz Bernardovega pa je bilo devet domačinov. Po vojni je stric rad čečkal s svinčnikom po tramovih na seniku, kozolcu in skednju. Največkrat so bili to zapisi v zvezi s Sardinijo in Korziko. Tu pa tam je celo kaj vrezal ali narisal. Na deske v naši drvarnici je upodobil moje starše, ki smo jih zagledali, ko smo pokurili vsa drva in so se razgalile stene. Vse te Bernardove spomine smo lahko še dolgo občudovali, ko smo se po omenjenih objektih dajali s slamo in senom.

To se pravi, da sta k Očancu prišla živet Ivan Respet in Marija Golob. Ivan je bil doma v Labinjah, pri Mušu, sin Antona in Marijane, rojene Peter-

[77]Viktor Prezelj (1924–2007) – ljubiteljski domoznanec, prejemnik Bevkove nagrade Občine Cerkno leta 2003.

nel. Marija, rojena Golob, je bila doma v Gorjah 71, morda je to po domače v Šipju. Nikoli nisem utegnil obiskati tega kraja in kaj več izvedeti o njem. Pri Mušu se je naselila družina Kosmač, Ivanovi starši, se pravi Anton in Marijana Peternel, pa so se z družino preselili h Klabovsu v Labinjah.

Očančev grunt je kupil Ivan, moj ded, še pod cesarjem Francem Jožefom. Sem je spadal tudi kos zemlje tam daleč proti Novinam in Novakom, in sicer v Marinkovšah. Tisti del zemlje, kot najodročnejši del našega grunta, je moj najstarejši brat najprej podedoval po mami, nato pa ga kmalu prodal. Kar je sveta blizu hiše razen Vovšja, ni samo iz enega kosa. Posebej so Rupe, Brinje in gozd, kar pomeni, da je treba hoditi po poteh drugih lastnikov, da se tja pride. Na ta način se Očančev grunt stika z Ratovževim, Logarjevim, Bajtnim, Rajdarskim, Ravnanovim, Primoževim, Gričarjevim, Nakančnim, Andrejačevim, Medrskim, Gabrovčevim, Kovačevim in Cigaletovim, v gozdu pa še z Lukovim, Novinčevim in Svetikovim svetom. Upam, da nisem koga v svoji površnosti izpustil.

Rodoslovne podatke se da lepo razvrstiti v *rodoslovno drevo*. S tem pa smo že v *teoriji grafov*, eni od novejših matematičnih področij, ki se hitro razvija in je v Sloveniji dosegla zavidljiv svetovni nivo. V teoriji grafov imamo točke in povezave. Povezan graf brez ciklov pa se v tej teoriji imenuje *drevo*, več dreves pa *gozd*. V rodoslovnem drevesu so točke ljudje, povezave pa sorodstvene vezi.

Na fakulteti je nekdo nekoč rekel, češ da sorodnike že učečih pa ne bodo zaposlovali. Na kakšno sorodstvo je mislil, ni povedal. Šlo pa je za ženo nekega profesorja. Praviloma žena ni v sorodstvu s svojim možem. Kdaj sta potemtakem dve osebi v sorodstvu. Teorija grafov ima definicijo: Osebi A in B sta si v sorodu natanko tedaj, ko imata skupnega prednika. Najbrž mislimo v biološkem sorodstvu. Kakšnem pa sicer?

Ko je govora o sorodstvu, je treba seveda biti zelo pazljiv. Ob odkrivanju spominske plošče nekemu duhovniku je bilo napovedano, da bosta dva otroka, *njegova potomca*, nastopila z neko recitacijo. Praviloma je to nemogoče.

Omenjeni pa po preverjenih podatkih ni imel otrok. Napovedana bi morala biti kvečjemu *njegova sorodnika*.

Zraven Očančeve hiše stoji hlev, ob poti proti Zašurkovcu pa še svisli. Svoj čas smo redili tudi tri glave živine, v svinjaku pa tudi po dva prašiča, da je bilo v času kolin zares veselje pri hiši. Za Očančevim gričem, od kjer se v lepem vremenu vidi celo Kojca, je strmi del grunta ob grapi. Temu koščku sveta smo rekli *Kotel*, podobno kot so Prežihovi v Kotljah pod Uršljo goro imeli svoj *Pekel*. Malo naprej od tam se pride do studenca, kamor so hodili po vodo, dokler ni bilo zajetja v Brinju. Kasneje pa smo tja hodili poleti po mrzlo pitno vodo. Naprej od studenca se pride do bunkerja, ki je bil narejen zaradi planinskega rudnika bakra. Na naši strani sta bila dva vhoda vanj, eden pod, drugi pa nad Primoževim travnikom. Skozi višji vhod si prišel naravnost k Šmičkarju v Podplečah na kranjski strani.

Od tukaj, od Očančeve hiše v Planini pri Cerknem, sem torej hodil v šolo v Cerkno. Skoraj celotni poti lahko sledimo ob lepem vremenu s Kacinivega griča na nasprotni strani doline. Kar štiri leta me je poučevala na razrednem pouku Cinkova Vida, Vida Peternelj, v petem pa Migučeva Angela, Angela Bevk. V petem razredu je bil le deloma predmetni pouk. Posebej smo imeli učitelja le za nemščino in petje. V šestem razredu nas je dobil v roke Masornikov Viktor, Viktor Jereb, strog in razgledan učitelj, njega dni šolski nadzornik. Morda je to že kje zapisano, je pa tako pomembno, da ni nič odveč, če se zapiše še enkrat. Predmetni pouk ni potekal tako kot dandanes po modernih šolah. Učenci se nismo selili iz predavalnice v predavalnico razen za telovadbo in tehnični pouk. Učitelji so morali učne pripomočke prinašati s seboj.

Učiteljica Angela Bevk je prav tako slovela po svoji hudosti, če se učenci niso primerno obnašali. V žepu je nosila ključe in grešnik jih je hitro dobil z njimi po buči, če je kaj nespametnega storil in ji je prišel v roke. Šolsko dvorišče je bilo proti cesti zagrajeno z žičnato mrežo in otroci smo kaj radi plezali po njej. Angela je marsikoga zalotila pri tem početju in pri priči ga je kaznovala s svojimi ključi. V razredu je sredi pouka našla nekoga, kateremu je dala denar in je moral teči v mesnico po meso. Tisti v prvi klopi, tik za katedrom, je slišal, da mu je čisto potiho naročila, naj mesarja poprosi še za kak priboljšek za njenega mačka. Sicer pa je bil njen razred pravi rastlinjak. Doma je imela vse polno cvetja, tako da ga že ni imela kam dati. Zato je izbrala nekaj učencev, ki so znosili njene sobne rastline naravnost v razred. Tako so cvetlični lončki stali na okenskih policah, visečih policah in stojalih. Videti je bilo kaj: begonije, zimzelene, kaktuse, difenbahije, ciklame in drugo rastlinje, kateremu niti nismo vedeli imena. Angela je seveda poskrbela, da se je vse to tudi redno zalivalo.

V petem razredu se nas je nabralo največ pravih Cerkljanov, pa tudi nekaj z drugih koncev Primorske. Ponekod so po vaseh imeli le prve štiri razrede osnovne šole, zato so morali od petega razreda naprej obiskovati popolno osemletko kje drugje. Nekaterim je bilo Cerkno najbližje. Tako smo dobili nove sošolce iz Raven, Kojce, Zakojce, Novakov, Straže, Reke, Jagršč, Podlanišča, Podpleč, Ponikev, Šentviške Gore, Bukovega in morda še od kod. Precej se jih je vozilo v Cerkno, nekateri so stanovali v Klapaču, nekaj pa jih je pešačilo od doma vsak dan, v lepem in grdem vremenu. Marsikaj smo izvedeli drug o drugem, spoznali nove govorice in navade. Po starosti smo bili pa tudi pisana druščina. Vmes so bili že odrasli fantje in za možitev godna dekleta, tako da je bilo tudi Angeli, vsega vajeni, težko vzdrževati red in tišino v razredu. Tako je večkrat vzrojila in rekla, da takih otrok do takrat pa še ni imela.

Dva nova sošolca s Šentviške planote sta nas seznanila s tamkajšnjo jezikovno posebnostjo, ki ji učeno pravimo *betacizem* po grški črki β. Gre za to, da pri določenih pogojih črko *v* izgovarjajo kot *b*. Namesto "Sem videl" se od njih sliši "Sem bidel", še bolje "Sm bideu." Namesto "Zapri vrata" pa "Zapri brata". To pripelje nepoznavalca razmer, denimo kakšno novo učiteljico iz drugih krajev, ki pride na Šentviško planoto, na začetku do nesporazumov. Bili smo priča, kako je mlajši brat potihoma sredi pouka spraševal starejšega, ali naj napiše mali pisani *v* ali veliki pisani *v*, pri čemer je mislil na *b*, ki se pač napiše podobno kot *v*, toda kot višji znak glede na osnovno črto v zvezku. Brata sta hodila v isti razred, ker je pač starejši ponavljal in s tem počakal mlajšega, da sta potem hodila skupaj. Takih primerov je bilo še nekaj. Takrat se je pogosto slišalo besedo *bata* namesto *vata*, kar je rahel skupek bombažnih vlaken in se uporablja v medicini. Del Škofje Loke se imenuje *Binkelj*, kar pride iz nemške besede *Winkel*, kar pomeni *kot, zakotje*.

Zamenjava glasov *b* in *v* pisavi in izgovarjavi resnici ni nič posebnega. V novi grščini se običajno črka β bere kot *v*. Starodavne Tebe, Θῆβαι, v grški pokrajini Bojotiji (Βοιωτία), so postale Θήβα, kar izgovarjajo kot *thiva*. V cirilici je v tako in tako в, v španščini berejo Cordoba skoraj tako kot *kórdova*. Če pa upoštevamo, da je blizu glasu *v* tudi glas *f*, potem ni čudno, če so Nemci iz besede *bistrica*, ki označuje živahno, hitro tekočo, bistro reko ali potok, naredili besedo *Feistritz*, kar se bere kot *fajstric: bistrica, vistrica, fistrica, fajstrica, fajstric*. Na koncu smo v bistvu uporabili še preglas *i* v *aj*, kakor imamo v narečju *ki – kaj, zaki – zakaj, rida – rajda*.

Neka sošolka z omenjene Šentviške planote pa se je nekega šolskega dne nehote zaletela v samo učiteljico Angelo. Obe sta bili bolj okrogle rasti. Nekako sta se ena drugi opravičili, nato pa Angela vpraša: "No, povštrček, od kod pa ti prihajaš?" Učenka pa ji urno in brez zadrege odgovori: "S Primorskega." Cel razred je bil z odgovorom več kot zadovoljen in se je v en glas zasmejal. Dogodek še dolgo ni bil pozabljen.

Včasih si v šoli gladko padel in si moral ponavljati razred. Tako so nekateri prilezli komaj do petega razreda. Nekateri so osnovno šolo dokončali kasneje, z večerno šolo. Zgodilo se je, da je Angela neke jeseni potrebovala v Podlivcu pomoč pri pobiranju krompirja na njivi. V petem razredu sta bila dva že precej odrasla učenca, za katera je menila, da se tako in tako ne bosta nič več novega naučila, pa ju je med poukom prosila za pomoč svojim domačim na polju. To sta rada sprejela. Še posebej pa ju je posvarila, da naj hodita v Podlivec previdno, da ju ravnatelj šole ne bo videl.

Angela je bila razgledana in zelo izobražena učiteljica. Pod Italijo je bila premeščena nekam dol na italijanski škorenj, po kapitulaciji pa se je vrnila in nadaljevala z delom v novi slovenski šoli, podobno kakor Viktor. Obema je skupno tole, da sta kljub železnim časom redno hodila v cerkev in celo pela na koru. Angelino stanovanje je bilo tik ob cerkvi. Ata mi je pripovedoval, da je nekega dne sredi maše zapustila kor, ker se je nenadoma spomnila, da doma kuha juho in da bi bilo dobro dati na ogenj kako polence. Ko je to pomembno delo opravila, se je vrnila pet. Angela je bila pokončna ženska in je bila trdna v svojih prepričanjih in nazorih. Ni bila ena tistih, ki bi na velikonočni ponedeljek, ki takrat ni bil dela prost dan, v šoli pregledovala učencem roke, da bi izvedela, kdo je doma barval pirhe. Tudi sicer se ne spominjam, da bi kdo v Cerknem takrat imel s tem težave, morda kasneje. Sem pa slišal, da so ponekod najbolj zagrizene učiteljice to svoj čas počele.

V razredu je bil na vrsti tudi poboj sedeminštiridesetih učencev partijske šole v Cerknem januarja 1944. Nekdo je vprašal, če je res, da so Nemci streljali nanje iz zvonika farne cerkve. Dolgo nas je prepričevala, da to ni res. Nazadnje je rekla, da naj takega, ki to vztrajno trdi, pošljemo neposredno k njej na razgovor. Poboj še danes ni zadovoljivo pojasnjen kakor tudi ne poboj za tragedijo obtoženih civilistov na Lajšah čez nekaj dni. S tem zgodbe še ni bilo konec. V sedemdesetih letih 20. stoletja naj bi neka gospa, ki je živela blizu kraja poboja, na tistem mestu doživela videnje. Z lastnikom zemlje sta postavila križ, ki ga je potem blagoslovil cerkljanski župnik. Potem so se začeli preganjati po idrijskem sodišču in vpleteni so dobili primerne kazni. Pravijo, da sta sinova omenjene gospe morala vrniti uniformi Teritorialne obrambe in odvzeli so jima potna lista. Dekle, ki jo je na Kladju pomotoma obstrelil vojak JLA, je bilo ravno iz hiše te gospe. Kljub vsemu pa so na Lajšah čez nekaj let ne samo postavili križ, predelali so celo obstoječe svisli v skromno kapelico, uredili križev pot in postavili spomenik. Na tem mestu spet omenimo Hramšarjeve. Med obtoženimi civilisti je bil tudi Hramšarjev, ki pa se je uprl, da bi ga kakor žival gnali na zaslišanje in morišče na Lajše, češ da če je pri zadevi kaj kriv, naj se s tem ukvarja civilno sodišče v Cerknem. In ostal je živ.

Da ne bomo preveč razmišljali o dogodkih iz vojne, se preselimo kakšnih trideset let naprej, v čas, ko se mi je iztekalo razmeroma brezskrbno študentsko življenje. Ko sem končno diplomiral, kar je bilo v bistvu še kar hitro, saj nekateri študirajo po sedem let ali več, je bila moja prva pot domov, toda ne sam. Pripeljal sem domov pokazat nevesto, pa če je bilo to komu všeč ali ne, in postopoma se je zgodilo ravno tisto, kar tako lepo piše v Genezi:

> *Zaradi tega bo zapustil mož očeta in mater in se držal svoje žene in bosta eno telo.* (Genesis, 2, 24)

Ni tako enostavno zapustiti svoje starše, ne zanje ne za odhajajočega. Toda sprijazniti se je treba s tem, da pač enkrat pride tudi dan slovesa od staršev, domačije, starih znancev in prijateljev.

Poglejmo, kako isto besedilo iz Geneze povejo naši sosedje onstran Sotle in Kolpe. Po hrvaško bi rekli:

> *Stoga će čovjek ostaviti oca i majku da prione uza svoju ženu i bit će njih dvoje jedno tijelo.*

To še zdaleč ne pomeni, da vse jezike, v katerih bomo ta citat navedli, v naši družini tudi obvladamo. Ali pa da premoremo ustrezno število prevodov Biblije. Le moderna tehnologija omogoča, da s primerno merico potrpljenja pridemo do prevodov. Vsaj z latiničnimi in cirilskimi pisavami ni težav. Srbi bi zapisali isto tako:

> Зато ће оставити човек оца свог и матер своју, и прилепиће се к жени својој, и биће двоје једно тело.

Znati pisati in brati cirilico je bilo nekoč v JLA zelo pomembno in ni odveč povedati še enkrat. Če si znal samo latinico, si bil takoj ožigosan kot polpismen – полуписмен.

Naš zet, ki je odpeljal od hiše našo edino hčer, je doma iz kraja, znanem po dobrem pivu. Prav on bi znal najbolje prebrati besede:

> *Proto opustí muž svého otce i matku a přilne ke své ženě a stanou se jedním tělom.*

Sosednji Slovaki, ki so s Čehi nekdaj složno živeli v skupni državi in se tudi brez komedij složno in sporazumno razšli, bi brali podobno:

> *Preto muž opustí svojho otca i svoju matku a prilipne k svojej manželke, a budú jedným telom.*

Poljaki, ki so v zgodovini nekoč nekaj pomenili, a žal veliko izgubili in pretrpeli, so nam dali papeža Janeza Pavla II. Zapisano imajo takole:

> *Przetoż opuści człowiek ojca swego i matkę swoję, a przyłączy się do żony swojej, i będą jednem ciałem.*

Nikjer v svetovni literaturi pa ne piše, kako bi povedali isto reč po cerkljansko. V naše narečje Biblija namreč še ni bila prevedena. Morda bi Cerkljani rekli bolj slikovito:

> *Zatú je bo díc pamoknu wat sajga waču mpa mátŕ n se wapríeu saje bábe n bosta ukop kot anu telú.*

V nemških deželah, od koder so njega dni v sodih tovorili v naše kraje prvi prevod knjige vseh knjig, to je Biblijo, pravijo:

> *Darum verläßt der Mann Vater und Mutter und bindet sich an seine Frau, und sie werden ein Fleisch.*

Naši hitro govoreči zahodni sosedi bi prebrali:

Per questo l'uomo abbandonerà suo padre e sua madre e si unirà a sua moglie e i due saranno una sola carne.

Ogri so s preseljevanjem nekoliko zakasnili, ostali v Panonski nižini, se sčasoma unesli in se pokristjanili. Nihče ne ve, zakaj niso rinili vse do Padske nižine, če so se že podali na pot. Če je že njihov jezik nekaj posebnega, pa skupaj častimo vsaj kralja Matjaža. Naš citat je po madžarsko zaradi kopice naglasnih znamenj razmeroma zapleteno zapisati, še bolj izgovoriti, je pa tak:

Annakokáért elhagyja a férfiú az ő atyját és az ő anyját, és ragaszkodik feleségéhez: és lesznek egy testté.

Seveda dandanašnji ne gre brez angleščine, za katero pravijo, da je lingua franca. Celo v jezike nekdaj ponosnih in bojevitih narodov prodira vsepovsod. Prisluhnimo še našemu izbranemu biblijskemu stavku iz Geneze, po domače Stvarjenja:

Therefore a man leaves his father and his mother and cleaves to his wife, and they become one flesh.

Beseda *geneza* je grškega izvora. Beseda γένεσις pomeni v stari grščini *nastanek, rojstvo, izvir, rod.* Podobne besede so še γέννησις, kar pomeni *rojenje, ustvarjanje, rojstvo*, γενεά, *pleme, rod, pasma, zarod, rojstvo*, γενετή, *rojstvo, porod*, γένος, *rojstvo, rod* in še kaj.

Kaj pa Francozi, ki so tudi nekaj let komandirali po naših krajih? Za njimi je ostalo hišno ime Pri Orlu, pa tudi Sigade, predel Cerknega na desni strani Zapoške. Po njihovo se sliši še kar lepo, mar ne?

C'est pourquoi l'homme quittera son père et sa mère, et s'attachera à sa femme, et ils deviendront une seule chair.

Tako mehkobno, skoraj pojoče.

V Turčiji najbrž ni prav veliko kristjanov. Pa vsaj pišejo v latinici! Imajo tu pa tam celo kak akcent, kako vijugico pod *c*, kar je videti kot *ç*, preseneča pa, da uporabljajo veliki *I* s piko, to se pravi *İ* in mali *i* brez pike, torej *ı*. Turškim mladoporočencem bi lahko vzdihnili:

> *Bu nedenle adam annesini babasını bırakacak, karısına bağlanacak ve ikisi tek bir beden olacaklar.*

Kaj pa latinščina? Pravijo, da je mrtev jezik. Res je, da je uradni jezik le v Vatikanu. Niti še ne v sivi davnini se je tudi pri nas maševalo po latinsko. Latinščina se ne da. Kljub prodoru angleščine, za katero pravijo, da bi od nje ostal samo še "Good bye!", če bi jo očistili grecizmov in romanizmov, se latinščino tako ali drugače učijo po vsem svetu. V jeziku mogočnih rimskih zavojevalcev in nekdanjem jeziku znanosti bi rekli:

> *Quam ob rem relinquet homo patrem suum et matrem et adherebit uxori suae et erunt duo in carne una.*

Tako smo zapisali citat Genesis 2,24 v jezikih narodov, ki so na neki način povezani z našimi kraji.

Kaj pa hladni severnjaki? Lahko hodijo drug k drugemu na obisk s trajektom in po mili volji primerjajo svojo govorico. Švedi, ki so proti koncu nesmiselne tridesetletne vojne strašili po nemških deželah, imajo v Svetem pismu zapisano:

> *Fördenskull skall en man övergiva sin fader och sin moder och hålla sig till sin hustru, och de skola varda ett kött.*

Ne glede na to, ali je kaj gnilega v deželi danski ali ne, tam bi razumeli naslednje besedilo:

> *Derfor forlader en Mand sin Fader og Moder og holder sig til sin Hustru, og de to bliver eet Kød.*

Samostalnike pišejo z veliko začetnico, tako kot Nemci, ki so se pred kratkim šli reformo svojega pravopisa. Svojo posebnost, znak ß naj po njem ne bi bil več tako pogost. Nekateri nordijci se ponašajo s prečrtanim *o*, ki ga pišejo kot *ø*. Recimo Norvežani:

> *Derfor skal mannen forlate sin far og sin mor og bli hos sin hustru, og de skal være ett kjød.*

Nizozemci se od pamtiveka borijo z morjem. Kljub temu so vedno našli dovolj časa tudi za umetnost in branje svetih knjig. Pravijo, da je njihov jezik podoben nemščini. Sami presodite:

> *Daarom zal de man zijn vader en zijn moeder verlaten, en zijn vrouw aankleven; en zij zullen tot een vlees zijn.*

V strašno učenih knjigah zasledimo podatek, da ima finščina nekaj skupnega z madžarščino. Da sta to ugro-finska jezika. Citat o možu, ženi, enem telesu se po njihovo glasi:

> *Siksi mies jättää isänsä ja äitinsä ja liittyy vaimoonsa, niin että he tulevat yhdeksi lihaksi.*

V deželi španski, kjer naj bi Don Juan imel ljubic tisoč in tri, pa v Latinski Ameriki in še kje, se ne bi bilo prav nič težko naučiti reči:

> *Por eso el hombre deja a su padre y a su madre y se une a su mujer, y son los dos una sola carne.*

Tam na koncu Evrope, pa v Braziliji, nekdanjih portugalskih kolonijah in v ostankih nekdanjega imperija bi nas razumeli, če bi prav prebrali:

> *Portanto deixará o homem a seu pai e a sua mãe, e unir-se-à á sua mulher, e serão uma só carne.*

Skoraj bi pozabili, da so Rusi 12. aprila 1961 poslali prvega človeka v vesolje. Takrat smo v šoli na veliko razpravljali o tem dogodku in fantazirali, kaj vse še lahko pričakujemo v zvezi z osvajanjem vesolja. Seveda ne moremo kar tako mimo Rusov. Kaj bi le rekli velikani njihove književnosti! Res je, da mnogo ljudi odvrne že njihova pisava. Pa sploh ni tako težka, vsaj nekatere ruske črke so enake našim, latiničnim. Kaj bi šele rekli za arabske, hebrejske, kitajske, japonske in druge pismenke! Ali ne zveni lepo:

> Потому оставит человек отца своего и мать свою и прилепится к жене своей; и будут одна плоть.

Ukrajinci, ki pišejo z malo drugačno cirilico kot Rusi, imajo v svojih biblijah napisano:

> Покине тому чоловік свого батька та матір свою, та й пристане до жінки своєї, і станують вони одним тілом.

Kakor da bi poslušali blagovesti svetih solunskih bratov Cirila in Metoda, med slovanskimi narodi spoštovana svetnika. Makedonci so poimenovali po njima skopsko univerzo.

Bolgari, ki so delali tudi v cerkljanski tovarni Eta, bi morali razumeti:

> Затова ще остави човек баща си и майка си и ще се привърже към жена си и те ще бъдат една плът.

Joj! Krivico delamo Grkom, saj imajo že od nekdaj svojo pisavo, ki so jo baje razvili iz starodavne feničanske. Pa še beseda *geneza* je njihova. Celi svet od nekdaj v znanosti uporablja njihove črke. Iz grških črk sta se razvili latinica in cirilica. Ono od moža in žene bi Sokrat, Platon in Aristotel povedali takole (zapisali pa z drugačnimi črkami):

> *Ἕνεκεν τούτου καταλείψει ἄνθρωπος τὸν πατέρα αὐτοῦ καὶ τὴν μητέρα ἀυτοῦ καὶ προσκολληθήσεται πρὸς τὴν γυναῖκα ἀυτοῦ, καὶ ἔσονται οἱ δύο εἰς σάρκα μίαν.*

V vzhodni Afriki ponekod govorijo svahili. V tem jeziku, kot kaže ga pišejo v latinici, se naše biblijsko besedilo zapiše takole:

> *Hivyo mwanamume atawaacha baba yake na mama yake, ataungana na mkewe, nao wawili watakuwa mwili mmoja.*

Kako se to prebere, bi lahko pojasnil kak afriški študent, ali pa kdo od odličnih atletov iz Kenije, če ne prej takrat, ko bo Ljubljana priredila svetovno prvenstvo v atletiki ali pa vsaj miting.

Indonezija je vsekakor zanimiva dežela. Očitno je božja beseda prispela tudi na njene številne otoke. Nekateri prebivalci nedvomno znajo brati in pisati. Pomagali bi nam pravilno prebrati v jeziku bahasa:

> *Sebab itu seorang laki-laki akan meninggalkan ayahnya dan ibunya dan bersatu dengan isterinya, sehingga keduanya menjadi satu daging.*

Upam, da nisem preveč zašel in po nepotrebnem mučil utrujenega bralca. Kako se je naprej odvijala začeta zgodba, ki se je začela nekega jutra v Planini pri Cerknem? Vsekakor, fizikalno gledano, v smeri časovne osi. Čeprav se tu film res vrti naprej, spomini in dogodki pa človeku prihajajo v spomin od vseh strani v drugačnem zaporedju: prvi so lahko zadnji in obratno, zadnji so lahko prvi. Nekako tako kot bi potovali po svetovnem spletu: v nekem trenutku smo lahko na obisku pri jamskem človeku, v naslednjem ponovno odkrivamo Ameriko, nato se sprehodimo po Luni, pa skočimo nazaj v ledeno dobo in tako naprej, in tako nazaj, pa malo sem ter malo tja.

Julija leta 1969, ko sta prva človeka stopila na Luno, smo nekateri opravljali izpit iz Fizike I v Ljubljani. Na srečo se mi je vse lepo izšlo, tako da sem se lahko jeseni vpisal v drugi letnik. Takoj po izpitu sem se podal domov v Planino. Med svoje, na zrak, med drevesa, na senožeti, v gozd po gobe, med gade, modrase, kuščarje in gože. Kaj ni prijeten vonj po travi, po senu, kaj ni lepo pogledati v vetru valujoče zrelo žito? Kaj ni lepo poslušati zjutraj pesem ptic, gledati sončni zahod? Še neurja, strele in grom so na deželi lepši kot v zatohlem mestu.

Žal je bilo te idile kmalu konec, treba je bilo spet na fakulteto, da se opravi še kakšen izpit. Čakala me je Teorija množic, čakal me je profesor Niko Prijatelj. Še sam ni vedel, kaj bi nam dal za pisni izpit, ker je bil predmet nov. Uspelo se mi je takoj uvrstiti na ustni izpit, na katerem je bilo treba imeti precejšen smisel za abstraktno razmišljanje in izražanje. Vse se je dobro končalo. Nikoli pa si nisem mogel niti v sanjah misliti, da bom na stara leta moral o množicah predavati študentom četrtega letnika in se z njimi ukvarjati na pisnih in ustnih izpitih. V letu, ko je bil sprejet Zakon o uravnoteženju javnih financ, je bil predmet dokončan, kajti sledil mu je bolonjski četrti letnik.

Pogovor na izpitu je nanesel tudi na Cantorjev izrek. Georg Cantor (1845–1918) je bil tisti matematik, ki je poskusil definirati množico in kateremu se je na stara leta zmešalo, pa ga seveda niso poslali v Idrijo na Grič, ker to preprosto ni šlo. Niti ne na Studenec, ki je dandanes del Ljubljane, niti ne v Begunje na Gorenjskem. Ostal je kar doma, na Saškem. Čudnega nič, saj ga sodobniki niso niti dobro razumeli. Trdil je, da ima vsaka množica, pa če je še tako bogata z elementi, nad sabo še bogatejšo množico. Nekako tako kot ima pripovedno vsak volk volka nad sabo. Ljudem, s Kummerjem[78] in Weierstraßom[79] na čelu, nikakor ni šlo v glavo, da to velja tudi za neskončno množico, češ kaj pa je lahko še bogatejšega od neskončne množice.

[78]Ernst Kummer (1810–1893) – nemški matematik
[79]Karl Weierstraß (1815–1897) – nemški matematik.

9 Kosinusni izrek

Kosinusni izrek mi je še prav posebno ostal v spominu. Nekega lepega dne je vstopil v učilnico v zadnjem nadstropju idrijske gimnazije naš gimnazijski profesor matematike Jože Karčnik. Vse je bilo v najlepšem redu: reditelji so mu pripravili tisti stol brez naslonjala, po domače *štokerle*, na desni strani table, kamor je imel navado s posebno spoštljivostjo odlagati kredo in geometrijsko orodje: dva trikotnika, ravnilo in šestilo. Oba trikotnika sta bila pravokotna, prvi je imel oba ostra kota po 45°, drugi pa se je odlikoval s kotoma 30° in 60°. Pri načrtovanju smo si lahko pomagali z obema in z ravnilom, kar je zahtevalo ne le teoretično znanje, ampak tudi fizično spretnost. Nato je na tablo načrtal trikotnik, ga označil, potegnil nekaj pomožnih črt in znameniti izrek dokazal, pri čemer je uporabil samo elementarno geometrijo. Razložil nam je, kdaj ga uporabljamo, kakšne so njegove posledice in podobno. Seveda nam ni razlagal, če so ga uporabljali tudi takrat, ko so potegnili rapalsko mejo. Nemara bi jim bolj prav prišel sinusni izrek. Vse pa kaže, da jim je bila trigonometrija takrat deveta skrb in da so obvladali še najbolj igro "zemljo krasti", kakršno smo se šli tudi mi, še kot otroci. Ni treba posebej pojasnjevati, da smo reševali veliko nalog, pri katerih smo s pridom uporabili imenitni kosinusni izrek.

Kot kaže, je kosinusni izrek prvi zapisal Evklid v svojih Elementih, čeprav ni poznal funkcije kosinus v današnji obliki. V drugi knjigi v 12. trditvi je v popolnoma geometrijskem jeziku kosinusni izrek naveden za topokoten trikotnik, v 13. trditvi pa za ostrokoten trikotnik. Perzijec Al-Kashi (1380–1429), v arabščini الكاشي, je kosinusni izrek poznal v današnji obliki, čeprav mu niso tako rekli. Dolgo pa so uporabljali namesto *kosinusni izrek* izraz *Al-Kashijev izrek*.

Prvi v zgodovini se je s trigonometrijo v 2. stoletju pr. n. št. resno ukvarjal Hiparh z Rodosa, kjer je umrl, Ἵππαρχος ὁ Ῥόδιος, ki je bil sicer doma v Nikeji, Νίκαια, danes İznik v Tučiji. To je v starodavni pokrajini, ki se je imenovala Bitinija, Βιθυνία. Izračunal je tablice tetiv t, ki ustrezajo danemu obodnemu kotu α v krogu s polmerom r, to pomeni $t = 2r \sin \alpha$. Velik korak v trigonometriji je naredil Menelaj iz Aleksandrije, Μενέλαιος ὁ Αλεξανδρεύς, v svojem delu Σφαιρική, ki se je ohranilo v arabskem prevodu. Trigonometrija je našla plodna tla v Indiji, kjer so vzeli samo polovično tetivo $s = t/2$, za polmer enoto in dobili današnji sinus: $s = \sin \alpha$.

Polovično tetivo so v sanskrtu imenovali *ardha-jya*, kar se je najprej poenostavilo v *jya*, nato pa v *jiva* ali *jiba*, v sanskrtu अर्धज्या, ज्या, जीवा, जीबा. Arabci so jo prevedli v *jiba*, جب. Ker so nekateri to v arabščini, kjer ni zapisanih samoglasnikov, prebrali *jaiba*, جيب, kar pomeni *žep, zaliv*, po latinsko med drugim tudi *sinus*, se je sčasoma udomačila ta beseda, ki jo poznamo danes tudi v trigonometriji. Sicer ima beseda *sinus* v latinščini veliko pomenov: *krivina, zavoj, oblina, oblok, lok, guba, zaliv, zatok, žep, mošnja, nedrje, prsi, naročje, objem, notranjost, moč, oblast*.

V osnovni šoli smo že pridno brskali po malih Vegovih tablicah. Znali smo rešiti enačbo $x^2 = 3$, ne pa podobne enačbe $2^x = 3$. Smo pa nekje slišali za *logaritme*. Čudnega nič, saj smo v Cerknem imeli dijake vajeniške in elektrogospodarske šole, od katerih smo mimogrede kaj takega slišali. Ubogega učitelja matematike in fizike, Maksa Pagona, smo spraševali, kaj je to, *logaritem*. Skušal nam je razložiti, razumeli pa smo bolj malo, bolje rečeno nič. Šele na gimnaziji smo bili toliko dozoreli, da smo definicijo logaritma doumeli, nekje v drugem letniku, nato pa smo z logaritemskimi tablicami računali, da se je kar kadilo. Nekateri so imeli na koncu že kar primerno zamaščene in razpadle tablice. Proti koncu gimnazije smo znali uporabljati celo logaritemsko računalo, ki nas je potem spremljalo še vsa študentska leta in tudi pozneje. Takrat so se pojavila prva elektronska žepna računala in logaritemskim tablicam je hitro odklenkalo. Logaritem je sestavljena beseda grškega izvora. Prvi del, λόγος, pomeni v grščini *beseda, govor, nauk, razmerje* in še marsikaj drugega, ἀριθμός pa *število*.

V malih Vegovih tablicah, brez katerih ni bilo priporočljivo priti na uro matematike na idrijski gimnaziji, je bil tudi zajeten kup trigonometrije v podobi definicij, formul in izrekov. Naslovčki si bili "Sinusov izrek, Kosinusov izrek in Tangensov izrek". Na osnovni šoli sem ugibal, kdo neki so bili možje Sinus, Kosinus in Tangens, po katerih se imenujejo izreki. Nemara so bili hudi matematiki ranga Gauß, Leibniz, Newton ali Lagrange. Kasneje sem omenjene izreke le spoznal in ugotovil, da se imenujejo po kotnih funkcijah sinus, kosinus in tangens in da bi bilo bolj prav, če bi pisalo "Sinusni izrek, Kosinusni izrek, Tangensni izrek". Podobno je cerkljanski črkoslikar napisal na znano stavbo namesto "Gasilski dom" kar "Gasilni dom", kar je ostalo vse do izgradnje novega. Učitelj Viktor Jereb se je zaradi tega hudo jezil, kadarkoli je šel mimo, najbrž vse do svoje smrti.

Trigonometrija marsikomu nikoli ni šla kaj prida od rok. Še na univerzi je to snov, ki dela preglavice in zanjo velja, da je porok za to, da pisni izpit ali kolokvij ne bo uspel, če jo je le preveč. Ko sem bil še v prvem letniku idrijske gimnazije, je tako naneslo, da sem sedel ves prestrašen pri zobozdravniku v Cerknem. Neki zakonski par je takrat Cerkljanom in okoličanom vrtal in poliral zobe, vanje vstavljal zalivke, jih brusil, obseval, odstranjeval zobni kamen, pa v skrajnem primeru zobe tudi pulil. Pri slednjem početju je pacienta en partner krepko držal za glavo, drugi pa je s kleščami zagrabil zob, določen za pogubo, in ta je šel ven zlepa ali zgrda, kakor je pač naneslo. Da bi mi zobozdravnika malo opogumila, sta me vprašala, v katero srednjo šolo hodim, če sploh v katero. Ponosno sem povedal, da na idrijsko gimnazijo. Takoj sta me vprašala, kdo me ima matematiko. Zadnji stavek, ki sem ga šepetaje izgovoril, preden sta se spravila na moje zobovje, jima je, zopet ponosno, dal vedeti, da me uči profesor Jože Karčnik.

Nato sta eden čez drugega govorila, kaj vse bom še videl in doživel v drugem letniku, če bom do tam sploh prilezel, ko bo na vrsti trigonometrija. Na pamet da bo treba znati okoli 30 zapletenih formul: adicijske izreke, kotne funkcije dvojnih in polovičnih kotov, izražav ene kotne funkcije z drugo in ne vem kaj še. Še sreča, da takrat ni bilo več v učnem načrtu sferne trigonometrije in Mollweidovih formul! Trigonometrija je stara beseda, nastala iz grških τρίγωνον, *trikotnik*, in μέτρον, *mera, merilo.* Pridevnik *sferna* pa pride iz σφαῖρα, kar pomeni *krogla, obla, žoga.*

Nekje v sosednjih prostorih pa je ordiniral zdravnik, soprog profesorice matematike v paralelki na gimnaziji. Nasledil je znamenitega zdravnika Jožeta Pfeiferja, s katerim je naša družina v cerkljanski ambulanti imela največ opravka. Cerkljani so njegov priimek izgovarjali kar *fajfar*, saj je pipo ali fajfo poznal vsak in mu je beseda *fajfar* seveda bolj ležala, kakor da bi se mučil z izgovarjavo nemške soglasniške skupine *pf*.

Zanimivo, da je paralelki kar tri leta šlo bolje kot mojemu razredu. Paralelka je beseda, ki smo jo razvili iz grške παράλληλος, kar pomeni *drug poleg drugega, vzporeden.* Imeli so vsaj dva odličnjaka, naš razred pa je z zadnjimi močmi premogel največ enega. Govorilo se je, da ravno zaradi matematike. Ob neki razglasitvi rezultatov in učnih uspehov na koncu polletja v nekdanji idrijski kinodvorani je ravno profesorja Karčnika doletela ta častna zgodovinska naloga in za vselej so se mi v spomin vtisnile besede, da je naš razred *zadnji in poslednji.* Toda, če je res, kar piše v Bibliji, namreč da bodo poslednji prvi in prvi poslednji, je bilo na izboljšanje le kanček upanja. Res! Naneslo je, in to v četrtem letniku, da je gospa doktorjeva odšla z gimnazije ali pa je hudo zbolela, ne spominjam se več, in naš profesor matematike je zato prevzel tudi paralelko. Nenadoma se je vse zasukalo: matematika paralelki ni šla najbolje in naš razred je kar zablestel in se dvignil iz pepela kot ptič Feniks, grško Φοῖνιξ, tako da smo jim po potrebi nudili dodatne ure matematike, če je bilo potrebno. Za dvig samozavesti tik pred maturo je bil to za naš razred pravi balzam.

S trigonometrijo pa na gimnaziji nisem imel nikakršnih težav, pretvarjal sem izraze na logaritemsko uporabno obliko in obratno, če je bilo potrebno, da je bilo veselje, in pridobljenega znanja tudi nisem zlepa pozabil. Če pa se to vendarle zgodi, pa tudi kaj pri priči na novo izpeljem. Hiperbolično trigonometrijo pa sem usvojil že kar z maturitetno nalogo, ki smo jo pisali v tistih časih. Hiperbolične funkcije se zdijo marsikateremu študentu popolnoma odveč. Tudi Leonhard Euler (1707–1783), ki je z njimi na neki način imel opravka, jih ni formalno vpeljal. To sta neodvisno eden od drugega naredila Vincenzo Riccati (1707–1775) in Johann Lambert (1727–1777). Lepe stvari so se dogajale v matematiki 18. stoletja.

Že na osnovni šoli smo se učili z ravnilom in šestilom konstruirati pravilni petkotnik. Na gimnaziji sem sprva menil, da bom s svojim znanjem geometrije in trigonometrije hitro doumel, zakaj je konstrukcija taka, kot je. Toda obilica učenja mi dolgo ni dala, da bi se v pravilni petkotnik poglobil. V tablicah pa sem videl, da so podane točne vrednosti trigonometričnih funkcij tudi za kote $18^\circ, 36^\circ, 54^\circ$ in 72°, ne pa le za $30^\circ, 45^\circ$ in 60°, kar je moral vsak gimnazijec znati na pamet. V teh vrednostih je bilo več ali manj korenov, na srečo le kvadratnih. O pomenu teh za konstrukcije samo z ravnilom in šestilom se takrat še nisem zavedal, pa tudi nihče me ni na to opozoril

Prva skupina zgoraj navedenih kotov pa se pojavi ravno pri pravilnem petkotniku. Oglejmo si razmere nekoliko pobližje. Stranico pravilnega petkotnika označimo z a, diagonalo pa z d (slika 28). Velja torej:

$$a = |AB| = |BC| = |CD| = |DE| = |EA| = |AM| = |DM|\,,$$
$$d = |AD| = |AC| = |BD|.$$

Iz podobnih trikotnikov MBC in MDA takoj dobimo:

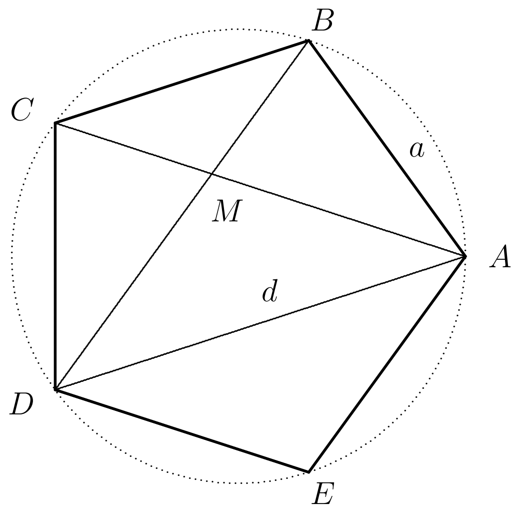
$$\frac{|BC|}{|BM|} = \frac{|AD|}{|AM|} \quad \text{oziroma} \quad \frac{a}{d-a} = \frac{d}{a}.$$

Podobnost trikotnikov smo obravnavali že na osnovni šoli, seveda bolj lahkotno, zaresno, po Evklidovo, pa v prvem letniku gimnazije.

Po preureditvi zgornje enačbe pridemo do preproste kvadratne enačbe za neznanko d/a:

$$\left(\frac{d}{a}\right)^2 - \frac{d}{a} - 1 = 0$$

z rešitvama
$$\frac{d}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau \quad \text{in} \quad \frac{d}{a} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$
Edina smiselna rešitev je prva:



Slika 28: Pravilni petkotnik.

$$d/a = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Druga rešitev je negativna in tu ne pride v poštev. Število τ je poleg Pitagorovega izreka eden od biserov matematike, kot se je izrazil Johannes Kepler v delu *Mysterium cosmographicum*, in se pojavlja še marsikje. Imenujemo ga *zlato razmerje*, ki smo ga v tej knjigi že nekje srečali. Kepler je v latinščini zapisal:

> *Duos nempe esse Geometriae thesauros. Duo Theoremata infinitae vtilitatis, eoque pretiosissima, sed magnum discrimen tamen est inter vtrumque. Nam prius, quod latera rectanguli possint tantum, quantum subtensa recto, hoc inquam recte comparaueris*

> *massae auri: alterum, de sectione proportionali, Gemmam dixeris. Ipsum enim per se quidem pulchrum est, at sine priori valet nihil: ipsum tamen promouet scientiam tunc vlterius, cum prius illud nos aliquatenus prouectos, iam destituit, scilicet ad demonstrationem et inuentionem lateris Decangularis, et cognatarum quantitatum.*

V pravilnem petkotniku je torej diagonala d ravno τ-krat daljša od stranice a, to se pravi $d = \tau a$.

Zlato razmerje nekateri označujejo s črko ϕ, morda celo s φ ali Φ. Nekateri pravijo, da v čast Fibonacciju (1170–1250) ali Leonardu iz Pise, kjer se ponašajo s svojim svetovno znanim poševnim stolpom. Pravijo, da je ime Fibonacci nastalo s spajanjem besed in krčenjem glasov iz Filius Bonacii, lahko tudi Figlio di Bonaccio, torej sin Bonaccia. Podoben priimek, sicer bolj redek, je tudi v Sloveniji: Bonač. Pri mojem nekdanjem profesorju Zvonimirju Bohtetu je diplomiral moj soimenjak, ki se tako piše, pa tekmoval je tudi v srednješolski matematiki. Torej bi lahko rekli, da je bil Fibonacci, Leonardo iz Pise, Bonačev sin. V knjigi *Liber abbaci* je Fibonacci med drugim predstavil *indijski številski sistem*, ki ga po krivici imenujemo *arabski*. Sami Arabci mu nikoli niso rekli indijski, Evropejci pa so, ne prvič, vse skupaj napačno poimenovali in še danes govorimo o *arabskih številkah*. Fibonacci je veliko potoval po Sredozemlju z očetom, ki je trgoval z Arabci, in videl, kako slednji spretno računajo z indijskimi številkami, po Evropi pa so se mučili z rimskimi in drugimi.

Morda je bila v zgodovini priložnost vpeljati indijske številke že v času papeževanja Silvestra II. (999–1003), ki je bil v resnici Francoz Gerbert d'Aurillac (946–1003), matematik in astronom. Gerbert je študiral na neki islamski univerzi na Pirenejskem polotoku, kjer je spoznal indijske številke. Kot papež, pontifex maximus, bi jih lahko preprosto vpeljal s posebno papeško bulo, pa jih ni. Morda niso bili pravi časi in so se indijske številke, pa še prevzete od Mavrov, zdele preveč krivoverske, rimske pa že zato, ker so bile doma v Večnem mestu, pravoverne in zato primerne.

V Cerkvi pač gre vse bolj počasi. Tudi gregorijanski koledar so vpeljali s posebno papeško bulo *Inter gravissimas* čez nekaj sto let, potem ko so bili opazili, da stari julijanski koledar ne kaže več prav. Ko je bila sredi drugega tisočletja v Rimu zunaj že pomlad, je koledar kazal deseti marec.

Če drugega ne, večina naših študentov pozna Fibonaccijev problem razmnoževanja kuncev, lahko tudi zajcev, če so ti komu bolj všeč, in pa Fibonaccijevo številsko zaporedje

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots$$

V njem je razen prvih dveh vsak člen vsota onih dveh, ki stojita tik pred njim, na primer za 34 pride na vrsto $21 + 34 = 55$. Količniki členov tega zaporedja z njihovimi neposrednimi predhodniki pa stremijo v limiti proti zlatemu razmerju. Morda zato nekateri zanj uporabljajo oznako ϕ. Zdi se mi pa bolj verjetno, da to oznako drugi uporabljajo v čast velikemu in slavnemu grškemu kiparju Fidiji, kajti zlato razmerje zasledimo v antični grški umetnosti. Trije so delovali v klasičnem grškem obdobju: Fidija, Miron in Poliklejt. Takole bi jih morali zapisati: Φειδίας, Μύρον, Πολύκλειτος. V helenističnem obdobju, kakor nas je pri umetnostni zgodovini učil profesor Niko Mozetič, pa najdemo drugo pomembno trojico kiparjev. To so Lizip, Skopas in Praksitel, originalno Λύσιππος, Σκόπας, Πραξιτέλης. Znati smo jih morali kot pesmico.

Če pa spregovorimo o grški matematiki, navadno ne moremo mimo Pitagore in njegovega izreka. V grščini Pitagorov izrek zapišemo takole:

Πυθαγόρειον θεώρημα

Ἐν τοῖς ὀρθογωνίοις τριγώνοις τὸ ἀπὸ τῆς τὴν ὀρθὴν γωνίαν ὑποτεινούσης πλευρᾶς τετράγωνον ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ τῶν τὴν ὀρθὴν γωνίαν περιεχουσῶν πλευρῶν τετραγώνοις.

Večino besed v grškem Pitagorovem izreku ni težko razumeti.

Evklidovi Elementi, Στοιχεῖα, ki jih je omenil profesor Karčnik in na katerih je temeljila naša srednješolska geometrija, so vsekakor zanimivi po svojih definicijah, Ὅροι, in postulatih, Αἰτήματα. Bili so prvi primer nekega matematičnega dela v zgodovini, ki je bilo organizirano na tak način. Za boljšo predstavo navedimo samo prvo definicijo in znameniti peti postulat o vzporednicah v Evklidovih Elementih.

αʹ. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.

Točka je tisto, kar nima dela.

εʹ. Καὶ ἐὰν εἰς δύο εὐθείας εὐθεῖα ἐμπίπτουσα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν ἐφ' ἃ μέρη, εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Ni težko ugotoviti, o čem pripoveduje Evklidov peti postulat, če se le še iz šole spomnimo, za kaj pri tem gre.

Arhimed iz Sirakuz je bil eden največjih učenjakov antike. Tudi Maks Pagon je vedel povedati marsikaj o njem. Drugi so si radi prilaščali Sirakužanove zamisli. Zato si je morda nalašč izmislil nalogo, s katero so se matematiki in laiki ubadali vse do današnjih dni. To je znameniti Arhimedov *problem o govedu*, Πρόβλημα βοεικόν, ki se prične s heksametri:

Πληθὺν Ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον
φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης τετραχῇ στίφεα δασσαμένη
χροίην ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,
κυανέῳ δ' ἕτερον χρώματι λαμπόμενον,
ἄλλο γε μὲν ξανθόν, τὸ δὲ ποικίλον.

Profesor Križanič ni bil le matematik, bil je tudi mojster besede. Vedno je iskal za še tako težke strokovne besede lepe slovenske izraze. Lahko bi rekli, da se je igral z jezikom. Nekaterim je bilo to nadvse všeč, vsem pa ne. Marsikoga je naravnost okužil s svojim načinom izražanja, ki se je seveda samo njemu prilegalo, ne pa komurkoli drugemu. Tako je prevedel tudi nekatera starodavna besedila. Arhimedov problem o govedu je že takšno. Poglejmo si odlomek, začetek problema o govedu!

Tujec, prisedi, preštej vse Sončevo lepo govedo.
(Bistrc nabrusi ostro, naloga bo, bogme, zavita.)
Pašnike sočne Trinakra, Sicilije polja preleti,
štiri boš črede našel, po pasmah jih ločil natanko:
Ta se kot mleko beli. Kot morja viharnega vali
temna je v oni živina. Rjavordeča je tretja,
z lisami zadnja pokrita.

(Prevod: F. Križanič)

Arhimed je problem o govedu poslal Eratostenu v Aleksandrijo. Eratostenes, grško Ἐρατοσθένης ὁ Κυρηναίος, je bil doma v Kireni, sedaj Šahat, arabsko شحات v Libiji. Vodil je znamenito aleksandrijsko knjižnico. V osnovni šoli smo ga spoznali po *Eratostenovem rešetu*, s katerim presejemo naravna števila, tako da na mreži ostanejo samo praštevila, to so naravna števila, ki imajo natančno dva delitelja: ena in samo sebe. Število 1 ni praštevilo, ker ima le en delitelj. Morda je Eratosten, vsestranski učenjak starega sveta, še najbolj znan je po merjenju velikosti Zemlje na podlagi razlike kotov, pod katerima padajo sončni žarki ob istem času v dveh precej oddaljenih krajih na istem poldnevniku. Izračunal je razdaljo Lune in Sonca od Zemlje, narisal zemljevid takrat znanega sveta in še marsikaj drugega. Po Eratostenu se imenuje, kakor se za takega astronoma spodobi, tudi eden od kraterjev na Luni.

Arhimed je kot Grk dobro poznal tudi Homerja in njegova epa, Iliado in Odisejo. V Odiseji se večkrat omenja Trinakija in Helijevo govedo, ki ga Odisejevi možje ne bi smeli pobijati kljub lakoti, pa so vseeno ga, za kar so bili kaznovani in razen Odiseja nikoli več niso videli svoje domovine.

Poglejmo še, kaj Homer piše v dvanajsti knjigi Odiseje od 127. do 130. verza, kjer se omenja beseda Θρινακία:

Θρινακίην δ' ἐς νῆσον ἀφίξεαι: ἔνθα δὲ πολλαὶ
βόσκοντ' Ἠελίοιο βόες καὶ ἴφια μῆλα,
ἑπτὰ βοῶν ἀγέλαι, τόσα δ' οἰῶν πώεα καλά,
πεντήκοστα δ' ἕκαστα.

Mojstrski prevod Homerjevih del in seveda tudi teh verzov imamo v slovenščini. Odiseja v našem jeziku obstaja tudi v nevezani besedi in je prav prijetno branje, pa tudi v verzih ni posebno težka. Zaradi ritma je besedni vrstni red tu in tam drugačen, kot smo ga vajeni. Srečamo pa v besedilu veliko besed, ki se dandanes bolj redko uporabljajo ali pa so že pozabljene in jih, če imamo srečo, najdemo samo še v kakšnem starejšem slovarju, na primer besedo *mrkáč*, kar pomeni *plemenski oven*, pa tudi *neumen, pohoten moški*. Poglejmo, prevod pravkar omenjenega grškega besedila:

Dalje dospeš na Trinakijo otok. Le-ondi se pase
Heliu sila goved in sila rejene ovčadi,
sedem govejih krdel, prav toliko drόbnice lepe,
vsako po petdeset glav.

(Prevod: A. Sovrè)

Veliko črnila je bilo prelitega v zvezi z besedo *Trinakija*, ki je sčasoma prešla v *Trinakrija*, grško Τρινακρία. Homer ima v Odiseji besedo Θρινακία. Nekateri menijo, da gre za obliko otoka, ki ima tri rte, tri bradavice. Števnik *tri* je po grško τρεῖς, τρία. Nekateri menijo, da Trinakija ni Sicilija, ampak neki drugi otok, lahko pa da je samo izmišljen.

Arhimedov problem o govedu nas pripelje do tako imenovane *Pellove enačbe*

$$x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1,$$

za katero nas zanimajo rešitve v naravnih številih. Postopek reševanja Pellove enačbe je opisan v mnogih delih, ki pa po zahtevnosti presegajo namen tega pisanja. Povejmo, da je treba pri reševanji število $\sqrt{4\,729\,494}$ razviti v verižni ulomek. Najmanjša, fundamentalna, rešitev zgornje Pellove enačbe je

$$x_1 = 109931986732829734979866232821433543901088049,$$

$$y_1 = 50549485234315033074477819735540408986340.$$

Rešitev pa je nešteto in poiskati je treba tisto, ki zadošča vsem pogojem, ki jih razberemo iz besedila problema. Povejmo le še to, da je najmanjša rešitev problema o govedu ogromna in da Sicilija še zdaleč ne bi bila dovolj velika za toliko glav živine.

V resnici je govorjenje o Pellovi enačbi napačno, kajti zmotil se je sam Leonhard Euler, ki jo je imenoval po napačnem možu. Bolj prav bi bilo, da bi jo imenoval po Fermatu. Sicer je Pellova enačba poseben primer diofantske enačbe. Tovrstne enačbe utegnejo biti kar trd oreh tudi za tiste velike matematike, ki ne delajo nič drugega kot matematiko.

Trije znameniti problemi antike, ki so tudi dali vetra matematikom in jih navadno obravnavamo ali pa vsaj omenjamo v šoli, so:

α′. Διπλασιασμὸς τοῦ κύβου — podvojitev kocke ali

Δήλιον πρόβλημα — deloški problem

β′. Τριχοτόμηση τῆς γωνίας — raztretjinjenje kota

γ′. Τετραγωνισμὸς τοῦ κύκλου — kvadratura kroga

Prvi problem se ukvarja s tem, kako samo *s šestilom in neoznačenim ravnilom* konstruirati rob kocke, ki ima dvakrat večjo prostornino kot dana kocka. Drugi problem zahteva, da z istim orodjem razdelimo poljuben kot na tri enake dele, tretji pa, da pretvorimo krog v ploščinsko enak kvadrat. Dolga leta so se matematiki ukvarjali s temi problemi in nazadnje dokazali, da so nerešljivi. Prvi problem je nerešljiv, ker je $\sqrt[3]{2}$ iracionalno število, toda ne prave sorte. Drugi problem pripelje do kubične enačbe, ki se je ne da rešiti samo s kvadratnimi koreni. Tretji problem pa je nerešljiv, ker je število π transcendentno, kar se sliši zelo učeno. Ponovimo! Število, realno ali kompleksno, je namreč algebrsko, če je ničla kakšnega polinoma s celoštevilskimi koeficienti. Če število ni algebrsko, je transcendentno.

Deloški problem je po legendi dobil ime po otoku Delos, grško Δῆλος, v Egejskem morju. Na Delosu je mesto istega imena, ki je bilo posvečeno bogu Apolonu in boginji Artemidi (Ἀπόλλων, Ἄρτεμις). Ko je izbruhnila na otoku kuga, so Delošani prosili slavno Apolonovo preročišče v Delfih (Δελφοί) za pomoč. Dobili so nasvet, da morajo bogu Apolonu podvojiti podstavek, ki je imel obliko kocke. Podvojili so robove kocke, a jih je kuga le še huje udarila. Podvojiti bi namreč morali prostornino kocke, česar pa niso znali narediti samo z ravnilom in šestilom, kar se je takrat edinole smelo uporabljati v geometriji. Ne le da niso znali, enostavno se tako ne da.

Na idrijski gimnaziji smo se o starih Grkih razmeroma veliko učili. Še vedno se spominjam, kako nam je profesor zgodovine, Starinar naj bi se pisal, ali pa so mu zaradi stroke samo tako rekli, razlagal grško-perzijske vojne, bitko pri Maratonu, Termopilah, Salamini in drugih krajih. Za človeško okostje, ki smo ga uporabljali pri pouku biologije, so nam tudi pravili, da je od nekega hišnika. Kasneje sem slišal, da so tudi druge šole imele podobne zgodbe. Zakaj potemtakem zgodovinar ne bi bil Starinar. Pa še naš Statistični urad tega priimka ne pozna, ali pa ga ima manj kot pet oseb.

Napisov v stari grščini in njihovih narečjih je zelo veliko. Omenimo še enkrat slavni epitaf v Termopilah, kjer so se leta 480 pr. n. št. borili Špartanci pod vodstvom Leonide proti mogočni perzijski vojski in nazadnje, zaradi podle izdaje, padli do zadnjega moža. Besedilo je napisal lirski pesnik Simonides, Σιμωνίδης ὁ Κεῖος, ki mu pripada tudi odkritje mnemonikov. Na plošči v Termopilah piše z velikimi, starinskimi grškimi črkami:

Ω ΞΕΙΝ' ΑΓΓΕΛΛΕΙΝ
ΛΑΚΕΔΑΙΜΟΝΙΟΙΣ ΟΤΙ ΤῌΔΕ
ΚΕΙΜΕΘΑ ΤΟΙΣ ΚΕΙΝΩΝ
ΡΗΜΑΣΙ ΠΕΙΘΟΜΕΝΟΙ

Nekaj stoletij kasneje so bili prvi kristjani, o katerih smo se tudi učili, hudo preganjani in so delovali v popolni ilegali. Njihov skrivni simbol je bila *riba*, po grško ΙΧΘΥΣ. Besedo sestavljajo prve črke besed

ΙΗΣΟΥΣ ΧΡΙΣΤΟΣ ΘΕΟΥ ΥΙΟΣ ΣΩΤΗΡ,

kar pomeni Jezus Kristus Božji Sin Odrešenik. Z vsemi akcenti in pridihi bi zapisali:

Ἰχθύς — Ἰησοῦς Χριστός Θεοῦ Υἱός Σωτήρ.

Besedi ἰχθύς in σαῦρος, *kuščar*, sta nam dali besedo *ihtiozaver*, ki pomeni veliko izumrlo morsko žival, podobno ribi, ki je živela v srednjem geološkem veku ali mezozoiku. S kakšno ihto ali togoto ta žival ni imela nikakršne povezave. Iz besed δεινός, *strašen, ogromen mogočen*, in σαῦρος smo dobili besedo *dinozaver*. Dinozavri so na Zemlji v geološkem obdobju mezozoik vladali več kot 100 milijonov let. Ti so na gimnaziji prišli na vrsto pri biologiji in geologiji. Mezozoik ali srednji zemeljski vek je sestavljena beseda. Po grško pomeni μέσος *srednji*, ζωή *življenje*, ζῷον pa *žival*. Na gimnaziji smo se učili tudi, da se mezozoik deli na obdobja, ki se imenujejo trias, jura in kreda. Zanimivo je brskati po knjigah, da izvemo, od kod ta imena. Jura je dobila ime po pogorju Jura v Švici.

Na Cerkljanskem obstaja na Kojci tako imenovani Divji rob, ki je v bistvu koralni greben iz triasa, menda največji v Sloveniji. Na Kojci je tudi Hudičev rob, ki je ob lepem vremenu viden z Očančevega grunta. Hudičev rob je zaslovel po pripovedki, ki glorificira žensko prebrisanost. Neka gospa je nekoč obljubila svojo dušo samemu zlodeju, če ji bo zvesto služil leto dni in opravljal vsakršno delo. Ko se je leto iztekalo, mu je naročila, da mora do poldneva na vrh Kojce prinesti težko skalo, ki je ležala blizu hiše. Vrag se je dela seveda lotil, toda že ob enajstih je ženska v bližnjem zvoniku začela zvoniti k poldnevu. Satan se je tako razjezil, ko je spoznal, da svoje naloge ne bo mogel uspešno dokončati in da bo ob žensko dušo, da je skalo v največjem besu in togoti vrgel ob tla, tako da je na mestu udara nastalo globoko brezno, v katerega je še sam skočil. Zato je tam, nad Orehkom, sedaj Hudičev rob.

Kot kaže, ima zahodni del Cerkljanske, kraji okoli Bukovega, Šebrelj, Polic in Reke precej bogato ljudsko izročilo. Če temu dodamo še neandertalce v Divjih Babah, kjer so našli znamenito neandertalčevo koščeno piščal, potem na Cerkljanskem že od nekdaj ni bilo človeku dolgčas. Prelepi zahodni in jugozahodni cerkljanski kraji so se mi že od nekdaj zdeli nekam mistični, skoraj dantejevski.

Pred mezozoikom je bil paleozoik ali stari zemeljski vek, pred tem pa arhaik. Arhaik seveda izhaja iz grške besede ἀρχή, kar je med več pomeni tudi *začetek, rojstvo*. Takrat se je pojavilo na Zemlji življenje. Geologi delijo arhaik še naprej na podobdobja. Paleozoik pa je sestavljenka iz besede παλαιός, kar pomeni *star, starodaven, nekdanji*, in prej omenjene besede ζωή.

V paleozoiku je bilo na Zemlji že kar živahno. To obdobje smo na gimnaziji delili na kambrij, silur, devon, karbon in perm. Profesorica Draga Urbasova je vedela za lep mnemonik, kako se to delitev zapomniti. Vedeti je bilo treba za stavek "Kam si del kape?" Deli besed tega stavka, *ka, si, de, ka, pe* so začetki imen, s katerimi izražamo dele paleozoika. Večkrat se je oglasil sošolec iz Godoviča, tisti, ki je pri profesorju Karčniku pravilno rešil neko nalogo v zvezi s piramido, jaz pa ne. Profesorico je vprašal, kam pa spada ordovicij? Ta beseda se nam je zdela neznana, sošolec pa jo je nekje prebral, morda pri bratu, ki je tudi hodil na isto gimnazijo, toda eno leto pred njim. V resnici se paleozoik po modernejši varianti deli na kambrij, ordovicij, silur, devon, karbon in perm. Vsa ta obdobja so trajala po več milijonov let in jih v znanosti delijo še naprej na manjša časovna obdobja, v resnici pa so nepredstavljivo dolga v primerjavi z dolžino človeškega življenja.

Kambrij je dobil ime po latinski besedi *Cambria* za polotok Wales. Ordovicij je bil poimenovan po keltskem plemenu Ordovici ali Ordoviki, ki je živelo v Walesu. Silur je tudi dobil ime po keltskem plemenu iz Walesa, po Silurih. Preden je silur dobil današnje ime, se je imenoval gotlandij po največjem otoku Gotland v Baltskem morju. Pri besedi *silur* se človek, ki je preveč poslušal kantavtorja Iztoka Mlakarja, ki ima korenine na Cerkljanskem, nehote spomni na Pepija Žbaradorja, ki "se je napil ko šilur". Beseda *šilur* ima izvor v latinski besedi *silurus*, kar pomeni *som*, ki je sladkovodna riba spoštovanja vredne velikosti. Italijani ji pravijo *siluro* in, ker radi rečejo *šiluro*, smo v narečju od njih dobili *šilurja*. Devon je dobil ime po britanski grofiji Devon, karbon po premogu, latinsko *carbo*. Zadnji, perm, pa je dobil ime po ruski guberniji Perm, rusko Пермь.

Beseda za zemeljski novi vek, kenozoik, je na prvi pogled sestavljena. Grška beseda καινός namreč pomeni *nov, na novo opran, nerabljen*. Beseda ζωή pa nam je že znana. Kenozoik se je pričel pred davnimi 65 milijoni let in so ga tako ali drugače vedno delili na manjša obdobja. Nekateri ga delijo na paleogen, neogen in kvartar. Mi smo ga v šoli samo na dva dela, na terciar in kvartar. V slednjem sedaj živimo. Če kdo ne verjame, naj gre malo v hribe in opazuje veličastne kamnite sloje.

Besede na *-gen* so grškega izvora. Beseda γένος pomeni v abstraktnem smislu *rojstvo, rod, sorodstvo*, v konkretnem pa vse, kar se je rodilo ali nastalo. Končnica -γενής potem označuje tako ali drugače rojenega, na primer: μοιρηγενής je *za srečo rojen*, γηγενής, *sin zemlje, domačin*. Beseda *kvartar* je nastala in se ohranila zahvaljujoč nekemu italijanskemu geologu, ki je delal na štirih plasteh nekih usedlin in je četrta plast sovpadala z našim kvartarjem. Torej beseda *kvartar* izhaja na neki način iz latinskega vrstilnega števnika *quartus, četrti*.

Kvartar se deli na pleistocen in holocen. Neandertalci naj bi se pojavili nekje v pleistocenu, pred kakšnimi 200 000 leti. Končnica *-cen* je grška, namreč καινός, *nov*, se je začel sčasoma izgovarjati kot *kenos, kenus*, mehčanje pa je dalo *cenus*, skrajšano *cen*. Prvi del besede pleistocen pride iz grščine. Pridevnik πλεῖστος, *premnog, največji, najobilnejši*, je presežnik pridevnika πολύς, kar pomeni *mnog, velik, obilen*. Beseda *polinom* v matematiki je tudi osnovana na slednji. Pleistocen predstavlja največji del kvartara. Beseda *holocen* pa je nastala iz besede ὅλος, ki pomeni *celoten, cel, ves, popoln, nerazdeljen*. Popolnoma novi vek, najnovejši vek je torej holocen. Zloglasna beseda *holokavst* ima deloma isti izvor kot beseda *holocen*.

Novi testament, prvotno napisan v grščini, se konča z *Razodetjem*, po grško Ἀποκάλυψις Ἰωάννου. Sveti Janez Evangelist ga je napisal, ko je bil v pregnanstvu na otoku Patmos (Πάτμος) v Egejskem morju (Αἰγαῖον).

Janezov evangelij se začne z besedami:

Ἐν ἀρχῇ ἦν ὁ Λόγος, καὶ ὁ Λόγος ἦν πρὸς τὸν Θεόν, καὶ Θεὸς ἦν ὁ Λόγος.

V začetku je bila Beseda in Beseda je bila pri Bogu in Bog je bila Beseda.

Morda je še komu všeč stavek, aktualen za naše izobraževanje oziroma za izobraževanje v kateremkoli obdobju, izrečen pa je bil na podelitvi nagrad Republike Slovenije na področju šolstva leta 2011:

V začetku je bila beseda in beseda je bila pri učitelju in učitelj je bila beseda.

Pri nekaterih gimnazijskih predmetih je bilo res tako. Zanimiv pa je tudi del stavka v prvem poglavju Razodetja:

Ἐγώ εἰμι τὸ Α καὶ τὸ Ω,

kar pomeni *Jaz sem alfa in omega*.

Pogosto v vsakdanjem življenju nevede uporabljamo te besede, ko hočemo povedati, da je nekdo strahovito pomemben oziroma da je to in to nujno potrebno.

Veliko ljudi, ki kaj dajo na številke, pa zagotovo pozna iz Razodetja znameniti stavek o številu zveri: 666. To je tudi število človeka. Učenim glavam je to dalo misliti in kar nekaj časa so potratili, da bi s preračunavanjem našli njegovo ime, ki naj bi bilo zavozlano v številu 666. Razodetje pravi:

Ὧδε ἡ σοφία ἐστίν· ὁ ἔχων νοῦν ψηφισάτω τὸν ἀριθμὸν τοῦ θερίου, ἀριθμός γὰρ ἀνθρώπου ἐστίν· καὶ ὁ ἀριθμός αὐτοῦ ἑξακόσιοι ἑξήκοντα ἕξ.

Besedo pa le razumemo: σοφία pomeni *modrost*. Beseda ἀριθμός nam tudi ne bi smela biti tuja. Pomeni namreč *število*. Iz nje smo dobili besedo *aritmetika*. Pa še beseda ἄνθρωπος je nekam znana. Pomeni pa toliko kot *človek*. Iz nje so se razvile znanstvene besede *antropologija, antropološki, antropoid, antropometrija, antroponim* in druge.

Število 666 imenujejo tudi *hudičevo število*. Zanimivo je, ker ga lahko zapišemo kot vsoto osnovnih rimskih številk I, V, X, L, C in D:

$$\mathrm{DCLXVI} = \mathrm{I} + \mathrm{V} + \mathrm{X} + \mathrm{L} + \mathrm{C} + \mathrm{D}.$$

Grki so število 666 zapisali po svoje: χξϛ′ (hi, ksi, stigma).

Hudičevo število 666 pa je tudi *trikotniško*. Trikotniško število dobimo kot število enakih krožcev, ki jih zlagamo v trikotnik. Za osnovnico jih postavimo n, nato nanje $n-1$, na te spet $n-2$ in tako naprej, dokler gre. Na vrhu je samo eden. Število vseh krožcev, zloženih na tak način v trikotnik, je n-to trikotniško število T_n. Torej je

$$T_n = n + (n-1) + \ldots + 2 + 1.$$

Ker pa je tudi

$$T_n = 1 + 2 + \ldots + (n-1) + n,$$

dobimo, če obe enakosti seštejemo:

$$2T_n = (n+1) + (n+1) + \ldots + (n+1).$$

V novi vsoti je n enakih sumandov $n+1$, zato je

$$2T_n = n(n+1).$$

Zato je n-to trikotniško število T_n dano s formulo:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Za trikotniška števila velja preprosta rekurzivna zveza:

$$T_{n+1} = T_n + (n+1).$$

Vsota dveh zaporednih trikotniških števil pa je kvadratno število:

$$T_n + T_{n+1} = (n+1)^2.$$

S tem smo mimogrede našli formulo, kako sešteti prvih n zaporednih naravnih števil. Tako je Gauß, ko je bil še majhen šolarček, seštel vsa naravna števila od 1 do 100. Takoj, ko je učitelj dal nalogo, da bi nekaj časa imel pred učenci mir, je Gauß povedal rezultat: 5050. Nato mu je moral razložiti, kako je to tako hitro izračunal. Povedal je tako, kot mi malo prej. Učitelj je takoj spoznal, da iz fanta še nekaj bo. Pagon nam je to zgodbo pripovedoval že v šestem razredu osnovne šole, Karčnik pa tudi, v četrtem letniku gimnazije, ko smo obravnavali aritmetična zaporedja.

Če nastavimo enačbo

$$\frac{n(n+1)}{2} = 666,$$

hitro dobimo rešitev $n = 36$. Torej je 666 ravno 36. trikotniško število. Enako je vsoti prvih 36 naravnih števil, pa tudi, presenetljivo, vsoti kvadratov prvih sedmih praštevil:

$$666 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2 + 11^2 + 13^2 + 17^2.$$

Število 36 pa je 8. trikotniško in 6. kvadratno: $36 = 8 \cdot 9/2 = 6^2$. Torej je 666 celo *dvojno trikotniško število*: $666 = T_{T_8}$. Osmo po vrsti. Pa še eno presenečenje: dvakratni sinus kota $-666°$ je ravno *razmerje zlatega reza*:

$$2\sin(-666°) = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \tau.$$

Iz Janezovega Razodetja pa so znani tudi *štirje jezdeci apokalipse*, ki simbolizirajo *vojno, kugo, lakoto in smrt*. Pogosto jih omenjajo v zvezi z raznimi zastrašujočimi poročili. Konji teh jezdecev so: ἵππος λευκός, ἵππος πυρρός, ἵππος μέλας in ἵππος χλωρός.

V krvi imamo *levkocite* ali *bele krvničke*. V šoli smo se o njih učili, tako v osnovni kot na gimnaziji. Vse življenje jih nosimo s seboj in zdravniki nam jih vsake toliko časa pregledajo. Beseda je skovana iz grške: λευκός, *bel*, in κύτος, *votlina, duplina, trebuh, posoda, vrč, žara, pepelnik*. Halogeni element *klor*, ki je z natrijem vezan v kuhinjski soli, je dobil ime po *rumeno-zeleni barvi*, grško χλωρός. Pomeni pa tudi *bled, rumenkast, svež, svetel*. Beseda *melanholija* ima izvor v grških besedah μέλας, *črn*, in χολή, *žolč*. Beseda πυρρός pomeni *rdeč, ognjene barve, rjav, žareč*. Podobna beseda je πῦρ, kar pomeni *ogenj*. Omenimo še enkrat rdečelasega epirskega *kralja Pira*, grško Πύρρος, ki se je pošteno lotil Rimljanov celo z bojnimi sloni, tako kot kasneje Kartažan Hanibal. S sloni ni bilo šale, toda Rimljani so prej ali slej našli način, kako se boriti s tako trdnjavo na štirih nogah. Tako kot so dve tisočletji kasneje odkrili, kako se da boriti proti tankom.

Ko pokličemo osebo, ki ji je ime *Filip*, pravzaprav uporabimo dve grški besedil. Filip je zelo staro ime: Φίλιππος. Spomnimo se samo na makedonske kralje iz antike. Tudi profesor Starinar nam je pripovedoval o njih in dijaki smo morali nekaj vedeti o njih. V francoščini bi namesto Filip pisali *Philippe*. Vidimo, da ime tudi v latinici dokaj verno sledi grščini. Ime Φίλιππος je nastala z združitvijo dveh besed: φιλέω, kar pomeni *ljubim, rad imam*, in ἵππος, kar pomeni *konj*. Filip torej pomeni tistega, ki ima rad konje. Tudi beseda *hipodrom*, grško ἱππόδρομος, ima konja v sebi: δρόμος pomeni *tek, tekanje, tekma, dirka, tekališče, dirkališče*. Na hipodromu pač tekmujejo konji in njihovi jezdeci, lahko pa tudi konji, vpreženi v dirkalne vozove.

Ime Filip mi je bilo že od nekdaj znano, saj se je tako imenoval eden od mojih stricev po očetovi strani. Otrok ni imel, čeprav je bil poročen. Ko je služil v italijanski vojski, je pok granate v njegovi bližini bil kriv, da je precej oglušel, tako da mu je bilo treba marsikaj dvakrat ali trikrat glasneje povedati. Bil pa je pravi mojster raznih del.

Ko so v Cerknem ljudje malo več zaslužili ali laže prišli do posojila, to je bilo okoli leta 1960, so začeli zidati nove hiše in predelovati ali obnavljati stare, v katerih so na veliko menjavali lesene strope z betonskimi in *monta* ploščami. Takrat še ni bilo možno beton naročiti v betonarni kot danes, ko ti ga pripeljejo s kamionom v *hruški*. Kdor je zidal lastno stanovanje, je najel nekaj krepkih mož, ki so ročno mešali beton za plošče in ga v samokolnicah vozili na gradbišče. Pogosto je prav prišel tudi škripec. Če jih je naročnik dobro stregel s pijačo in jedačo, je delo kar hitro napredovalo. Malo kasneje so se pojavili mali mešalci za beton ter dvigala na električni pogon in delo je poteklo veliko lažje. Tako so ljudje drug drugemu pomagali in nihče jih ni preganjal, razen če se je kdo komu na občini kaj zameril. Tiste čase je moj stric Filip, po domače Vrtala, bil zelo iskan za izdelavo lesenih opažev pred betoniranjem plošč, stopnic, podbojev in drugega.

Pa ne pozabimo, če smo že omenili Razodetje, na 144 tisoč zaznamovanih,

ἑκατὸν τεσσαράκοντα τέσσαρες χιλιάδες ἐσφραγισμένοι,

in sicer iz vsakega rodu Izraelovega po dvanajst tisoč, δώδεκα χιλιάδες.

Na Diofantovem nagrobniku, Ἐπιτάφιον Διοφάντου, ki ga pogosto omenjamo po učbenikih, tam kjer so enačbe z eno neznanko, je pisalo:

Οὗτός τοι Διόφαντον ἔχει τάφος· ἃ μέγα θαῦμα.
Καὶ τάφος ἐκ τέχνης μέτρα βίοιο λέγει.
Ἕκτην κουρίζειν βιότου θεὸς ὤπασε μοίρην·
δωδεκάτην δ᾽ ἐπιθείς, μῆλα πόρεν χνοάειν·
τῇ δ᾽ ἄρ᾽ ἐφ᾽ ἑβδομάτῃ τὸ γαμήλιον ἥψατο φέγγος,
ἐκ δὲ γάμων πέμπτῳ παῖδ᾽ ἐπένευσεν ἔτει.
Αἰαῖ, τηλύγετον δειλὸν τέκος ἥμισυ πατρὸς
τοῦδε καὶ ἡ κρυερὸς μέτρον ἑλὼν βιότου.
Πένθος δ᾽ αὖ πισύρεσσι παρηγορέων ἐνιαυτοῖς
τῇδε πόσου σοφίῃ τέρμ᾽ ἐπέρησε βίου.

V prevodu profesorja Križaniča to pomeni:

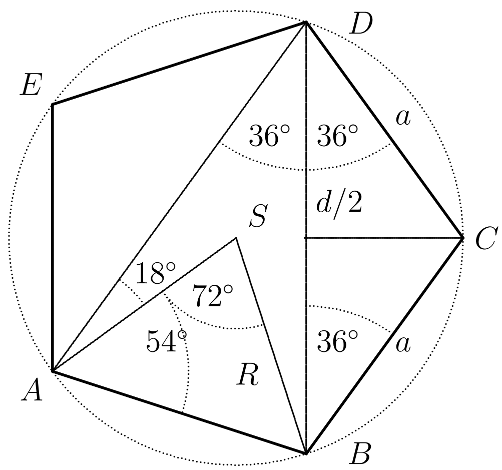
Modrec ob grobu postoj, počasti pepel Diofanta,
leta njegova preštej, odmerjena z voljo bogov.
Šesti del sojenih let ozarja mu sreča otroštva,

še pol šestine mini, ko lica poraste mu puh.
Let še sedmino nato izbere si vdano družico.
Pet let že druži ju vez, ko se rodi jima sin.
Le pol očetovih dni je ljubljencu dano živeti,
radost očetova vsa v prerani utrne se grob.
Dvakrat dve leti bridko pretoži nad težko izgubo,
potlej utrujen še sam za vselej zatisne oči.

Ali spoznamo v zgornjem grškem besedilu števila oziroma števnike? Beseda ἕκτην je tožilnik besede ἕκτη, kar pomeni *šesta*, pa tudi *šestina*. Analogno rešitev imajo tudi Angleži: sixth je šesti, the sixth pa šestina. Števnik ἑκτός, *šesti*, se uporablja in sklanja kot pridevnik. Podobno je δωδεκάτην tožilnik besede δωδέκατη, kar pomeni *dvanajsta*, pa tudi *dvanajstina*. Števnik δωδέκατος, *dvanajsti*, se uporablja in sklanja kot pridevnik. Beseda ἑβδομάτῃ je dajalnik besede ἑβδόματη, *sedma*, pa tudi *sedmina*. Števnik ἑβδόματος, *sedmi*, se tudi uporablja in sklanja kot pridevnik. Beseda ἥμισυ pomeni v jonskem narečju *polovica*, isto kot ἥμισυς v klasični grščini. Imamo celo vrsto znanstvenih izrazov, ki so nastali iz besede ἥμισυς, na primer *hemisfera, hemistih, hemimorfit*. Beseda πισύρεσσι izvira iz besede πίσυρες, kar pomeni *štiri* v ajolskem narečju. Svoj čas so pisali *eolski* namesto *ajolski*. Pridevnik *ajolski* izhaja iz grške besede Αἴολος, ki je bil legendarni prednik Ajolcev. Zadnje čase pač poskušamo ostati čim bliže originalnim grškim imenom. Nekatera grška imena so se namreč pri slovenjenju popačila skoraj do nerazpoznavnosti.

Nekoliko nas je zaneslo na stranpota. Začeli smo s pravilnim petkotnikom, ki so ga Pitagora in njegovi učenci, pitagorejci, seveda dobro poznali. V njem smo z nekaj truda odkrili zlato razmerje τ.

A glej ga zlomka! Odpremo neko knjigo o uporabi kompleksnih števil v geometriji in najdemo v njej Ptolemajev izrek, star skoraj 2000 let, ki pove, da je v konveksnem tetivnem štirikotniku vsota produktov nasprotnih stranic enaka produktu diagonal. Če to lastnost uporabimo na trapezu $ABCD$,



Slika 29: Koti v pravilnem petkotniku.

ki očitno je konveksni tetivni štirikotnik, takoj dobimo kvadratno enačbo $a^2 + ad = d^2$, ki ima seveda isto rešitev, to se pravi $d = \tau a$. Rezultat omogoča natančen zapis

$$\cos 36^\circ = \sin 54^\circ = \frac{d/2}{a} = \frac{\tau}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}\,,$$

kar je lepo razvidno na sliki 29, na kateri je upodobljen pravilni pretkotnik s pomožnimi daljicami. Takoj tudi vidimo, da sta stranica a in radij R očrtanega kroga v preprosti zvezi $a = 2R\sin 36^\circ$, iz katere dobimo:

$$a = 2R\sqrt{1-\tau^2/4} = R\sqrt{4-\tau^2} = R\sqrt{3-\tau} = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}.$$

Iz tega rezultata izvedemo šolsko konstrukcijo pravilnega petkotnika, včrtanega danemu krogu, samo z ravnilom in šestilom. Posebej pa smo vedno poudarili, da hkrati s pravilnim petkotnikom obvladamo tudi pravilni desetkotnik. Če je slednji včrtan krogu radija R, potem je seveda njegova stranica $b = 2R\sin 18^\circ$.

Z dobro znanima enakostma

$$2\sin^2\alpha = 1-\cos(2\alpha)\,,\ 2\cos^2\alpha = 1+\cos(2\alpha)$$

dobimo:

$$\sin 18^\circ = \sqrt{\frac{2-\tau}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}-1)\,,\ \cos 18^\circ = \sqrt{\frac{2+\tau}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

in

$$\sin 15^\circ = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})\,,\ \cos 15^\circ = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

S temi rezultati lahko postopoma izrazimo trigonometrične funkcije vseh celih mnogokratnikov kota treh kotnih stopinj z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in kvadratnim korenom.

Stranica b pravilnega desetkotnika pa se da zapisati z izrazom:

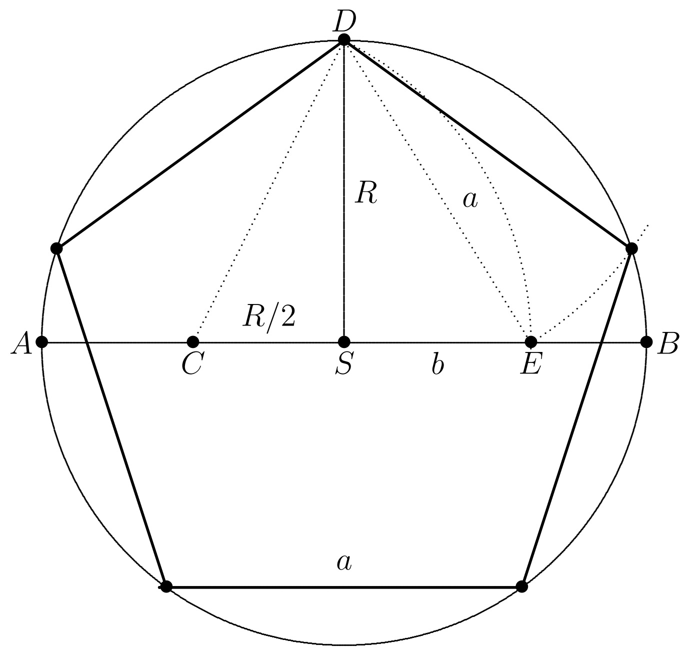
$$b = \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1) = R(\tau-1).$$

Konstrukcija pravilnega petkotnika in desetkotnika (sliki 30, 31) poteka običajno takole. Načrtamo krog radija R s središčem v točki S, v njem pa premer med točkama A in B. V S načrtamo še polmer med točkama D in S, pravokotno na premer med A in B. Polmer med A in S s točko C razpolovimo, nakar konstruiramo točko E, ki je enako oddaljena od C kot je D od C. Potem je $a = |DE|$ stranica krogu včrtanega pravilnega petkotnika, $b = |SE|$ pa stranica pravilnega desetkotnika. To lahko hitro preverimo s Pitagorovim izrekom:

$$|CD|^2 = R^2 + (R/2)^2 = 5R^2/4\,,\quad |CD| = R\sqrt{5}/2\,,$$

$$|SE| = |CE| - |SE| = |CD| - |SE| = R\sqrt{5}/2 - R/2 = R(\sqrt{5}-1)/2 = b\,,$$

$$|DE|^2 = R^2 + b^2 = R^2(10-2\sqrt{5})/4 = a^2\,,\quad |DE| = a.$$



Slika 30: Konstrukcija pravilnega petkotnika.

S tem je konstrukcija obeh lepih likov, pravilnega petkotnika in desetkotnika, v celoti utemeljena. In kaj bomo imeli od tega? Marsikdo popolnoma nič, nekateri pa to že vse vejo, in to od mladih nog. Morda bo pa za vsaj nekoga stvar zanimiva. Temu je bilo vse to namenjeno.

Sedaj se lahko lotimo kota 3°. To je najmanjši kot, izražen v kotnih stopinjah, za katerega znamo kotne funkcije izraziti eksaktno: z osnovnimi štirimi računskimi operacijami in kvadratnim korenom. Ker je

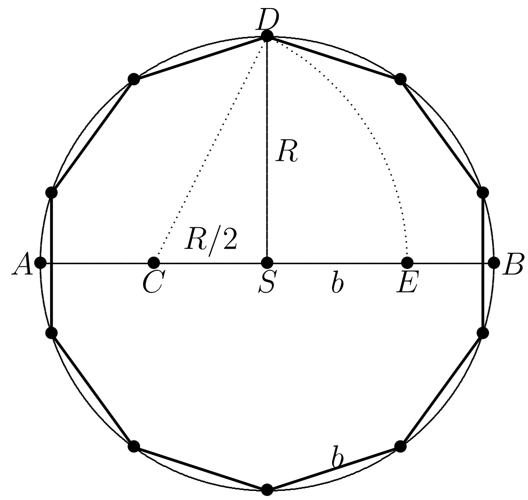
$$3^\circ = 18^\circ - 15^\circ\,,$$

imamo po adicijskem izreku:

$$\sin 3^\circ = \sin 18^\circ \cos 15^\circ - \cos 18^\circ \sin 15^\circ.$$

S prejšnjimi rezultati imamo nazadnje:

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1) - (\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$



Slika 31: Konstrukcija pravilnega desetkotnika.

Posledično torej lahko trigonometrične funkcije celih mnogokratnikov kota 3° izrazimo samo s štirimi osnovnimi aritmetičnimi operacijami in s kvadratnimi koreni z uporabo ustreznih formul. Tablico eksaktnih vrednosti trigonometričnih funkcij kotov na vsake 3° je objavil, in to že pred letom 1800, Zagoričan baron Jurij Vega, po katerem idrijska gimnazija nosi ime. Kipec Jurija Vege je krasil pročelje šole že pod rajnko Avstrijo, pod Italijo so ga odstranili, ker je bil en od simbolov slovenstva, po vojni pa se je le našel nekje v Furlaniji in po vseh peripetijah so ga vrnili na staro mesto, ob stoletnici prve slovenske realke pa so ga temeljito obnovili.

Pri Pagonu in Karčniku smo govorili še o *četverokotnikih, peterokotnikih, šesterokotnikih* in tako naprej, nekje proti koncu dvajsetega stoletja pa so učene glave prišle do sklepa, da je tako poimenovanje zastarelo, če ne celo neustrezno. Praktično čez noč smo dobili nove izraze in govorimo le še o *štirikotnikih, petkotnikih, šestkotnikih* in tako dalje. Tako se morajo ubogi učitelji neprestano prilagajati izrazoslovju. Profesor Ivan Kuščer, ki je bil silno strog do drugih, pa tudi do sebe, se je kar naprej na nekoga ali na nekaj jezil. Govoril je, da če nekdo v šolstvu ali znanosti nima česa pametnejšega začeti, se začne podrobno ukvarjati z izrazoslovjem ali pa s fizikalnimi enotami. Profesor Kuščer je dolga leta predaval predmet **Ma**tematična **fi**zika, katere se je trdno oprijel izraz *Mafija*. Ker je zelo pogosto citiral avtorja Landaua in Lifšica, so študenti in profesorji fizike organizirali slalomske tekme, na katerih so tekmovali za *Pokal Landau–Lifšic*.

Kosinus kota 36° pa se da za čuda izraziti tudi čisto algebrsko, brez uporabe pravilnega petkotnika. Iz očitne enakosti (kdo se je le spomnil nanjo)

$$2 \cdot 36^\circ = 180^\circ - 3 \cdot 36^\circ$$

sledi, potem ko na levi in desni strani nanjo uporabimo funkcijo kosinus in malo potelovadimo z njenimi lastnostmi:

$$\cos(2 \cdot 36^\circ) = \cos(180^\circ - 3 \cdot 36^\circ) = -\cos(3 \cdot 36^\circ).$$

Nato uporabimo enakosti

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1\,,\ \cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha,$$

ki sta posledici adicijskih izrekov, in dobimo za $\alpha = 36^\circ$, potem ko še dobljeno enakost pomnožimo z 2, enakost:

$$4\cos^2 36^\circ - 2 = 6\cos 36^\circ - 8\cos^3 36^\circ.$$

Naj bo $y = 2\cos 36^\circ$. Očitno je $0 < y < 1/2$ in očitno velja razmeroma enostavna povezava:

$$y^2 - 2 = 3y - y^3.$$

Brez zadrege lahko zapišemo, da število y zadošča kubični enačbi

$$x^3 + x^2 - 3x - 2 = 0\,,$$

katere levo stran takoj prepišemo v primerno obliko in razstavimo:

$$(x^3+2x^2)-(x^2+3x+2) = x^2(x+2)-(x+2)(x+1) = (x+2)(x^2-x-1) = 0.$$

Ena rešitev je $x = -2$, ki da $2\cos 36^\circ = -2$, kar je nemogoče. Faktor x^2-x-1 pa prinese pozitivno rešitev $x = (1+\sqrt{5})/2 = \tau$ in negativno rešitev $x = (1-\sqrt{5})/2$, ki tudi ne more biti prava. Tako je lahko le $2\cos 36^\circ = \tau$ in s tem

$$\cos 36^\circ = \frac{\tau}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

Dobljeno kubično enačbo nam je uspelo rešiti brez posebnega truda, kar je prava redkost. Ponosni smo lahko, da pri tem nista nič imela Cardano in Tartaglia, ki sta se pred stoletji onegavila z njo. Drugi je našel rešitev za korene splošne kubične enačbe, prvi pa mu jo je speljal, odtujil.

Eksakten izraz za $\sin 3^\circ$ med drugim pomeni, da se kot 3° da konstruirati z ravnilom in šestilom. Tega pa za kot 1° ne moremo trditi. V nasprotnem primeru bi se dal z ravnilom in šestilom konstruirati pravilni 360-kotnik. Toda število $n = 360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ ni prave oblike, kot je ugotovil Gauß, da bi konstrukcija šla. Kajti samo z ravnilom in šestilom se da konstruirati pravilni n-kotnik le v primeru, ko je n naravna potenca števila 2 ali pa je n zmnožek potence števila 2 z nenegativnim celim eksponentom in samih **različnih** Fermatovih praštevil. Fermatova števila F_k so oblike:

$$F_k = 2^{2^k} + 1\,,\ k = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

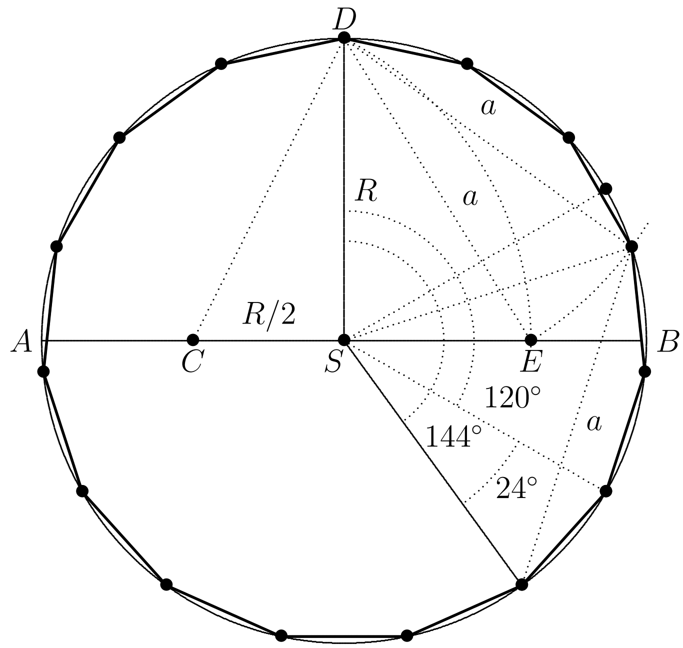
Na začetku imamo sama Fermatova praštevila:

$$F_0 = 3\,,\ F_1 = 5\,,\ F_2 = 17\,,\ F_3 = 257\,,\ F_4 = 65\,537.$$

Vsa Fermatova števila pa niso praštevila, denimo že naslednje ni:

$$F_5 = 4\,294\,967\,297 = 641 \cdot 6\,700\,417.$$

Ugotavljanje praštevilskosti oziroma razcepljanje Fermatovih števil še zdaleč ni enostavno. Tako niti ne vemo, ali je z ravnilom in šestilom konstruktibilnih končno ali neskončno mnogo pravilnih p-kotnikov, kjer je p praštevilo. Pri $n = 360$ imamo res produkt Fermatovih praštevil 3 in 5, toda 3 je v kvadratu.



Slika 32: Konstrukcija pravilnega petnajstkotnika.

Pri $n = 120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$ pa imamo produkt različnih Fermatovih praštevil poleg potence števila 2. Zato je pravilni 120-kotnik konstruktibilen.

Samo z ravnilom in šestilom se da konstruirati pravilen petnajstkotnik, ker je $15 = 3 \cdot 5$ in sta 3 in 5 različni Fermatovi praštevili. Kako? Središčni kot v pravilnem petnajstkotniku je $360°/15 = 24°$. Ker lahko zapišemo $24° = 2 \cdot (72° - 60°)$ in ker znamo konstruirati kota $120°$ in $72°$ samo z ravnilom in šestilom (kot $72°$ je notranji kot pravilnega petkotnika), znamo tako konstruirati tudi kot $24°$ in s tem pravilni petnajstkotnik (slika 32).

Velja pa popolnoma splošno. Če znamo konstruirati pravilni m-kotnik in pravilni n-kotnik samo z ravnilom in šestilom, pri čemer sta si števili m in n tuji, potem znamo z ravnilom in šestilom konstruirati tudi pravilen mn-kotnik. Ideja je ista kot pri pravilnem petnajstkotniku. Poskusimo najti celi števili x in y, tako da bo veljala enakost

$$\frac{360^\circ}{mn} = x \cdot \frac{360^\circ}{m} + y \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Po preureditvi dobimo diofantsko enačbo

$$nx + my = 1\,,$$

ki ima, kot vemo iz algebre, neskončno mnogo celoštevilskih rešitev (x, y). Z eno od njih konstruiramo središčni kot pravilnega mn-kotnika s središčnima kotoma pravilnega m- in n-kotnika.

Govorili smo že o pomembnem binarnem ali dvojiškem številskem sistemu. Števila v tem sistemu zapišemo s samimi ničlami in enkami. Števili 0 in 1 pa sta tudi ostanka pri deljenju celih števil z 2. V obsegu teh ostankov računamo zelo preprosto: $0 + 0 = 0, 0 + 1 = 1, 1 + 1 = 0$. Če zapišemo Pascalov številski trikotnik v tem obsegu, dobimo prav tako številski trikotnik, sestavljen iz samih ničel in enk. Recimo mu binarni Pascalov trikotnik (slika 33). Trikotnik ima že sam po sebi veliko zanimivosti. Pogledati nanj od daleč nam je lahko v veliko veselje, če smo ga izpisali z zelo veliko vrsticami.

Kaj dobimo, če vzamemo, da je n-ta vrstica binarni zapis nekega števila? Zaradi simetrije je vseeno, ali binarne števke beremo z leve v desno ali obratno. Označimo to število z V_n. Elementi v n-ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika naj bodo po vrsti

$$b_{n,n}, b_{n,n-1}, \ldots, b_{n,1}, b_{n,0}.$$

Pri tem je $b_{n,k} \in \{0, 1\}$ za $0 \leq k \leq n$. Torej je

$$V_n = (b_{n,n}b_{n,n-1} \ldots b_{n,1}b_{n,0})_2 = b_{n,n}2^n + b_{n,n-1}2^{n-1} + \ldots + b_{n,1}2 + b_{n,0}.$$

Ena od lastnosti binomskih koeficientov pa pravi, da velja kongruenca:

$$\binom{n}{k} \equiv b_{n,k} \pmod 2.$$

$n = 0$	1										$V_0 = 1$
$n = 1$	1	1									$V_1 = 3$
$n = 2$	1	0	1								$V_2 = 5$
$n = 3$	1	1	1	1							$V_3 = 15$
$n = 4$	1	0	0	0	1						$V_4 = 17$
$n = 5$	1	1	0	0	1	1					$V_5 = 51$
$n = 6$	1	0	1	0	1	0	1				$V_6 = 85$
$n = 7$	1	1	1	1	1	1	1	1			$V_7 = 255$
$n = 8$	1	0	0	0	0	0	0	0	1		$V_8 = 257$
$n = 9$	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1	$V_9 = 771$

Slika 33: Pascalov binarni trikotnik.

To pomeni, da je $b_{n,k} = 0$, če je $\binom{n}{k}$ sodo število, in $b_{n,k} = 1$, ko je $\binom{n}{k}$ liho število.

Beseda *kongruenca* se morda sliši pošastno, pa je v bistvu prijazna in nam samo olajša zapise in računanje. Za kongruenco rabimo najprej naravno število m, ki je večje od 1. Pravimo mu *modul*. Kongruenca po modulu m je neka relacija v množici celih števil. Pravimo, da sta celi števili x in y kongruentni po modulu m, če m deli razliko $x - y$. To zapišemo tako:

$$x \equiv y \pmod{m}.$$

Kongruenca po modulu m je v množici celih števil ekvivalenčna relacija: je refleksivna ali vzajemna, simetrična ali somerna in tranzitivna ali prehodna. To pa pomeni, da je skoraj isto kot enakost. Kongruenca po modulu m cela števila razkosa na med seboj si tuje razrede. Isti razred sestavljajo samo med seboj kongruentna števila. V primeru $m = 2$ dobimo dva razreda: množico sodih in množico lihih števil. Soda predstavlja število 0, liha pa 1.

Kot neklasično izobraženemu študentu matematike mi ni bilo jasno, zakaj pravimo, da je neka relacija irefleksivna oziroma intranzitivna, ko hočemo povedati, da je pravo nasprotje refleksivni oziroma tranzitivni. Hudič je tukaj v podrobnosti, ki jo odkrijemo v latinščini, kateri se tukaj skušamo čim bolj izogniti. V latinščini je nikalna predpona in-. Potem pa je odvisno, s čim se začne beseda, ki jo želimo zanikati. Ravnamo se po pravilih:

inb $\to$ imb, inp $\to$ imp, inm $\to$ imm, inl $\to$ ill, inr $\to$ irr, ingn $\to$ ign.

Zato imamo besede imbellis (nebojevit), impurus (nečist), immaturus (nezrel), illunis (brezmesečen), irrationalis (nerazumen), ignotus (neznan). V našem primeru imamo zato intranzitiven, toda irefleksiven. Angleži precej verno sledijo latinščini, zato imajo irrational numbers, irreflexive relations.

Pojdimo nazaj k našemu binarnemu Pascalovemu trikotniku. Tako je na primer

$$V_5 = 2^5 + 2^4 + 2 + 1 = 32 + 16 + 2 + 1 = 51.$$

Takoj opazimo, da so nekatera števila V_n v zaporedju Fermatovih števil,

$$F_0 = 3\,,\; F_1 = 5\,,\; F_2 = 17\,,\; F_3 = 257\,,$$

nekatera pa produkt Fermatovih števil:

$$V_3 = 3 \cdot 5\,,\; V_5 = 3 \cdot 17\,,\; V_6 = 5 \cdot 17\,,\; V_7 = 3 \cdot 5 \cdot 17\,,\; V_9 = 3 \cdot 257.$$

Vidimo, da je $V_7 = F_0 F_1 F_2$. Indeks 7 pa lahko zapišemo po urejeni trojki indeksov $(0, 1, 2)$ v obliki vsote potenc števila 2 z ustreznimi eksponenti: $7 = 2^0 + 2^1 + 2^2$. Za $n = 14$ dobimo v binarnem Pascalovem trikotniku v obsegu $\{0, 1\}$ števila

$$1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1.$$

Ustreza jim število $V_{14} = 21\,845 = 5 \cdot 17 \cdot 257 = F_1 F_2 F_3$ s trojko indeksov $(1, 2, 3)$. Tudi v tem primeru velja, da je indeks $14 = 2^1 + 2^2 + 2^3$ vsota ustreznih potenc števila 2.

Glede deljivosti binomskih koeficientov s praštevilom p je zanimivo povedati, da so

$$\binom{p}{1}, \binom{p}{2}, \ldots, \binom{p}{p-1}$$

vsi po vrsti deljivi s p. Števili $\binom{p}{0} = \binom{p}{p} = 1$ seveda nista deljivi za nobeno praštevilo p, saj je $p \geq 2$. Velja torej naslednja trditev:

Za vsako praštevilo p je binomski koeficient $\binom{p}{k}$ pri pogoju $1 \leq k \leq p-1$ deljiv s p.

Vsi binomski koeficienti $\binom{p}{k}$ so pri $1 \leq k \leq p-1$ naravna števila in zapišemo jih lahko v obliki:

$$\binom{p}{k} = \frac{p(p-1)\cdots(p-k+1)}{k!}.$$

Iz tega dobimo enakost:

$$p(p-1)\cdots(p-k+1) = k!\binom{p}{k}.$$

Njena leva stran je deljiva s p, zato mora biti tudi desna. Ker pa je število p tuje proti številu $k! = 1 \cdot 2 \cdots k$ pri pogoju $1 \leq k \leq p-1$, je s p deljiv faktor $\binom{p}{k}$.

Iz tega sledi, da ima potenca $(x+y)^p$ v obsegu ostankov $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ po praštevilskem modulu p preprosto obliko:

$$(x+y)^p = x^p + y^p\,.$$

Zgornje pravilo nekateri popularno imenujejo *bručeve sanje*, po hrvaško *san brucoša*, po angleško *freshman's dream*. Za mladega bruca ali mlado brucko, začetnika oziroma začetnico univerzitetnega študija, bi bilo seveda idealno, če bi bilo v matematiki vse aditivno. Dolgoletna praksa, pri kateri človek premeče, preobrne in pregleda na tisoče pisnih kolokvijev in izpitov naših študentov, res kaže na določene posplošitve bručevih sanj, na primer:

$$\log(x+y) = \log x + \log y\,,\ \sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

Včasih pa jim rezultat naloge, kljub uporabi napačnih računskih pravil, še celo prav pride. Kolega matematik je v Preseku, listu za mlade matematike, objavil precej takih, kar pa kolegom profesorjem po osnovnih in srednjih šolah večinoma ni bilo všeč, češ da se avtor dela norca iz šole.

Za $p = 2$ dobimo v obsegu ostankov $\{0, 1\}$ bručeve sanje v obliki

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2\,,$$

nato pa korak za korakom še:

$$(x + y)^4 = (x^2 + y^2)^2 = x^4 + y^4\,,$$

$$(x + y)^8 = (x^4 + y^4)^2 = x^8 + y^8\,,$$

tako da velja na splošno, za vsako nenegativno celo število n:

$$(x + y)^{2^n} = x^{2^n} + y^{2^n}.$$

To pa pomeni:

$$\binom{2^n}{k} \equiv 0 \pmod 2 \quad \text{za} \quad k = 1, 2, \ldots, 2^n - 1.$$

Torej stojita enici v 2^n-ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika samo na 2^n-tem in začetnem mestu, drugje pa so same ničle. S tem lahko zapišemo za vsako celo nenegativno število n enakost

$$V_{2^n} = 2^{2^n} + 1 = F_n\,,$$

torej n-to Fermatovo število. S tem smo ugotovili, da so med števili V_n prav vsa Fermatova števila.

Predvidevamo torej, da velja na splošno

$$V_n = F_k F_j\,, \quad \text{če je} \quad n = 2^k + 2^j \quad \text{in} \quad k < j.$$

To je preprosta posledica enakosti

$$(x + y)^{2^k + 2^j} =$$

$$= (x+y)^{2^k}(x+y)^{2^j} = (x^{2^k}+y^{2^k})(x^{2^j}+y^{2^j}) = x^{2^k+2^j}+x^{2^j}y^{2^k}+x^{2^k}y^{2^j}+y^{2^j+2^k},$$

ki velja v obsegu $\{0, 1\}$. Računanje te vrste nam kar dobro služi za ugotavljanje sodosti in lihosti binomskih koeficientov. To pomeni, da stojijo v 2^k+2^j-ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika v tem obsegu enice na štirih mestih, gledano z desne proti levi: na začetnem, na 2^k-tem, na 2^j-tem in na $2^k + 2^j$-tem, na preostalih mestih pa so ničle. To se pravi, da lahko izrazimo število, ki ustreza binarnemu zapisu, takole:

$$V_n = V_{2^k+2^j} = 2^{2^k+2^j} + 2^{2^k} + 2^{2^j} + 1 = (2^{2^k} + 1)(2^{2^j} + 1) = F_k F_j.$$

Ker pa vsako naravno število n lahko enolično zapišemo v obliki

$$n = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s},$$

kjer so $n_0, n_1, \ldots, n_s$ celi eksponenti, urejeni po velikosti $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$, velja splošno:

$$V_n = F_{n_0} F_{n_1} \ldots F_{n_s}.$$

V posebnem primeru velja za $n \geq 1$ enakost

$$V_{2^n+1} = F_0 F_n = 3F_n.$$

Ker za $n \geq 1$ velja enakost $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = 2^n - 1$, imamo za $n \geq 1$ tudi:

$$V_{2^n-1} = F_0 F_1 \ldots F_{n-1}.$$

Po drugi strani pa je v $2^n - 1$-ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika 2^n samih enic, tako da je tudi

$$V_{2^n-1} = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2^n-1} = 2^{2^n} - 1 = F_n - 2.$$

Torej velja za $n \geq 1$ enakost

$$F_0 F_1 \ldots F_{n-1} = F_n - 2.$$

Preverimo pravilnost zadnje relacije na primeru:

$$F_0F_1F_2F_3F_4 = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 65\,537 + 2 = 4\,294\,967\,297 = F_5.$$

Vsa Fermatova števila F_n za $n \geq 2$ se v desetiškem zapisu končajo na 7. To lahko dokažemo z zgornjo rekurzijo, v kateri je treba poznati prvih n Fermatovih števil, da lahko izračunamo naslednje. Obstaja pa tudi nelinearna rekurzija, ki povezuje dve zaporedni Fermatovi števili.

Do rekurzije pridemo tako, da zapišemo enakost $F_n - 1 = 2^{2^n}$. Zato je

$$(F_n - 1)^2 = (2^{2^n})^2 = 2^{2^{n+1}} = F_{n+1} - 1.$$

Tako imamo rekurzijo

$$F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1\,,$$

ki velja za $n \geq 1$. Z metodo matematične indukcije dokažemo, da se vsa števila F_n za $n \geq 2$ v desetiškem zapisu končajo na 7. Za $n = 2$ je to res, saj je $F_2 = 17$. Denimo, da je res, da se število F_n konča na 7. Potem se $F_n - 1$ konča na 6, prav tako pa tudi $(F_n - 1)^2$. Torej se tudi število $F_{n+1} = (F_n - 1)^2 + 1$ konča na 7.

Koliko je enic v n-ti vrstici binarnega Pascalovega trikotnika? Koliko je skratka lihih binomskih koeficientov $\binom{n}{k}$ pri danem n? Označimo število takih binomskih koeficientov z $E(n)$. Očitno je $E(0) = 1, E(1) = 2, E(2) = 2, E(3) = 4$. Kako se zaporedje nadaljuje? Tovrstne naloge smo reševali pri nekih psiholoških testih. Rezultati teh slavnih testov so človeka lahko spremljali do smrti, zlasti če so bili slabi. Lahko so marsikomu onemogočili kariero, če so prišli pravemu birokratu v roke. Birokrat namreč prav filigransko bulji v papirje, ne na levo, ne na desno, in trdi, da so pač testi pokazali to in to. Meni so napovedali, da sem bolj primeren za jezikoslovje kot za matematiko. Ker pa je čvekačev in njihovih podpornikov bilo že v tistih časih več kot preveč, sem se raje odločil za slednje.

Slišal sem o nekem fantu, ki je tak test v šoli zamudil in ni slišal navodil, kako jih izpolnjevati. Usedel se je v klop, dobil teste, se ozrl okrog in videl sošolce, ki so nekaj obkroževali. Pa je obkroževal še on. Ker je zadel le malokateri pravilni odgovor, je bil rezultat tako slab, da so v šolo poklicali starše in jih izpraševali, če je otrok sploh normalen. Na srečo je fant kasneje v roku končal fakulteto.

V resnici število enk v vsaki vrstici binarnega Pascalovega trikotnika zlahka preštejemo z upoštevanjem bručevih sanj. Najprej z lahkoto ugotovimo, da je

$$E(2^n) = 2\,,\ E(2^k + 2^j) = 4 = 2 \cdot 2 = 2^2$$

za vsako nenegativno celo število n in vsa nenegativna cela števila k in j pri pogoju $k < j$. Naslednji korak je posplošitev. Če je

$$n = 2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s}\,,$$

kjer so $n_0, n_1, \ldots, n_s$ celi eksponenti, urejeni po velikosti $n_0 < n_1 < \ldots < n_s$, potem velja:

$$E(n) = E(2^{n_0} + 2^{n_1} + \ldots + 2^{n_s}) = \underbrace{2 \cdot 2 \cdots 2}_{s} = 2^s.$$

Število s pa je po drugi strani ravno številska vsota $\nu(n)$ binarno zapisanega števila $n = (b_r b_{r-1} \ldots b_1 b_0)_2$:

$$s = \nu(n) = b_r + b_{r-1} + \ldots + b_1 + b_0.$$

Torej imamo odgovor na zastavljeno vprašanje:

$$E(n) = 2^{\nu(n)}\,,\ n \geq 0.$$

Očitno je $\nu(0) = 0, \nu(1) = 1, \nu(2) = 1, \nu(3) = 2$ in res v teh primerih dobimo $E(0) = 2^0 = 1, E(1) = 2^1 = 2, E(2) = 2^1 = 2, E(3) = 2^2 = 4$.

V posebnem primeru je

$$E(2^n - 1) = E(1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1}) = 2^n.$$

Po svoje je zanimiva že zgradba zaporedja s členi $E(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, \ldots$$

Po katerem pravilu se nadaljuje? Morda je to naloga za psihološke teste, po katerih rezultatih so nam nekoč svetovali pri izbiri poklica. Oglejmo si delna zaporedja $E(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1$, kjer je $n = 0, 1, 2, \ldots$:

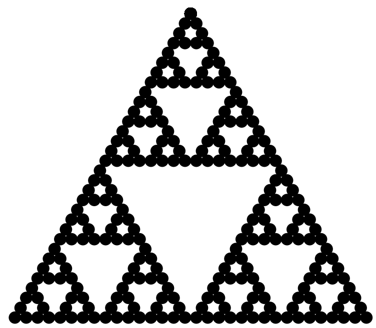
$$\begin{aligned}
n = 0 &\ : \ 1 \\
n = 1 &\ : \ 1, 2 \\
n = 2 &\ : \ 1, 2, 2, 4 \\
n = 3 &\ : \ 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8 \\
n = 4 &\ : \ 1, 2, 2, 4, 2, 4, 4, 8, 2, 4, 4, 8, 4, 8, 8, 16
\end{aligned}$$

Takoj opazimo, da je za $n \geq 1$ druga polovica zaporedja ravno dvakratnik prve polovice. Delna zaporedja so dolžine 2^n, kjer je $n = 0, 1, 2, \ldots$. Zakaj? Za $n \geq 1$ ima delno zaporedje $E(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 2^{n+1} - 1$, natančno 2^{n+1} členov. Indekse k pa lahko razdelimo na dva enako močna dela: $A = \{0, 1, \ldots, 2^n - 1\}$ in $B = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$. Vsak član množice B je očitno za 2^n večji od istoležnega člana v množici A, v kateri ima vsak član kvečjemu n binarnih števk. Pri tem vzamemo, da nima število 0 nobene binarne števke. Zato je številska vsota binarno zapisanega števila iz množice B točno za 1 večja od številske vsote binarno zapisanega istoležnega števila k iz množice A. To pomeni:

$$E(k + 2^n) = 2^{\nu(k)+1} = 2 \cdot 2^{\nu(k)} = 2E(k),\ k = 0, 1, \ldots, 2^n - 1.$$

Binarni Pascalov trikotnik ima sploh zanimivo vzorčasto obliko, če nanj pogledamo zelo od daleč. Kjer so enke, postavimo temno piko, kjer so ničle, pa belo. Slika 34 kaže samopodobnost že za $0 \leq n \leq 31$. Zadevi pravijo tudi *preproga Sierpińskega*.

Še bolj pisane trikotnike take sorte dobimo, če Pascalov trikotnik računamo po kakšnem večjem praštevilskem modulu. Vsakemu ostanku po tem



Slika 34: Slikovni Pascalov binarni trikotnik.

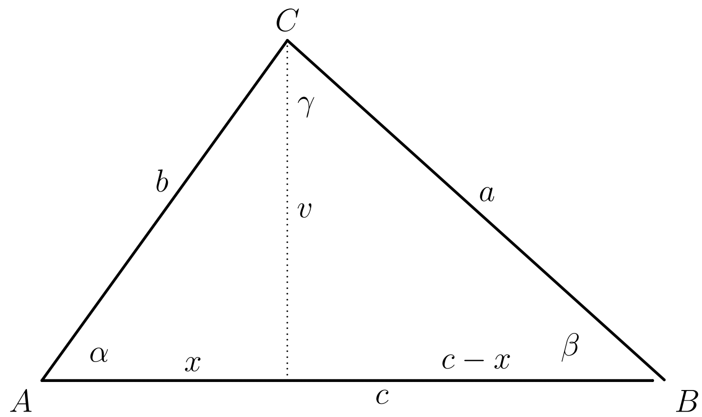
modulu priredimo natančno določeno barvo in namesto ostanka na ustrezno mesto postavimo s to barvo obarvan krožec. Tako dobimo še lepše preproge in še bolj pestre samopodobnosti.

Povrnimo se spet v geometrijo. Že v osnovni šoli smo načrtovali trikotnike z danimi stranicami a, b in c. Spoznali smo, kdaj tak trikotnik sploh lahko načrtamo. Kote v trikotniku pa takrat še nismo znali izračunati razen v izjemnih primerih. Sedaj bomo znali rešiti tudi to nalogo. V ta namen moramo poznati pomembno orodje, to je kosinusni izrek. Spet bo pela trigonometrija.

Kosinusni izrek v ravninski trigonometriji lahko dokažemo tako ali drugače, lahko že kar z uporabo Pitagorovega izreka, kakor smo naredili na gimnaziji (slika 35), lahko pa tudi z vektorji. Imejmo trikotnik ABC s stranicami a, b in c ter z notranjimi koti α, β in γ. Pravokotna projekcija stranice b na stranico c naj bo x. Zato je pravokotna projekcija stranice a na stranico c enaka $c - x$. Višina trikotnika na stranico c pa naj bo v. Potem veljajo relacije:

$$x = b\cos\alpha \quad v^2 = b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2.$$

Če je α topi kot, je projekcija x negativna, če je β topi kot, je projekcija $c - x$ negativna, kar nas ne moti. Iz relacije $b^2 - x^2 = a^2 - (c - x)^2$ dobimo najprej



Slika 35: Običajna izpeljava kosinusnega izreka.

$b^2 = a^2 - c^2 + 2cx = a^2 - c^2 + 2bc\cos\alpha$, od koder že imamo kosinusni izrek:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha.$$

S ciklično zamenjavo stranic in kotov dobimo še

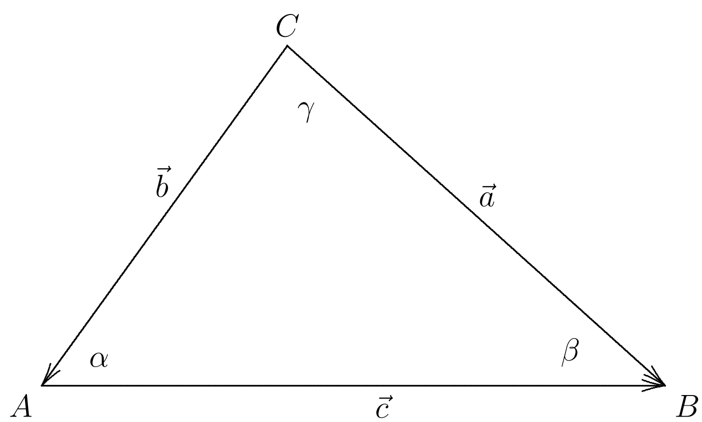
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta\,, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Kosinusni izrek je imeniten, saj z njim lahko iz znanih stranic trikotnika izračunamo njegove kote. Žal pa za našo šolsko rabo ni bil ravno pripraven, ker si z logaritmi tu ne moremo kaj prida pomagati. Za računanje na računalniku pa je kar v redu. Odgovoriti pa nam pomaga na vprašanje, če velja tudi obrat Pitagorovega izreka, ki pove, da je trikotnik s stranicami a, b in c, kjer je c najdaljša stranica, in za katerega velja $a^2 + b^2 = c^2$, pravokoten. Če je namreč γ kot nasproti stranice c in $a^2+b^2 = c^2$, potem velja po kosinusnem izreku relacija:

$$c^2 - (a^2 + b^2) = -2bc\cos\gamma = 0.$$

Iz relacije $\cos\gamma = 0$ pa sledi $\gamma = 90°$, kar seveda pomeni, da je trikotnik res pravokoten.

V resnici se pri dokazu obrata Pitagorovega izreka lahko izognemo kosinusnemu izreku. Denimo, da imamo trikotnik $\mathcal{T}$ s stranicami a, b, c in da zanje velja relacija $a^2+b^2=c^2$. Iz nje vidimo, da je c najdaljša stranica trikotnika. Konstruiramo pravi kot, vzdolž enega kraka odmerimo od vrha kota stranico a, vzdolž drugega kraka pa prav tako od vrha kota stranico b. Krajišči daljic na krakih povežemo in dobimo pravokotni trikotnik s hipotenuzo. Zanj seveda po Pitagorovem izreku tudi velja $a^2+b^2=c^2$. Konstruirani trikotnik pa je zagotovo skladen z našim začetnim trikotnikom $\mathcal{T}$, saj se z njim nedvomno ujema v vseh treh stranicah. Zato se pa oba trikotnika, po enem od izreku o skladnosti, ujemata tudi v vseh treh kotih, torej tudi v pravem. Začetni trikotnik $\mathcal{T}$ je zares pravokoten. Z vektorji pa gre izpeljava



Slika 36: Vektorska izpeljava kosinusnega izreka.

kosinusnega izreka tekoče kot po maslu. Naj bodo (slika 36)

$$\vec{a}=\overrightarrow{CB}\,,\quad \vec{b}=\overrightarrow{CA}\quad \text{in}\quad \vec{c}=\overrightarrow{AB}$$

z dolžinami $a=|\vec{a}|$, $b=|\vec{b}|$ in $c=|\vec{c}|$. Ker je $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$, imamo:

$$\vec{c}\cdot\vec{c}=(\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\cdot\vec{b}-2\vec{a}\cdot\vec{b}.$$

Ker je $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\gamma$, imamo takoj pred seboj kosinusni izrek:

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

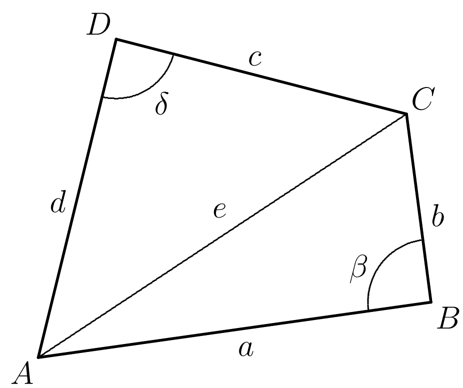
Pri znanih stranicah trikotnika lahko izračunamo kot γ. Če zapišemo še dvakrat kosinusni izrek, in sicer v oblikah

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad \text{in} \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

lahko izračunamo še kota α in β. Seveda je dovolj izračunati samo en kot od zadnjih dveh, saj velja enakost $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$.

Ena od izpeljav formule za ploščino p konveksnega štirikotnika uporablja kosinusni izrek in tisto formulo za trikotnik, ki pravi, da je njegova dvakratna ploščina enaka produktu dveh njegovih stranic in sinusa vmesnega kota. Navadno formulo za ploščino konveksnega štirikotnika pripisujejo indijskemu matematiku in astronomu z imenom *Brahmagupta* (598–668), v sanskrtu ब्रह्मगुप्त.

Oglejmo si torej poljuben konveksen štirikotnik $ABCD$ s stranicami a, b, c, d in mu izračunajmo ploščino p. Označimo diagonalo štirikotnika z e ter kota β in δ (slika 37).



Slika 37: Splošna Brahmaguptova formula.

Iz slike 37, na kateri smo štirikotnik razdelili z diagonalo e na trikotnika ABC in ACD, dobimo:

$$4p = 2(ab\sin\beta + dc\sin\delta). \tag{14}$$

Nato uporabimo za trikotnika ABC in ACD kosinusni izrek

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta,$$

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

Iz enačbe

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta$$

dobimo:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab\cos\beta - cd\cos\delta). \tag{15}$$

Sedaj relaciji (14) in (15) kvadriramo in seštejemo:

$$16p^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4(ab\sin\beta + dc\sin\delta)^2 + 4(ab\cos\beta - cd\cos\delta)^2.$$

Izraz na desni strani poenostavimo tako, da uporabimo relaciji $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ in $\sin^2\delta + \cos^2\delta = 1$ ter adicijski izrek za funkcijo kosinus. Dobimo

$$16p^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd\cos(\beta + \delta).$$

Uporabimo še relacijo $2\cos^2(\beta + \delta)/2 = 1 + \cos(\beta + \delta)$:

$$16p^2 + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 + 8abcd - 16abcd\cos^2(\beta + \delta)/2.$$

Izrazimo

$$16p^2 = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 - 16abcd\cos^2(\beta + \delta)/2.$$

Razstavimo razliko prvih dveh členov na desni strani:

$$16p^2 = (2ab+2cd-a^2-b^2+c^2+d^2)(2ab+2cd+a^2+b^2-c^2-d^2)-16abcd\cos^2(\beta+\delta)/2.$$

Zapišemo s kvadrati:

$$16p^2 = [(c + d)^2 - (a - b)^2)][(a + b)^2 - (c - d)^2] - 16abcd\cos^2(\beta + \delta)/2.$$

Spet razstavimo:

$$16p^2 = (c+d+a-b)(c+d-a+b)(a+b+c-d)(a+b-c+d) - 16abcd\cos^2(\beta+\delta)/2.$$

Z vpeljavo polovičnega obsega $s = (a+b+c+d)/2$ štirikotnika $ABCD$ najprej izrazimo

$$s-a = \frac{b+c+d-a}{2}, \quad s-b = \frac{c+d+a-b}{2},$$
$$s-c = \frac{d+a+b-c}{2}, \quad s-d = \frac{a+b+c-d}{2},$$

potem pa lahko zapišemo

$$16p^2 = 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-d) - 16abcd\cos^2(\beta+\delta)/2.$$

Po krajšanju in korenjenju je pred nami splošna *Brahmaguptova formula*:

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2(\beta+\delta)/2}, \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Ker je v štirikotniku vsota notranjih kotov enaka 2π, lahko zamenjamo $\beta+\delta$ z $2\pi-(\alpha+\gamma)$ in dobimo analogen izraz za p:

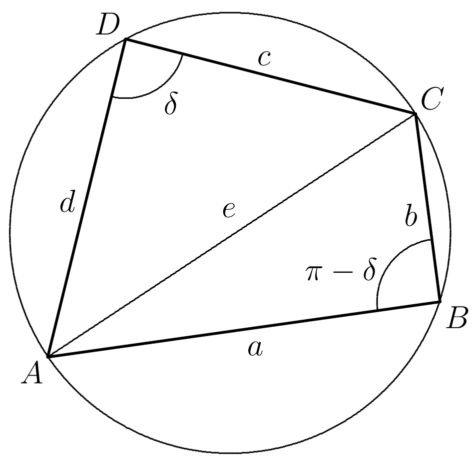
$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d) - abcd\cos^2(\alpha+\gamma)/2}, \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

V primeru tetivnega štirikotnika je $(\alpha+\gamma)/2 = (\beta+\delta)/2 = \pi/2$ in dobimo znano formulo za ploščino tetivnega štirikotnika:

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

Formula nas spominja na Heronovo formulo za ploščino trikotnika z znanimi stranicami. K Heronovi in Brahmaguptovi formuli za tetivni štirikotnik se bomo še vrnili.

Pri danih stranicah a, b, c, d ima štirikotnik največjo ploščino, ko velja $\cos^2(\alpha+\gamma)/2 = 0$, torej ko je $\alpha+\gamma = \beta+\delta = \pi$. To pa se zgodi, natanko tedaj, ko je štirikotnik tetiven, kar je posledica izreka o obodnem kotu.



Slika 38: Brahmaguptova formula za tetivni štirikotnik.

Pri izpeljavi Brahmaguptove formule smo uporabili formulo za kosinus polovičnega kota. Navadno jo navajamo skupaj s formulo za sinus polovičnega kota. To sta relaciji

$$2\cos^2\alpha/2 = 1 + \cos\alpha, \quad 2\sin^2\alpha/2 = 1 - \cos\alpha. \tag{16}$$

Navadno pravimo, da sta posledici adicijskih izrekov za funkciji sinus in kosinus. Sta zelo uporabni pri integraciji potenc obeh funkcij. Lahko pa formuli brez težav izpeljemo geometrijsko s pomočjo slike 39.

Pravokotni trikotnik ABC je včrtan polkrogu s premerom $|AB| = 2$ in središčem v točki S. Pravokotna projekcija oglišča C pa premer je N.

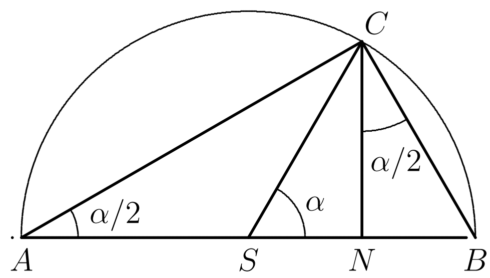
Nič ne izgubimo na splošnosti, če vzamemo pozitiven oster $\sphericalangle NSC = \alpha$. Ker je trikotnik ASC enakokrak, je $\sphericalangle ACS = \sphericalangle SAC = \alpha/2$. Očitno je

$$|AN| = |AC|\cos\alpha/2 = 2\cos\alpha/2 \cdot \cos\alpha/2 = 2\cos^2\alpha/2 = 1 + \cos\alpha,$$

tako da je prva relacija v (16) dokazana.

Izračunajmo še

$$|NB| = |BC|\sin\alpha/2 = 2\sin\alpha/2 \cdot \sin\alpha/2 = 2\sin^2\alpha/2 = 1 - \cos\alpha.$$



Slika 39: Sinus in kosinus polovičnega kota.

S tem smo dokazali še drugo relacijo v (16). Za nameček pa imamo še

$$|NC| = |AC| \sin \alpha/2 = 2 \cos \alpha/2 \cdot \sin \alpha/2 = \sin \alpha,$$

to se pravi formulo $\sin \alpha = 2 \sin \alpha/2 \cos \alpha/2$.

Iz $\cos \alpha = (1 + \cos \alpha)/2 - (1 - \cos \alpha)/2 = \cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2$ pa dobimo še enakost $\cos \alpha = \cos^2 \alpha/2 - \sin^2 \alpha/2$.

Pri tetivnem štirikotniku je $\beta = \pi - \delta$ in iz slike 38 izvemo

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos \delta, \quad e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos \delta.$$

Po izenačenju dobimo

$$\cos \delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(ab + cd)}.$$

Z nekaj računanja dobimo

$$e^2 = \frac{(ad + bc)(ac + bd)}{ab + cd}.$$

S ciklično zamenjavo $a \to b$, $b \to c$, $c \to d$, $d \to a$ dobimo še izraz za kvadrat diagonale $f = |BD|$ štirikotnika $ABCD$:

$$f^2 = \frac{(ba + cd)(bd + ca)}{bc + da}.$$

Zmnožimo:

$$e^2 f^2 = (ac + bd)^2.$$

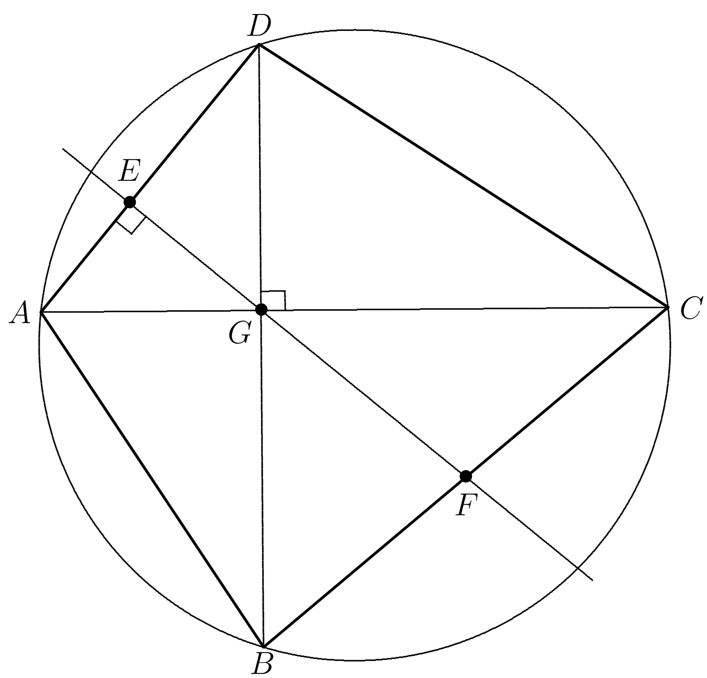
Po korenjenju imamo

$$ac + bd = ef.$$

S tem smo dokazali *Ptolemajev izrek*. Kasneje ga bomo še na drugačen način, brez uporabe trigonometrije.

Po Brahmagupti se imenuje izrek, ki velja v takem tetivnem štirikotniku, čigar diagonali se sekata pravokotno. Učeno se takemu liku reče *ortodiagonalni tetivni štirikotnik*.

Brahmaguptov izrek trdi: *V ortodiagonalnem tetivnem štirikotniku poljubna premica, ki poteka skozi presečišče diagonal in seka njegovo stranico pravokotno, razpolavlja nasprotno stranico.*



Slika 40: Brahmaguptov izrek.

Za dokaz si oglejmo sliko 40. Premica skozi presečišče G diagonal ortodiagonalnega tetivnega štirikotnika $ABCD$ seka pravokotno stranico AD v točki E, nasprotno stranico pa v točki F. Dokazati moramo, da je $|BF| = |FC|$. Dokazali bomo celo, da $|BF| = |FC| = |GF|$.

Zaradi lastnosti obodnih kotov nad tetivama AB in DC ortodiagonalnemu tetivnemu štirikotniku $ABCD$ očrtanega kroga velja:

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB, \quad \sphericalangle DBC = \sphericalangle DAC.$$

Ker je trikotnik DAG pravokoten, velja

$$\sphericalangle ADB = \sphericalangle AGE = \sphericalangle FGC = \sphericalangle ACB = \sphericalangle GCF.$$

Iz relacije $\sphericalangle FGC = \sphericalangle GCF$ izvemo, da je trikotnik CGF enakokrak z vrhom F in zato je $|FC| = |GF|$.

Očitno sta si kota $\sphericalangle GAE$ in $\sphericalangle AGE$ komplementarna. Prav tako sta si komplementarna kota $\sphericalangle FGC$ in $\sphericalangle BGF$. Zaradi

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle FBG = \sphericalangle CAD = \sphericalangle GAE = \frac{\pi}{2} - \sphericalangle AGE =$$

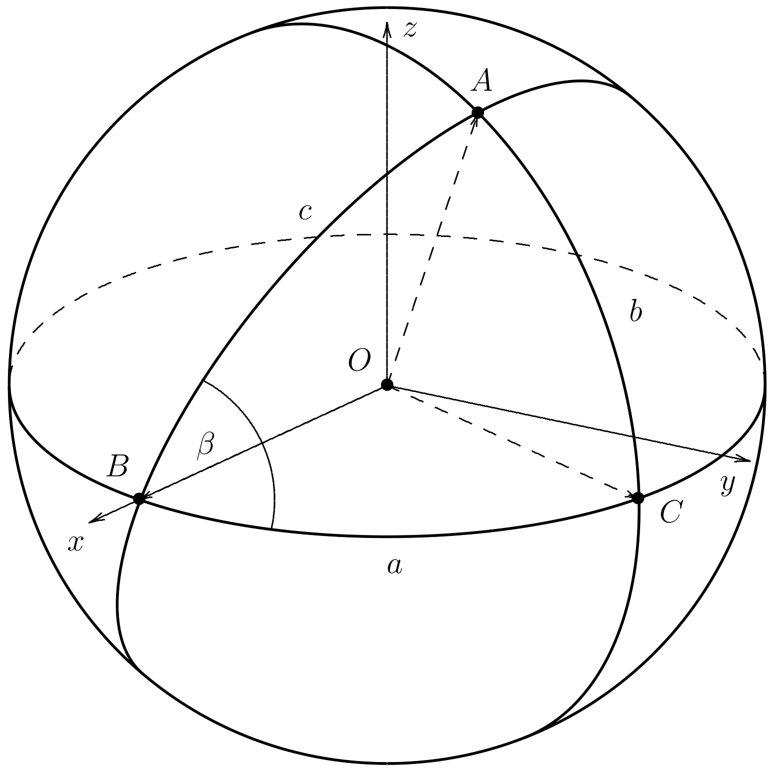
$$= \frac{\pi}{2} - \sphericalangle FGC = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} - \sphericalangle BGF\right) = \sphericalangle BGF$$

velja relacija $\sphericalangle BGF = \sphericalangle FBG$. Trikotnik BFG je tudi enakokrak, vrh ima v F. Za njegova kraka velja: $|BF| = |GF|$. Torej res velja relacija $|BF| = |GF| = |FC|$. Izrek je dokazan.

Brahmagupta je že reševal Pellove enačbe, ki jim seveda ni tako rekel. Izpričani so primeri

$$x^2 - 8y^2 = 1, \quad x^2 - 11y^2 = 1, \quad x^2 - 61y^2 = 1.$$

Prva ima najmanjšo rešitev $(x, y) = (3, 1)$, druga $(x, y) = (10, 3)$ in tretja $(x, y) = (1766319049, 226153980)$. Računal je že z negativnimi števili, nič je imel za število in ne samo za števko v desetiškem zapisu. Sešteval je vsote, računal dolžino tropskega leta, našel približek za število π in še kaj. Ko je bil Brahmagupta star 30 let, je napisal pomembno delo *Brahmasphutasiddhanta*,



Slika 41: Sferični pravokotni trikotnik.

v sansktu ब्रह्मस्फुटसिद्धान्त. Napisal je še več drugih del, na primer leta 665 astronomsko Khandrakhadyaka, खन्डखड्यक.

Sedaj si oglejmo še košček sferne trigonometrije. Naši starejši profesorji so jo še imeli na gimnaziji, nam pa so z njo popolnoma prizanesli. Ker pa obvladamo vektorje, nam ne bo težko izpeljati nekaj formul, ki jih bomo morda kasneje s pridom uporabili. Na enotski sferi naj leži pravokoten sferični trikotnik z oglišči A, B in C in stranicami a, b in c (slika 41). Notranji kot z vrhom v oglišču B naj bo β, pravi kot pa naj ima vrh v oglišču C. Brez škode za splošnost vpeljimo pravokotni kartezični koordinatni sistem z osmi x, y in z in s koordinatnim izhodiščem O v središču sfere tako, kot kaže slika.

Stranica a potem poteka po ekvatorju sfere, stranica b po njenem meridianu, os x pa jo prebode v oglišču B. Potem lahko v tem koordinatnem sistemu izrazimo enotske vektorje $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OC}$ tako:

$$\overrightarrow{OA} = (\cos a \cos b, \sin a \cos b, \sin b)\,, \overrightarrow{OB} = (1, 0, 0)\,, \overrightarrow{OC} = (\cos a, \sin a, 0).$$

Takoj dobimo

$$\cos c = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \cos a \cos b.$$

S tem smo izpeljali Pitagorov izrek za pravokotni sferni trikotnik:

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Za vektorski produkt vektorjev $\overrightarrow{OB}$ in $\overrightarrow{OA}$ dobimo:

$$\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OA} = (0, -\sin b, \sin a \cos b).$$

Ta vektorski produkt pa oklepa z osjo z kot β, iz česar dobimo:

$$\cos \beta = \frac{\sin a \cos b}{\sqrt{\sin^2 b + \sin^2 a \cos^2 b}}.$$

Ko izločimo kot b, pri čemer uporabimo Pitagorov izrek za pravokoten sferni trikotnik in nekaj osnovnih trigonometričnih povezav, dobimo formulo

$$\tan a = \tan c \cos \beta\,,$$

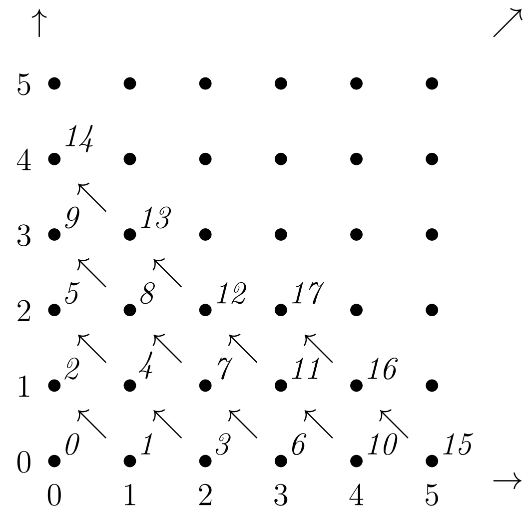
s katero izrazimo na sferi pravokotno projekcijo hipotenuze c na kateto a vzdolž katete b. Tudi običajna evklidska geometrija pozna tovrstno formulo.

Omenili smo trikotniška števila $T_n = n(n+1)/2$, ki jih bomo sedaj uporabili še za nekaj. Indeks n bo lahko naravno število ali 0:

$$n \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Katerokoli število $m \in \mathbb{N}$ očitno leži med dvema zaporednima trikotniškima številoma, denimo

$$T_n \leq m < T_{n+1}.$$



Slika 42: Elemente množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ lahko oštevilčimo.

Pri tem je indeks $n \in \mathbb{N}$ z $m \in \mathbb{N}$ natančno določen. Označimo $y = m - T_n$. Tudi y je natančno določen in velja $y \in \mathbb{N}$. Naj bo še $x = n - y$. Iz relacije $T_n \leq m < T_{n+1} = T_n + n + 1$ dobimo $n + 1 > m - T_n = y$. To pa pomeni, da je $x = n - y > -1$ oziroma $x \geq 0$. Iz danega $m \in \mathbb{N}$ smo našli natanko določeni števili x in y v množici $\mathbb{N}$, tako da velja:

$$m = T_{x+y} + y = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

S tem smo našli povratno enolično preslikavo ali bijekcijo ψ iz množice $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ na množico $\mathbb{N}$:

$$\psi(x, y) = T_{x+y} + y = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

To pomeni, da imata množici $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ isto moč, čeprav je videti, da ima $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ več elementov kot $\mathbb{N}$. To se pravi, da urejene pare (x, y) s funkcijo ψ lahko natančno oštevilčimo sledeč puščicam $\nwarrow$, kot kaže slika 42:

$$\psi(0,0) = 0, \psi(1,0) = 1, \psi(0,1) = 2, \ldots, \psi(3,2) = 17, \ldots$$

Vsakemu številu $m \in \mathbb{N}$ lahko najdemo natančno določeno mesto v $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Za primer izberimo $m = 1949$. Največje trikotniško število T_n, ki ne presega števila 1949, je celi del pozitivne rešitve kvadratne enačbe $n(n+1)/2 = 1949$. Brez težav najdemo $n = 61$ in $T_n = 1891$. Zato je $y = 1949 - 1891 = 58$ in $x = n - y = 61 - 58 = 3$. Torej $\psi(3, 58) = 1949$.

Kako bi lahko tole povedali bolj razumljivo in ilustrativno? Sledimo Hilbertu[80]. Imamo neskončno mnogo hotelov, ki so oštevilčeni po vrsti s števili $0, 1, 2, 3, \ldots$ Vsak od teh hotelov pa ima neskončno mnogo sob, ki so tudi oštevilčene s številkami $0, 1, 2, 3, \ldots$ Denimo, da so vse sobe v vseh hotelih nekega dne zasedene in da so lastniki sklenili, da bodo vse hotele razen tistega s številko 0 prenovili. V ta namen bodo vse goste preselili v hotel številka 0. Ali je to mogoče? Teoretično je: goste iz hotela številka x in tamkajšnje sobe številka y je treba preseliti v sobo številka $\psi(x, y)$ hotela številka 0. Gosti v hotelu številka 0 se morajo tudi seliti, in sicer iz sobe številka y v sobo številka $y(y + 3)/2$.

Ko smo spoznali število zveri, to je 666, smo videli, da je trikotniško število lahko tudi kvadratno. Katera števila so taka? Za števili n in m iz množice $\mathbb{N}$ mora veljati enačba

$$\frac{n(n+1)}{2} = m^2,$$

ki jo najprej prepišemo v obliko

$$n^2 + n = 2m^2,$$

nato pa v obliko

$$4n^2 + 4n + 1 = 8m^2 + 1.$$

Če vpeljemo števili $x = 2n + 1$ in $y = 2m$, smo pri Pellovi enačbi

$$x^2 - 2y^2 = 1,$$

[80]David Hilbert (1882–1943) – nemški matematik.

ki jo veliko laže rešujemo kot tisto v Arhimedovem problemu o govedu. Fundamentalna rešitev je tokrat $x_1 = 3, y_1 = 2$. Preostale rešitve x_n, y_n, ki jih je nešteto, dobimo, kot je natančno dokazano v ustrezni matematični literaturi, iz zveze

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n = (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

Pri celih številih a, b, c, d iz enakosti

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2}$$

sledi $a = c, b = d$, ker je število $\sqrt{2}$ iracionalno. Če bi veljalo $b \neq d$, bi dobili

$$\sqrt{2} = \frac{a - c}{d - b},$$

kar pa ni mogoče, ker je na levi strani racionalno število.

Število $(3 + 2\sqrt{2})^n$ je pri naravnem eksponentu n vedno oblike $a + b\sqrt{2}$, zato lahko brez večjih težav izračunamo x_n, y_n za manjše n, na primer:

$$x_8 + y_8\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^8 = 665\,857 + 470\,832\sqrt{2}.$$

Torej imamo $x_8 = 665\,857 = 2n + 1, y_8 = 470\,832 = 2m$, iz česar dobimo $n = 332928, m = 235416$. To pomeni:

$$T_{332\,928} = 235\,416^2.$$

Očitno je nešteto trikotniških števil, ki so tudi kvadratna.

Potence števil, ki so večja kot 1, naraščajo in pri dovolj velikem eksponentu n hitro presežejo še tako veliko pozitivno število. Denimo, da si je nekdo pred 2 000 leti od apostola Petra izposodil 1 g čistega zlata in da ga mora, potem ko se je skoraj toliko časa cvrl v vicah, ob prihodu v nebesa vrniti nebeškemu ključarju v istovrstnem zlatu z obrestmi vred. Denimo, da je letna obrestna mera samo 1 %. Po 2 000 letih se bo dolga nabralo kar precej:

$$1.01^{2\,000}\ \text{g} \doteq 439\,286\,205\ \text{g} = 439\,286.205\ \text{kg}.$$

To še zdaleč ni malo, saj je dobrih 439 ton. Iz tega bi lahko ulili precej zlatih telet. Kocka, ki bi jo ulili iz tega zlata, pa bi imela pri sobni temperaturi rob z dolžino 283 cm. Za prevoz takega tovora bi potrebovali 57 kamionov z nosilnostjo 7.7 ton. Če bi vsi ti tovornjaki vozili vsaksebi po 50 metrov, bi imeli konvoj dolžine skoraj 3 km, kar je malo manj, kot je po cesti od Cerknega skozi Benat do Mihona v Zakrižu.

Lahko bi zlobno pripomnili, da je v posvetnem življenju še dobro, da civilizacije propadajo in se vsake toliko časa vse začne znova. Kaj bi šele bilo, če bi sv. Peter v omenjenem primeru zahteval dvakrat višje obresti? Spokornik bi mu bil ob prihodu v raj dolžan 158 614 732 700 ton čistega zlata, kar je nepredstavljivo mnogo, skoraj 159 milijard ton, kar je mnogo manj od mase pošteno velikega asteroida, toda za prevoz bi potrebovali skoraj 21 milijard tovornjakov z nosilnostjo 7.7 ton. Kocka, ki bi jo ulili iz tega zlata, pa bi imela pri sobni temperaturi rob dolžine 2018 m. Če bi vsi ti tovornjaki vozili vsaksebi po 50 metrov, bi dobili konvoj dolžine dobre milijarde kilometrov, kar je nekoliko manj kot pot, ki jo prepotuje Zemlja okoli Sonca v enem letu, in malo več, kot je razdalja od Sonca do Jupitra. Tako razdaljo prepotuje svetloba v slabi uri. Na svetu pa je po ocenah komaj od 120 000 do 140 000 ton zlata. Nekaj pa ga je še v naravi.

Celotno zlato bogastvo vseh bank in zakladnic Zemlje navsezadnje ni vredno niti milijoninke dolga, ki bi se v 2 000 letih nabral našemu hipotetičnemu grešniku, ki se je pri prvem papežu zapufal za gram zlata pri obrestni meri 2 %. Koliko je 1 gram zlata, če iz njega ulijemo kocko? Kocka bi imela rob 3.73 mm. Če bi naredili iz nje kroglico, bi le-ta imela premer 4.62 mm.

Težko si predstavljamo, kakšne ogromne številke bi šele dobili pri bolj oderuških obrestnih merah, recimo 3 %, 4 %, 5 %? Masa zlata bi bila primerljiva z največjimi zvezdami v vesolju. Čudnega ni nič, če ljudje težko vrnejo dolg po nekaj letih, če je obrestna mera 10 %, 20 %. Ali je potemtakem kaj čudnega, če na tem svetu gre vse narobe? Ni se odveč spomniti besed v molitvi Oče naš:

Et dimitte nobis debita nostra
sicut et nos dimittimus debitoribus nostris.

In odpusti nam naše dolge,
kakor tudi mi odpuščamo svojim dolžnikom.

Καὶ ἄφες ἡμῖν τὰ ὀφειλήματα ἡμῶν,
ὡς καὶ ἡμεῖς ἀφήκαμεν τοῖς ὀφειλέταις ἡμῶν.

Z eksponentno funkcijo se ne kaže igrati. Naftni derivati spreminjajo ceno, največkrat navzgor, vsake dva tedna. Liter najbolj uporabljenega 95-oktanskega bencina se je za potrošnika 2. aprila 2012, ko je stal 1.493 €, podražil za okoli 2.344 %. Kam pridemo, če bi se bencin podražil vsakih štirinajst dni za toliko odstotkov? Na novega leta dan 2013 bi liter stal kar

$$1.493 \cdot 1.02344^{19} = 2.3188 \text{ €},$$

leto kasneje pa že 4.2356 €

. Koliko bi bili na boljšem, če bi se bencin podražil vsakih štirinajst dni samo za 1 %? Za novo leto 2013 bi en liter stal 1.8037 €, leto kasneje pa že 2.3363 €.

Ljudje najraje razmišljajo linearno in jim je eksponentna rast španska vas. Ali pa si pred njo zatiskajo oči oziroma tiščijo glavo v pesek. V svetu denarništva veljajo popolnoma drugačni zakoni kot pri plačevanju kave, kjer vemo, da ena kava s smetano stane 1.60 €, dve kavi 3.20 €, deset kav pa 16 €.

Velika števila sem prvič v življenju srečal in se jih zavedal, ko mi je v gimnazijskih letih prišla v roke knjiga *Od poštevanke do integrala: Matematika za vsakogar*, ki jo je napisal avstrijski pisatelj Egmont Colerus von Geldern (1888–1939). Naslov originala je *Vom Einmaleins zum Integral: Mathematik für Jedermann*. V slovenščini je izšla leta 1951 pri Mladinski knjigi v Ljubljani. Izvod knjige je za šolsko nagrado prejel Anton Primožič, nekoč uspešen dijak idrijske gimnazije, uspešen tekmovalec v znanju matematike in kasnejši študent tehnične matematike in eden njenih prvih diplomantov na ljubljanski univerzi. Knjigo mi je posodila njegova, žal že pokojna sestra. Colerus je napisal še nekaj matematično zgodovinskih del, na primer *Od Pitagore do Hilberta* in *Od točke do četrte dimenzije*. Ker je skupaj z nemškimi pisatelji v Avstriji v neki izpovedi pozdravil Anschluss, je prišel na slab glas, tako da njegovih knjig nekaj časa niso izdajali. Kaj je kljubovalo temu, da je delo *Od poštevanke do integrala* že leta 1951 izšlo v nekdanji Jugoslaviji, kjer je bila navada, da so marsikaterega pisatelja ali pesnika, ki ni bil med vojno na pravi strani, preprosto zamolčali ali celo prepovedali?

Kakorkoli že, Colerus daje v knjigi *Od poštevanke do integrala* primer gromozansko velikega števila v zvezi s šahovsko desko, ki ima 64 polj, izmenično črnih in belih. Šah mi nikoli ni bil priljubljen, tako kot ne skakanje čez kozo ali konja pri telovadbi. Legenda pravi, da je šah izumil nekje sredi prvega tisočletja nekje v Indiji neki Sisa Ben Dahir (v imenu si strokovnjaki niso enotni) in da je bila nova igra kralju Širamu tako všeč, da so morali nemudoma poiskati avtorja in ga pripeljati pred kralja. Ta ga je spraševal, kaj naj mu za izum podari. Sisa se je nekaj časa izmotaval, da nič, nazadnje, ko kralj nikakor ni odnehal, si je zaželel, naj mu na prvo polje šahovske deske položijo eno pšenično zrno, na drugo dve, na tretje štiri, na vsako naslednje dvakrat več kot na prejšnje, vse do štiriinšestdesetega polja. Morda je šlo za riževa zrna, kar pa za zgodbo ni tako bistvenega pomena kot njihovo število. Nekateri, vključno s Colerusom, menijo, da je Sisa barantal samo za število zrn na zadnjem polju, to je "samo"

$$Z' = 2^{63} = 9\,223\,372\,036\,854\,775\,808$$

zrn, drugi pa imajo v mislih vsa zrna, sešteta od prvega polja do zadnjega. Kralj je menil, da v nobenem primeru zrnja ne bo niti za pošteno potico. Na dvoru so nekaj časa računali in izračunali, da si Sisa, po drugi inačici zgodbe, želi natančno

$$Z = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63}$$

pšeničnih zrn. Kako to hitro izračunati, je po svoje tudi zanimivo, vsaj tako kot seštevanje mladega Gaußa? Potrebna je majhna zvijača. Najprej zapišemo

$$2Z = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} + 2^{64},$$

nato pa še

$$Z = 2Z - Z = 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^{63} + 2^{64} - 1 - 2 - 4 - 8 - \ldots - 2^{63} = 2^{64} - 1.$$

Množiti z 2 ni težko in dvorni matematiki so izračunali

$$Z = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615.$$

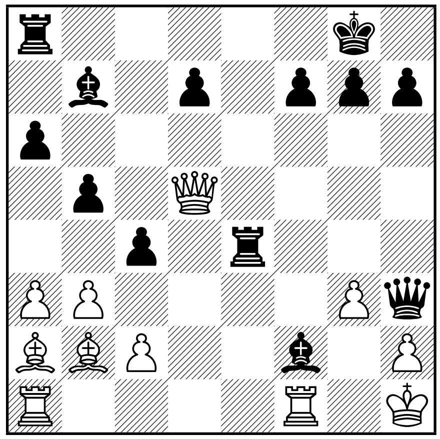
To število je nekdo kralju tudi naglas prebral. Če Z razstavimo na prafaktorje, dobimo:

$$Z = 3 \cdot 5 \cdot 17 \cdot 257 \cdot 641 \cdot 65537 \cdot 6700417.$$

Toliko pšeničnih zrn je več kot vsa zaloga pšenice na Zemlji. Ko se je kralj tega zavedel, je baje ukazal Sisu, naj si jih kar sam prešteje. Revež bi $2^{64} - 1$ zrn štel 584.5 milijarde let, če bi vsako sekundo vzel eno zrno in zraven še izgovoril ustrezni glavni števnik. Število Z' je prav tako ogromno, saj je $Z' = (Z + 1)/2$ in se količini žita po eni in drugi inačici med seboj ne razlikujeta bistveno.

Koliko pa je vse pšenice skupaj v tej nagradi? Če vsako zrno tehta 40 miligramov, je žita 737.87 milijard ton. Če bi vse žito naložili na tovornjake, od katerih bi ga vsak prevažal 7.7 ton, bi potrebovali 95.8 milijard takih vozil. Njihov konvoj bi bil dolg od Sonca (☉) do Plutona (⯓), če bi na vsake 62 metrov stal en tovornjak. Kljub temu pa je število zrn pravi pritlikavec v primerjavi z najmanjšo rešitvijo Pellove enačbe, ki smo jo navedli pri Arhimedovem problemu o govedu. Še vedno pa je ogromno.

Beseda *šah* je perzijska, pomeni pa *kralj*, شاه. Tako kot indijske številke so tudi šah posredovali Evropi Arabci, ki šahu pravijo *šatrandž*, zapišejo pa



Slika 43: Beli je na potezi.

s svojimi črkami, seveda od desne proti levi, kot شطرنج. Cilj šahovske igre je matirati nasprotnika. Izraz *šah-mat* je perzijski in pomeni *smrt kralju*, شاه مات. Ker se pri igranju šaha pogosto uporablja izraz *šah-mat*, so Rusi izumili za šah besedo шахматы. Angleži uporabljajo za šah besedo *chess*, Francozi *échecs*, Italijani *scacchi*, Španci *ajedrez*, Katalonci *escacs*, Luzitanci *xadrez*, Romuni *şah*, Madžari *sakk*, Turki *satranç*, Finci *shakki*, Hindujci शतरंज, v sanskrtu चतुरङ्ग in še bi lahko naštevali.

Tudi šahovske figure imajo zanimiva imena. Na primer *kmet*: angleško *pawn*, nemško *Bauer*, rusko пешек, italijansko *pedone*, turško *piyon*, špansko *péon*, katalonsko *peó*, portugalsko *peão*, finsko *sotilas*, arabsko جنود, hindujsko प्यादा.

Precej manj grozansko veliko število je na svojevrsten način zabeleženo tudi v opisu pesniškega dvoboja med Hesiodom in Homerjem, Ἡσιόδου καὶ Ὁμήρου ἀγών). Neznani pisatelj piše o tem tekmovanju, ki je potekalo v Halkidi, grško Χαλκίς na otoku Evboja, grško Εὔβοια, ob pogrebnih obredih tamkajšnjega kralja Amfidamanta, Ἀμφιδάμας, ki jih je priredil njegov sin Ganyktor, Γανύκτωρ, pokojnikov brat Paneides, Πανείδης, pa je bil prisoten med razsodniki.

Potem ko sta se bila slavna pesnika temeljito obdelala tako, da sta se izmenoma dopolnjevala z do potankosti izpiljenimi heksametri, je Hesiod spet prišel do besede:

> Τοῦτό τι δή μοι μοῦνον ἐειρομένῳ κατάλεξον,
>
> πόσσοι ἅμ᾽ Ἀτρεΐδῃσιν ἐς Ἴλιον ἦλθον Ἀχαιοί;
>
> *Zdaj pa mi daj odgovor samo še na tole vprašanje:*
> *Koliko mož je Atridoma v boj nad Trojo sledilo?*

Atrida sta bila Agamemnon, Ἀγαμέμνων, in Menelaj, Μενέλαος, Atrejeva sinova. Atrej, Ἀτρεύς, je bil kralj starodavnih Miken. Agamemnon je bil kralj v Mikenah, njegov brat Menelaj pa v Sparti. Spomnimo, trojanska vojna se je vnela zaradi lepe Helene, Ἑλένη, Menelajeve soproge, ki jo je ugrabil Trojanec Paris, Πάρις.

Na vprašanje, koliko mož se je šlo z Atridoma borit za lepo Heleno pred Trojo, je Homer Hesiodu pri priči takole bistroumno odgovoril:

> Πεντήκοντ᾽ ἦσαν πυρὸς ἐσχάραι, ἐν δὲ ἑκάστῃ
>
> πεντήκοστ᾽ ὀβελοί, περὶ δὲ κρέα πεντήκοντα·
>
> τρὶς δὲ τριηκόσιοι περὶ ἓν κρέας ἦσαν Ἀχαιοί.
>
> *Petdeset ognjev gorelo je, petdeset ražnjev ob ognju,*
> *petdeset kosov mesa se cvrlo na vsakem je ražnju,*
> *trikrat po tri sto Ahajcev se s kosom mesa je gostilo.*

Ražnjev je torej bilo 2 500. Na njih se je cvrlo 125 000 kosov mesa. Če se je 900 Ahajcev mastilo z enim kosom mesa, jih je torej bilo 112 500 000. Toliko v tistih časih, v 12. stoletju pr. n. št., ni bilo vseh ljudi na svetu. Ob začetku našega štetja jih je bilo po grobih ocenah okoli 250 milijonov. Lahko pa le rečemo, da so to zgolj števila, ki se jih še nekako predstavljamo, medtem ko si omenjeno število zrn na šahovski deski, to je

$$Z = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615$$

nekoliko teže, da o še večjih raje ne govorimo.

Na koncu so strogi razsodniki zmago kljub drugačnemu mnenju navzoče publike, ki ni mogla prehvaliti Homerja, pripisali Hesiodu, češ da lepo poje o poljedelstvu in miru, Homer pa najraje opeva samo krvave boje. Za nagrado je Hesiod prejel umetelno izdelan bronast trinožnik, ki ga je posvetil Muzam in nazadnje poklonil slavnemu preročišču v Delfih. Nanj je dal napisati naslednja heksametra:

> Ἡσίοδος Μούσαις Ἑλικωνίσι τόνδ᾽ ἀνέθηκεν
>
> ὕμνῳ νικήσας ἐν Χαλκίδι θεῖον Ὅμηρον.
>
> *V Halkidi nekdaj Hesíod je z verzi premagal Homerja,*
> *svojo nagrado v spomin helikonskim je Muzam poklonil.*

Stari Grki so imeli, po pripovedovanju njihovih sodobnikov, tako zelo radi poezijo, da so komaj čakali na to, da bo kdo kje recitiral pesmi ali priredil pesniško tekmovanje. Od vsepovsod so baje kar drli na take prireditve, kjer so uživali ob umetniški besedi.

Ko so izšle moje *Deuje bábe*, napisane v heksametrih in v cerkljanskem narečju, je na predstavitev tudi prišlo kar precej ljudi, čeprav so prebrali samo nekaj odlomkov. Dvorana cerkljanske osnovne šole je bila nabito polna. Ni bilo sicer tako kot v antični Grčiji, a za cerkljanske razmere še vseeno imenitno. Ljudje so po prireditvi kupovali knjigo in želeli moj podpis. Na koncu me je že pošteno bolela roka, kajti od uvedbe elektronskega indeksa naprej se nisem več podpisal tolikokrat v tako kratkem času. Nekoč smo namreč študentom vpisovali v indeks inskripcijo na začetku vsakega semestra, frekvenco na koncu (če je bila zaslužena). Potem pa še za opravljen izpit kot krono vsega podpisovalnega obredja.

10 Vonj po geometriji

Geometrijsko zaporedje je bilo v matematiki že od nekdaj zanimivo. Spomnimo se na primer na Ahila (Ἀχιλλεύς) in želvo, na izumitelja šahovske igre in nagrade, ki jo je zahteval, na obrestno obrestni račun in na debeline, ki jih dobivamo s prepogibanjem papirja.

Števila $a_0, a_1, a_2, \ldots$, različna od 0, sestavljajo geometrijsko zaporedje, če je količnik naslednjega člena z njegovim predhodnikom vselej isti. Vzemimo, da je enak številu q. To pomeni $a_1/a_0 = q, a_2/a_1 = q, a_3/a_2 = q, \ldots$ To lepše zapišimo v obliki:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Iz tega takoj ugotovimo, da je geometrijsko zaporedje popolnoma določeno z začetnim členom a_0 in številom q, ki mu pravimo *količnik* ali *kvocient* geometrijskega zaporedje. Člen a_1 je q-kratnik začetnega člena, torej $a_1 = a_0 q$, člen a_2 je q-kratnik člena a_1, torej $a_2 = a_1 q = a_0 q^2$. Tega ni težko posplošiti in prej ali slej ugotovimo:

$$a_n = a_0 q^n \quad \text{za} \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Geometrijsko zaporedje je torej oblike:

$$a_0, a_0 q, a_0 q^2, a_0 q^3, \ldots$$

Od kod zaporedju prilastek *geometrijsko*? V primeru pozitivnega geometrijskega zaporedja je vsak člen, razen začetnega, geometrijska sredina svojega neposrednega levega in desnega soseda:

$$\sqrt{a_{n-1} a_{n+1}} = \sqrt{a_0 q^{n-1} \cdot a_0 q^{n+1}} = \sqrt{a_0^2 q^{2n}} = a_0 q^n = a_n \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \ldots$$

Primeri: V vseh primerih naj bo $a_0 = 1$. Sicer bi vse člene takih zaporedij samo pomnožili z a_0.

Za $q = 2$ imamo: $1, 2, 4, 8, 16, \ldots$

Za $q = -2$ imamo: $1, -2, 4, -8, 16, \ldots$

Za $q = \frac{1}{2}$ imamo: $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Za $q = -\frac{1}{2}$ imamo: $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

Za $q = 1$ imamo: $1, 1, 1, 1, 1, \ldots$

Za $q = -1$ imamo: $1, -1, 1, -1, 1, \ldots$

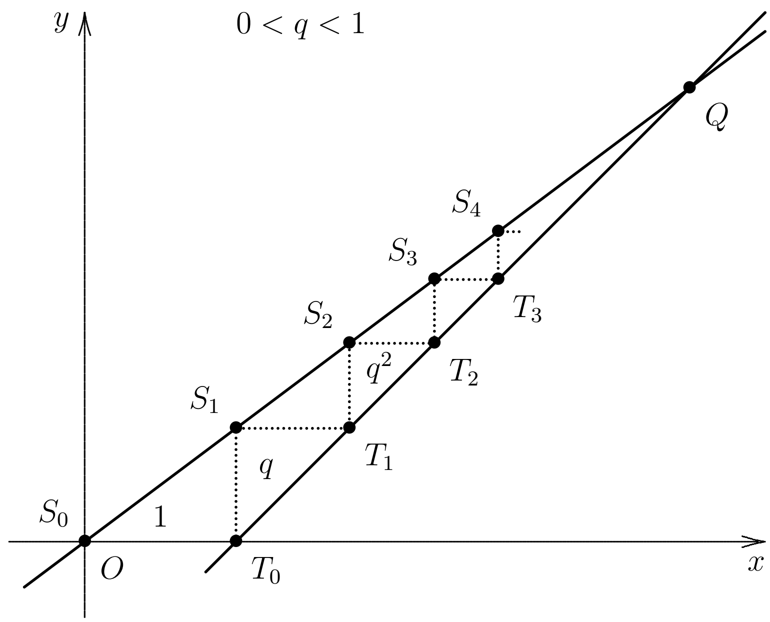
Za $q = 0.1$ imamo: $1, 0.1, 0.01, 0.001, 0.0001, \ldots$

Stari Grki so imeli zelo radi geometrijo. Spomnimo se samo na Talesa, Pitagoro, Evklida in Apolonija. Po grško so po vrsti: Θαλῆς, Πυθαγόρας, Εὐκλείδης, Ἀπολλώνιος. Matematične rezultate so si skušali razložiti geometrijsko. Poglejmo, kako bi si predočili geometrijsko zaporedje $1, q, q^2, q^3, \ldots$ v analitični geometriji. Torej z nekoliko sodobnejšimi pripomočki. Še več, podobno bomo obravnavali tudi geometrijsko vrsto

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots, \tag{17}$$

to je vrsto, katere členi sestavljajo geometrijsko zaporedje. Obravnavo najprej posvetimo primeru, ko je $0 < q < 1$. V pravokotnem koordinatnem sistemu narišemo premici $y = qx$ in $y = x - 1$. Prva poteka skozi koordinatno izhodišče $O = S_0$ pod kotom, katerega tangens je ravno q. Naklonski kot te premice je torej v obravnavanem primeru manjši kot 45°. Druga premica seka abscisno os v točki $T_0(1, 0)$ pod kotom 45° (slika 44).

Obe premici se sekata v točki $Q(1/(1-q), q/(1-q))$. Do tega rezultata pridemo, če rešimo sistem enačb $y = qx, y = x - 1$. Skozi T_0 postavimo na os x pravokotnico, ki seka premico $y = qx$ v točki S_1. Skozi S_1 potegnemo osi x vzporednico, ki seka premico $y = x - 1$ v točki T_1. Opisani postopek nadaljujemo, kot kaže slika. Dobimo zaporedje točk $T_0, T_1, T_2, \ldots$ na premici $y = x - 1$ in zaporedje točk $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots$ na premici $y = qx$. Točka S_1 ima koordinati $(1, q)$. Ker je trikotnik $T_0S_1T_1$ pravokoten in enakokrak, velja $S_1T_1 = q$. Zato ima točka T_1 za q večjo absciso kot T_0, torej sta $(1 + q, q)$ koordinati točke T_1, $(1 + q, q + q^2)$ pa koordinati točke S_2. Ker je trikotnik



Slika 44: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $0 < q < 1$.

$T_1S_2T_2$ tudi pravokoten in enakokrak, ima T_2 za q^2 večjo absciso kot T_1, torej sta koordinati za T_2 enaki $(1+q+q^2, q+q^2)$. Ta postopek lahko nadaljujemo v nedogled in dobimo zaporedji točk

$$T_0(1,0), T_1(1+q,q), T_2(1+q+q^2, q+q^2), T_3(1+q+q^2+q^3, q+q^2+q^3), \ldots$$

in

$$S_0(0,0), S_1(1,q), S_2(1+q, q+q^2), S_3(1+q+q^2, q+q^2+q^3), \ldots$$

Splošno velja:

$$T_n(1+q+q^2+\ldots+q^n, q+q^2+\ldots+q^n) \quad \text{za} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

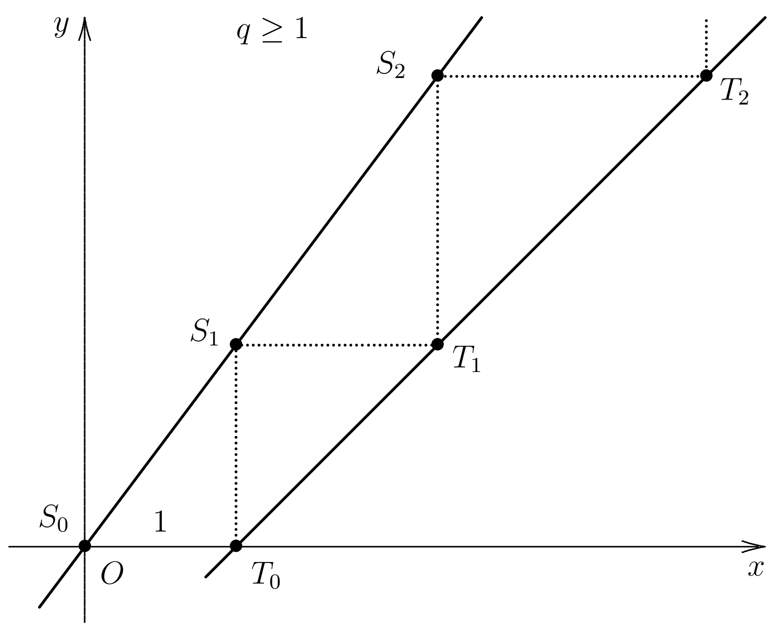
in

$$S_n(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}, q+q^2+\ldots+q^n) \quad \text{za} \quad n = 1,2,3,\ldots$$

Daljica S_0T_0 ima dolžino 1, daljica S_1T_1 dolžino q, daljica S_2T_2 dolžino q^2. V splošnem ima daljica S_nT_n dolžino q^n za $n = 0, 1, 2, \ldots$ Točke v zaporedjih $T_0, T_1, T_2, \ldots$ in $S_0, S_1, S_2, \ldots$ se bližajo točki Q. Če je indeks n dovolj velik, sta točki T_n in S_n tako blizu točki Q, kot želimo. To pa pomeni, da sta abscisa (ordinata) točke T_n za dovolj velik indeks n poljubno blizu abscisi (ordinati) točke Q. Iz tega sklepamo:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \qquad \left(q + q^2 + q^3 + q^4 + \ldots = \frac{q}{1-q}\right).$$

Za $0 < q < 1$ ima vrsta (17) končno vsoto, enako $1/(1-q)$. Na sliki opazimo zaporedje daljic, od T_0 navpično do S_1, nato vodoravno do T_1, pa spet navpično do S_2, nato vodoravno do T_2 in tako naprej, vedno izmenoma s premice $y = x - 1$ na premico $y = qx$ in spet na premico $y = x - 1$. Za $0 < q < 1$ smo dobili stopničasto krivuljo, ki nas pripelje od T_1 do Q, kjer se premici sekata. Za $q = 1$ sta premici $y = x - 1$ in $y = qx$ vzporedni in

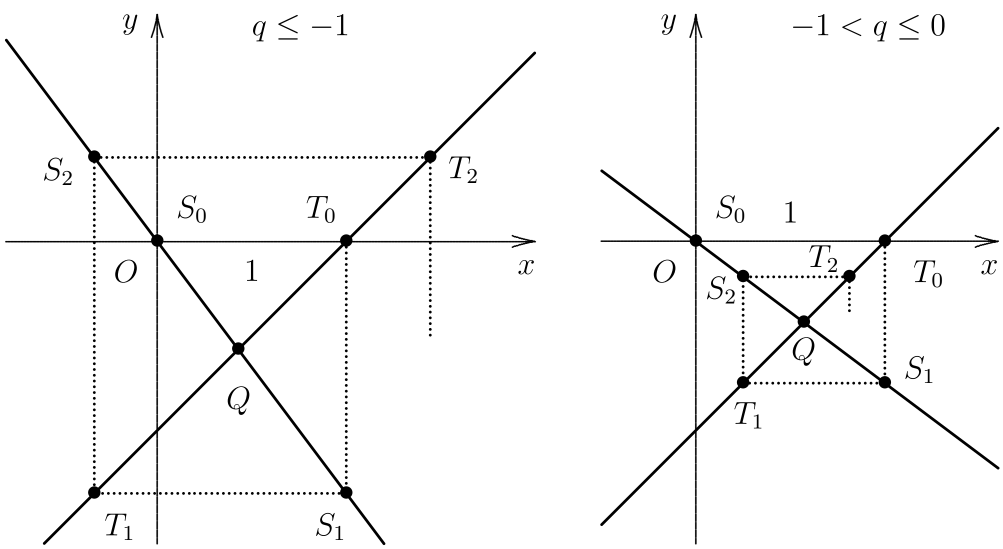


Slika 45: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $q \geq 1$.

nimata presečišča, vrsta (17) nima končne vsote. Za $q > 1$ ali $q < -1$ se premici sicer sekata, toda prej opisana krivulja skozi $T_0S_1T_1S_2\ldots$ ne vodi do njunega presečišča (slika 45). Za $q = -1$ se premici sekata pravokotno in dobimo krivuljo, ki je navita na kvadrat z oglišči $(0,0),(1,0),(1,-1),(0,-1)$ in se ne približuje presečišču $Q(1/2,-1/2)$.

Za $-1 < q < 0$ dobimo zopet zanimivo krivuljo, in sicer spiralo, ki se ovija okoli točke $Q(1/(1-q), q/(1-q))$ in se ji poljubno približa (slika 46). Vrsta (17) tudi tedaj konvergira in ima vsoto $1/(1-q)$. Tudi za $q = 0$ ima vrsta, ki ni geometrijska po naši opredelitvi, vsoto, in sicer 1. Vrsta (17) za $|q| < 1$, kot učeno pravimo, konvergira in ima vsoto $1/(1-q)$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = \frac{1}{1-q} \quad \text{za} \quad |q| < 1.$$



Slika 46: Vsota geometrijskega zaporedja s kvocientom $q < 0$.

S tem smo pregledali vse možnosti za realen kvocient q v geometrijski vrsti. K taki vrsti se bomo še vračali, saj je preprosta in jo še kar obvladamo. Geometrijska vrsta je včasih uporabna tudi za to, da njene člene primerjamo s členi kakšne druge vrste, za katero bi radi vedeli, če je konvergentna ali ne.

Na tem so zasnovani tako imenovani *konvergenčni kriteriji*, s katerimi včasih razvozlamo konvergenco vrste, čeprav njene vsote morda niti ne moremo zapisati v zaključeni obliki.

Problem tretjinjenja kota zahteva, da samo z ravnilom in šestilom dani kot (ali lok) razdelimo na tri enake dele. Problem je samo z ravnilom in šestilom nerešljiv. Hitro namreč vidimo, da je enačba za sinus tretjine danega kota α kubična. Za vsak kot β velja po adicijskem izreku in znani enakosti $\cos^2\beta + \sin^2\beta = 1$:

$$\sin(3\beta) = \sin(2\beta + \beta) = \sin(2\beta)\cos\beta + \cos(2\beta)\sin\beta =$$

$$= 2\sin\beta\cos^2\beta + (\cos^2\beta - \sin^2\beta)\sin\beta = 2\sin\beta(1-\sin^2\beta) + (1-2\sin^2\beta)\sin\beta.$$

S preureditvijo imamo:

$$\sin(3\beta) = 3\sin\beta - 4\sin^3\sin\beta.$$

Vstavimo v dobljeno enakost $\beta = \alpha/3$, pa dobimo za $x = \sin(\alpha/3)$ kubično enačbo

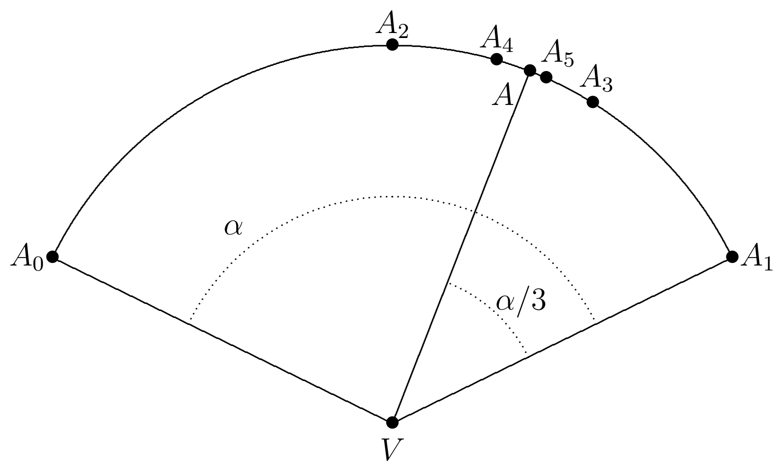
$$3x - 4x^3 = \sin\alpha\,,$$

ki v splošnem ni rešljiva samo s kvadratnimi koreni. Če bi bila, bi lahko x in s tem kot $\alpha/3$ konstruirali samo z ravnilom in šestilom. Tako res tretjinjenje kota ni izvedljivo s klasičnim geometrijskim orodjem.

Pač pa lahko z dovolj dolgim zaporedjem deljenj kotov na dva enaka dela dani kot razdelimo na tri enake dele, ne čisto, toda poljubno natančno. Kako to naredimo?

Vzemimo kot α z vrhom V in krakoma, na katerih izberemo točki A_0 in A_1, enako oddaljeni od V, in načrtamo lok A_0A_1. Točno lahko določimo središče A_2 loka A_0A_1, nato središče A_3 loka A_1A_2, nato središče A_4 loka A_2A_3, nato središče A_5 loka A_3A_4 in tako dalje, dokler želimo.

Zaporedje točk $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, \ldots$ se približuje točki A, ki pove, kje je tretjina loka A_1A_0. Res?



Slika 47: Približno tretjinjenje kota.

Naj bo ℓ dolžina loka od A_1A_0 (slika 47). Lok od A_1 do A_2 meri zato $\ell/2$, od A_1 do A_3 pa $\ell/2-\ell/4$. Lok od A_1 do A_4 meri $\ell/2-\ell/4+\ell/8$, lok od A_1 do A_5 pa je dolg $\ell/2-\ell/4+\ell/8-\ell/16$. Opazimo, da je dolžina loka od A_2 do A vsota vrste

$$\frac{\ell}{2}-\frac{\ell}{4}+\frac{\ell}{8}-\frac{\ell}{16}+\ldots=\frac{\ell}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots\right).$$

Vrsta v oklepaju na desni strani enačaja je geometrijska s količnikom $q=-1/2$, po formuli (5) dobimo:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\ldots=\frac{1}{1-(-\frac{1}{2})}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}.$$

Dolžina loka od točke A_1 do točke A je $(2/3)(\ell/2)=\ell/3$, torej točka A res tretjini lok. Tako lahko dani kot razdelimo na tri enake dele tako natančno, kot želimo.

Stari Grki so se takim postopkom, ki zahtevajo neomejeno število korakov, krčevito izogibali. Menili so in v to so bili prepričani, da do cilja nikoli ne pridemo, če je treba nekaj narediti neskončno mnogokrat. Bolj prožni so bili glede tega matematiki, ki so sledili Preroku. Al-Kashi, الكاشي, je že znal izračunati

$$\sin 3^\circ = \frac{1}{16}\left((\sqrt{6}+\sqrt{2})(\sqrt{5}-1)-(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right).$$

Ta rezultat mu je omogočil z iteracijo izračunati število $x = \sin 1^\circ$ poljubno natančno. Uporabil je enakost $\sin(3\beta) = 3\sin\beta - 4\sin^3\beta$, ki smo jo že izpeljali, in vanjo vstavil $\beta = 1^\circ$. Dobil je za x kubično enačbo $3x - 4x^3 = \sin 3^\circ$, ki jo je ugodno prepisati v obliko za iteracijo:

$$x = \frac{4x^3 + \sin 3^\circ}{3} = f(x).$$

Za začetni približek x_0 vzamemo število $f(0)$, nato pa za nov približek $x_1 = f(x_0)$, nato spet za nov približek $x_2 = f(x_1)$ in tako naprej po formuli

$$x_{n+1} = f(x_n).$$

Če se zaporedje približkov približuje neki vrednosti x_∞, bo le-ta $\sin 1^\circ$. Rezultate zberimo v tabelo 8:

n	x_n
0	0.017445318747647944240
1	0.017452397805531902625
2	0.017452406426767058303
3	0.017452406437270700139
4	0.017452406437283497209
5	0.017452406437283512800
6	0.017452406437283512819
7	0.017452406437283512819

Tabela 8: Zaporedni približki za $\sin 1^\circ$.

Zato lahko nazadnje ponosno trdimo:

$$\sin 1^\circ = 0.017452406437283512819\ldots$$

Prava poslastica na gimnaziji pa je bilo pretvarjanje neskončno periodičnih decimalnih števil v ulomke. Število $x = 1.333\ldots$ lahko razumemo kot vsoto neskončne vrste

$$x = 1 + \left(\frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} + \ldots\right),$$

v kateri spoznamo geometrijsko vrsto s kvocientom $q = 1/10$ in prvim členom $3/10$. Zato je

$$x = 1 + \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 + \frac{3}{9} = \frac{4}{3}.$$

V tem primeru nam je profesor Karčnik pokazal krajšo pot: izrazil je iz decimalnega zapisa $10x = 13.333\ldots$ in odštel: $10x - x = 9x = 12$. Iz tega imamo takoj $x = 4/3$ brez opletanja in telovadbe z geometrijsko vrsto. Včasih je treba dano število pomnožiti s kako naravno potenco desetice. To je odvisno od tega, kako dolga je perioda danega decimalnega števila.

Vzemimo za primer $x = 2.\overline{35}$. Črta nad 35 pove, da se 35 ponavlja. Takoj ugotovimo, da je dobro izračunati $100x = 235.\overline{35}$. Ko enačbi odštejemo, imamo: $99x = 233$ in zato je $x = 233/99$.

Če pa ima število predperiodo, pridemo do rezultata v dveh korakih, na primer: $x = 13.23\overline{71}$. Če to število pomnožimo s 100, dobimo število prejšnjega tipa: $100x = 1\,323.\overline{71}$. Nato imamo $10\,000x = 132\,371.\overline{71}$ in po odštevanju: $9\,900x = 131\,048$ in nazadnje $x = 131\,048/9\,900 = 32\,762/2\,475$.

Profesor Karčnik ni trpel čvekanja, kjer ni bilo le-to nujno potrebno. Če ga je kdo začel hudo lomiti, je navadno vprašal: "Od kod ste pa vi prišli? Z Marsa, Jupitra ali kakega drugega planeta?" Marsu so astronomi, astrologi ali kdorkoli že dodelili znak ♂, Jupitru pa ♃. Ubogi Francoz na začetku ni prav dobro razumel, zakaj gre, pa so sošolci profesorju naglas povedali, da je pač prišel iz Francije. Profesor pa takoj: "Zaradi mene je lahko prišel tudi iz Amerike, znati je treba!" Sošolcu, ki je vsa 4 leta sedel na moji levi strani, je nekoč elegantno rekel: "Meni se pa zdi, da se malo preveč grejete v soncu svojega sošolca."

Če je kdo izustil na primer stavek "5 v 35 'gre' 7-krat", je navadno dal komentar: "Nič ne 'gre', vse še stoji." Nesrečnež bi moral reči: "5 v 35 'je' 7." Pri preprostih odštevanjih na črto, na primer

$$\begin{array}{r} 1865 \\ -987 \\ \hline \ldots 8 \end{array}$$

je kolegica vedno pričela takole: "7 in koliko je 15. 7 in 8 je 15, 8 zapišem, 1 štejem dalje." Toda že pri prvem stavku jo je prekinil z besedami: "Vam bom že dal 'in koliko'." Ker se tega "in koliko" ni in ni mogla odvaditi, ji je enkrat celo zapisal enojko v redovalnico. Zahteval je red na tabli in v zvezkih. Obvezno je bilo pisanje ulomkove črte na višini enačajev, razločno zapisovanje plusov in minusov in drugo. Domače naloge so bile redne. Morale so biti napisane brez napak, radiranja in prečrtovanja. Če kdo tega ni upošteval, jo je za kazen tudi do stokrat prepisoval. Nekoč si je nekdo moral vzeti kar nekaj dni *dopusta*, da je brezhibno opravil to pokoro. Red je pa s tem profesor le dosegel.

Računanje kvadratnega korena je bila tudi veščina, ki jo je bilo treba brezkompromisno obvladati. Še sreča, da nam je bilo vsaj pri kubičnem korenjenju prizanešeno. Nekaj let prej so to morali znati celo v osnovni šoli. Kdo bi še znal na tablo ali papir izračunati na primer $\sqrt{418\,609}$?

Že pri Pagonu smo v Cerknem računali takole, da smo v radikandu 418609 z desne proti levi razdelili števke v skupine po dve in dve: 41|86|09. Takoj ugotovimo, da bo rezultat imel tri cela mesta in da bo njegova prva števka z leve 6, ker je $6^2 = 36$ in to je največji celi kvadrat, ki ne presega 41. Kako pa naprej? Od prve skupine z leve smo odšteli 36, ostalo je 5 in tej smo pripisali z desne naslednjo skupino. Nato vzamemo dvakratnik števila 6, to je 12, ki mu pripišemo z desne največjo števko x, tako da število $12x \cdot x$ ne bo preseglo 586. To je število 4, ki ga z desne pripišemo delno dobljenemu rezultatu, ki se torej začne s 64. Nato od 586 odštejemo $124 \cdot 4 = 496$. Ostane število 90, kateremu pripišemo z desne skupino 09, tako da se ukvarjamo dalje s številom

9009. Sedaj poiščemo tako števko y, ki pripisano z desne dvakratniku števila 64, to je 128, ne bo preseglo števila 9009. V našem primeru je $y = 7$ in $1287 \cdot 7 = 9009$. Ostanek je sedaj 0 in imamo rezultat: $\sqrt{418\,609} = 647$.

$$
\begin{array}{l}
\sqrt{41|86|09} = 647 \\
\underline{-36} \\
\quad 58|6 : 124 \cdot 4 \\
\quad \underline{-49\,6} \\
\qquad 9\,00|9 : 1287 \cdot 7 \\
\quad \underline{-9\,00\,9} \\
\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

V primeru, ko se račun ne izide, s pripisovanjem po dve ničli izračunamo po opisanem postopku nekaj decimalk korena danega števila. Na univerzi smo spoznali še eno metodo, ki temelji na tako imenovani *iteraciji*, starodavni metodi, ki so jo poznali stari matematiki na Jutrovem in njegovi soseščini že pred več tisočletji. Za kvadratni koren pozitivnega števila a smo približno ocenili približek $x_0 > 0$ za $\sqrt{a}$. Nato smo izračunali naslednji približek

$$x_1 = \frac{1}{2}\left(x_0 + \frac{a}{x_0}\right).$$

To smo opravičili s tem, da če x_0 nismo ravno zadeli kot $\sqrt{a}$, saj najbrž ni kar $x_0^2 = a$, kar je isto kot $x_0 = a/x_0$, bo pa boljši približek x_1 po zgornji formuli povprečje x_0 in a/x_0. V naslednjem koraku številu x_1 podelimo vlogo prejšnjega števila x_0 in ta postopek nadaljujemo, dokler se nam zdi, da je še koristno. To pomeni, da zganjamo iteracijo:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right), \quad n = 0, 1, 3, \ldots$$

Izkaže se, da je popolnoma ista figa, kaj vzamemo za x_0. Če ga hudo zgrešimo, pač naredimo kakšen korak več. Očitno do korena pridemo samo s seštevanjem in deljenjem, kar se je nekoč dalo izvesti na pisarniških računskih strojčkih, takih na ročko ali pa na električnih s tipkami.

Preverimo, kako to deluje za $a = 418609$. Izračunali bomo še enkrat $\sqrt{418609}$. Rezultate zapišimo v tabelo. Računali smo na deset mest in račun

n	x_n
0	600.0000000
1	648.8408333
2	647.0026113
3	647.0000000
4	647.0000000

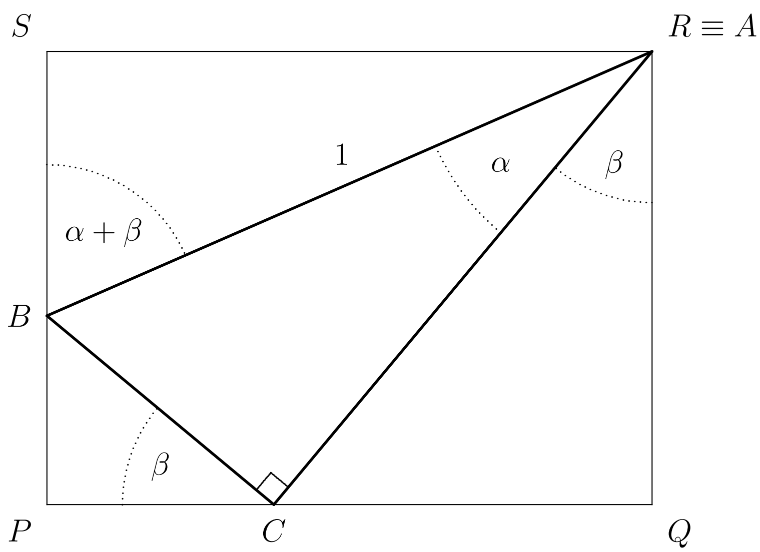
Tabela 9: Zaporedni približki za $\sqrt{418609}$.

se je hitro končal: $\sqrt{418609} = 647$.

Profesor Karčnik je bil za vsako šolsko uro prav zgledno pripravljen. V vseh štirih letih za razlago snovi ni pogledal v knjigo. Malo se mu je zataknilo edinole pri izpeljavi adicijskega izreka za funkciji sinus in kosinus. Narisal je trigonometrično krožnico v koordinatnem sistemu, izbral kota α in β, konstruiral njuno vsoto, nakar je začel vleči vzporednice h koordinatnima osema. Naenkrat je bilo na tabli črt toliko, da ni takoj našel pravih daljic, ki bi ponazarjale kotne funkcije izbranih kotov. Takrat je moral, da ne bi izgubljal časa, pogledati v učbenik, da je premostil težavo.

Dogodek mi je bil v nekakšno uteho, češ tudi profesorjem, ki že dolga leta ponavljajo eno in isto snov, se včasih zatakne. V drugem razredu gimnazije smo na veliko preganjali stereometrijo in za domačo nalogo je bilo treba izračunati polmera včrtane in očrtane krogle neki pravilni pokončni piramidi. Treba je bilo izbrati znotraj te nesrečne piramide primerna trikotnika in za enega izračunati polmer očrtanega kroga, za drugega pa polmer včrtanega kroga. Jaz, cepec, sem pa oba polmera izračunal za isti trikotnik in profesor Karčnik je to opazil. To še ne bi bilo najhuje, če ne bi vsaj polovica razreda imela iste napake. Najbrž so od mene verižno prepisali. Edinole sošolec Gruden iz Godoviča je imel pravilno rešeno nalogo. Kaj pa sedaj? Zase bi najraje videl, da bi se vdrl v tla, taka sramota me je doletela. Karčnik pa nam bi najraje podelil cveke, a je bil tisti dan mehkega srca in nam je odpustil. Sicer je pa beseda *stereometrija* grška: μέτρον pomeni *mera*, *merilo*, στερεός pa *odrevenel*, *otrpel*, *trden*, *trd*, *močan*, *čvrst*, *krepak* in še kaj. Otrpel in potrt pa sem ostal še ves dan.

Kasneje sem videl še več drugih izpeljav adicijskih izrekov za funkciji sinus in kosinus: geometrijskih in analitičnih. Morda je za bralca zanimiv naslednji, ker je zelo enostaven. Vzamemo pravokotni trikotnik s hipotenuzo 1, en oster kot pa naj bo α. Potem temu trikotniku očrtamo pravokotnik $PQRS$ tako, da trikotnikovo oglišče A ob kotu α sovpada s pravokotnikovim ogliščem R. Kot, ki ga kotu α priležna kateta oklepa s pravokotnikovo stranico RQ, naj bo β, kot kaže slika 48, kjer so označeni tudi drugi koti, ki jih za izpeljavo potrebujemo. Takoj lahko zapišemo:



Slika 48: Geometrijska izpeljava adicijskega izreka za funkciji sin in cos.

$$|AB| = 1\,, |BC| = \sin\alpha\,, |AC| = \cos\alpha\,, |PC| = \sin\alpha\cos\beta\,, |CQ| = \cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$|PB| = \sin\alpha\sin\beta\,, |BS| = \cos(\alpha+\beta)\,, |SA| = \sin(\alpha+\beta)\,, |QR| = \cos\alpha\cos\beta.$$

Iz očitnih enakosti

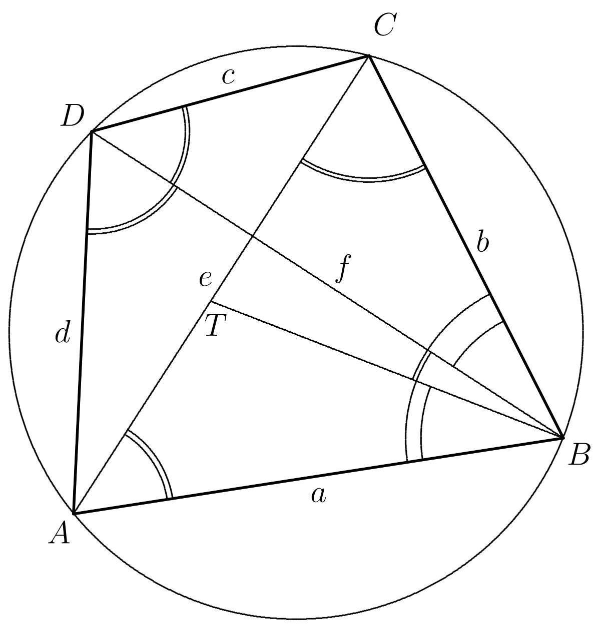
$$|SA| = |PQ| = |PC| + |CQ| \quad \text{in} \quad |BS| = |PS| - |PB| = |QR| - |PB|$$

takoj dobimo iskana adicijska izreka:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta\,,$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Adicijski izrek se da izpeljati tudi kako drugače. Zelo stara izpeljava uporablja



Slika 49: Izpeljava Ptolemajevega izreka.

Ptolemajev izrek, ki pove, da je v poljubnem konveksnem tetivnem štirikotniku vsota produktov nasprotnih stranic enaka produktu diagonal. Tetivni štirikotnik je včrtan krožnici (slika 49) in v njem sta dva nasprotna kota suplementarna. To smo izvedeli na gimnaziji pri geometriji kot posledico izreka o središčnem in obodnem kotu. Ptolemajev izrek pa sem prvič srečal šele v knjigi *Nihalo, prostor, delci*, ki jo je napisal moj, žal že pokojni profesor

France Križanič. Ni znano, kdo je prvi prišel do bistroumne ideje, pravilno izbrati točko T na diagonali e, da potem dokaz poteka s podobnostjo trikotnikov.

$$\triangle ABT \sim \triangle DBC\,, \quad \triangle ABD \sim \triangle TBC$$
$$\frac{|AT|}{a} = \frac{c}{f}\,, \quad \frac{|TC|}{b} = \frac{d}{f}$$
$$e = |AT| + |TC| = \frac{ac}{f} + \frac{bd}{f}$$
$$ef = ac + bd$$

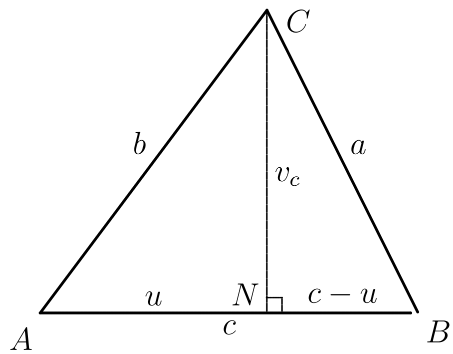
Nekega lepega dne, ko je bilo veselje živeti in na gimnaziji ni bilo na urniku kakšnega zoprnega predmeta, je bila na vrsti *Heronova formula* za ploščino trikotnika z danimi stranicami. V Cerknem nam je že Maks Pagon povedal to formulo, ni je pa izpeljal, čeprav to niti ni tako težko. Naredili smo le nekaj računskih vaj na to temo. Nihče si tudi danes ne predstavlja, kako je Heron iz Aleksandrije, Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς, ki je živel v prvem stoletju, znan tudi po mnogih tehničnih izumih, prišel do te formule, saj niso takrat imeli niti pripravnih zapisov matematičnih izrazov, kakršne imamo danes, niti kakšnega posebnega znanja algebre.

Skratka, tistega lepega dne je profesor Karčnik po svojem obveznem obredu na začetku ure narisal na tablo trikotnik ABC, označil njegove stranice a, b, c in višino v_c. Vedno lahko označimo trikotnik tako, da višina v_c iz oglišča C pade na stranico c, denimo v točki N, ne pa na njen podaljšek. Označimo $|AN| = u$. S tem je seveda $|NB| = c - u$. Zrli smo na tablo, kjer se nam je smehljala brezhibno narisana slika 50. Nato smo dvakrat uporabili Pitagorov izrek:

$$v_c^2 = b^2 - u^2, \quad v_c^2 = a^2 - (c-u)^2.$$

Po izenačenju smo hitro dobili

$$u = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}.$$



Slika 50: Izpeljava Heronove formule.

Nato smo se lotili ploščine p trikotnika ABC. Profesor je nekoga vprašal, kako se jo izračuna in po tabli so se zvrstile formule:

$$p = \frac{cv_c}{2}, \quad 4p = 2cv_c, \quad 16p^2 = 4c^2v_c^2 = 4c^2(b^2 - u^2).$$

Sledila je prava mojstrovina:

$$16p^2 = 4c^2\left(b^2 - \frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4c^2}\right) = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2.$$

Nadaljevalo se je z razstavljanjem razlike kvadratov, potem ko je bil moral nekdo naglas povedati ustrezno pravilo:

$$16p^2 = (2bc + b^2 + c^2 - a^2)(2bc - b^2 - c^2 + a^2).$$

Še tako v matematiki trda glava je morala opaziti, da se zgornji izraz da zapisati s samimi kvadrati:

$$16p^2 = [(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2].$$

Temu je spet sledilo razstavljanje:

$$16p^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c). \tag{18}$$

Sedaj je bilo na dlani, da je smiselno vpeljati polovični obseg trikotnika za novo količino:

$$s = \frac{a+b+c}{2}.$$

Takoj lahko namreč izrazimo

$$s - a = \frac{b + c - a}{2}, \quad s - b = \frac{a + c - b}{2}, \quad s - c = \frac{a + b - c}{2}.$$

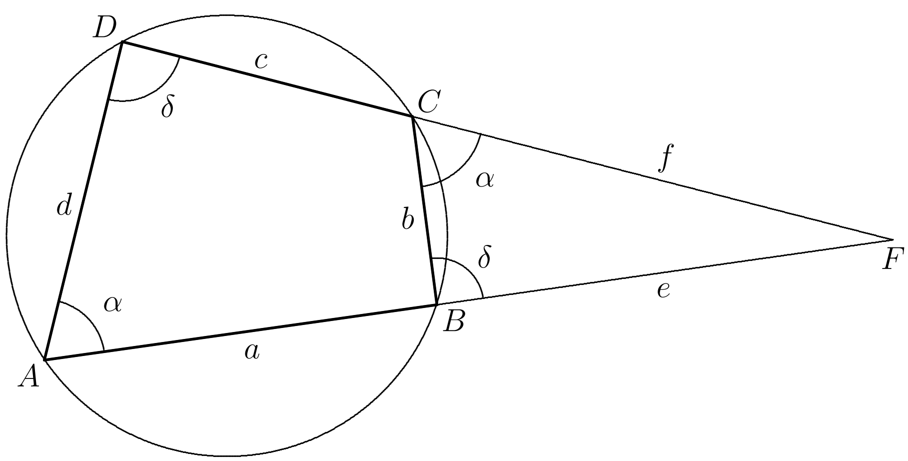
S tem lahko poenostavimo:

$$16p^2 = 2s \cdot 2(s - a) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - c).$$

Po krajšanju in korenjenju je bila pred nami Heronova formula:

$$p = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}, \quad s = \frac{a + b + c}{2}. \tag{19}$$

Zanimivo pa je, da za ploščino tetivnega štirikotnika dobimo podobno formulo, znano *Brahmaguptovo formulo*, ki pa je na idrijski gimnaziji nismo obravnavali, pa tudi drugje ne, tako da je popolnoma od posameznika odvisno, če jo pozna ali ne.



Slika 51: Še ena izpeljava Brahmaguptove formule.

Vzemimo štirikotnik $ABCD$, kakršnega kaže slika 51. Stranice označimo z a, b, c, d, notranja kota, ki ju bomo potrebovali, pa z α in δ. Brez škode za splošnost bomo obravnavali primer štirikotnika, pri katerem se podaljška stranic a in c sekata v točki, ki jo označimo z F. Stranici trikotnika BFC, ki imata skupno oglišče F, označimo z e in f. Če bi se noben par podaljškov nasprotnih stranic ne sekal, bi imeli pravokotnik, za katerega pa Brahmaguptova formula velja, kot bomo videli.

V tetivnem štirikotniku sta si dva nasprotna notranja kota suplementarna, zato veljata relaciji

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle BCF = \alpha, \quad \sphericalangle ADC = \sphericalangle FBC = \delta.$$

Trikotnika BFC in DFA sta si očitno podobna, zato veljata razmerji:

$$\frac{e}{b} = \frac{c+f}{d}, \quad \frac{f}{b} = \frac{a+e}{d}.$$

Če ju seštejemo in odštejemo in iz dobljenih rezultatov izrazimo $e+f$ ter $e-f$, dobimo:

$$e+f = \frac{b(a+c)}{d-b}, \quad e-f = \frac{b(c-a)}{d+b}. \tag{20}$$

Ker so stranice trikotnika AFD očitno d/b-krat daljše kot stranice trikotnika BFC, je ploščina p_2 trikotnika AFD ustrezno d^2/b^2-krat večja kot ploščina p_1 trikotnika AFC. Zato imamo relaciji

$$p = p_2 - p_1, \quad p_2 = \frac{d^2}{b^2}\, p_1,$$

iz katerih sledi izraz

$$p = \frac{d^2-b^2}{b^2}\, p_1.$$

Zaradi udobnejšega računanja si oglejmo izraz

$$16p^2 = (d-b)^2(d+b)^2 \cdot \frac{16p_1^2}{b^4}.$$

Po formuli (18) izrazimo

$$16p_1^2 = (e+f+b)(e+f-b)(b+e-f)(b+f-e).$$

Iz vsakega faktorja izpostavimo b:

$$16p_1^2 = b^4 \left(\frac{e+f}{b} + 1\right) \left(\frac{e+f}{b} - 1\right) \left(1 + \frac{e-f}{b}\right) \left(1 + \frac{f-e}{b}\right).$$

Z upoštevanjem relacij (20) dobimo najprej

$$16p_1^2 = \left(\frac{a+c}{d-b} + 1\right) \left(\frac{a+c}{d-b} - 1\right) \left(1 + \frac{c-a}{d+b}\right) \left(1 + \frac{a-c}{d+b}\right),$$

nato pa

$$16p^2 = (d-b)^2(d+b)^2 \cdot \left(\frac{a+c}{d-b} + 1\right) \left(\frac{a+c}{d-b} - 1\right) \left(1 + \frac{c-a}{d+b}\right) \left(1 + \frac{a-c}{d+b}\right).$$

Prvi in drugi faktor na desni pomnožimo z $d-b$, tretji in četrti pa z $d+b$. Tako dobimo

$$16p^2 = (a+c+d-b)(a+c-d+b)(c-a+d+b)(d+b+a-c).$$

Z vpeljavo polovičnega obsega $s = (a+b+c+d)/2$ tetivnega štirikotnika $ABCD$ lahko izrazimo

$$s-a = \frac{b+c+d-a}{2}, \quad s-b = \frac{c+d+a-b}{2},$$

$$s-c = \frac{d+a+b-c}{2}, \quad s-d = \frac{a+b+c-d}{2}.$$

Torej lahko prepišemo

$$16p^2 = 2(s-a) \cdot 2(s-b) \cdot 2(s-c) \cdot 2(s-d).$$

Po krajšanju in korenjenju je pred nami spet *Brahmaguptova formula*:

$$p = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}, \quad s = \frac{a+b+c+d}{2}.$$

V izjemnem primeru, ko je tetivni štirikotnik pravokotnik s stranicama a in b, vzamemo $c = a$ in $d = b$ in

$$s = a+b, \quad s-a = b, \quad s-b = a, \quad s-c = b, \quad s-d = a.$$

Potem je

$$p = \sqrt{b \cdot a \cdot b \cdot a} = ab,$$

kar je seveda pravilen rezultat.

Tetivni štirikotnik preide v trikotnik, če na primer $d \to 0$. Tedaj očitno Brahmaguptova formula za ploščino tetivnega štirikotnika preide v Heronovo formulo za ploščino trikotnika.

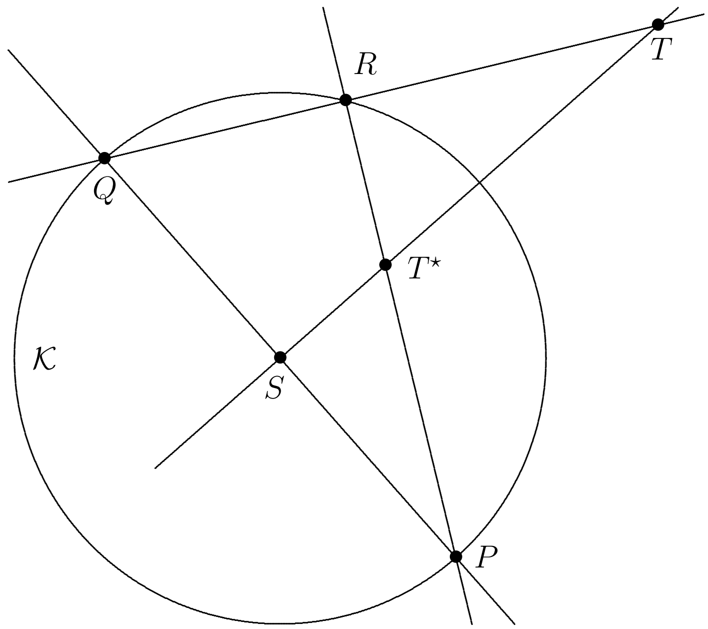
Marsikaj zanimivega iz zgodovine matematike lahko preberemo v prej omenjeni Križaničevi knjigi. Z imenom *Ptolemaj* pa je križ. Nekoč smo se v šoli učili o Ptolomeju in njegovem starodavnem geocentričnem sistemu. Nato se je kar naenkrat pojavilo ime Ptolemej, sedaj pa še Ptolemaj. Zakaj tako? V takih primerih je treba pogledati izvoren zapis. Po grško se piše Πτολεμαῖος, polatinjeno Ptolemaeus. Morda ravno zato novejša klasična filologija priporoča obliko Ptolemaj. Angleži uporabljajo obliko Ptolemy, Nemci pa Ptolemäus.

Kaj je sedaj s tem Ptolemajevim izrekom? Ali ga bomo dokazali ali ne? Lotimo se zadeve malo drugače, kakor je opisano v Križaničevi knjigi *Nihalo, prostor, delci*. Zakaj pa ne bi problema malo zapletli, če ga lahko! Zrcaljenja na krožnici sicer na gimnaziji nismo obravnavali, je pa koristno nekaj vedeti o tem.

Dana je krožnica $\mathcal{K}$ s središčem v točki S in polmerom r. Dani točki T v ravnini krožnice $\mathcal{K}$ priredimo točko $T^\star$ na poltraku, ki ima krajišče v S in poteka skozi T tako, da velja

$$|ST| \cdot |ST^\star| = r^2.$$

Točka $T^\star$ je očitno s točko T enolično določena. Poleg tega velja še naslednje: $(T^\star)^\star = T^{\star\star} = T$; če je $|ST| = r$, je $T = T^\star$; če je $|ST| > r$, je $|ST^\star| < r$; če je $|ST| < r$, je $|ST^\star| > r$. Neskončno oddaljeni točki priredimo pri tem točko S, točki S pa neskončno oddaljeno točko. To je smiselno, saj se z neomejenim naraščanjem razdalje $|ST|$ razdalja $|ST^\star|$ neomejeno manjša proti 0 in obratno, ko razdaljo $|ST|$ zmanjšujemo proti 0, razdalja $|ST^\star|$ naraste preko vseh meja. Točka $T^\star$ je zrcalna slika točke T na krožnici $\mathcal{K}$.



Slika 52: Zrcaljenje na krožnici.

Kako konstruiramo točko $T^\star$ dane točke T pri dani krožnici $\mathcal{K}$? Načinov je, kot po navadi, več. Najbolj mi je všeč tista, ki deluje v vsakem primeru: Skozi T in S načrtamo premico in pravokoten premer PQ krožnice $\mathcal{K}$ na to premico. Nato konstruiramo premico skozi točki Q in T, ki seka $\mathcal{K}$ v točki R. Premica skozi točki R in P seka že konstruirano premico skozi točki T in S v iskani točki $T^\star$.

Ker se trikotnika $PST^\star$ in TSQ ujemata v dveh kotih, sta si podobna. Zato imamo enakost $|ST^\star|/|SP| = |SQ|/|ST|$ in ker je $|SP| = |SQ| = r$, imamo takoj enakost $|ST| \cdot |ST^\star| = r^2$, ki potrjuje pravilnost konstrukcije.

Pomembna lastnost zrcaljenja na krožnici je v tem, kaj se pri tem zgodi s premicami in krožnicami v ravnini krožnice $\mathcal{K}$. Odgovor je preprost: Zrcaljenje na krožnici preslika unijo premic in krožnic nase. Pri tem lahko iz premice nastane krožnica ali premica, iz krožnice pa tudi. Točke na zrcalu ostanejo negibne.

Morda še najlaže to trditev dokažemo s kompleksnimi števili. Krožnica $\mathcal{K}$ naj ima središče v točki 0 kompleksne ravnine. Točki T ustreza natanko določeno kompleksno število z. V primeru $T \neq S$ je $z \neq 0$ in lahko zapišemo $z = |z| \exp(i\varphi)$, kjer je φ argument kompleksnega števila z. Kompleksno število $\exp(i\varphi)$ lahko jemljemo za krajši zapis izraza $\cos\varphi + i \sin\varphi$, torej

$$\exp(i\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Potem je kompleksno število $z^\star = r^2/\bar{z}$ tisto, ki ustreza zrcalni točki $T^\star$ pri zrcaljenju točke T na $\mathcal{K}$. Pri tem pomeni $\bar{z}$ kompleksnemu številu z konjugirano kompleksno število. Velja namreč preprost račun:

$$z^\star = \frac{r^2}{\bar{z}} = \frac{r^2}{\overline{|z| \exp(i\varphi)}} = \frac{r^2}{|z| \exp(-i\varphi)} = \frac{r^2}{|z|} \exp(i\varphi).$$

Iz tega razberemo, da imata kompleksni števili z in $z^\star$ isti argument φ in zato ležita na istem poltraku s krajiščem v točki 0 ter da velja $|z^\star| = r^2/|z|$. Torej velja $|z| \cdot |z^\star| = r^2$. Torej je res $z^\star$ zrcalna točka točke z na krožnici $|z| = r$. Posebej postavimo $\infty^\star = 0$ in $0^\star = \infty$.

Enačba premice v kompleksni ravnini ima obliko

$$\bar{a}z + a\bar{z} + c = 0\,,$$

kjer je $a \neq 0$ kompleksno, c pa realno število. Krožnica v kompleksni ravnini pa ima obliko:

$$z\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0\,,$$

kjer je prav tako a kompleksno, c pa realno število. Obe krivulji lahko obravnavamo enotno:

$$Kz\bar{z} + \bar{a}z + a\bar{z} + c = 0\,.$$

Za $K = 0$ imamo premico, za realni $K \neq 0$ pa krožnico. Prezrcaliti to krivuljo na krožnici $|z| = r$ pa pomeni, da moramo v enačbi zamenjati spremenljivko

z s spremenljivko $r^2/\bar{z}$. Dobimo:

$$K\frac{r^2}{\bar{z}}\frac{r^2}{z}+\bar{a}\frac{r^2}{\bar{z}}+a\frac{r^2}{z}+c=0.$$

Po odpravi ulomkov je pred nami enačba

$$cz\bar{z}+\bar{a}r^2z+ar^2\bar{z}+Kr^4=0\,,$$

ki je iste oblike kot pred zamenjavo spremenljivke. Predstavlja bodisi premico, ko je $c=0$, ali pa krožnico za $c\neq 0$.

Na fakulteti smo spoznali še več. Vsako transformacijo ravnine kompleksnih števil oblike

$$z^\star=\frac{az+b}{cz+d}\,,\ ad-bc\neq 0\,,$$

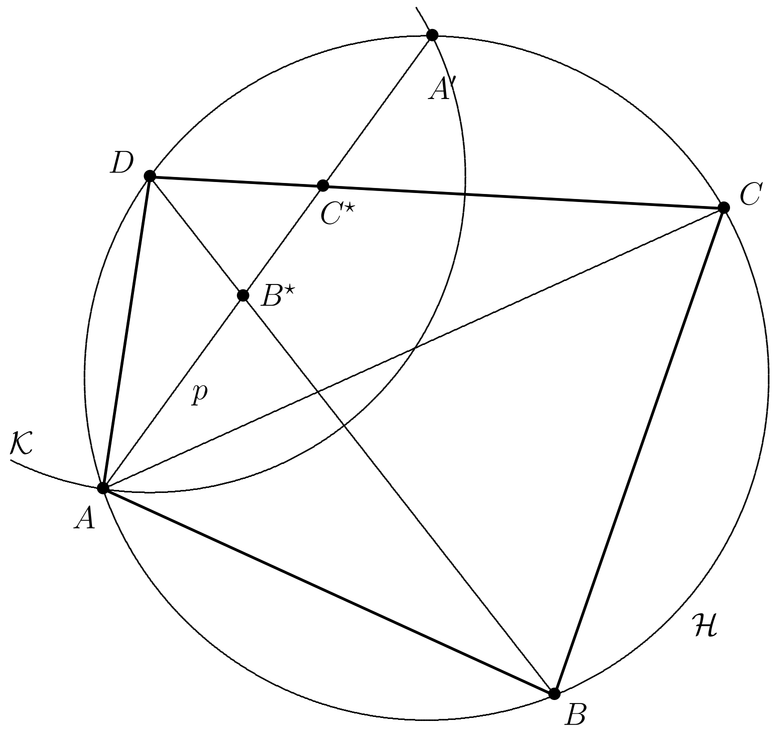
imenujemo linearno-lomljena ali Möbiusova transformacija. Pri tem so a,b,c,d sicer poljubna kompleksna števila. Tudi taka transformacija ima lastnost, da preslika unijo premic in krožnic nase. To se dokaže na enak način kot pri zrcaljenju na krožnici $|z|=r$. V tem primeru gre za linearno-lomljeno transformacijo s koeficienti $a=0,b=r^2,c=1,d=0$ in še kompleksno konjugacijo, ki pa predstavlja zrcaljenje prek realne osi v kompleksni ravnini.

Sedaj pa vzemimo krožnici $\mathcal{H}$ včrtan tetivni štirikotnik $ABCD$ in mu skozi oglišče A načrtajmo krožnico $\mathcal{K}$ s središčem v oglišču D (slika 53). Nato na $\mathcal{K}$ zrcalimo krožnico $\mathcal{H}$ in s tem točke A,B,C,D. Točka A ostane pri miru, točka D se prezrcali v neskončnost, kar pomeni, da se $\mathcal{H}$ prezrcali v premico p skozi A in drugo presečišče obeh krožnic. Zrcalni sliki $B^\star$ in $C^\star$ točk B oziroma C sta tudi na p, in sicer v presečiščih premic skozi D in B oziroma D in C. Po definicije zrcaljenja na $\mathcal{K}$ velja:

$$|DB|\cdot|DB^\star|=|DC|\cdot|DC^\star|=|DA|^2.$$

Iz teh relacij pa sledijo razmerja:

$$\frac{|DA|}{|DB^\star|}=\frac{|DB|}{|DA|},\frac{|DB^\star|}{|DC^\star|}=\frac{|DC|}{|DB|},\frac{|DA|}{|DC^\star|}=\frac{|DC|}{|DA|}.$$



Slika 53: Zrcaljenje na krožnici.

Sedaj uporabimo izrek o podobnih trikotnikih, ki pravi, da sta si trikotnika podobna, če ujemata v enem kotu in v razmerju stranic, ki ta kot oklepata. Iz zgoraj napisanih razmerij namreč sledi, da so si podobni naslednji pari trikotnikov: $DAB^{\star}$ in DBA, $DB^{\star}C^{\star}$ in DCB ter $DAC^{\star}$ in DCA. Zato lahko zapišemo razmerja:

$$\frac{|AB^{\star}|}{|AD|} = \frac{|AB|}{|BD|}, \frac{|B^{\star}C^{\star}|}{|B^{\star}D|} = \frac{|BC|}{|CD|}, \frac{|AC^{\star}|}{|AD|} = \frac{|AC|}{|CD|}.$$

Ker velja enakost

$$|AB^{\star}| + |B^{\star}C^{\star}| = |AC^{\star}|,$$

imamo:

$$\frac{|AB| \cdot |AD|}{|BD|} + \frac{|BC| \cdot |B^{\star}D|}{|CD|} = \frac{|AC| \cdot |AD|}{|CD|}$$

Upoštevajmo še enakost $|B^\star D| = |AD|^2/|BD|$, pa dobimo:

$$\frac{|AB|\cdot|AD|}{|BD|} + \frac{|BC|\cdot|AD|^2}{|CD|\cdot|BD|} = \frac{|AC|\cdot|AD|}{|CD|}.$$

Pomnožimo jo z $|BD|\cdot|CD|/|AD|$ in končno imamo:

$$|AB|\cdot|CD| + |BC|\cdot|AD| = |AC|\cdot|BD|.$$

S tem pa je znameniti Ptolemajev izrek še enkrat dokazan.

Podobnostne izreke in vse, kar zraven spada, smo morali na gimnaziji znati kot pesmico. Podobnostni izrek, ki pravi, da sta si dva trikotnika podobna, če se ujemata v razmerju vseh treh stranic, smo v prvem letniku celo prepevali na znano melodijo iz filmske serije Bonanza:

Dva trikotnika sta si podobna,
če se ujemata v razmerju vseh treh stranic,
lala, la, lala, la, lala, lala, la ...

Baje se je ta napev na gimnaziji obdržal še nekaj časa po našem maturantskem plesu, maturi, valeti in maturantskem izletu v Dubrovnik.

Kompleksna števila so mi bila všeč takoj, ko nam jih je profesor Karčnik prvič predstavil. Čudno ni bilo nič, da sem jih na koncu vzel za maturitetno nalogo. Že od vsega začetka nam je tu pa tam omenil, da so za realnimi števili še in še števila take in drugačne vrste in da je vse skupaj celo uporabno. Ni bilo pa nikomur jasno, kako uporabno. Morda uporabno za dokaz obstoja Boga? Saj nam je profesor Mozetič pojasnil dva znamenita Descartesova dokaza. Descartes pa ni bil samo filozof, bil je tudi matematik.

Descartes je najprej dokazal, da on kot tak sploh obstaja. Razmišljal je in dvomil o obstoju vsega, o obstoju Boga in celo o obstoju svojega lastnega telesa. Nato se mu je pobliskalo. "Če dvomim in razmišljam, potem mora obstajati tudi tisti, ki to počne", torej sem, obstajam. To je strnil v znameniti latinski stavek: "Cogito, ergo sum". Nato se je lotil dokaza o obstoju Boga.

Nekako takole je razmišljal: "Vsak človek je nepopoln, toda v sebi čuti idejo o popolnosti. Ker je človek nepopoln, do popolnosti ne more sam. Torej mora obstajati nekdo, ki je popoln. In to je Bog." Nikoli mi ni bilo jasno, kako to, da tako bister um, kot je bil Descartesov, na Švedskem ni znal dokazati obstoja mraza in da je toplina potrebna za obstoj človeka.

Profesor matematike je pogosto omenjal besedo *kompleksen*. Kaj neki to je, smo se spraševali. O kompleksih smo slišali nekaj malega le pri kemiji. Ko pa smo spoznali, da bi radi reševali kvadratne enačbe popolnoma na splošno, se nam vpeljava kompleksnih števil ni zdela več tako tuja, četudi bi se drugače imenovala. Da je i imaginarna enota, za katero velja $i^2 = -1$, smo nekako privzeli. "Pa naj bo", smo si mislili, "matematiki že vedo". Nekaterim so bila kompleksna števila samo ena pokora več na svetu, saj je človek samo še laže dobil kakšno slabo oceno pri matematiki. Dejansko tudi v zgodovini matematike poznamo primere ljudi, ki so na ta čudna števila gledali postrani in jih odklanjali, ker niso v njih videli nobene koristi.

Nekaterim študentom je težko pojasniti že to, kaj so naravna in cela števila. Pri racionalnih številih se srečajo s tujko, pri iracionalnih pa tudi. Ko pa so na vrsti realna števila, pa radi vse skupaj pomešajo. Oh, še ena tujka! Vse omenjene tujke je treba vzeti kot pridevnike in se ni treba pretirano ozirati na to, kaj pomenijo. Potem je morda laže. Vsaka reč mora imeti neko ime. Ali se morda deklica ali žena vpraša, kaj pomeni njeno ime, če je na primer Agata? Pa se lahko z njo vse pomenimo. V resnici je Agata grškega izvora: ἀγαθή pomeni na primer *dobra, vrla, plemenita, hrabra*. Besede *racionalen, iracionalen* in *realen* so strokovni matematični izrazi in jih ne prevajamo, čeprav se je že zgodilo, da je lektor v svoji preveliki vnemi hotel imeti v matematiki *razumska, nerazumska* in *resnična števila*.

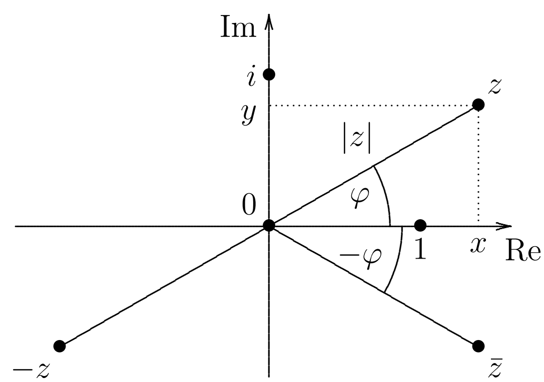
Kaj imamo od tega, če za rešitev kvadratne enačbe

$$z^2 - 6z + 25 = 0$$

dobimo rešitvi $z_1 = 3 - 4i$ in $z_1 = 3 + 4i$? Morda sem tukaj prvič spoznal bistvo matematike, ki je v njeni svobodi. Svoboda je v tem, da si sama definira nove pojme, postavlja nova pravila in študira lastnosti in odnose med njimi. V obsegu realnih števil je omenjena kvadratna enačba nerešljiva. Prepišemo jo namreč lahko v obliko

$$(z-3)^2 + 16 = 0.$$

Ker pa je vsota na levi strani te enačbe za vsako realno število z pozitivna, enačba rešitve v obsegu realnih števil nima. Tu si matematika privošči svobodo: obseg realnih števil razširi do večjega obsega, obsega kompleksnih števil. Vsako kompleksno število z je oblike $z = x + yi$, kjer sta x in y realni števili. Prvo, x, imenujemo realni del, drugo, y, pa imaginarni del kompleksnega števila z. S kompleksnimi števili računamo tako kot z realnimi, upoštevamo le zvezo $i^2 = -1$. S tem postane število i popolnoma legitimno, ne pa *namišljeno*, po francosko *imaginaire*, od koder izhaja beseda *imaginaren*. Kompleksnemu številu z konjugirano kompleksno število je $\bar{z} = x - yi$, absolutna vrednost pa $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$.

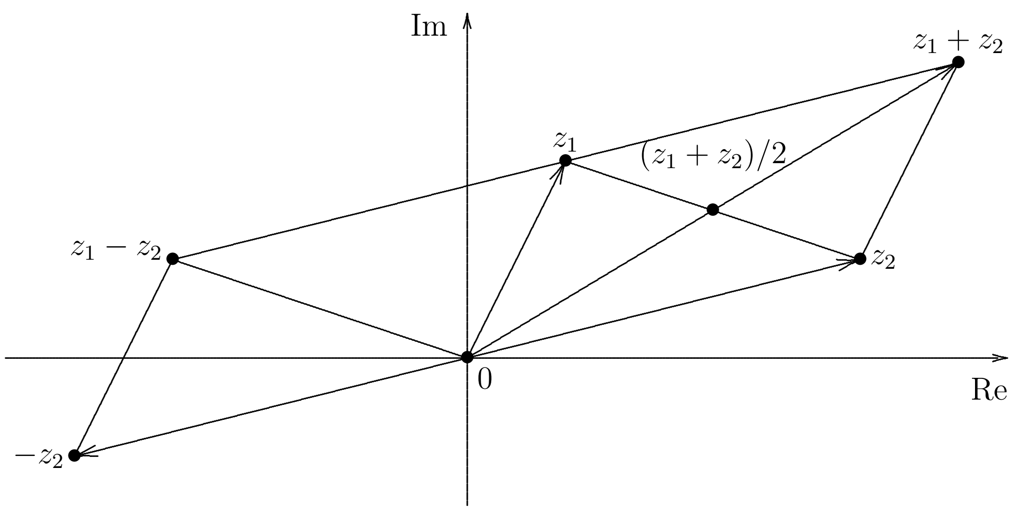


Slika 54: Upodobitev kompleksnih števil.

Poleg tega pa kompleksna števila lahko upodabljamo kot točke v koordinatni ravnini z med seboj pravokotnima koordinatnima osema, ki jima pravimo *realna* in *imaginarna* os (slika 54). Na realni osi so točke, ki ustrezajo realnim številom $z = x$, na imaginarni osi pa so točke, ki ustrezajo čisto imaginarnim številom, ki imajo obliko $z = yi$. Vsakemu kompleksnemu številu

$z = x + yi$ lahko v tem sistemu priredimo natančno določeno točko z absciso x in ordinato y. Zato tej ravnini rečemo *kompleksna ravnina*. Obratno pa tudi, vsaka točka v tej ravnini ima natančno določeno absciso x in ordinato y, ki sta realni števili, in z njima sestavimo kompleksno število $z = x + yi$. Zato v kompleksni ravnini točk in kompleksnih števil ne razločujemo.

Nenegativno število $|z|$ pa predstavlja razdaljo točke z od točke 0, koordinatnega izhodišča. Če vzamemo točko 0 za pol in os x za polarno os v tej ravnini, potem ima točka $z \neq 0$ svoj polarni kot φ, ki mu pravimo *argument* kompleksnega števila z. Argument ni enolično določen s točko z, saj mu lahko prištevamo ali odštevamo poljubne mnogokratnike polnega kota 2π.



Slika 55: Grafično seštevanje in odštevanje kompleksnih števil.

Kompleksna števila v kompleksni ravnini seštevamo in odštevamo po preprostem paralelogramskem pravilu, tako kot vektorje (slika 55). Pri tem razliko kompleksnih števil z_1 in z_2 definiramo z vsoto takole: $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$. Točka $(z_1 + z_2)/2$ je središče daljice s krajiščema z_1 in z_2.

Težišče z_T trikotnika z oglišči v poljubnih točkah kompleksne ravnine zlahka dobimo (slika 56). Vemo, da je razpolovišče daljice med z_2 in z_3 v točki $(z_2 + z_3)/2$ in daljice med z_1 in z_3 v točki $(z_1 + z_3)/2$. Do težišča z_T lahko pridemo na dva načina:

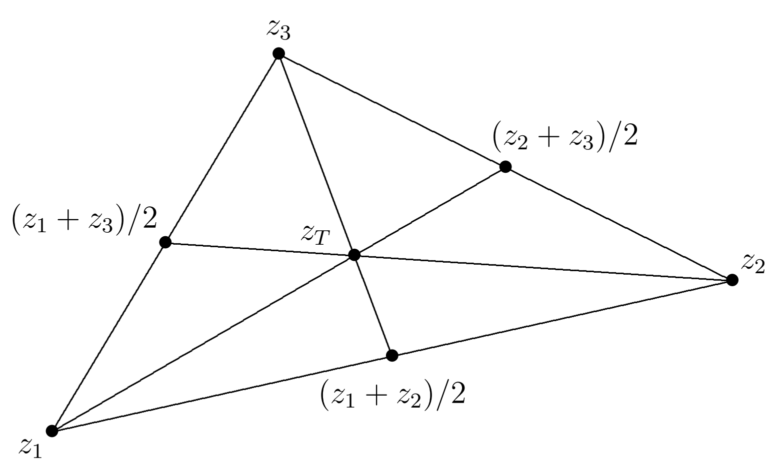
$$z_T = z_1 + \lambda((z_2 + z_3)/2 - z_1) = z_2 + \mu((z_1 + z_3)/2 - z_2).$$

Pri tem sta λ in μ pozitivni konstanti, ki ju je treba določiti. Po preureditvi dobimo naslednjo relacijo:

$$(2 - 2\lambda - \mu)z_1 - (2 - \lambda - 2\mu)z_2 + (\lambda - \mu)z_3 = 0.$$

Ker mora veljati za poljubne točke z_1, z_2, z_3, morajo biti številski koeficienti pred z_1, z_2, z_3 enaki 0. To pa pomeni $\lambda = \mu$ in s tem $3\lambda = 2$. Zato je $\lambda = \mu = 2/3$. Torej dobimo za težišče:

$$z_T = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$



Slika 56: Težišče trikotnika.

Prav tako bi lahko uporabili točko $(z_1 + z_2)/2$ in ugotovili, da se vse tri težiščnice sekajo v skupni točki.

Za množenje in deljenje pa se bolj obneseta polarni oziroma eksponentni zapis kompleksnih števil:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|\exp(i\varphi).$$

Če je namreč še

$$w = |w|(\cos\psi + i\sin\psi) = |w|\exp(i\psi)\,,$$

potem takoj dobimo

$$zw = |z|\cdot|w|(\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) = |z|\exp(i(\varphi+\psi))\,,$$
$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}(\cos(\varphi-\psi) + i\sin(\varphi-\psi)) = \frac{|z|}{|w|}\exp(i(\varphi-\psi)).$$

Pri tem sta seveda z in w od 0 različni kompleksni števili.

Če sedaj poljubno kompleksno število $z = |z|\exp(i\varphi) \neq 0$ pomnožimo s $\cos\alpha + i\sin\alpha = \exp(i\alpha)$, dobimo

$$z' = |z|\exp(i\varphi)\cdot\exp(i\alpha) = |z|\exp(i(\varphi+\alpha)).$$

S tem smo pravzaprav zasukali točko z okrog točke 0 za kot α v kompleksni ravnini (slika 57). Rezultat zasuka je točka z'. Če sedaj pišemo $z = x + yi$ in $z' = x' + y'i$, imamo:

$$x' + y'i = (x+yi)(\cos\alpha + i\sin\alpha) = (x\cos\alpha - y\sin\alpha) + i(x\sin\alpha + y\cos\alpha).$$

To pomeni:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{aligned}$$

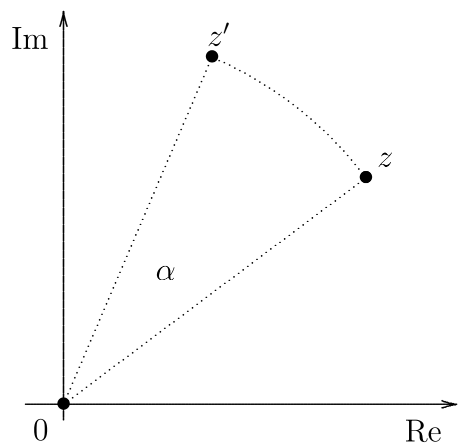
Očitno pa sta dobljeni zvezi pravilni tudi v primeru $x = y = 0$. Če točkama z oziroma z' priredimo povratno enolično stolpca

$$z = x + yi \mapsto (x,y) \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},\ z' = x' + y'i \mapsto (x',y') \mapsto \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix},$$

potem lahko pišemo v matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

S tem smo našli matriko rotacije točke okrog koordinatnega izhodišča za kot α in s tem pravilo, kako se izražata pravokotni koordinati (x', y') zasukane točke s pravokotnima koordinatama (x, y) dane točke.



Slika 57: Rotacija okoli koordinatnega izhodišča.

Stremeli smo in se čudili, ko nam je profesor Ziegler[81] na tako eleganten način razvil matriko rotacije. Seveda ni pozabil povedati, da rotaciji za kota α in β zapored pomenita rotacijo za kot $\alpha + \beta$ in da temu ustreza produkt matrik rotacij za posamezna kota in da je to v popolnem soglasju z adicijskima izrekoma:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \end{bmatrix} =$$

[81]Milan Ziegler (1905–1984) – slovenski profesor matematike.

$$= \begin{bmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{bmatrix}.$$

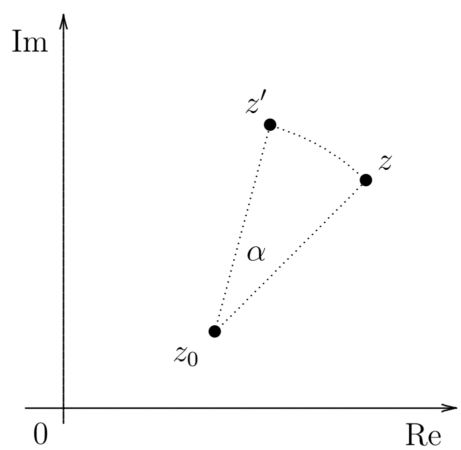
Rotaciji za kot $-\alpha$ ustreza matrika

$$\begin{bmatrix} \cos(-\alpha) & -\sin(-\alpha) \\ \sin(-\alpha) & \cos(-\alpha) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix},$$

ki je matriki rotacije za kot α inverzna. V posebnem primeru lahko množenje z imaginarno enoto i pomeni zasuk okrog koordinatnega izhodišča za pravi kot in ustrezna rotacijska matrika je

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Torej pri rotaciji za pravi kot v pozitivni smeri preide točka s koordinatama (x, y) v točko s koordinatama $(-y, x)$.



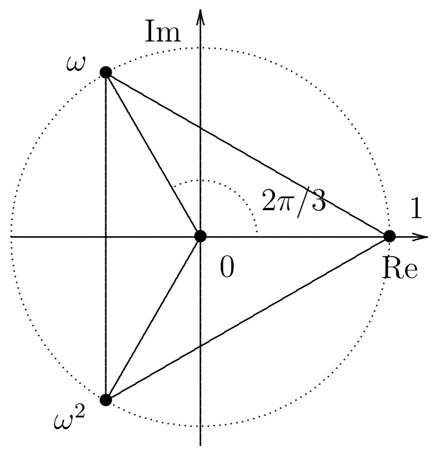
Slika 58: Rotacija okoli poljubne točke.

Kako pa je z rotacijo točke z okoli poljubne točke z_0 v kompleksni ravnini (slika 58)? Najprej točko z_0 premaknemo v točko 0 s transformacijo $z \mapsto z - z_0$, nato opravimo rotacijo okoli 0 za kot α, nato pa zopet s premikom $z \mapsto z + z_0$ postavimo stvari na pravo mesto. Torej:

$$z' = (z - z_0)\exp(i\alpha) + z_0.$$

Denimo, da so v kompleksni ravnini dane točke z_1, z_2, z_3, pozitivno orientirano. Zanima nas, kdaj so to oglišča enakostraničnega trikotnika.

Oglišča enakostraničnega trikotnika v kompleksni ravnini zagotovo določajo koreni enačbe $z^3 - 1 = 0$ (slika 59), ki jim pravimo *tretji koreni enote*. En koren je očitno $z_1 = 1$, druga dva pa sta konjugirano kompleksna: $z_2 = \exp(2\pi i/3) = (-1 + i\sqrt{3})/2$ in $z_3 = \exp(-2\pi i/3) = \exp(4\pi i/3) = (-1 - i\sqrt{3})/2$. Označimo: $\omega = \exp(2\pi i/3)$. Koreni enačbe $z^3 - 1 = 0$ so potem $z_1 = 1, z_2 = \omega, z_3 = \omega^2$. Ker je $0 = \omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1)$ in $\omega \neq 1$, velja enakost $\omega^2 + \omega + 1$ oziroma $\omega^2 = -\omega - 1$. Množenje kompleksnega števila z z ω pomeni seveda rotacijo za kot $2\pi/3$ okoli točke 0.



Slika 59: Tretji koreni enote.

Vzemimo sedaj splošni primer točk z_1, z_2, z_3 v kompleksni ravnini. Orientirane naj bodo pozitivno. Zasukajmo točko z_2 za kot $2\pi/3$ v pozitivni smeri okoli točke z_1 (slika 60). Dobimo točko z', ki jo lahko izrazimo v obliki:

$$z' = z_1 + \omega(z_2 - z_1).$$

Očitno je trikotnik z oglišči z_1, z_2, z_3 enakostraničen natanko tedaj, ko je štirikotnik z_1, z_2, z_3, z' romb. To pa pomeni natanko tedaj, ko je $z' - z_1 = z_3 - z_2$. Tako imamo potreben in zadosten pogoj, da je trikotnik z oglišči

z_1, z_2, z_3 enakostraničen: $\omega(z_2 - z_1) = z_3 - z_2$. Pogoj prepišemo v obliko:

$$\omega z_1 - (1+\omega)z_2 + z_3 = \omega z_1 + \omega^2 z_2 + z_3 = 0.$$

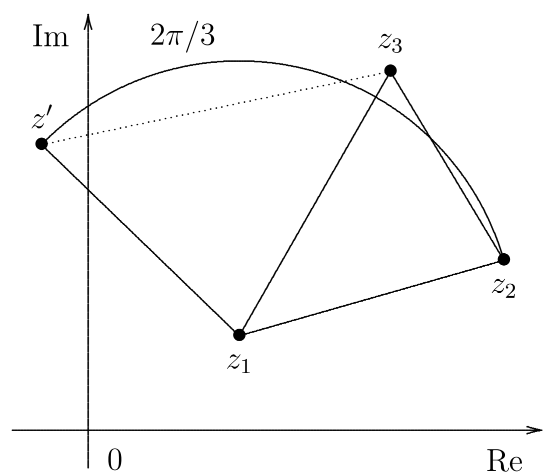
Pogoj pomnožimo z ω^2 in upoštevajmo enakosti $\omega^3 = 1$ in $\omega^4 = \omega$, pa imamo:

$$z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3 = 0.$$

Če so točke z_1, z_2, z_3 v kompleksni ravnini orientirane negativno, so točke z_1, z_3, z_2 orientirane pozitivno in predstavljajo oglišča enakostraničnega trikotnika natanko tedaj, ko je $z_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 = 0$ oziroma

$$z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3 = 0.$$

To pa pomeni, da je trikotnik z oglišči z_1, z_2, z_3 enakostraničen natanko tedaj,



Slika 60: Kdaj so z_1, z_3, z_2 oglišča enakostraničnega trikotnika?

ko je

$$(z_1 + \omega z_2 + \omega^2 z_3)(z_1 + \omega^2 z_2 + \omega z_3) = 0.$$

Ko oba faktorja zmnožimo in pri tem upoštevamo lastnosti števila ω, dobimo potreben in zadosten pogoj za enakostraničen trikotnik v drugi obliki:

$$z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 - z_1 z_2 - z_2 z_3 - z_3 z_1 = 0.$$

Za tistega, ki ima rad determinante, lahko zapišemo ta pogoj še v obliki:

$$\begin{vmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 1 & z_2 & z_3 \\ 1 & z_3 & z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Napoleonov izrek, imenovan po nekdanjem francoskem cesarju, ki je njega dni v naših krajih postavil na noge *Ilirske province*, trdi, da sestavljajo središča enakostraničnih trikotnikov, ki jih navzven ali navznoter segajoče pričrtamo poljubnemu trikotniku (sliki 61, 62), oglišča zopet enakostraničnega, Napoleonovega trikotnika.

Napoleonov izrek lahko sedaj z lahkoto dokažemo s kompleksnimi števili. Naj bodo oglišča danega trikotnika pozitivno orientirane točke z_1, z_2, z_3 v kompleksni ravnini. Tretja oglišča navzven pričrtanih enakostraničnih trikotnikov pa naj bodo w_1, w_2, w_3. Pri tem naj bo točka w_1 vezana na stranico z_2, z_3, točka w_2 na stranico z_3, z_1 in točka w_3 na stranico z_1, z_2. Ker smo pričrtali enakostranične trikotnike, zanje veljajo pogoji:

$$\begin{aligned} w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2 &= 0 \\ w_2 + \omega z_1 + \omega^2 z_3 &= 0 \\ w_3 + \omega z_2 + \omega^2 z_1 &= 0 \end{aligned}$$

Kot je znano, se središča pričrtanih enakostraničnih trikotnikov s_1, s_2, s_3 po vrsti izražajo tako:

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{1}{3}(w_1 + z_2 + z_3) \\ s_2 &= \frac{1}{3}(w_2 + z_3 + z_1) \\ s_3 &= \frac{1}{3}(w_3 + z_1 + z_2) \end{aligned}$$

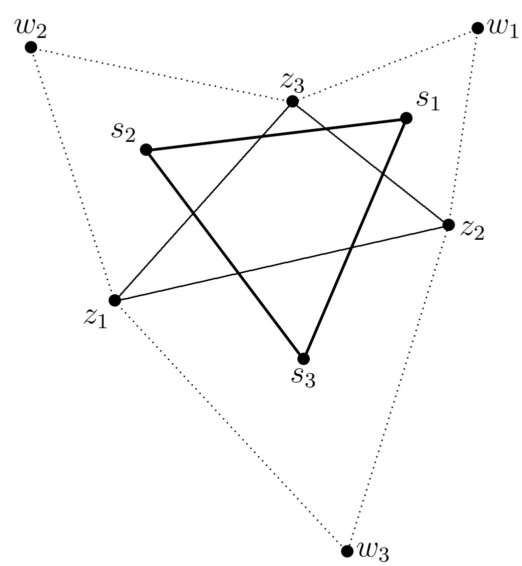
Sedaj je treba dokazati, da velja relacija $s_1 + \omega s_2 + \omega^2 s_3 = 0$, in s tem bo dokazano, da je zunanji Napoleonov trikotnik (slika 61) z oglišči s_1, s_2, s_3 res enakostraničen. Zapišimo:

$$s_1 + \omega s_2 + \omega^2 s_3 = \frac{1}{3}[(w_1 + z_2 + z_3) + \omega(w_2 + z_3 + z_1) + \omega^2(w_3 + z_1 + z_2)].$$

S pregrupiranjem členov in z upoštevanjem lastnosti števila ω res dobimo:

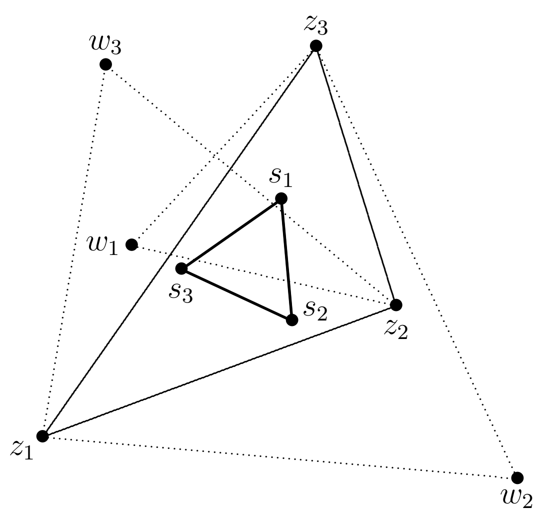
$$s_1 + \omega s_2 + \omega^2 s_3 =$$

$$= \frac{1}{3}[(w_1 + \omega z_3 + \omega^2 z_2) + \omega(w_2 + \omega z_1 + \omega^2 z_3) + \omega^2(w_3 + \omega z_2 + \omega^2 z_1)] = 0.$$



Slika 61: Zunanji Napoleonov trikotnik.

Na gimnaziji smo pri umetnostni zgodovini, katere glasbeni del nas je poučeval skladatelj Makso Pirnik, poslušali razna svetovno pomembna dela velikih skladateljev. Pirnik je tiste čase s svojimi predavanji servisiral več gimnazij na severnem Primorskem. V Idrijo se je vozil z avtobusom na redni progi Bovec–Ljubljana, kjer si je praviloma izboril sedež popolnoma spredaj, zraven šoferja. V vsako glasbeno delo, kateremu smo nameravali prisluhniti, nam je pripravil obširen in temeljit uvod. Povedal je bistveno o življenju skladatelja in njegovem delu ter o zgodovinskih okoliščinah, v katerih je delo nastalo, pa tudi vsebini dela. Tako je prišla na vrsto tudi znamenita *Uvertura 1812* Petra Iljiča Čajkovskega (1840–1893). Spominjam se, s kakšnim žarom nam je Pirnik pripovedoval o Napoleonovem pohodu v Rusijo in njegovem klavrnem koncu. V uverturi se prepletajo glasni bojni kriki, grmenje topov, marseljeza, ki simbolizira francosko vojno srečo in ruska himna za trenutke, ko je v bitki Rusom šlo bolje. Marseljeza je tišja in tišja, Francozi klavrno izgubljajo bitko in so se prisiljeni umakniti s svete ruske zemlje s svojimi bednimi ostanki armade, nazadnje pa slišimo triumfalne akorde, pomešane z zvonjenjem, velikemu carju v čast in slavo.



Slika 62: Notranji Napoleonov trikotnik.

Skladatelj Makso Pirnik je imel sicer svoje kar hude pedagoške prijeme. Navadno je poklical nekoga iz razreda pred tablo in ob njegovem znanju oziroma največkrat neznanju nam je pripovedoval o razvoju glasbe od pradavnine naprej, skladateljih in njihovih usodah. Mi smo sicer precej odnesli od take ure, izprašani pa navadno le slabo oceno. Kljub vsemu pa smo se od profesorja navsezadnje veliko naučili. Za klavir, ki mu je bil na razpolago v učilnici, je, kolikor se spomnim, sedel samo enkrat in nam skušal razložiti, kako občutimo razliko med duri in moli. Našega Francoza je pogosto za kaj uporabil. Nekega lepega dne ga je vprašal, kako bi se po francosko glasil stavek: "Aristotel je napisal Poetiko." Še preden je profesor končal stavek, je Francoz izstrelil kot iz topa: "Aristote a écrit la Poétique." To je zvenelo tako lepo in prepričljivo, da je Pirnik stavek v francoščini ponovil vsaj še trikrat. Zanimivo je, da Francozi imenujejo Aristotela malo skrajšano: Aristote. Angleži so malo bliže originalu: Aristotle. Italijani tudi: Aristotele. Nemci in Čehi se držijo originala: Aristoteles. Rusi tudi: Аристотель.

V tistih letih se je veliko govorilo o grškem ladjarju in magnatu Aristotelesu Onassisu (1906–1975) z vzdevkom *Ari*. V novi grščini se je podpisoval kot Αριστοτέλης Ωνάσης. Znan je bil tudi kot velik ženskar. Poročen je bil z Jacqueline Kennedy (1929–1994), vdovo ameriškega predsednika Johna F. Kennedyja (1917–1963), pred tem pa je bil v razmerju s svetovno znano sopranistko Marijo Callas (1923–1977), ki jo je Pirnik tudi tu pa tam omenil. Imeli pa smo občutek, da je imel rajši Zagrebčanko Zinko Kunc (1906–1989).

Pogosto je bil Pirnik zelo hud zaradi slabega izražanja dijakov v slovenščini. Če je kdo rekel "Glasba, ki jo poslušamo, se mi zelo dopade", je takoj povzdignil glas: "Zadnji del stavka je dobeseden prevod iz nemščine. Es gefällt mir." Glagol *fallen* pomeni v nemščini *pasti*, s predpono *ge-* pa dobimo *gefallen*, kar je res *dopasti*, a mi govorimo lepše: *ugajati, biti všeč*. Profesorica Vestova bi postavila dodatno vprašanje: "Wie lauten die Formen?" In dijak bi moral zdrdrati: "Ich gefalle, du gefällts, ich gefiel, ich habe gefallen." Pirniku je bil seveda všeč tudi naš Gallus, Jacobus Gallus Carniolus – Petelin. V latinščini pomeni beseda *gallus* petelina, *Carniolus* pa prebivalca dežele Kranjske, nekdanje vojvodine. Gallus je avtor številnih motetov in madrigalov. Pirnik je posebej imenoval pogosto izvajan motet *Ecce quomodo moritur iustus – Glejte, kako umira pravični*.

O tem, kje se je Gallus rodil, si znanstveniki niso enotni. Nekateri pravijo da v Ribnici, nekateri na Idrijskem, kjer obstaja kmetija Pri Petelinu. Nekateri pa Gallusov rojstni kraj vidijo na Šentviški planoti, ki pa nikoli ni spadala pod deželo Kranjsko. Je pa tam najti priimek Kranjc. *Petelin* je slovenski priimek, približno dvakrat bolj pogost kot je moj.

Pri ruščini je naneslo, da je neki sošolec malo po svoje prebral Петух поёт kot Петух – поэт. Prvo pomeni *Petelin poje*, drugo pa *Petelin je poet*. Oboje je sicer slovnično pravilno. V ruščini se bere ё kot *jo*, э kot *e*. Zabavo smo pa le imeli.

No vidite! Kam nas je zapeljal Pirnik in njegova predstavitev *Uverture 1812*. Pojdimo nazaj k francoskemu cesarju. Popolnoma analogno dokažemo Napoleonov izrek tudi za navznoter segajoče pričrtane enakostranične trikotnike (slika 62).

Po Napoleonu se imenuje tudi problem, kako v krog z znanim središčem S samo s šestilom včrtati kvadrat. Preprosto. Na obodu kroga izberemo oglišče A iskanega kvadrata. Nato radij kroga $R = |AS|$ nanesemo trikrat vzdolž njegovega oboda, da dobimo točki E in F ter nasprotno oglišče C kvadrata. Nato z dvema krožnima lokoma konstruiramo točko G zunaj kroga tako, da je $|AF| = |CE| = |AG| = |CG|$. Razdalja $|SG|$ je potem stranica iskanega kvadrata. Nato lahko brez težav določimo še preostali oglišči B in D kvadrata (slika 63).

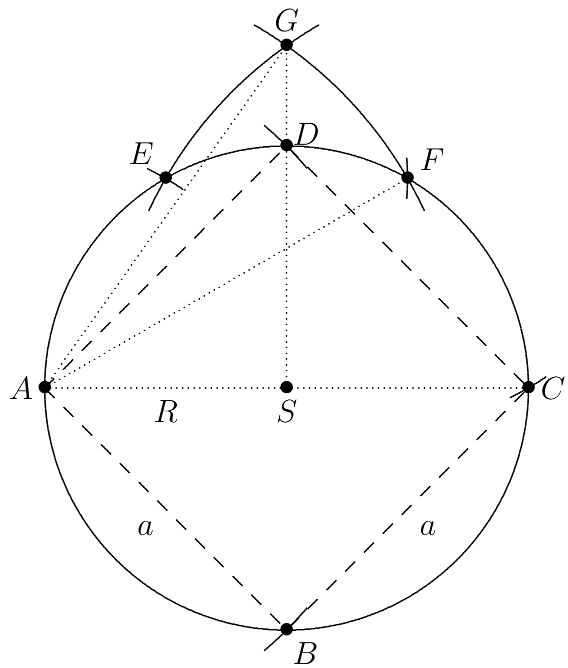
Konstrukcijo opravičimo s tem, da je $|AG| = |AF| = 2R\cos 30^\circ = R\sqrt{3}$ in po Pitagorovem izreku $|SG|^2 = |AG|^2 - R^2 = 2R^2$. Torej je $|SG| = R\sqrt{2} = a$ res stranica krožnici polmera R včrtanega kvadrata, saj je $2R = a\sqrt{2}$ dolžina njegove diagonale.

V resnici je na začetku dovolj že krog, saj vemo, da njegovo središče lahko določimo samo s šestilom.

Rekli smo že, da lahko jemljemo kompleksno število $\exp(i\varphi)$ za krajši zapis števila $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Toda sedaj iz pravil za množenje in deljenje vidimo, da se exp obnaša kot prava eksponentna funkcija z osnovo e. Kompleksna analiza pokaže, da je smiselno definirati, tako kot v realnem primeru:

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

Pri tem je $z = x + iy$ poljubno kompleksno število. Z nekaj računanja se



Slika 63: Samo s šestilom lahko v krog včrtamo kvadrat.

izkaže, da velja

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!} = \exp x(\cos y + i\sin y)\,.$$

Tako smo definirali kompleksno eksponentno funkcijo, ki ima adicijski izrek:

$$\exp(z+w) = \exp z\cdot\exp w.$$

Seveda je $\exp 0 = 1$ in $\exp z \neq 0$ za vsak kompleksen $z = x + yi$. Za realno število $z = x$ seveda velja vse po starem:

$$\exp x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\,.$$

Za čisto imaginarno število $z = yi$ pa:

$$\exp(yi) = \cos y + i\sin y.$$

Torej smo funkcijo exp res uspeli razširiti z obsega realnih na obseg kompleksnih števil. Pri tej razširitvi smo marsikaj pridobili, nekaj pa tudi izgubili. Izgubili smo linearno urejenost, ki ga obseg realnih števil premore, obseg kompleksnih števil pa ne. Če bi jo, bi kvadrat vsakega kompleksnega števila moral biti pozitiven, toda že za i to ne drži, saj je $i^2 = -1$. Eksponentna funkcija, ki v realnem nima periode T, jo v kompleksnem ima, in sicer čisto imaginarno: $T = 2\pi i$. Velja namreč

$$\exp(2\pi i) = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1$$

in zato

$$\exp(z + 2\pi i) = \exp z \cdot \exp(2\pi i) = \exp z.$$

V obsegu kompleksnih števil lahko neomejeno izvajamo osnovne računske operacije (razen deljenja z 0), lahko pa tudi neomejeno korenimo. Ne nazadnje pa ima v obsegu kompleksnih števil vsak nekonstanten polinom s kompleksnimi koeficienti vsaj eno kompleksno ničlo. O tem govori osnovni izrek algebre. To pomeni, da ima za vsako naravno število n in poljubno izbiro kompleksnih koeficientov $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$, pri čemer $a_n \neq 0$, polinom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$$

vsaj eno kompleksno ničlo, to se pravi, da obstaja vsaj eno kompleksno število z_0, za katero je $p(z_0) = 0$. Posledično ima tak polinom natančno n kompleksnih ničel, če upoštevamo tudi njihovo večkratnost. Obseg kompleksnih števil se zato imenuje *algebrsko zaprt obseg.*

Dokaz osnovnega izreka algebre ni prav enostaven. Nam ga je na fakulteti izvedel profesor France Križanič pri predmetu Višja algebra, kasneje pa še profesor Ivan Vidav pri predmetu Analitične funkcije. Križaničev dokaz se nam je zdel imeniten že zaradi tega, ker je nosil popularni naslov *Dokaz dama s psičkom.* Profesorja Križaniča, po katerih učbenikih smo delali pri matematiki na gimnaziji, smo takrat prvič spoznali kot predavatelja. O njem pa bomo napisali kaj več v posebnem poglavju.

11 Profesorji in študentje

Tiste čase smo se vpisovali na Univerzo. Stresno situacijo smo tisti s podeželja doživljali že s samim prihodom v Ljubljano. Treba se je bilo v njej najprej vgnezditi. Sobo sva s sošolcem z gimnazije našla v Akademskem kolegiju, v nekdanjem Baragovem semenišču. Načrte zanj je naredil arhitekt Jože Plečnik (1872–1957), gradili so ga med letoma 1938 in 1955 na tleh nekdanjega ljubljanskega pokopališča, a ga niso nikoli dokončali. Od tega pokopališča je ostal je ostal spominski park Navje, kjer stojijo nagrobniki nekaterih slavnih Slovencev.

Od Gospodarskega razstavišča smo se s trolejbusi vozili po mestu. Predavanja in vaje smo imeli razmetana po Ljubljani. Predstavljal sem si Univerzo bolj na kupu. Pisarna matematičnega oddelka je bila na stari Univerzi. Tako je bilo vsaj nekoliko bolj v redu videti, da smo hodili v tako pomembno poslopje. Tajnica je bila gospa Marija Jozljeva, od začetka do konca mojega študija. Bila je zlata vredna ženska, naša druga mama, ki nam je po svojih močeh pomagala, ko je šlo bodisi za izpolnjevanje obrazcev bodisi za muhe profesorjev. Pri gospe Jozljevi se je marsikateri profesor rad zadrževal na klepetu ali kavici. Kot novopečeni maturantje smo si domišljali, da nekaj vemo in znamo. A so nam kmalu dali vedeti, da smo le čisto navadni bruci. Potrkam na vrata pisarne, nekoliko prezgodaj. Pri gospe Jozljevi se je ob kavi zaklepetal profesor Ziegler. Takoj da pripombo: "Po srednjeevropskem času ura še ni deset." Uradne ure so se namreč za študente začele ob desetih.

Ko so predavanja že dodobra stekla, nas je v veliki predavalnici na Lepem potu obiskala cela delegacija profesorjev, vsak od njih je bil videti bolj učen od drugega, s profesorjem Francetom Križaničem na čelu. Slednji je bil takrat ravno dekan Fakultete za naravoslovje in tehnologijo, kamor je spadal tudi matematični oddelek. Najprej nas je prijazno nagovoril in med drugim rekel nekako tole: "Boj bo hud in težak, marsikdo bo na tej poti omagal. Toda upam, da bom na koncu le komu segel v roke." Nato je vprašal: "Ali ste že kaj začeli študirati?" Oglasi se mladenič tam v drugi klopi: "Še ne!" Dekan mu odgovori: "Potem je pa že prepozno." In delegacija je odšla, najbrž na srečanje z bruci na kakem drugem oddelku obsežne fakultete.

Kolege iz višjih letnikov smo gledali kot bogove ali pa vsaj polbogove. Vedeli smo, da jih je nekam malo. Pričakovati je bilo, da se bo tako zgodilo tudi z nami. Žal so se zle slutnje kar hitro uresničile. Vseh študentov matematike nas je v drugem letniku bilo le še kaka dobra dva ducata, pa še med temi je bilo nekaj ponavljalcev in pavzerjev. V veliki fizikalni predavalnici na Lepem potu pa se nas je na začetku v prvem letniku pri predavanjih kar trlo in še sedeža nisi dobil, če si prišel malo prepozno.

Glede profesorja Križaniča pravijo, da je akademik profesor Plemelj[82] nekoč imel zanj pripombo, češ da iz njega na področju matematike tako in tako ne bo nič, ker da je preveč pesniški. Res je, da je bil mojster jezika in da se je rad z njim igral. Zapustil nam je čedno zbirko učbenikov in drugih besedil. Gre mu tudi zasluga, da je precej moderniziral našo matematiko. Rad se je igral z besedami, rad je iskal primerne prevode tujih strokovnih besed v slovenščino, tako da se je veliko ljudi zgledovalo po njem. Nekaterim, ki so se morda zbali, da bo onečastil slonokoščeno zgradbo visokih matematičnih znanosti, pa je šel rahlo na živce.

Dandanes se marsikdo niti ne trudi, da bi pri matematiki kaj lepo po slovensko povedal, pač pa uporablja kar cele sklope angleških izrazov. Čeprav bi lahko rekel, da je na primer nekaj *ločno prehodno*, brez zadrege pravi, da je *arc tranzitivno*. Najbrž je kriv sistem, ki ljudi neprestano peha v mednarodno objavljanje zaradi napredovanja, ne poskrbi pa dovolj za domače strokovne izraze in premalo stimulira objavljanje strokovnih in znanstvenih del v slovenščini. Nekoč smo se opletali z germanizmi in drugimi takšnimi izmi, sedaj pa vdirajo anglicizmi vsepovsod. Mlade mamice slišimo govoriti, kako je nekaj *kul* in da jih je bilo tam *ful*, tako da je res vprašanje, kako bodo govorili njihovi otroci.

[82] Josip Plemelj (1873–1967) – slovenski matematik, prvi rektor prve slovenske univerze.

Profesor Križanič je vodil vaje tudi sam, če je bilo to potrebno. Nekoč pokliče študenta k tabli in mu narekuje neko enačbo. Nato študenta vpraša: "Kakšne pasme pa je ta enačba?" Eni so se temu smejali, meni pa se ni zdelo to nič tako smešnega. Malo smo popestrili vaje, če ne drugega. Beseda *pasma* v takem kontekstu je bila ljudem všeč in še danes jo tu pa tam kdo uporablja pri matematiki. Rad je uporabljal namesto besede *nekoč* besedi *njega dni*. Tako je na primer rekel: "Njega dni smo že obravnavali podobno enačbo." Če vzamemo v roke katerokoli njegovo delo, kmalu odkrijemo vse bogastvo jezika, ki ga je uporabljal.

Ko sem bil že absolvent, sem bil priča prošnji leto mlajših kolegic, ki so pristopile k profesorju Vidavu, da bi jim kot predstojnik oddelka finančno pomagal pri organizaciji brucevanja. Predstojnik se je gladko izmazal z odgovorom, da oddelek denarja za take reči nima v načrtu. Navzoč je bil tudi profesor Križanič, ki je dal takoj pripombo: "Jaz bi raje kaj dal, da brucevanja ne bi bilo, saj moram že doma poslušati ves ta glasbeni direndaj." Eden od njegovih sinov se je namreč ukvarjal z glasbo.

Vpis na magistrski študij je bil pravi podvig. Že na samem začetku je bilo treba izpolniti neki obrazec na štirih straneh. Po tradiciji so bili tudi ti obrazci slabo pripravljeni, napisani so bili nekako za povprečnega delavca. Že od nekdaj obrazcev nisem maral. Poklic očeta? Kaj napisati? Moj je bil že v pokoju, pred tem pa priučeni rudar, brez srednje šole. Nikoli ni skočil čez kožo. Kaj če bo kakšen birokrat brskal po arhivih in ugotovil, da ni bil nič. Poklic matere? Ta je bila pač mama, mati, babica, gospodinja, kmetica. Kaj napisati? Tu dam prav Svetlani Makarovič, ki je v nekem intervjuju tedna rekla: "Nekatere stvari je treba sovražiti." Jaz sovražim slabo pripravljene obrazce. Naslednja omembe vredna stvar je pa tale. V Ljubljani je imel magistrski študij tista leta eno samo smer: funkcionalno analizo. Več izbire je bilo v Zagrebu, kjer je magistriralo kar nekaj kolegov. Ko smo prehajali na bolonjski sistem študija na fakulteti, smo tedne in tedne prenašali učne načrte iz enega obrazca v drugega. Nikoli ni bilo dobro in prav. Nazadnje smo to spet počeli in izpolnjevali Nakvisove[83] obrazce. Ali ne bi bilo veliko bolje, da nenehno skrbimo za kvaliteto študija? Da bodo naši diplomanti na koncu tudi kaj znali.

Ko pa sem se zanimal za magistrsko temo, sem stopil tudi do profesorja Križaniča. Najprej se je izmotaval, češ da je sicer razdelil že precej tem, a da je doslej le malokdo magistriral. Nato sva se le začela pogovarjati o neki temi, ker sem le bil siten. Toda nenadoma me je dotolkel, češ da bi bilo dobro prej preštudirati dve silno debeli knjigi od Harish-Chandra in Dugundjija. Ko sem videl debelost teh knjig, sem se spomnil svoje mame, ki je vsakemu debelejšemu knjižnemu delu rekla *kolomon*, kar je po slovarju slovenskega knjižnega jezika in po ljudskem verovanju knjiga, s katero se da čarati, vedeževati. Marsikoga so mikale skrivnosti starih kolomonov. Ker me ni prav nič mikalo študirati profesorjeve *kolomone* in ker je bilo evidentno, da se me z njimi želi znebiti, sem izbral drugo temo pri drugem mentorju.

Pravijo, da pa je sam profesor Križanič nekoč stopil do profesorja Plemlja z željo, da bi dobil kakšno temo za doktorat. To je bilo kmalu po drugi svetovni vojni, ko še ni bilo potrebno pred doktoratom opravljati magisterija. Plemelj mu je zelo nazorno pokazal polne police matematičnih knjig okoli sebe, kar je Križaniča precej užalilo in je potem našel temo pri profesorju Ivanu Vidavu. Verjetno pa se Plemelj ni več počutil biti mentor pri doktoratu, kajti po prvi svetovni vojni ni več resno raziskoval in je večinoma samo še predaval, vodil seminarje in se tu pa tam udeležil kakšnega matematičnega srečanja. Na Bledu so mu postavili spomenik, na katerem je z velikimi črkami napisan njegov življenjski moto:

Matematika mi je bila življenska potreba in umetniški užitek.

Kamnoseški škrat pa je poskrbel, da je ena beseda napačno vklesana, kar pa malokdo sploh opazi, še najmanj pa tujci.

[83] Nakvis: Agencija Republike Slovenije za kakovost v visokem šolstvu.

Zato prav nič čudnega, če mi je pokojni profesor Križanič kazal na obsežni knjigi Harish-Chandra in Dugundjija. Verjetno je posnemal svojega nekdanjega profesorja.

Nikjer nisem zasledil, od kod se je vzela beseda *kolomon*. V stari slovenski literaturi zasledimo izraz *Kolomonov žegen* in *Kolomon bukle*. Koloman ali Kolomon je ime svetnika irskega rodu, o katerem se malo ve. Leta 1012 je romal ob Donavi v Sveto deželo, toda blizu Dunaja so ga ujeli misleč, da je vohun. Ker ni znal jezika ljudi v tistih krajih in se ni mogel braniti, so ga obsodili na smrt in ga obesili na drevo. Okoli njegovega trupla se je zgodilo nekaj čudežev. Pokopali so ga v samostanu Melk. Postal je zavetnik Avstrije, Melka, obsojenih na smrt z obešanjem, živine in popotnikov. Ljudje so se nanj obračali v primeru bolezni, kuge, neurja, nevarnosti ognja in raznih nadlog. Marsikaj pa so se še izmislili. Do njegovih kapel so imeli pogosto slovesne sprevode na konjih, posvetilo so mu več studencev, pri katerih so romarji pričakovali čudežno ozdravitev, tako imenovani *Kolomanov blagoslov* pa naj bi naredil človeka neranljivega. Na upodobitvah je sv. Kolomon prikazan kot romar s palico, romarskim klobukom in steklenico. V roki običajno drži zanko iz vrvi, včasih tudi klešče, kamne in palice. Upodabljal ga je tudi slavni Albrecht Dürer. Hišo v starem delu Nürnberga, v kateri je ta umetnik živel in delal, sem imel priložnost videti, ko sem takoj po diplomi obiskal pokojnega brata, ki je takrat delal v tem starodavnem nemškem mestu. Zato, na podlagi prej zapisanega, morda ni nič čudnega, če so ljudje izrabili ime sv. Kolomona in napisali knjigo urokov, vraž, čaranj in zakletev, katere se je prijela beseda *kolomon*.

Profesor Rajko Jamnik (1924–1983) je bil moj diplomski mentor. Prvič smo se z njim srečali na predavanjih iz analize v drugem letniku. Takrat smo dobili popolnoma nove prostore na Jadranski. S stare Univerze sta se tja preselili tudi pisarna in matematična knjižnica. Ker je vse skupaj kasnilo za en mesec (kdaj so pa že kako javno stavbo pri nas zgradili v predvidenem roku), smo tudi s predavanji, vajami in seminarji začeli toliko kasneje in nihče se zaradi tega ni pretirano žrl. Smo pa s predavanji malo pohiteli in tu pa tam izpustili kak dokaz oziroma smo ga samo nakazali.

Od takrat smo imeli na Jadranski večino predavanj in vaj, nekaj malega pa je bilo vendarle še raztresenega po Ljubljani, večinoma po Viču. Profesor Jamnik je imel vaje kar sam. Precej pripomb je padalo na naše obnašanje. Če je kdo preveč hitel in se zanašal na svojo pamet, je zmeraj imel kako tehtno pripombo, ki smo se jo za vedno zapomnili. Imel je navado preverjati prisotnost. Nekoč je kolegica podpisala drugo kolegico in profesor je takoj opazil neujemanje prisotnih s številom podpisov. Pri priči je našel krivca, že po pisavi. Vsak semester je moral biti vsakdo vsaj enkrat pri tabli. Nekateri kolegi so se tako prišli dvakrat na leto pokazat, da so bili odkljukani. Ti so že takrat raje študirali matematiko, ki jih je zanimala, kakor da bi sedeli na predavanjih in vajah. Imeli smo tudi kolege, ki so študirali pedagoško in tehnično matematiko hkrati. Profesor je pripravil za pedagoge drugačne, nekoliko lažje naloge kot za tehnične matematike. Pričakoval je, da se samo po sebi razume, da bodo dvosmerniki sami po sebi izbrali težje naloge, to se pravi, tiste za tehnične matematike. A glej ga zlomka, izbrali so lažje. Profesor je bil zato upravičeno strašno hud.

Pri verjetnostnem računu je na predavanjih nekoč računal neki integral, kar je predstavljalo precej dolgočasno in rutinsko delo. Nekemu kolegu so popustili živci in se je naglas razburil, češ zakaj to delamo, saj *se takoj vidi*, da bo rezultat enak r. Profesor ga je komaj pomiril in od takrat kolega ni imel miru. Kadarkoli je kaj dolgega izpeljeval ali dokazoval, se je obregnil vanj in dal pripombo: "No Vi, ki vse vidite! Koliko bo prišlo?"

Profesor Jamnik je imel tudi velik posluh in občutek za slovenski jezik. Večina tistih, ki so pri njem diplomirali, se strinja, da jih je šele on naučil, kako se lepo in pravilno pišejo matematična besedila. Škoda, da je prerano tragično preminil v naših gorah, v katere je prav rad zahajal. To je bilo ravno v tistih čudnih časih, ko je v rajnki Jugoslaviji, pa tudi drugje, nenadoma hudo zaškripalo na področju preskrbe z naftnimi derivati, in je bilo zaradi varčevalnih ukrepov dovoljeno voziti po naših cestah po sistemu parni–neparni, lepše bi se lahko reklo sodi–lihi. Uvedeni so bili celo boni za nakup bencina in dizelskega goriva.

V drugem letniku nam je profesor Križanič predaval kar dva predmeta, diferencialne enačbe in višjo algebro. Asistenta v zimskem semestru ni imel, pa je vaje vodil kar sam. Tiste čase asistentov ni bilo na pretek, tudi profesorjev ne. Tako smo navadno enega imeli kar pri dveh predmetih. Tako se je zgodilo, da smo imeli vaje iz diferencialnih enačb v popolnoma novi predavalnici v pritličju na Jadranski 19. Obravnavali smo ravno Riccatijevo diferencialno enačbo

$$y'(x) = a(x)y^2(x) + b(x)y(x) + c(x)\,,$$

kjer so $a(x)$, $b(x)$ in $c(x)$ znane funkcije, iščemo pa funkcijo $y(x)$. Postopek reševanja je tak, da je treba eno rešitev, recimo $y_1(x)$, uganiti, nato pa se enačbo prevede na Bernoullijevo diferencialno enačbo. Profesor Križanič pokliče k tabli kolego. Povedati je treba, da so se študentje večinoma temu izmikali. Profesor je vedno našel način, da je našel žrtev po sistemu križank. Ta in ta v tej in tej vrsti. Iz žepa potegne zbirko vaj ruskega avtorja Filipova. Študentu narekuje enačbo, ki je bila nekaj takega:

$$y'(x) = \frac{y^2(x)}{2x} - \frac{(1+x)y(x)}{x} + \frac{4+x}{2}.$$

Ostali jo pridno prepišemo v svoje zvezke. "Kakšne pasme pa je ta enačba?", vpraša profesor. "Riccatijeva", odgovori nadebudnež. "Res je Riccatijeva. Kako jo rešujemo?" Pravi mladenič: "Eno rešitev uganemo." Profesor: "Sedaj bomo pa uganjevali." Dolgo časa nič. Tedaj pa ravno zmanjka v predavalnici elektrike, kar ni bilo nič čudnega, saj je bilo vse novo in nepreizkušeno. "Ali se Vam je kaj pobliskalo?", vpraša. "Nič." Spet tišina. Potem pa pride spet elektrika. "Ali se Vam je morda sedaj kaj pobliskalo?" Potem smo s skupnimi močmi le uganili rešitev: $y_1(x) = x$. Nato smo iskali rešitev z nastavkom

$$y(x) = z(x) + y_1(x) = z(x) + x$$

in dobili po poenostavljanju Bernoullijevo diferencialno enačbo

$$z'(x) + \frac{z(x)}{x} = \frac{z^2(x)}{2x},$$

ki jo z uvedbo nove funkcije $u(x) = 1/z(x)$ in ustreznega odvoda $u'(x) = -z'(x)/z^2(x)$ prevedemo na nehomogeno linearno diferencialno enačbo:

$$u'(x) - \frac{u(x)}{x} = -\frac{1}{2x}.$$

Najprej rešimo pripadajočo homogeno enačbo:

$$v'(x) - \frac{v(x)}{x} = 0.$$

Z ločitvijo spremenljivk dobimo najprej enačbo

$$\frac{v'(x)}{v(x)} = \frac{1}{x}$$

in nato z integracijo in antilogaritmiranjem:

$$\ln v(x) = \ln x + \ln c\,,\ v(x) = cx.$$

Pri tem je c integracijska konstanta. Nato nadaljujemo z metodo variacije konstante. Rešitev $u(x)$ poiščemo v obliki $u(x) = c(x)x$ in dobimo:

$$c'(x)x + c(x) - c(x) = -\frac{1}{2x}\,,\ c'(x) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Z integriranjem imamo

$$c(x) = \frac{1}{2x} + \frac{C}{2},$$

kjer je C nova integracijska konstanta. Torej je

$$u(x) = \frac{Cx+1}{2}.$$

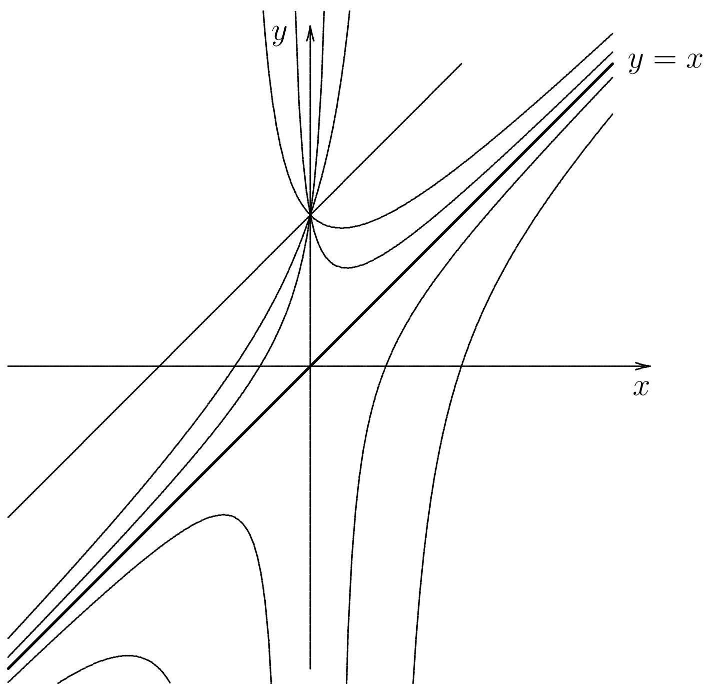
S tem smo našli splošno rešitev vmesne Bernoullijeve enačbe:

$$z(x) = \frac{1}{u(x)} = \frac{2}{Cx+1}.$$

Splošna rešitev dane Riccatijeve enačbe je nazadnje:

$$y(x) = x + z(x) = x + \frac{2}{Cx+1} = \frac{Cx^2 + x + 2}{Cx+1}.$$

Popaziti je v takih primerih treba tudi na posebne rešitve, ki niso zajete v splošno rešitev. Enačba za $z(x)$ ima tudi trivialno rešitev $z(x) = 0$, ki je ne dobimo za nobeno končno konstanto C. Torej ima dana Riccatijeva enačba posebno rešitev $y(x) = x$. To je, grafično gledano, skupna asimptota enoparametrične družine krivulj $y = (Cx^2 + x + 2)/(Cx + 1)$ za $C \neq 0$. Za $C = 0$ je to posebej premica $y = x + 2$ (slika 64).



Slika 64: Nekaj rešitev Riccatijeve diferencialne enačbe.

Pri grafih racionalnih funkcij iščemo navpične, vodoravne in poševne asimptote. Navpične so določene z realnimi poli racionalne funkcije. Na gimnaziji smo take primere veliko vadili. Do nezavesti smo spet iskali ničle polinomov z realnimi koeficienti. Na vso srečo so bili njihovi koeficienti celi ali pa vsaj racionalni. Grafe racionalnih funkcij smo seveda nazadnje tudi približno načrtali. Porabili pa smo veliko časa, ki bi ga lahko veliko bolje izkoristili. Ugovarjati pa se tiste čase ni upal nihče. Menili smo, da tako mora biti, saj je bilo to v učnem načrtu. Dandanes z risanjem grafov ni nikakršnih težav, ker nam to mimogrede naredijo računalniki.

Beseda *asimptota* je grška. Nastala je iz grške ἀσύμπτωτος, kar pomeni *nesovpadajoč*. Če analiziramo naprej, je treba vse do glagola πίπτω, kar pomeni *padam, zlagam se, ujemam se*, predpone συν-, kar označuje *hkrati, vkup, s kom, s čim vred*, in še nikalne predpone ἀ-. Predpona συν- preide v določenih okoliščinah v συμ-, tako kot v latinščini *in-* v *im-*. To so nekakšne soglasniške spremembe.

συν-γ → συγγ, συν-κ → συγκ, συν-χ → συγχ, συν-π → συμπ,

συν-β → συμβ, συν-φ → συμφ, συν-λ → συλλ, συν-μ → συμμ.

Navedimo nekaj besed te vrste. Besedo *simfonija* smo prepisali iz grške συμφωνία, *ujemanje, soglasje*, ki pa je nastala iz συν- in φωνή, kar pomeni *glas, zvok, šum*. Italijani rečejo *sinfonia*, torej ne uporabljajo glasovne spremembe. Beseda *simbol* prihaja iz grške σύμβολον, *znak, znamenje*. Nastala je iz συν- in βάλλω, *mečem, lučam*. Podobno razložimo besede *simpozij*, grško συμπόσιον, *silogizem*, grško συλλογισμός, *simetrija*, grško συμμετρία, ter manj znan izraz *singonija*, po grško συγγωνία, ki ga dobro poznajo kristalografi, obstaja pa tudi *syngonium*, rastlina, imenovana po domače *oslovska glava*. Glasba pozna besedo *sinkópa*, po grško συγκοπή. *Sočasen* ali *sinhron* pa je po grško σύγχρονος. Pri tem ne pozabimo, da se γγ, γκ, γξ, γχ v grščini berejo kot *ng, nk, nks, nh*.

Izraz *asimptota* je uvedel matematik Apolonij iz Perge, Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, v svojem delu, ki obravnava stožnice. Mednje spada hiperbola, ki ima dve asimptoti. Navadno je asimptota krivulje neka premica. Krivulja in njena asimptota se oddaljujeta v neskončnost, razdalja med njima pa postaja vse manjša in se bliža nič. Pri tem se lahko krivulja poljubno mnogokrat ovije okoli svoje asimptote, vendar se ta igra nikoli in nikjer ne konča. Hiperbola se svojima asimptotama približa poljubno blizu, a ju nikoli in nikjer ne doseže, ne pade nanjo. Zato tako ime, saj Apolonij verjetno primerov, ko se krivulja ovija okoli svoje asimptote, ni študiral. Očitno ima krivulja $y = e^{-x} \sin x$ za asimptoto kar os x, se pravi premico $y = 0$, ki jo neštetokrat preseka, pa nikoli povsem ne pade nanjo. Nekako tako kot prevzetno neomoženo dekle, ki zavrača snubca in se mu izmika v nedogled.

Jih dókaj jo prosi, al vsakmu odreče,

prešerna se brani in ples odlašuje,

si vedno izgovore nove zmišljuje, ...

(F. Prešeren, Povodni mož)

Zaradi minljivosti človeškega življenja to ni najboljši primer, pa še Urška je na koncu dobila svojega.

Izpit iz diferencialnih enačb je pri profesorju Križaniču potekal v dveh delih. Najprej je bilo treba pozitivno pisati pisni del izpita, da si potem lahko šel na ustni del pred obličje profesorjevo. Dolgo časa je vaje pri svojem predmetu zaradi pomanjkanja asistentov vodil kar sam, pa tudi pisne izpite je sam nadziral. Spominjam se, da se je pri neki nalogi na pisnem izpitu nekomu nekaj zataknilo. Profesor mu je nekaj prišepnil, potem pa je vse gladko šlo naprej.

Na ustnem delu izpita je rad izpraševal eksistenčni izrek o rešitvi diferencialne enačbe oblike

$$y'(x) = f(x, y(x))$$

pri začetnem pogoju $y(x_0) = y_0$. Kdaj rešitev sploh obstaja, kdaj je rešitev ena sama. Tu pa tam je koga vprašal celo eksistenčni izrek za sistem diferencialnih enačb. Sledil je variacijski račun z ohranitvenimi zakoni, ki jih je našla Emmy Noether (1882–1935). Emmy je bila ena najboljših matematikov vseh časov, pa ji Nemci niso pustili, da bi delovala na univerzi, tako da je pri Davidu Hilbertu (1862–1943) nekako skrivaj predavala. Potem pa so bile na vrsti parcialne diferencialne enačbe: enačba nihanja strune, enačba prevajanja toplote, Laplaceova enačba in take reči, kanonski sistem ter Hamilton–Jacobijeva enačba. Tem pravijo matematiki navadno enačbe matematične fizike.

Kasneje sem bil v sili razmer neko dopoldne navzoč na Križaničevem domu, in to ravno pri odhajanju profesorja na fakulteto točno na dan ustnih izpitov. Žena ga je milo prosila nekako takole: "Francè! Pa lepo ravnaj s študenti, ne meči jih preveč!" Profesor pa ji lepo počasi odgovori: "Jaz nisem še nikogar vrgel. Kar sami padejo."

Kakorkoli pa pogledam nazaj, menim, da smo se profesorja nekateri popolnoma neupravičeno bali. Morda zaradi njegove brade, ki ga je delala resnega in učenega. Res je bil videti v svoji človeški pojavi nekam strog, toda izpit se je pri njem le dalo narediti, prej ali slej. Dogajalo se je, da so veliko imeli proti njemu tisti, ki nikoli in nikdar niso bili pri njem na izpitu. Govorili so naokrog, češ da se pri njem težko, težko opravi izpit.

Že navadne diferencialne enačbe so lahko težke, kaj šele parcialne. Še dobro, da smo obravnavali le nekaj tipov takih enačb. Sam profesor je izjavil, da diferencialne enačbe delimo na tiste, ki jih znamo rešiti, in tiste, ki nastopajo v praksi. Albert Einstein, ki se je pogosto rad pošalil, pa je dejal:

> *Parcialna diferencialna enačba je prišla v teoretično fiziko kot služkinja, toda počasi je postala gospa.*
>
> *(N. A. Virčenko, Matematika v aforizmih, citatih in izrekih. Prevod D. Pagon.)*

Potenciranje polarno zapisanih kompleksnih števil je prava poslastica. Če je m poljubno celo število, potem velja Moivrova formula,

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^m = \cos(m\varphi) + i\sin(m\varphi) \quad \text{oziroma} \quad (\exp\varphi i)^m = \exp(m\varphi i)\,,$$

ki je preprosta posledica pravil za množenje in deljenje v polarni obliki zapisanih kompleksnih števil.

Moč kompleksnih števil sem spoznal na fakulteti pri profesorju Milanu Zieglerju, ki nam je v prvem letniku v študijskem letu 1968/69 predaval matematično analizo. Tisto leto smo bili bruci in predavanja smo imeli nekoliko razmetana po Ljubljani. Predavanje iz fizike smo poslušali v veliki fizikalni predavalnici na Jadranski cesti, iz analize pa na Lepem potu, kakih 10 minut hoda z Jadranske. Na Lepem potu smo imeli tudi opisno geometrijo in teorijo množic ter vaje iz fizike. Vaje iz analize pa smo imeli v poslopju same Univerze, v nekdanjem Deželnem dvorcu na Kongresnem trgu, ki se je takrat imenoval Trg revolucije, malo kasneje pa Trg osvoboditve. Zdelo se nam je imenitno hoditi v tako častitljivo poslopje. V začetku 19. stoletja pa je bil Kongresni trg Kapucinski trg. V Deželnem dvorcu je bila tudi pisarna in matematična knjižnica. Na kavo smo hodili po raznih kavarnah v bližini, tudi v slavni lokal Šumi, nasproti Drame. V Ljubljani nam res ni bilo težko zapravljati štipendije. Nekateri so bili kar naprej v minusu.

K telesni vzgoji smo krevsali v telovadnico zraven viške gimnazije, na predvojaško pa na Oddelek za tekstilno tehnologijo nasproti belgijskega konzulata. Tako smo postopoma vsaj temeljito spoznali precejšen kos slovenske prestolnice. Predavanja Milana Zieglerja so bila urejena, natančna, z obilico dokazov in zgledov, pa tudi bežnih pogledov v zgodovino matematike. Toda vse je potekalo zelo hitro v primerjavo s poukom na gimnaziji. Ziegler je veliko dal na eleganco in lepoto izpeljav in dokazov. In ravno Ziegler nam je pokazal bližnjico do integralov

$$\int \exp(ax)\cos(bx)\,dx\,,\ \int \exp(ax)\sin(bx)\,dx\,,$$

kjer sta a in b od 0 različni konstanti. Na gimnaziji sem se ju lotil z metodo *per partes*. Prvič sem ugotovil, da je treba to metodo pri tem primeru uporabiti dvakrat zapored. Toda zaradi nepazljivosti se v drugem koraku lahko zgreši in rezultata ni in ni od nikoder.

V kompleksnem pa se zadeve lotimo z integralom

$$\int \exp((a+bi)x)\,dx = \int \exp(ax)\cos(bx)\,dx + i\int \exp(ax)\sin(bx)\,dx\,,$$

tako da sta dana integrala realni in imaginarni del pravkar zapisanega integrala. Toda

$$\int \exp((a{+}bi)x)\,dx = \frac{1}{a+bi}\ \exp((a{+}bi)x) = \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}(a{-}bi)(\cos(bx){+}i\sin(bx)) =$$

$$= \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}((a\cos(bx)+b\sin(bx))+i(a\sin(bx)-b\cos(bx)).$$

Iz tega pa kar preberemo:

$$\int \exp(ax)\cos(bx)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}((a\cos(bx)+b\sin(bx))+C\,,$$

$$\int \exp(ax)\sin(bx)\,dx = \frac{\exp(ax)}{a^2+b^2}((a\sin(bx)-b\cos(bx))+C.$$

Kar stremeli smo in se čudili in nihče se ni spraševal, ali se tako sme delati in če nemara nismo zagrešili kake napake. Sicer pa bi oba rezultata lahko preskusili z odvajanjem.

Primere, ko nekaj izračunamo na dva načina, nato pa primerjamo realne in imaginarne dele levih in desnih strani enakosti, smo tudi imeli radi. Očitno ima kompleksno število $1+i$ absolutno vrednost $\sqrt{2}$ in argument $\pi/4$, zato veljata enakosti:

$$1+i = \sqrt{2}\,\exp(\pi i/4)\,, (1+i)^n = \sqrt{2^n}\,\exp(n\pi i/4)\,,$$

kjer je n poljubno naravno število. Toda po binomski formuli imamo tudi:

$$(1+i)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}i^k = \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k}i^{2k} + \sum_{k\geq 0}\binom{n}{2k+1}i^{2k+1}.$$

Ko k teče, zavzema izmenoma sode in lihe vrednosti, zato smo prvo vsoto nadomestili z dvema. Namenoma nismo zapisali zgornjih meja pri seštevanju.

Binomski koeficienti sami po sebi ugasnejo, čim je spodnji indeks večji od zgornjega. V prvi vsoti je zadnji k tisto največje celo število, za katero je $2k \leq n$, v drugi pa tisto največje celo število, za katero je $2k+1 \leq n$. Tukaj si matematika lahko spet privošči malo svobode. Za vsako realno število x izbere tisto največje celo število m, ki ne presega x. Označi ga s $[x]$ in mu da ime *celi del* števila x. Velja torej: $[x] \leq x < [x]+1$ in $[x]$ je celo število.

Prva vsota v razvoju $(1+i)^n$ se torej konča pri $k = [n/2]$, druga pa pri $k = [(n-1)/2]$. Ker pa je $i^{2k} = (-1)^k$ in $i^{2k+1} = i(-1)^k$, lahko zapišemo:

$$(1+i)^n = \sqrt{2^n}\,\exp(n\pi i/4) = \sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k} + i\sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1}.$$

Ker pa je $\exp(n\pi i/4) = \cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4)$, imamo nazadnje:

$$\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\binom{n}{2k} = \sqrt{2^n}\cos(n\pi/4)\,, \quad \sum_{k=0}^{[(n-1)/2]}(-1)^k\binom{n}{2k+1} = \sqrt{2^n}\sin(n\pi/4).$$

Zanimivo je opazovati tudi kompleksno geometrijsko zaporedje s kvocientom $q \neq 0$:

$$1, q, q^2, q^3, \ldots$$

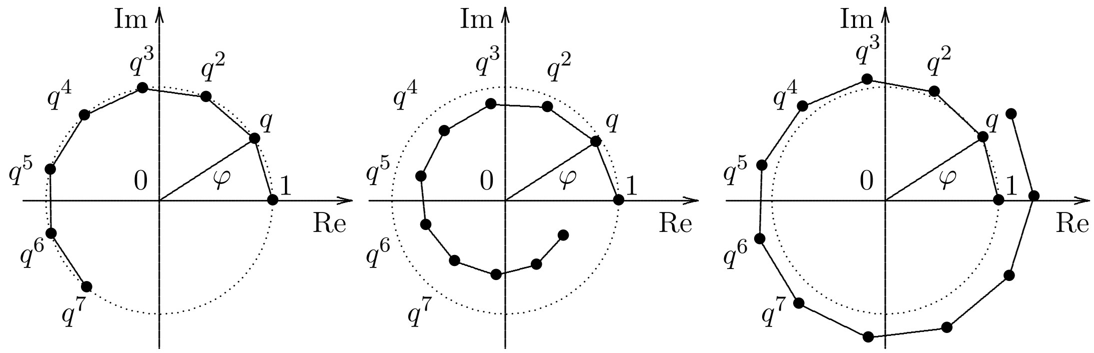
Pri tem naj bo $q = |q|\exp(i\varphi)$. Zaporedje je potem oblike

$$1, |q|\exp(i\varphi), |q|^2\exp(2i\varphi), |q|^3\exp(3i\varphi), \ldots$$

Če je $|q| = 1$, je zaporedje ciklično, vrti se po enotski krožnici $|z| = 1$ v kompleksni ravnini. Če je razmerje φ/π racionalno število, se zaporedje nekje prične ponavljati, sicer pa ne. Če je $|q| < 1$, dobimo konvergentno spiralo, v primeru $|q| > 1$ pa divergentno spiralo (slika 65). Kako lepo bi bilo, če bi se cene s časom vrtele po prvi ali drugi, ne pa po tretji! Za $|q| < 1$ torej velja:

$$\lim_{n\to\infty} q^n = 0.$$

Kako je pa z geometrijsko vrsto $1+q+q^2+q^3+\ldots$ v kompleksnem? Ni težko



Slika 65: Kompleksna geometrijska zaporedja.

ugotoviti, da konvergira, če je le $|q| < 1$ in da je tedaj njena vsota $1/(1-q)$:

$$1 + q + q^2 + q^3 + \ldots = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Naj bo n-ta delna vsota zgornje geometrijske vrste S_n:

$$S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1}.$$

Potem dobimo z množenjem s kvocientom q:

$$qS_n = q + q^2 + q^3 + \ldots + q^{n-1} + q^n.$$

Ko obe vrsti odštejemo, imamo:

$$S_n - qS_n = (1-q)S_n = 1 - q^n.$$

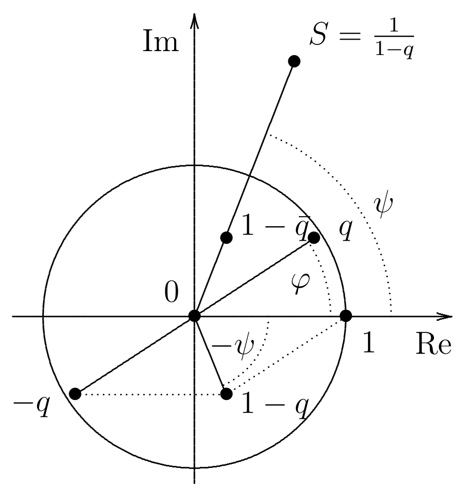
Za $q \neq 1$ imamo potem

$$S_n = \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q}.$$

Izraz je očitno pravilen tudi za $q = 0$. Po definiciji je vsota vrste S limita zaporedja delnih vsot. V našem primeru je za $|q| < 1$:

$$S = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{1-q} - \frac{q^n}{1-q} \right) = \frac{1}{1-q}.$$

Oglejmo si še pot do geometrijske konstrukcije vsote kompleksne geometrijske vrste. Kompleksno število $q = |q|\exp(i\varphi)$ leži znotraj enotske krožnice v kompleksni ravnini. Po paralelogramskem pravilu zlahka konstruiramo število $1-q$ in njegovo konjugirano vrednost $\overline{1-q} = 1-\bar{q}$, ki naj ima argument ψ, tako da ima samo število $1-q$ argument $-\psi$. Vsota S geometrijske vrste ima tudi argument ψ. Torej lahko z zrcaljenjem točke $1-\bar{q}$ na enotski krožnici konstruiramo vsoto S (slika 66).



Slika 66: Vsota kompleksne geometrijske vrste.

Vsoto lahko prepišemo v obliko, iz katere se da razbrati realni in imaginarni del:

$$S = \frac{1}{1-q} = \frac{1-\bar{q}}{(1-q)(1-\bar{q})} = \frac{1-|q|\cos\varphi + i|q|\sin\varphi}{1-2|q|\cos\varphi + |q|^2}.$$

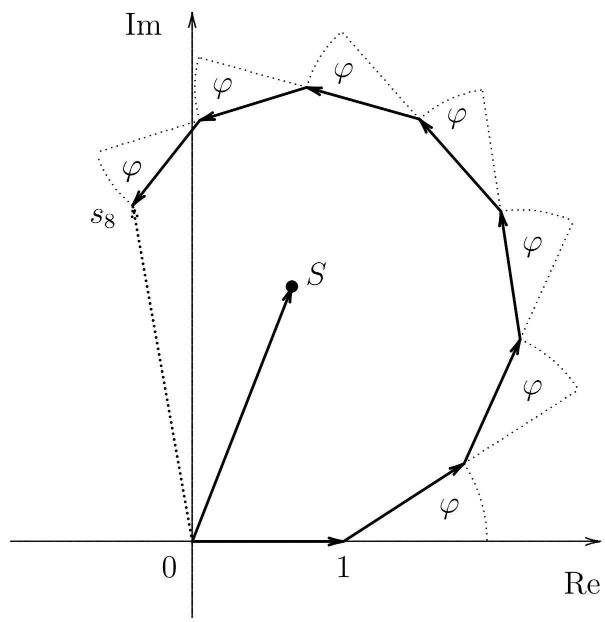
Po drugi strani pa je

$$S = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} q^k = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \cos(k\varphi) + i \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \sin(k\varphi).$$

Torej imamo nazadnje vsoti vrst:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \cos(k\varphi) = \frac{1-|q|\cos\varphi}{1-2|q|\cos\varphi + |q|^2},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} |q|^k \sin(k\varphi) = \frac{|q| \sin \varphi}{1 - 2|q| \cos \varphi + |q|^2}.$$



Slika 67: Vsota še ene kompleksne vrste.

Nadomestimo sedaj argument φ z $\varphi + \pi$. S tem dejansko nadomestimo kvocient q z $-q$. Če upoštevamo relaciji

$$\cos(k\varphi + k\pi) = (-1)^k \cos(k\varphi)\,,\ \sin(k\varphi + k\pi) = (-1)^k \sin(k\varphi)\,,$$

ki veljata za vsako celo število k, dobimo:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |q|^k \cos(k\varphi) = \frac{1 + |q| \cos \varphi}{1 + 2|q| \cos \varphi + |q|^2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k |q|^k \sin(k\varphi) = \frac{-|q| \sin \varphi}{1 + 2|q| \cos \varphi + |q|^2}.$$

To se pravi, da za vsako realno število φ in vsako realno število a, za katero je $|a| < 1$, velja:

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - a\cos\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\,,$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a^k \sin(k\varphi) = \frac{a\sin\varphi}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}.$$

Zakaj smo bili previdni in zapisali 1 posebej pred vrsto? Zato, na ne bi bilo dileme, kaj je začetni člen v primeru $q = 0$. Tedaj bi imeli težavo z nedefiniranim izrazom 0^0. Grafična razlaga je razvidna s slike 67. Včasih je koristna vsota

$$1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} a^k \cos(k\varphi) = \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\varphi + a^2}\,,$$

ki jo hitro dobimo iz prejšnje.

O študentih na univerzah bi lahko pisali tako ali drugače. Dalo bi se razpravljati na primer o tem, kako gledajo eden na drugega, kako jih vidijo tisti, ki nikoli niso bili študenti, kako gledajo nanje nekdanji študentje in kako jih doživljajo njihovi učeči profesorji in asistenti.

Ko sem začel kot asistent na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani, sem imel med študenti tudi nekaj takih, ki so prišli študirat z rodne Cerkljanske. To pa pomeni, da so bili le kakih pet let mlajši od mene. Tudi kasneje sem imel na fakulteti opravka z nekaj rojaki. Asistent ima vsakovrstno delo s študenti. V predavalnici vodi vaje, na katere se tako ali drugače pripravi, študente kliče po spisku k tabli, pazi jih na pisnih izpitih in kolokvijih, da preveč ne prepisujejo, nato popravlja njihove izdelke, se zraven veseli in še bolj benti, objavlja rezultate, sprejema pritožbe na število doseženih točk, se daje na razpolago za govorilne ure in morda še kaj.

Tako kot mnogi ljudje v različnih okoliščinah tudi marsikateri študent skuša nepošteno priti do čim boljše ocene ali pa vsaj do pozitivne. S čim manj truda seveda. V tem so ljudje nasploh veliki geniji in njihova domišljija ne pozna meja. Tako imenovani plonk listki, plonkci, ali pa pisanje formul po rokah in nogah niso nič v primerjavi z bolj umetelnimi prijemi. S pisanjem plonkcev se študent morebiti tudi kaj nauči. Asistent ali profesor, ki sam pazi kakih trideset študentov, ne more absolutno nadzorovati vseh, kar študentje prav dobro vedo. Tudi pregledovanje indeksov, razporejanje po klopeh z razmiki po dolgem in počez nista dovolj dobra ukrepa, da se ne bi našel nekdo v skupini, ki bi bil modrejši od profesorja in asistenta in ki se ne bi posluževal bistroumnih nedovoljenih metod. Predavalnice z več vrati so tudi primerne za različne mahinacije. Sredi pisnega testa ti kdo uide skozi ena vrata ven, medtem ko paznik, asistent, demonstrator ali profesor, nadzoruje druga vrata, nato pa med pobiranjem izdelkov pretihotapi svojega nazaj in ga poskuša oddati hkrati z drugimi. Zunaj pa je seveda imel načitanega kolego, ki je daleč naokrog slovel po svojem briljantnem znanju in ki mu je naloge elegantno rešil. Včasih tudi kdo pod svoj papir enostavno podstavi indigo, da dobi kopijo kake naloge, nato pa jo posreduje kolegu. Včasih kdo odda kar original, podpisan z drugim imenom.

Prav komično je primerjati enaki rešitvi, od katerih je ena prepisana. Navadno je razpored na papirju enak, oznake so enake. Najhuje pa je, da so tudi napake enake. Malo verjetno je, da bi dva mislila tako enako in napačno na istem kraju in ob istem času. Pogost izgovor je, če je prevara odkrita. da sta študenta študirala skupaj. Naučila sta se morda res enako prav, pa očitno tudi enako narobe.

S pojavom zmogljivih žepnih računal je napredovala tudi tehnika *plonkanja*. Nič več se ni bilo treba posluževati mehanskih metod, tudi transporta plonkcev po vrvicah horizontalno ali vertikalno, ampak je študent vpisal vse potrebno v spomin računala. Nato je zapis še komu posredoval, da ga je še ta prepisal v svojega. Pravo veselje pa je zavladalo v študentskih krogih, ko se je dalo kar brezžično prek računal prepisovati eden od drugega.

Zgodi se tudi, da študent najame bolj podkovanega od sebe in ga pošlje na pisni kolokvij ali izpit. Če je treba, zamenja tudi sliko v indeksu, ali pa pride kar brez njega in se izgovarja, da ga ima pri nekem profesorju v podpisovanju ali kaj podobnega. Prevara jim gotovo včasih uspe. So pa tudi skrajno neinteligentni primeri, ko kdo pošlje predobrega delegata na svoj izpit, po možnosti takega, ki je blestel pri kakem predmetu in take si profesor ali asistent navadno najbolj zapomnita. Logično je, da navadno obdržita v glavi najboljše in najslabše. Zgodilo se je že celo, da je prišel na izpit fant namesto dekleta. Za konkretno obratno varianto pa še nisem slišal, čeprav je seveda popolnoma možna. Samo enkrat v življenju, ko sem bil še bruc, sem dobil ponudbo, da bi šel pisat izpit namesto nekoga, kar sem seveda gladko zavrnil. Imel sem slabe izkušnje z laganjem in goljufanjem. Doma me je oče takoj našel, če sem se samo poskušal kaj zlagati. Ne vem, ali je bil tako dober psiholog ali pa se mi je poznalo na nosu. Se mi je pa kar nekajkrat zgodilo, da jo je nekaj študentov ucvrlo s svetlobno hitrostjo iz predavalnice, kakor hitro sem začel preverjati istovetnost navzočih.

Na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani je bilo zanimanje za študij nekega leta ogromno, tako da smo morali uvesti sprejemne izpite iz matematike. Koliko nekaterim pomeni vpis na fakulteto, se je hitro pokazalo. Ko je bilo vse za sprejemni izpit že pripravljeno in trikrat preverjeno, se je čez noč zgodilo, da je nekdo glavnemu, ki je zadevo glede sprejemnih izpitov vodil, odtujil iz predala pisalne mize v pisarni nekaj izpitnih pol, tako da smo morali na hitro ukrepati in sestaviti nove naloge. Takega interesa za pole z nalogami ni bilo pred tem niti za kolokvije niti za izpite. Kaj izpiti, kaj kolokviji, kaj diploma! Priti na fakulteto, to je, kot kaže primer, najbolj pomembno.

Goljufanje v šoli je nekaterim dobesedno zakodirano v genih. Že v prvem razredu osnovne šole je neka sošolka moji hčerki odtujila kontrolno nalogo, zbrisala podpis in dodala svojega. Učiteljica je na srečo odkrila prevaro. Ko sta bila naša otroka v osnovni šoli, je bil skoraj vsak dan kak cirkus in kazalo mi je že, da bi bilo dobro plačati za eno ali dve maši, če bosta le srečno in uspešno končala obvezno osnovno šolo. Uspešno sta jo, nesreč pa je bilo kar nekaj: razbita očala, poškodovana roženica, nekaj bušk in morda še kaj.

Kasneje sem kot profesor imel opravka z rednimi in izrednimi študenti. Odkril sem primer seminarske naloge, ki je bila kar fotokopija članka iz revije, le glava je bila spremenjena. Avtorica jo je prekrila s svojim imenom in priimkom, vtaknila v fotokopirni stroj in oddala kopijo. Nekaj podobnega se mi je zgodilo celo z nekim diplomskim delom.

> *Hči je očeta zaklad, ki ga je treba čuvati, in skrb zanjo mu jemlje spanje; v njeni mladosti, da se prepozno ne omoži in če je omožena, da se ne osovraži.*
>
> Θυγάτηρ πατρὶ ἀπόκρυφος ἀγρυπνία, καὶ ἡ μέριμνα αὐτῆς ἀφιστᾷ ὕπνον· ἐν νεότητι αὐτῆς μήποτε παρακμάσῃ, καὶ συνῳκηκυῖα μήποτε μισηθῃ.
>
> *(Sirahova knjiga, 42, 9)*

Prepisovanje drug od drugega v šoli se mi ne zdi popolnoma logično. Kaj čudna pomoč je to. Prepisovalec bo morda kasneje, ko bo delal poklicno kariero, bolje in hitreje napredoval, kratko pa bo morda potegnil oni drugi, ki je nekaj znal, se trudil in bil pošten. Samostojno delo ni ravno odlika prenekaterega našega študenta in resno se je treba vprašati, kako bo videti študij nekaj desetletij po slavnem bolonjskem procesu, ko naj bi študenti veliko delali samostojno. Čudno se mi zdi, da se nihče ne zgleduje po Američanih, pri katerih je nepošteno pridobljena ocena na univerzi prava sramota, ki se te lahko drži vse življenje. Eden od profesorjev, ki sem mu njega dni asistiral, je vedno poudarjal, da znani ameriški senator ni v svoji karieri prišel prav daleč samo zaradi nekega plonkanja na univerzi. Po drugi strani pa mladina od Američanov prevzema kup drugih navad, v govorici pa že kar cele stavke. Če drugega ne, nekateri kar naprej sprašujejo z "O. K?" (Okay?). Res je praktično! Kot da sami ne premoremo "V redu?" Samo ena črka je več. O. K. je po neki razlagi kratica za "Oll Korrect". Nekdo naj pač ne bi vedel, da se prav piše "All correct", pa je izumil kratico O. K., s katero je označil, da je neki izdelek v redu. Obstajajo pa še druge razlage.

Fiziki in matematiki smo bili na ljubljanski Univerzi pod isto streho. Čeprav eden brez drugega ne moremo, pa vedno eni drugim strokovno ali pa tudi ne nekaj oporekajo. Pokojni profesor Rajko Jamnik se je vedno jezil, če je kdo na vajah hotel kaj namenoma zaobiti, nekaj kar tako trditi na pamet, brez argumentov, nekako pavšalno. Tedaj je imel navado reči: "Saj se obnašate kot kakšen fizik! Ti skušajo vedno nekaj zaključevati kar na pamet." Profesor Bohte, ki je rad na veliko pripovedoval, kako je bilo z matematiko na Univerzi, ko je še sam študiral, je vneto razlagal, da so nekoč fiziki kar tekmovali med seboj, kdo bo slabše predaval. Neki fizik je začel predavanje o nihanju nekako takole: "Kaj? Vi mislite, da znate adicijski izrek za funkcijo kosinus? Kje pa!" In ga je napisal na tablo, in to napačno. Fiziki so navadno matematikom vračali milo za drago. Če drugega ne, so pravili, da matematiki študentom zamolčijo, da marsičesa ne znajo rešiti.

Slišali smo tudi, da se predavanja iz matematike glede vsebine na Univerzi dolgo niso nič posodabljala. Šele profesor Križanič je menda pričel s popolnoma novimi vsebinami in pristopi. Bil je prvi, ki je izdal v slovenščini knjižico o računalnikih, namenjeno mladim. Velik razmah v matematiki se je začel, ko so dobri matematiki začeli študirati v ZDA in drugje ter se vrnili z doktoratom ter polno malho novotarij. Marsikdo pa je v tujini kar ostal za dlje časa, morda za vedno.

Tudi naprednejši, bolj kritični, bolj drzni in hkrati dobri študenti so začutili zastarelost učnih načrtov v tistih časih in so samostojno začeli pridno študirati, na primer diskretno matematiko, teorijo grafov, topologijo, matematiko v biologiji, računalniško matematiko. V mojih študentskih letih, okoli 1970, je nastal klub mladih matematikov, ki si je nadel ime *Laar Getny*. Sliši se precej po madžarsko in oblastem v tistih železnih časih je bilo treba posebej pojasnjevati, kaj je to. Klub je imel svoj, po vseh takratnih pravilih napisan statut in je organiziral predavanja tudi za druge študente, ki jih je zanimala predvsem taka matematika, kakršne uradno nihče ni predaval. Laar Getny je nekoliko dopolnjen palindrom besede *integral*, to se pravi *largetni*.

Largetni se je najprej razdelil na dve besedi, pisani z veliko začetnico: Lar Getni. Da pa je bilo vse skupaj bolj imenitno, se je podvojil, končni *i* pa spremenil v *y*. Tako je nastal slavni Laar Getny. Poslušal sem celo nekaj predavanj, ki jih je ta klub organiziral.

Beseda *palindrom*, ki jo dobro poznajo, če ne drugi, reševalci križank, je seveda grška. Prvi del πάλιν, pomeni *nazaj, znova, zopet*, beseda δρόμος pa pomeni med drugim *tek*. Palindrom je na splošno beseda, ki ima neki pomen, lahko tudi isti, če jo beremo v obeh smereh. V matematiki včasih omenjamo tudi krivuljo *loksodroma*. Ta leži na obli ali sferi in seka vse njene poldnevnike pod istim kotom. Beseda je nastala iz λοξός, kar pomeni *poševen, prečen*, in prej omenjene besede δρόμος. Na predavanjih, ko prispemo do diferencialne geometrije, navadno izpeljemo njeno enačbo kot lep primer uporabe prve osnovne ali fundamentalne forme teorije ploskev in diferencialnega računa.

Še nekaj o ustanovnih članih kluba Laar Getny. Pojdimo po vrsti, kakor so se razporedili v Studiu Potrč sredi Ljubljane, ko so se prvič fotografirali. Na fakulteti so bili vsi v višjih letnikih kot sem bil jaz. Bili so že izkušeni in prekaljeni matematiki. Fotografirali so se v istem studiu in v enakem razporedu tudi kasneje, vsi že nekoliko ostareli. Leta pač naredijo svoje.

Dušan Hvalica je diplomiral, magistriral in doktoriral pri profesorju Francetu Križaniču. Kariero je nadaljeval na Ekonomski fakulteti v Ljubljani. Sodeloval je pri pisanju več univerzitetnih učbenikov, tudi iz teorije iger, diskretne matematike in teorije odločitev.

Franc Dacar je diplomiral pri Andreju Železnikarju in doktoriral pri Bojanu Moharju. Magistriral ni nikoli, ker je raje počakal na čase, ko se je dalo na doktorat neposredno, to je brez magisterija. Opravljati pa je moral rigoroze, kakor na primer njega dni France Prešeren na Dunaju, o čemer smo se učili pri slovenščini, seveda pri Viktorju Jerebu. Ne pozabimo, v Wrocławu je Franc Dacar leta 1963 osvojil prvo nagrado na mednarodni matematični olimpijadi, v Sloveniji edini vse do leta 2020, ko je bil te časti deležen Luka Horjak. Ko sem služil v JLA v Titovem Velesu, me je Dacar nadomeščal kot asistent za matematiko. Rad je študentom dajal tudi bolj *eksotične* naloge, ki si jih je sam izmislil.

Janez Barbič je diplomiral in magistriral pri profesorju Francetu Križaniču. Nekaj časa je bil asistent na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani, kjer se ni ravno dobro razumel s svojim šefom, ki je od njega zahteval prisotnost na delovnem mestu od zjutraj do popoldneva. Ukvarjal se je z optimizacijskimi metodami, računalniškimi reprezentacijami in prevajanjem matematičnega priročnika v slovenščino.

Vladimir Batagelj, rojen v Idriji, je diplomiral pri Niku Prijatelju, magistriral pri profesorju Zvonimirju Bohtetu in doktoriral pri Tomažu Pisanskem. Ukvarja se s teorijo grafov, velikimi omrežji, kombinatorično optimizacijo, računalništvom in drugim. Dolga leta vodi Sredin seminar, kjer so na sporedu najrazličnejše teme iz računalništva. Naštejemo lahko krepko čez tisoč srečanj. Dolgo časa se je seminar nadaljeval v znani ljubljanski gostilni "Pod lipo". Vladimir, krajše Vlado, je veliko pripomogel, da se je usidral v Sloveniji TEX, s katerim na veliko postavljamo matematična in druga besedila z računalnikom. Žal veliko prerano umrli profesor Egon Zakrajšek, zelo nadarjen matematik, ki je vrsto let po doktoratu delal v ZDA, je bil stalen udeleženec Sredinega seminarja. Povedal nam je veliko zanimivih stvari in nam predstavil kopico novih problemov in njihovih rešitev.

Igor Leiler je diplomiral pri profesorju Francetu Križaniču in bil asistent na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani. Dokler ni šel v širni svet, sva si celo nekaj let delila kabinet. Nato si je prek Beograda uredil štipendijo japonske vlade in se leta 1978 podal v Deželo vzhajajočega sonca, kjer je magistriral in doktoriral iz teoretične ekologije. Nekaj časa se je ukvarjal z računalniškimi igricami, ki so svoj čas obnorele marsikaterega mladeniča, pa tudi mladenko. Po neslavnem propadu podjetja pa se je odločil za samostojno gostinsko dejavnost. Živi na obrobju zgodovinskega japonskega mesta Kjoto, ki slovi po gejšah in številnih templjih. Tam je odprl prvo in doslej edino slovensko restavracijo na Japonskem, ki jo je poimenoval *Pikapolonca*. Japonci imajo pri Leilerju baje najraje krvavice in znano prekmursko gibanico, toči pa jim tudi slovenska vina.

Tomaž Pisanski, tudi moj mentor pri doktoratu, je v Ljubljani diplomiral pri Egonu Zakrajšku magistriral pri Jožetu Vrabcu, nato pa še v Pensilvaniji. Njegov mentor pri doktoratu je bil Torrence Douglas Parsons. Tomaž se ukvarja prvenstveno z grafi, nekaj časa pa je posvetil tudi rodoslovju in grboslovju, ves čas pa občuduje življenje in delo barona Jurija Vege. Veliko svojega časa je porabil pri organiziranju proslav ob 200-letnici njegove smrti in 250-letnici njegovega rojstva. Parsonsu je bil mentor Albert William Tucker, temu Solomon Lefschetz, temu William Edward Story, temu Carl Gottfried Neumann, temu Friedrich Julius Richelot, temu pa slavni Carl Gustav Jacob Jacobi, na kar je Tomaž prav ponosen. Doktorski rodovnik matematikov je na razpolago na svetovnem spletu in najstarejši ljudje, ki v njem nastopajo, segajo v bizantinske čase. V 14. stoletju najdemo na primer Nilosa Kabasilasa, ki je imel učenca Demetriosa Kydonesa, ta pa Manuela Chrisolarasa in Georgiosa Gemistosa. Učenca slednjega sta bila Basilios Bessarion in Theodoros Palaiologos. Bessarionovi učenci so bili Johannes Argyropoulos, Janus Lascaris in znani Regiomontanus, ki mu je sledil velik razmah evropske matematike. Regiomontanusov učenec je bil Domenico Novara da Ferrara, učenca tega pa sloviti Nikolaj Kopernik in Luca Pacioli. Argyropoulosov učenec je bil sam Leonardo da Vinci.

Nekako tako, kot beremo v Matejevem evangeliju:

> *Abrahamu se je rodil Izak, Izaku se je rodil Jakob, Jakobu se je rodil Juda in njegovi bratje.*

Še v jeziku, v katerem je bil Matejev evangelij najverjetneje najprej napisan:

> Ἀβραάμ ἐγέννησεν τὸν Ἰσαάκ, Ἰσαάκ δὲ ἐγέννησεν τὸν Ἰακώβ, Ἰακώβ δὲ ἐγέννησεν τὸν Ἰούδαν καὶ τοὺς ἀδελφοὺς αὐτοῦ.

Bizanc, grško Βυζάντιον, so ob Bosporju ustanovili Grki iz Megare že v 7. stoletju pr. n. št. Ime je dobil po bajeslovnem megarskem kralju *Bizasu*, grško Βύζας, rodilnik Βύζαντος, Nizosovem sinu. Mesto je postalo prestolnica Vzhodnorimskega cesarstva in se po cesarju Konstantinu I. Velikem v 4. stoletju preimenovalo v *Konstantinopel*, grško Κωνσταντινούπολις. Slovanski narodi so ga imenovali *Carigrad*. Bizantinsko cesarstvo se je obdržalo kar dolgo, dokler niso Turki leta 1453 zavzeli njegove prestolnice Carigrad, kar je imelo hude posledice za vso jugovzhodno Evropo. Carigrad so Turki imenovali *Konstantiniyye*, kar izhaja iz arabskega imena القسطنطينية, pa tudi *İstanbul* in celo *İslambul*. Leta 1930 so ga uradno preimenovali v *İstanbul*, kar pride iz grških besed εἰς τὲν πόλιν, kar pomeni *v mesto*. Mustafa Kemal Atatürk je leta 1928 v državi zamenjal arabsko pisavo z latinico. Tako Turki za Carigrad niso več pisali قسطنطينيه, إسطنبول oziroma إسلامبول, ampak tako, kot smo zapisali zgoraj. V usodnem letu 1453 je bil meseca maja v tistih krajih viden delni Lunin mrk, ki se je zgodil sredi skoraj dvomesečnega obleganja. Luna je pordela, kar je demoraliziralo branitelje mesta, ki je padlo teden dni kasneje v roke Turkom.

Razkošno carigrajsko Svetišče Svete božje Modrosti, Ναός τῆς Ἁγίας Θεοῦ Σοφίας, je postalo mošeja *Ayasofya*. Graditi ga je dal bizantinski cesar Justinijan I. (482–565), ki je vladal od leta 527 do leta 565. Gradnja je trajala od leta 532 do leta 537. Glavna arhitekta sta bila Izidor iz Mileta, Ἰσίδωρος ὁ Μιλήσιος, in Antemij iz Tral v Lidiji v Mali Aziji, Ἀνθέμιος ὁ Τραλλιανός, tudi matematik, zlasti geometer. Cesar je veliko razmišljal, kako narediti oboke, da bodo kljubovali vsem pritiskom in potresom. Malo pred drugo svetovno vojno so mošejo spremenili v muzej. Kako pa države skrbijo za svojo kulturno dediščino, pa nam je dobro znano. Leta 2020 je nekdanje Svetišče Svete božje Modrosti zopet postalo mošeja.

Zavzetje Carigrada leta 1453 je navdihnilo mnoge umetnike, da so upodobili ta dogodek. Prav tako prihod križarjev v to mesto, mnogo let prej, leta 1204, v času četrte križarske vojne. Na gimnaziji nam je profesor Cuderman nekega dne dal na mizo fotografijo umetnine *Prihod križarjev v Carigrad*, ki jo je ustvaril *Ferdinand Victor Eugène Delacroix* (1798–1863), mi pa smo

morali s svojim skromnim znanjem ruščine napisati, kaj na sliki vidimo. Vsaj začeti smo znali:
Эжен Делакруа: Взятие крестоносцами Константинополя 12 апреля 1204 года.
Nato smo veliko brskali po slovarju in nazadnje le nekaj spravili skupaj.

Križarske vojne so poleg hudih človeških izgub prinesle Evropi tudi napredek. Evropejci so spoznali orientalsko kulturo, hrano, začimbe, izume in še marsikaj, tudi matematiko in astronomijo. Porodila se je ideja, da bi v Indijo in Daljni Vzhod prišli tako, da bi potovali proti zahodu. Takrat je že začelo prevladovati mnenje, da je Zemlja okrogla in sledila so velika geografska odkritja, ki so imela velikanske posledice za življenje na tem planetu.

Vladimir Batagelj in Tomaž Pisanski sta bila tudi dobra tekmovalca v znanju srednješolske matematike. Večkrat sta bila nagrajena in sodelovala sta tudi na zveznih jugoslovanskih tekmovanjih. Izdala sta zbirko rešenih nalog z dotakratnih republiških tekmovanj v dveh knjigah. Škoda, da na gimnazijah že prej nismo imeli takih ali podobnih zbirk v slovenščini. Zagotovo bi bili uspehi na matematičnih tekmovanjih še večji.

Slika 68: Gimnazija Jurija Vege v Idriji.

12 Dvojina, vikanje in rodilnik

S pogosto omenjenim učiteljem slovenščine Viktorjem Jerebom zares ni bilo šale, ko je šlo pri govorjenju in pisanju za uporabo dvojine ali duala in pravilno vikanje. Čim je kdo v naglici uporabil množino namesto dvojine, niti malo ni okleval in je zarohnel, kakor da bi bil za to sprogramiran: "Slovenščina pozna tudi dvojino!" Jereb bi se dandanes zagotovo obračal v grobu, če bi slišal ljudi na televiziji, kako jim dvojina ne gre iz ust. Še bolj pa bi se najbrž namrdnil, če bi poslušal polovično vikanje, na primer: "Ali ste bila tudi Vi zraven, ko so klali prašiča? Ali ste letos tudi Vi potegnil trinajsto plačo?" Pravilno je: "Ali ste bili tudi Vi zraven, ko so klali prašiča? Ali ste letos tudi Vi potegnili trinajsto plačo?" Tako govorijo celo nekateri visoko izobraženi ljudje, celo taki s po enim ali več doktorati znanosti, ki so se sicer sposobni naučiti kopico tujih jezikov, zanemarjajo pa pravilno vikanje in dvojino v materinem jeziku. Navsezadnje ni treba zameriti kmečki dekli, ki je nekoč vprašala cerkljanskega dekana: "Gospod dekan! Ali je Vaš tisti pes, ki teče za Tabo?" Seveda ga je vprašala v cerkljanskem narečju: "Gaspúd dekán! A j waš tejst pos, ka za Tába leti?" Tisti *g* je seveda izgovorila kot zveneč *h*, tako nekako kot izgovarjajo Čehi *h* v besedi Praha. Cerkljani vsevprek uporabljajo glagol *leteti* namesto *teči*. Seveda pa jim žganje v liter še vedno teče, ko ga kuhajo javno ali skrivaj, ptice pa po zraku *frlijo*, kako pa drugače. Ženica bi morala vprašati: "Gospod dekan! Ali je Vaš tisti pes, ki teče za Vami?"

Dvojino poznajo le redki jeziki. V Evropi smo to Slovenci in Lužiški Srbi, pozna pa jo tudi izumrli jezik sanskrt, pa tudi stara grščina, najbolj v Iliadi in Odiseji. S členi vred imamo na primer za samostalnik človek, grško ἄνθρωπος, v imenovalniku ednine, dvojine in množine; ὁ ἄνθρωπος, τὼ ἀνθρώπω, οἱ ἄνθρωποι. Določne člene pozna tudi cerkljansko narečje. Če drugi ne, jih imajo imena laufarjev, znamenitih cerkljanskih pustnih šem: *ta star, ta stara, ta tierjest* in drugi. Cerkljanščina ima seveda tudi neke vrste nedoločne člene, saj Cerkljani govorijo: *an díc, ana teta, anu tele.* Pravilno je: neki dedec, neka teta, neko tele.

V rajnki Jugoslaviji in še prej je slovenska dvojina šla nekaterim zelo na živce, da ne rečemo vsa slovenščina s premičnim naglasom, ozkimi, širokimi, kratkimi in dolgimi samoglasniki ter polglasnikom vred. Našo dvojino so imeli za velik arhaizem, češ, vsi jeziki so jo že zdavnaj opustili. Nekega jutra pride v službo kolega in naznani: "Dvojino bodo ukinili." Ne vem, kje je to slišal. Kdo ima pravico nekaj kar tako ukiniti? Neki drugi kolega, ki je slutil vse nakane skupnih jeder in unitarističnih teženj, mu je nemudoma zabrusil: "Ne! Ne bodo je ukinili. Nikoli!" In tako jo še imamo in otroci se še vedno učijo po šolah, da ima slovenščina ednino, dvojino in množino, in to v spreganju in sklanjanju. Res pa je, da smo se mi učili, in po slovnicah je tako pisalo, da imamo ednino, dvojino in množino in sklanjatveni obrazci so sledili temu vrstnemu redu. Nenadoma pa se je v slovnicah pojavil vrstni red ednina, množina, dvojina. Ni znano, rezultat katere znanstvene in globokoumne razprave je bil tak vrstni red, toda z lastno glavo razmišljajoči ljudje so takoj posumili, da gre za to, da bodo v naslednjih izdajah slovnic dvojino kot tretje slovnično število z večjo lahkoto enostavno izpustili. Potem bi bila slovenščina že bliže nekakšni jugoslovanščini.

Druga posebnost slovenščine je uporaba rodilnika ali genitiva v nikalnih stavkih. Pogosto ljudje v takih primerih uporabljajo tožilnik ali akuzativ namesto rodilnika. Stavek "Že dolgo nisem videl svojo mater." ima dve napaki. Pravilno je "Že dolgo nisem videl svoje matere." Samostalnika *mati* in *hči* imata tudi sicer nekoliko drugačno sklanjatev. Da bi se izognili težavam, je nekdo izumil besedo *hčera*, da se lahko sklanja kot običajni ženski samostalnik na *-a*. Samostalnik *otrok* ima mestnik ali lokativ dvojine in množine *pri otrocih*, orodnik ali instrumental pa *z otrokoma, z otroki.* Pogosto slišimo ali beremo *z otroci*, kar ni pravilno.

Kjer je le mogoče, bi potem reformatorji dodali še kak *j*, da bi bilo v jeziku čim več *lj* in *nj*, in tako bi šlo naprej, korak za korakom, do popolne stopitve našega jezika v nekakšen $\kappa o\iota\nu\acute{\eta}$ jugoslovanskih narodov. Namesto, da bi na slovenščino pazili kakor na punčico svojega očesa! Včasih ima človek občutek, da nekateri bolj pazijo na kakšno redko živalco ali rastlinico kakor na svoj materni jezik. Seveda je treba tudi tem posvečati veliko pozornosti, da se ohranijo.

Pri Cankarjevi založbi so v začetku osemdesetih let dvajsetega stoletja izdali serijo žepnih slovarčkov. Za tujce so v njih razložene bistvene poteze slovenskega jezika. Za nemško in angleško govoreče je zapisan orodnik dvojine samostalnika mesto napačno: *z mesti* namesto *z mestoma*. Srbom, Hrvatom, Francozom in Italijanom pa so zapisali isti primer prav: *z mestoma*. Morda je šlo le za tiskovno napako, toda lepo bi bilo, da se ponese slava o obstoju naše dvojine med tujce s pravilnimi sklanjatvenimi vzorci.

Ali pravzaprav ni lepo imeti dvojino? Pa naj kdo reče, da ne. Stavek "Zelo rada sva se imela." vendar enolično pove število udeležencev. Stavek "Do vratu smo bili zaljubljeni." pove vse ali nič. Ali smo bili zaljubljeni trije, sto ali pol milijona? Naj bo naša ljuba dvojina še tak relikt ali arhaizem, morali bi jo obvarovati tako kot svoj Triglav, močerila, kranjsko klobaso, panjske končnice, idrijske žlikrofe, šebreljski želodec, dolenjski cviček, cerkljanske laufarje in take reči, ki spadajo v identiteto naroda. Razpravo lahko sklenemo z ugotovitvijo, da slovenščina brez dvojine ni več slovenščina. Celo neki visoko izobraženi Čeh mi je, ko je pogovor stekel o posebnosti v slovenščini, zatrjeval, da imamo dvojino le še v fragmentih. Čudnega nič, če jo sami tako malomarno uporabljamo.

Koliko je primerov v svetovni zgodovini in literaturi, ko sta nastopata skupaj dva. Adam in Eva, Kajn in Abel, Gilgameš in Engidu, Herodot in Tukidid, Stan in Olio, Romeo in Julija, Pegam in Lambergar. V Republiki San Marino vladata dva kapitana. Ali ni dvojica reči ali oseb dovolj prvobitna, da se to ne bi poznalo tudi v jeziku, v dvojini? "Eden ni nobeden, dva se že kar pozna", je pisalo v naši prvi čitanki. Dve različni reči že veliko pomenita, lahko ju primerjamo med seboj, če ne drugega. Razločujemo lahko dve stvari. Zlasata ali stepeta se lahko dve osebi. Janez lahko nagaja Micki ali obratno. Ena sama reč? Kakšen dolgčas! Pri jeziku samem imamo samoglasnike in soglasnike, zveneče in nezveneče soglasnike. Mar ni delitev na dvoje nekaj najbolj naravnega?

Matematika je dvojini, pa če je to komu všeč ali ne, pravzaprav zelo naklonjena. Kar naprej govorimo o lastnostih in binarnih relacijah ali odnosih. Že na samem začetku pouka geometrije govorimo o dveh premicah, ki sta v taki in taki medsebojni legi, dveh podobnih likih itd. Pri naravnih številih vedno najprej govorimo o največjem skupnem delitelju in najmanjšem skupnem večkratniku dveh števil, najprej se učimo seštevati in množiti dve števili in ne več. In še in še bi lahko naštevali.

Čudnega ni nič, če se tretji aksiom v teoriji množic imenuje aksiom o paru. Prvi aksiom je aksiom ekstenzionalnosti, ki pravi: če je reč a enaka reči b, potem v vsaki množici A, kateri pripada a, pripada tudi b. Naslednji aksiom se imenuje aksiom o podmnožicah. Predpostavimo, da neko množico A že imamo, L pa naj bo lastnost, ki je za člane množice A smiselna. Katerikoli element množice A lastnost L ima ali pa je nima, pri čemer se ti dve možnosti izključujeta. Potem obstaja množica B, ki jo sestavljajo natančno tisti člani množice A, ki imajo lastnost L. Seveda je B podmnožica množice A, kar zapišemo v obliki $B \subseteq A$. Omenjeni aksiom o paru pa trdi: če je reč a različna od reči b, potem obstaja množica A, ki ima za svoja edina člana reči a in b. Potem seveda pišemo $A = \{a, b\}$. Posledica aksioma o paru in aksioma o podmnožici je obstoj dveh skromnejših množic. Za člana množice $A = \{a, b\}$ je gotovo smiselna lastnost "biti različen od b". Torej obstaja množica $B = \{a\}$, saj je v A le a tisti, ki je različen od b. V množici B pa je smiselna lastnost "biti različen od a". Taka množica po aksiomu o podmnožicah obstaja, imenujemo jo prazna množica in jo označimo z $\emptyset$ ali $\{\}$, kar je včasih še bolj nazorno: zaviti oklepaj in nič notri. Kakor strah, ki je okrog votel, na sredini ga pa nič ni.

Ker torej obstajata množici $\{a\}$ in $\{a, b\}$, obstaja po aksiomu o paru tudi množica $\{\{a\},\{a,b\}\}$, ki ji pravimo urejeni par reči a in b in pišemo:

$$(a,b)=\{\{a\},\{a,b\}\}.$$

Pri urejenem paru je pomembno, kaj je na prvem, kaj na drugem mestu v oklepaju. Če sta namreč a in b različni reči, potem je

$$(b,a)=\{\{b\},\{a,b\}\}\,,$$

kar pa očitno ni isto kot (a,b).

Za številčnejše množice pa potrebujemo aksiom o uniji. Množico s tremi člani a,b,c, kjer so to med seboj različne reči, dobimo na podlagi prejšnjih razmišljanj. Obstajata torej množici $A=\{a,b\}$ in $B=\{c\}$. Aksiom o uniji nam potem zagotavlja obstoj množice $C=A\cup B=\{a,b,c\}$. In šele sedaj gredo stvari v pravo množino. Hecno se sliši, toda v teoriji množic so množice tudi $\emptyset=\{\},\{a\}$ in $\{a,b\}$. Prva nima nobenega člana, druga samo enega, tretja pa le dva.

Zgodilo se je, in to ne le enkrat, da sta se vpisala na isto fakulteto, pa še v isti program dvojčka, ki sta si podobna kot jajce jajcu in ju še rodna mati stežka razločuje. Vsi vemo, da ju je sicer lepo gledati, nekoliko bolj nerodno pa je pri kolokvijih in izpitih, ko nikoli ne veš, kdo je kdo. Ko sta nekoč punčki dvojčici prišli na ustni izpit iz teorije množic, mi ni kazalo drugega, kot da sem posedel vsako za svojo mizo istočasno, jima dal ista vprašanja, in eno od njih je bilo, kot se spodobi, aksiom o paru in njegove posledice.

Če vzamemo na znanje Ptolemajev izrek, potem pridemo do adicijskega izreka za funkcijo sinus tako, da si pomagamo s krožnico premera 1 (slika 69). Vanjo včrtamo konveksni štirikotnik $ABCD$ tako, da je diagonala AC premer krožnice. Kot ob oglišču A pravokotnega trikotnika ABC naj bo α, kot ob oglišču A pravokotnega trikotnika ACD pa β. Potem velja:

$$|AB|=\cos\alpha\,,|BC|=\sin\alpha\,,|CD|=\sin\beta\,,|DA|=\cos\beta\,,|AC|=1.$$

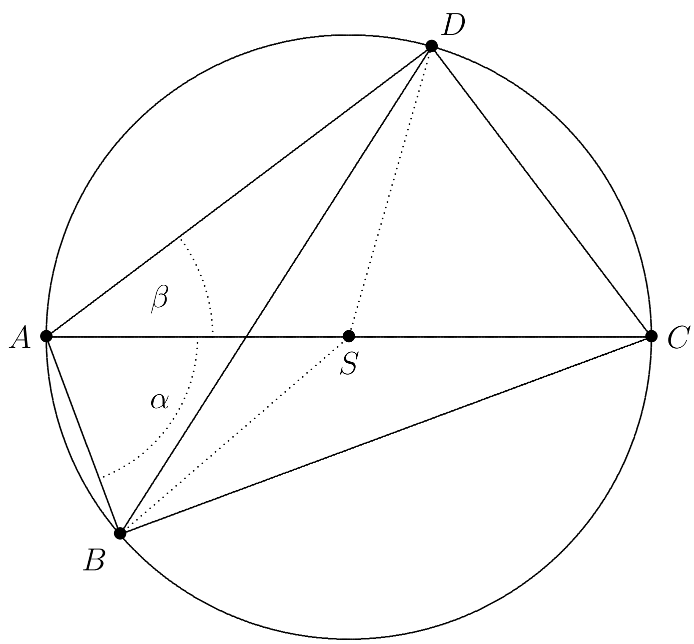
Obodni kot nad tetivo BD je bodisi $\alpha+\beta$ bodisi $\pi-\alpha-\beta$ odvisno od središča S krožnice. Zato je ustrezni središčni kot γ bodisi $2\alpha+2\beta$ ali pa $2\pi-2\alpha-2\beta$.

Tetiva BD potem meri $\sin(\gamma/2) = \sin(\alpha + \beta)$ oziroma $\sin(\pi - \alpha - \beta) = \sin(\alpha + \beta)$, kar pomeni, da je v vsakem primeru

$$|BD| = \sin(\alpha + \beta).$$

Ptolemajev izrek $|AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |DA| = |AC| \cdot |BD|$ nam da adicijski izrek:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$



Slika 69: Izpeljava adicijskega izreka iz Ptolemajevega.

Zaradi sodosti oziroma lihosti funkcij takoj najdemo

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

Za funkcijo kosinus pa lahko zapišemo:

$$\cos(\alpha + \beta) = \sin(\pi/2 - \alpha - \beta) = \sin((\pi/2 - \alpha) - \beta) =$$

$$= \sin(\pi/2 - \alpha)\cos\beta - \cos(\pi/2 - \alpha)\sin\beta = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta.$$

Nazadnje imamo adicijski izrek za kosinusno funkcijo, to se pravi

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta,$$

in z zamenjavo $\beta \to -\beta$ še

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta.$$

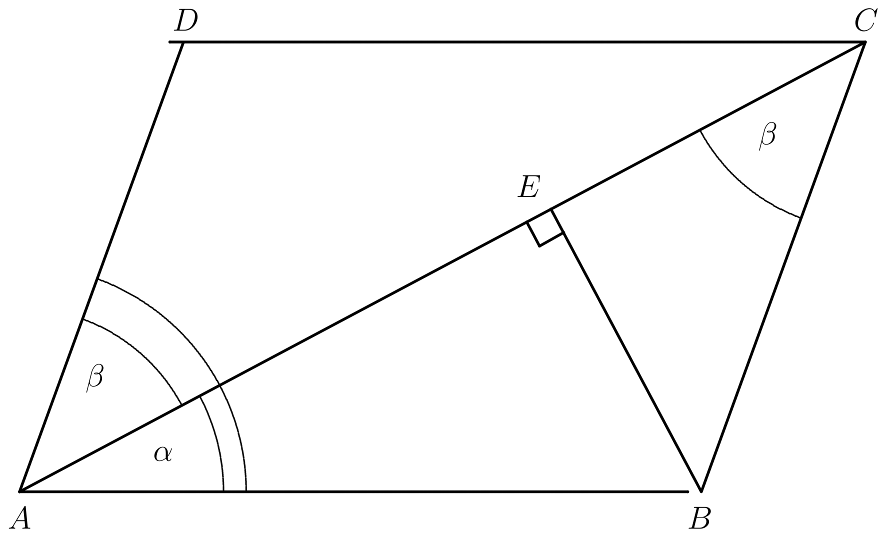
Ko sem že, nekoliko bolj v letih, menil, da poznam kar nekaj metod za dokaz adicijskih izrekov, sem na nekem strokovnem srečanju slovenskih matematikov izvedel, da se tistega za sinusno funkcijo da dobiti tudi iz ploščine paralelograma. Ploščina paralelograma je namreč produkt dveh sosednjih stranic, pomnožen s sinusom vmesnega kota, dvakratna ploščina trikotnika pa produkt stranice in višine nanjo. Kota α in β narišimo tako, da imata skupen krak in skupen vrh A (slika 70). Nato konstruiramo poljuben paralelogram $ABCD$. Označimo stranice $a = |AB| = |CD|, b = |BC| = |DA|$ in diagonalo $e = |AC|$. Očitno je ploščina paralelograma enaka $p = ab\sin(\alpha + \beta)$. Po drugi strani pa z razrezom trikotnika ABC na pravokotni trikotnik ABE, ki ima kateti $|AE| = a\cos\alpha$ in $|EB| = b\sin\beta$, ter na trikotnik EBC s katetama $|EC| = b\cos\beta$ in $|EB| = a\sin\alpha$, lahko zapišemo tudi:

$$\frac{1}{2}p = \frac{1}{2}a\cos\alpha \cdot b\sin\beta + \frac{1}{2}b\cos\beta \cdot a\sin\alpha.$$

Z izenačenjem ploščin in po krajšanju z ab dobimo:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Meni profesor Karčnik v glavnem ni imel česa očitati, navadno pa je pri geometriji vedno komentiral, kakor da ima to že v genih: "Ja veste, v tem ste pa nespretni." To je bilo takrat, ko sem moral na tabli z dvema velikima lesenima trikotnikoma, ravnilom, šestilom ter kredo kaj geometrijskega konstruirati, pa se mi je v strahu božjem kaj spodmaknilo, zdrsnilo ali kako



Slika 70: Ploščinska izpeljava adicijskega izreka za funkcijo sin.

drugače sfižilo. Za to bi človek moral biti vsaj nekakšen storokec iz rodu grških hekatonhejrov.

Iz grške mitologije namreč poznamo *storokce*, *hekatonhejre*, po grško ἑκατόγχειρες, sinove Urana in Gaje. Beseda je sestavljena iz besed ἑκατόν, *sto*, in χείρ, *roka*. Treba je vedeti za posebnost grščine: γ pred γ, κ, ξ, χ izgovarjamo kakor *n*, na primer v besedah ἄγγελος, ἄγκυρα, φάλαγξ, Ἀγχίσης. Zato se ne piše ἑκατόνχειρες, kakor bi človek pričakoval.

Nespreten sem zares bil. Obvezna orodna telovadba v šoli mi ni nikoli šla. Pa ne samo meni, še nekateri moji sorodniki so bili pri telovadbi precej štorasti. Prišli smo na glas, da za kakšno matematiko bi še bili, za telovadbo pa ne. Meni je pri telovadbi šlo na živce že postavljanje v vrsto, pa tisto učiteljevo piskanje na piščal, pa njegovo prizadevanje, da bi vsak dobro skočil čez kozo in konja, plezal kot opica po nekakšnem stožju ali vrvi, delal prevale naprej in nazaj. Namesto skakanje čez kozo v telovadnici bi bili bolj koristno telovadili pri kakšnem kmetu v njegovem kozolcu v času žetve, ko je treba obešati snope za sušenje. Telovadbe sem imel vsak dan, ko sem hodil na gimnazijo, dovolj že s tem, da sem moral po vožnji z avtobusom iz Idrije v Cerkno od tam še pešačiti v zgornji del Planine, do Očanca.

Kozolci niso le naša posebnost in del ljudske arhitekture. V Cerknem je bil nekaj časa inženir, ki je za svoje zdravje rad tekel in telovadil po kozolcih. Cerkljani so se ob tem nasmihali in ga imeli za čudaka. Dandanes marsikdo rad teče že zjutraj, preden se loti pravega dela. Profesor Marušič, tretji rektor Univerze na Primorskem, ni do nedavnega šel na noben obisk tuje univerze brez najnujnejše tekaške opreme, tako da je lahko, kjerkoli je že bil, zjutraj naredil nekaj krogov po bližnjem parku. Sicer pa kozolec izgublja svoj prvotni namen. Ali je v njem pospravljena mehanizacija in druga ropotija ali pa so nanj nameščeni ogromni reklamni panoji ali pa v njem celo hranijo balirano krmo ali drva za kurjavo.

Pri geometriji res ni bilo nič kaj trivialno hkrati obvladati toliko inštrumentov in zraven krotiti še svoje telo in duha. Sicer pa je bilo obvezno prinašati v šolo osebno geometrijsko orodje, ko je bila na vrsti ura geometrije. Gorje, če ga je kdo pozabil! Večkrat je profesor omenil, kako je v času njegovega študija na univerzi nekdo risal krožnice kar s šahovskimi figurami. Baje jih ni dolgo, ker je omenjeni profesorjev kolega kmalu opustil študij matematike. Pri risanju z geometrijskim orodjem je treba biti zelo natančen, da se pokaže tisto, kar se želi. Recimo, da želimo v živo pokazati, kako se višine v trikotniku sekajo v eni točki, v višinski točki. Čim je človek premalo natančen, dobimo namesto točke mali trikotniček. Profesor nam je nekoč hotel pokazati, da sta dve daljici, konstruirani z ravnilom in šestilom, enako dolgi. Konstruira in konstruira, obrača in vihti na vse kriplje geometrijsko orodje, sproti razlaga in nazadnje vzame v šestilo prvo od omenjenih razdalj in zapiči šestilo v eno od krajišč druge daljice. Pravočasno še opazi, da se razdalji prepričljivo ne bosta ujemali. Tisti, ki smo sedeli v prvih klopeh, smo lahko bolje slišali in doživeli tole. "Proti vsem pričakovanju je ta razdalja", pa malo udari po enem kraku šestila, da se za malenkost stisne, "enaka tej razdalji." In potem je res bila. Še dobro, da ni mahnil preveč.

Višinski točki se učeno reče tudi *ortocenter.* Po grško pomeni ὀρθός *pokončen, navpičen, raven, pravi,* κέντρον pa *bodica, ostroga, želo,* pa tudi *središče.* Iz besede κέντρον so dobili Latini besedo *centrum,* kateri je sledil ves Zahod z nami vred. Zato imamo v Evropi na primer *centre, Zentrum, centro.* Kdor hoče biti učen, bo seveda uporabljal besede *center, centralen, centralističen, centralizem.* Centrov za to in ono imamo vsepovsod, pri nas in po svetu, kar jih hočete.

Na gimnaziji so nas dijake v glavnem vsevprek vikali, kar se nam je na začetku zdelo kar nekam smešno. Do takrat smo mi morali vse starejše praviloma vikati. Seveda pa so nas na osnovni šoli le tikali. Vikati starejše so nas učili tudi ponekod doma, v krogu družine. Očeta in mater je bilo treba vikati. Te navade ne slišimo več prav pogosto. Profesor Karčnik tudi ni trpel počasnosti. Če je kdo, ki je bil poklican k tabli, prav počasi lezel izza svoje klopi ali pa se pred tablo prepočasi sukal, je imel navado reči nekako takole: "Dajte vendar malo hitreje, saj nimate 80 let. Moja mama jih ima toliko, pa je bolj urna, kakor ste Vi." Nekoč je vprašal nekoga, ki mu matematika ni šla preveč dobro, če je doma kaj vadil. Zatrjeval je, da je rešil kup nalog, da pa na šoli enostavno odpove. Ker je bil komaj začetek šolske ure, ga je profesor vprašal, kje stanuje. Ker je bila to Prejnuta[84] ali nekaj takega, je ocenil, da to ni tako daleč, in ga je prosil, da skoči domov po nesporne dokaze, da doma pridno rešuje matematične probleme. Dijak je res urno šel ponje in se še tisto uro s celo aktovko papirja, iz katerih se je dalo razbrati, da res doma pridno vadi. Nazadnje je le iztržil skromno, toda pozitivno oceno. Za vedno pa sem si zapomnil njegovih nasvetov, na primer: "Človek nikoli ne sme biti prepriden. Vedno mora biti ravno prav priden." Nasvet se je v primeru šole vedno izkazal kot pravilen. Najbolj pridne učence in dijake so uporabljali za marsikaj: za proslave, za predsedstva, blagajnike, tajnike, poverjenike itd. Najmanj pridni so navadno imeli za take stvari najlepši mir.

[84] Predel Idrije, kjer so žgali živo srebro. Prejnuta je izpeljanka iz nemške besede Brennhütte. Brennen pomeni v nemščini žgati, goreti, peči, Hütte pa koča, bajta.

To so bili še časi reda in discipline v šoli. Na začetku ure smo pri večini profesorjev morali vstajati. Ko se je razred umiril, so dali znak, da se lahko usedemo. Lahko se je kaj hitro zgodilo, da si dobil ukor, letel s šole, imel popravni izpit ali kaj podobnega. Gorje dijakinji in profesorju, če sta se malo prerada gledala: oba sta morala s šole. Takrat se za to niti malo ni bilo treba truditi. Pričenjalo se je obdobje tako imenovanih *minikril*. Marsikatera dijakinja je morala včasih malo stopiti na prste, da je lahko pisala po tabli čisto zgoraj, da so sošolci, sedeči v zadnjih klopeh, tudi lahko prepisali v svoje zvezke, kar je bilo potrebno. Baje je profesor Karčnik nekoč, ob neki pravkar opisani priložnosti, dal komentar: "Noge že, noge! V glavi pa nič!" Tako so še nekaj let po tem dogodku vsaj pravili, zraven pa nisem bil. Generacije v šoli se zamenjajo, informacije pa s časom zbledijo.

Profesor Karčnik je znal držati ravno pravšnjo razdaljo, učeno povedano, distanco do dijakov. Nekoliko se nam je približal le pri laboratorijskih vajah iz fizike. Te so potekale skoraj tako kot dandanes, le da je sedaj vključene vanje več elektronike. Na teh vajah nam je nekoč, kar tako za zabavo, dal dokazati naslednjo trditev.

Če v pravokotnem kartezičnem koordinatnem sistemu potegnemo premico skozi točki $A(a,0)$ in $F(f,f)$, potem ta premica seka ordinatno os v točki $B(0,b)$ in pri tem velja relacija

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}.$$

Pri tem so a,b,f pozitivna števila.

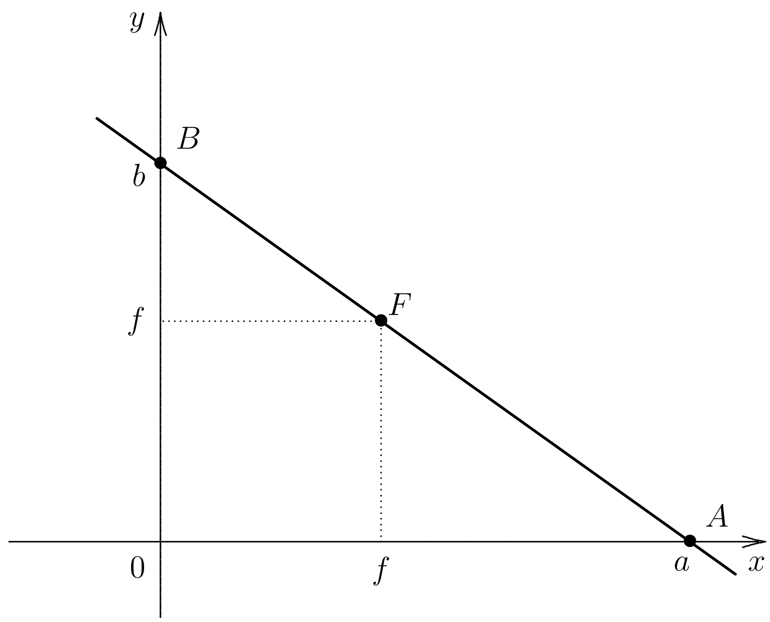
Taka konstrukcija je uporabna pri enačbi leče, pri določanju nadomestnega upora dveh vzporedno vezanih uporov in še kje.

S podobnimi trikotniki (slika 71) gre dokaz kot po maslu:

$$\frac{b-f}{f}=\frac{f}{a-f}.$$

Iz tega imamo takoj relacijo

$$ab-af-bf+f^2=f^2$$



Slika 71: Grafična ponazoritev enačbe leče.

in po krajšanju

$$bf + af = ab$$

ter nazadnje, ko obe strani zgornje relacije delimo z abf:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Jaz pa sem tiste dni, ko smo bili ravno okuženi z metodami analitične geometrije, malo zapletel. Vzel sem enačbo premice skozi točki A in B, ki jo seveda zapišemo v segmentni obliki:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Nato sem jo presekal s simetralo lihih kvadrantov $y = x$ in dobil presečišče:

$$F\left(\frac{ab}{a+b}, \frac{ab}{a+b}\right).$$

če označimo

$$f = \frac{ab}{a+b}\,,$$

potem seveda velja

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Profesor je bil z mojo utemeljitvijo sicer zadovoljen, toda trdil je, da je njegova rešitev krajša in enostavnejša.

Morda bi šlo tudi tako, da vzamemo vse možne nenavpične in nevodoravne premice skozi točko $F(f, f)$. Enačba ene take premice s smernim koeficientom $k \neq 0$ je:

$$y - f = k(x - f).$$

Abscisa presečišča take premice z osjo x je

$$a = \frac{f(k-1)}{k},$$

ordinata presečišča z osjo y pa

$$b = f(1 - k).$$

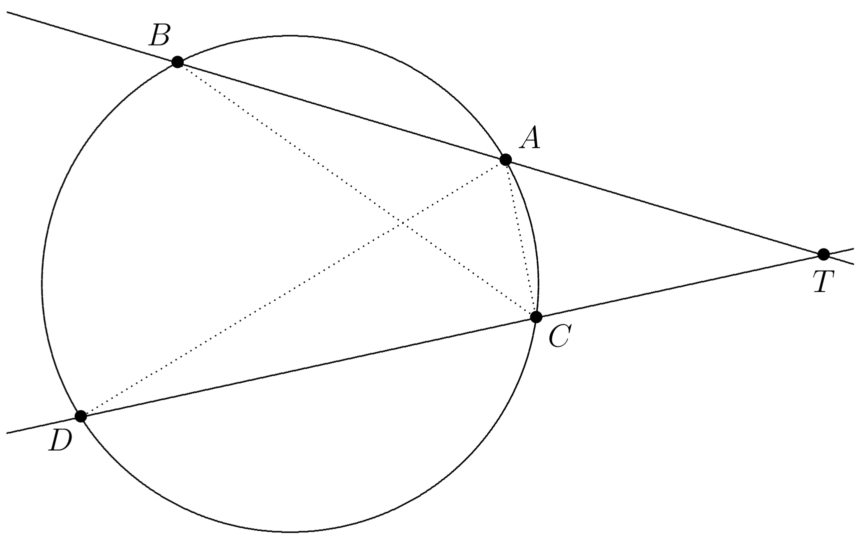
Ko iz obeh relacij izločimo parameter k in dobljeno relacijo uredimo, spet dobimo znano relacijo

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}.$$

Profesorja sem uspel prepričati, da je moje dokazovanje potekalo bolj iz nič kot njegovo, ki je bilo osnovano na preveč prozorni predpostavki.

Naslednja profesorjeva poslastica je bila naloga, kako načrtati krožnico, ki poteka skozi dani točki A in B in se dotika dane premice p. Pri tem sta točki na istem bregu premice p in nobena od njiju ni na tej premici. To je, kot mi je povedal Lavo Čermelj, ena od Apolonijevih nalog. Pri teh nalogah gre za to, kako konstruirati, seveda samo z ravnilom in šestilom, krožnico, ki se dotika hkrati objektov a, b, c, pri čemer je katerikoli od teh treh točka t, premica p ali krožnica k. Z dotikom točke razumemo, da iskana krožnica poteka skoznjo. Brez težav obvladamo Apolonijevo nalogo tipa t, t, t in p, p, p. Naš profesor pa nam je dal nalogo tipa t, t, p. Še dobro, da nismo bili deležne one, tipa k, k, k.

Če bi bili točki A in B v profesorjevi nalogi na različnih bregovih premice p, naloga očitno ne bi imela nobene rešitve. Sicer se jo pa da hitro rešiti s precej znanim izrekom o potenci točke glede na dano krožnico. Velja splošnejši izrek o produktu odsekov (slika 72).



Slika 72: Odseki s krožnico.

Naj bo namreč točka T zunaj krožnice $\mathcal{K}$. Skozi točko T naj potekata premici, ki krožnico sekata v točkah A, B, C in D, kot kaže slika. Tedaj je

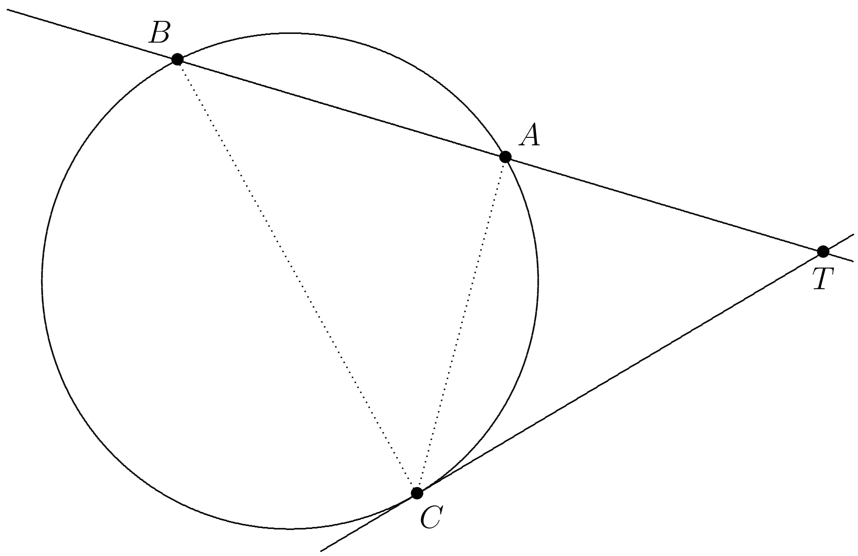
$$|TA| \cdot |TB| = |TC| \cdot |TD|.$$

V primeru $A \neq B$ in $C \neq D$ sta si trikotnika TAD in TCB podobna, ker je $\sphericalangle ATC = \sphericalangle BTD$ in $\sphericalangle CBA = \sphericalangle ADC$, ker sta slednja kota obodna kota nad isto tetivo, namreč AC. Zato velja naslednja relacija razmerij stranic:

$$\frac{|TC|}{|TB|} = \frac{|TA|}{|TD|},$$

iz česar sledi relacija, ki jo dokazujemo.

V primeru $A \neq B$ in $C = D$, ko se točki C in D zlijeta v eno točko in sekanta CD preide v tangento (slika 73), tudi dobimo podobna trikotnika



Slika 73: Potenca točke glede na krožnico.

ATC in CTB, ker je $\sphericalangle ATC = \sphericalangle CTB$ in $\sphericalangle ACT = \sphericalangle CBT$ po dobro znanem izreku, in s tem enakost razmerij:

$$\frac{|TC|}{|TA|} = \frac{|TB|}{|TC|},$$

Tedaj velja relacija:

$$|TA| \cdot |TB| = |TC|^2.$$

Izrazu $|TC|^2$ pravimo potenca zunanje točke T glede na dano krožnico.

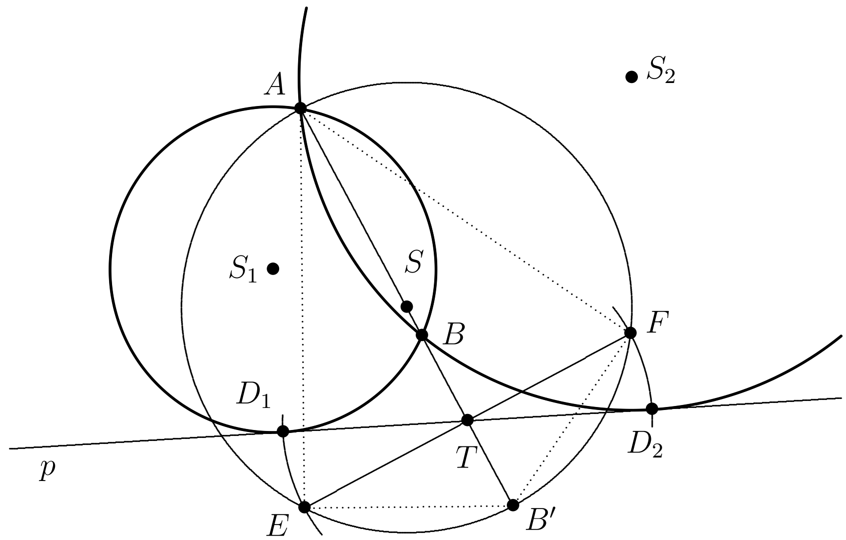
V primeru $A = B$ in $C = D$ velja $|TA| = |TB| = |TC| = |TD|$ in s tem tudi relacija, ki jo dokazujemo.

Kako rešimo omenjeno Apolonijevo nalogo? Treba je konstruirati dotikališče D iskane krožnice s premico p. Obravnavati je treba dva primera:

1. točki A in B določata premico, ki dani premici p ni vzporedna (slika 74);

2. točki A in B določata premico, ki je dani premici p vzporedna (slika 75).

Oglejmo si podrobneje obe možnosti.



Slika 74: Reševanje Apolonijeve naloge tipa *ttp*.

1. Najprej konstruiramo premico skozi dani točki A in B in njeno presečišče T s premico p. Ker mora veljati po izreku o potenci točke glede na iskano krožnico relacija

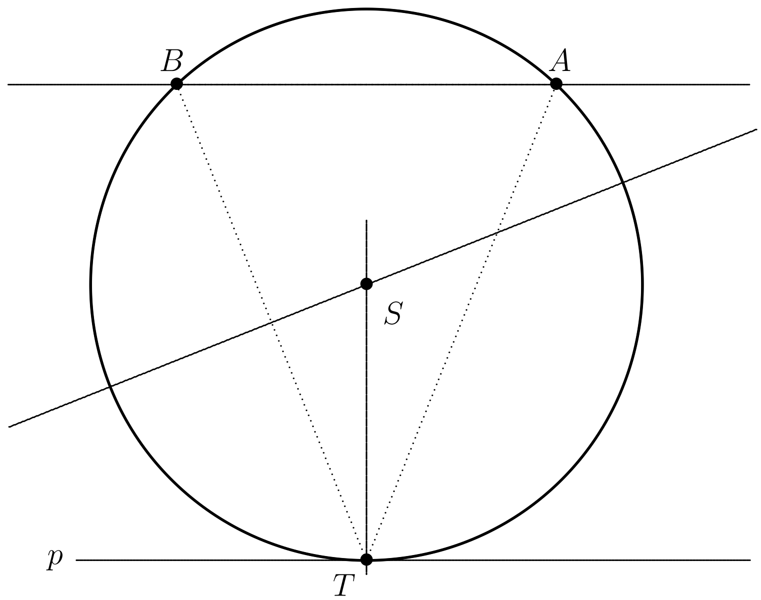
$$|TA| \cdot |TB| = |TD|^2 \,,$$

konstruiramo po višinskem izreku v pravokotnem trikotniku daljico dolžine $|TD|$. To naredimo tako, da konstruiramo točko B', ki je zrcalna točka točke B čez točko T in zato $|TB| = |TB'|$. Nato konstruiramo krožnico, ki ima središče v razpolovišču S daljice AB' in poteka skozi točki A in B'. Pravokotnica skozi točko T na daljico AB' preseka to krožnico v točkah E in F. Trikotnika $AB'E$ in $AB'F$ sta po Talesovem izreku pravokotna in po višinskem izreku velja

$$|TE|^2 = |TF|^2 = |TA| \cdot |TB'| = |TA| \cdot |TB| \,,$$

iz česar sledi, da je $|TD| = |TE| = |TF|$. To razdaljo odmerimo iz točke T na obe strani vzdolž premice p in dobimo dotikališči D_1 in D_2 iskanih krožnic. Od tu naprej pa njuni središči S_1 in S_2 in krožnic samih ni več težko konstruirati.

2. Simetrala daljice AB preseka premico p v točki T, iskana krožnica je trikotniku ABT očrtana krožnica.



Slika 75: Reševanje Apolonijeve naloge tipa *ttp* v posebnem primeru.

Zelo sem pazil, da bi se mi na gimnaziji ne zgodila kaka nerodnost, saj bi lahko ves trud, ki sem ga bil imel s šolanjem na tej ustanovi, šel po gobe. Pomislimo le na več kot 40 km vožnje v obe smeri vsak dan, izgubljeni čas za čakanje na avtobuse, čas same vožnje itd. Domov sem prihajal nekje med 16. in 17. uro, potem ko sem bil prepešačil pot iz Cerknega na nadmorsko višino 700 m, dobival včasih že postano hrano, tu pa tam je bilo treba še kaj pomagati doma itd. Nič čudnega, če sem imel neprestane težave s svojim želodcem in dvanajstnikom. Še dobro, da je nekaterim vozačem profesorica Božič[85] uredila kosilo v idrijski psihiatrični bolnišnici, natančneje v restavraciji te ustanove. Ko sem prvič prestopil njen prag, se mi je vse prav

[85] Slavica Božič (1910–1974) – dolgoletna ravnateljica idrijske gimnazije, prejemnica Ža-

čudno zdelo. Impozanten kompleks zgradb je lepo videti že iz glavne idrijske ulice. Tja gor vodi ovinkasta cesta z lepim razgledom v dolino. Pod Italijo je bila v prostorih psihiatrične bolnišnice obsežna vojaška postojanka, kot se je za Idrijo, nekdaj drugo mesto na Kranjskem z enim največjih rudnikov živega srebra na svetu, tudi spodobilo. Hrana, ki smo jo dobivali dijaki v bolnišnici, je bila zelo dobra. Tako sem sčasoma le prišel k sebi. Vedno sem bil Božičevi hvaležen za njeno humano dejanje.

V idrijski psihiatrični bolnišnici smo imeli tudi uro psihologije, ki jo je na idrijski gimnaziji poučevala ravno Slavica Božič. Vpričo nas se je doktorica pogovarjala z nekaj tipičnimi duševnimi bolniki. Zapomnil sem se del pogovora. Ko je enega vprašala, kaj je delal, preden je prišel v Idrijo na Grič, je rekel, da je popravljal Sonce. Videti je, da bi take mojstre dandanes zares potrebovali. Potem ga je vprašala, kdaj je to bilo, pa je rekel, da je bilo to še pod Kristusom.

Ko se je menjavalo vreme, je bil med pacienti čutiti precejšen nemir. Iz sobe visoko pod podstrešjem je nekega dne nekdo naglas pojoč izrekal Kristusove besede iz Janezovega evangelija:

"...in jaz ga bom obudil poslednji dan."

... καὶ ἐγὼ ἀναστήσω αὐτὸν ἐν τῇ ἐσχάτῃ ἡμέρᾳ.

(Jn, 6, 40 in 44 in 54)

V pristni slovenščini seveda, staro grščino smo dodali samo za primerjavo. Sicer pa se je mnogo pacientov ob lepem vremenu sprehajalo po dvorišču, nekateri so posedali po klopeh, drugi balinali itd. Včasih jim je kdo tudi ušel po bregu navzdol v Idrijo in so ga iskali okoli avtobusne postaje. Bolnišnica je dobila popularno ime *Grič*, ker je locirana na vzpetini h Kobalovim planinam. Marsikdo pa jo je imenoval kar *norišnica*, kar ni ravno profesionalno. Marsikateri strastni alkoholik je na koncu, ko mu niso domači mogli več

garjeve nagrade leta 1966, ki se je kasneje preimenovala v Nagrado Republike Slovenije na področju šolstva.

pomagati, pristal na Griču. Beseda *Grič* našim otrokom ni kaj dosti povedala, *norišnica* pa preveč, zato so ljudje raje uporabljali prvo. Ljudje so govorili: "Spet se ga je tako hudo nadelal, da so ga morali nemudoma odpeljati na Grič." Ko sem bil še študent v Ljubljani, sem od sostanovalcev izvedel, da v krajih, ki so bolj odmaknjeni od te bolnišnice, običajno govorijo, da so tega in tega odpeljali v Idrijo, kar je pomenilo v našem besednjaku na Grič. Skratka, Idrija je bila zanje sinonim za kraj, kamor odvažajo pijance, norce in blazneže.

Večja skupina tako imenovanih *vozačev* pa je bila na gimnaziji neke zime tik pred ukorom. Nekega zimskega dne je imel šolski avtobus iz Cerknega v Idrijo zaradi stanja na cesti precejšnjo zamudo in bi v razrede kapljali sredi prve ure, če bi z avtobusa, ki nas je stresel poleg stare idrijske osnovne šole, takoj šli v svojo šolo. Toda klanček, po katerem vodi cesta v psihiatrično bolnišnico, je bila tako primerno zaledenela, da je nekatere z mano vred premamila skušnjava in smo se nekajkrat po čevljih zapeljali navzdol, nekateri pa so pridno šli v šolo. Spomnili smo se namreč nekega nasveta ravnateljice, da naj pri večji zamudi ne motimo ostalih pri pouku. Toda naše izgovarjanje ni nič pomagalo, češ zakaj so pa nekateri lahko prišli. Drsalci pa smo prispeli v razred šele na drugo uro. Nekaj dni je zaradi tega vršalo po zbornici, mahali so nam z ukori, a nazadnje so bili dobre duše, oprostili so nam in vse je bilo spet v redu. Da bi prinesel domov ukor v podpis? Zagotovo bi me stari Očanec naklestil s pasom kakor vola, kajti bil je nagle jeze in je vedno menil, da pri vzgoji mladine samo tepež kaj zaleže. Takih očetov je bilo na Cerkljanskem precej in rezultati njihovega početja je bil običajno takoj po dosegu polnoletnosti beg od doma vključno z čimprejšnjo poroko.

Nastanek imena svetovno znanega mesta Idrija ni bil nikoli do konca pojasnjen. Nekateri menijo, da je nastalo iz grške besede za *vodo*: ὕδωρ. Beseda ὑδρία, kar pomeni *vrč, vedro, ročka, žara*, pa je imenu kraja še bolj podobna. Pa tudi divja kotlina, v kateri je nastala Idrija, bi po svoji razgibani obliki kar ustrezala takšni posodi. Živo srebro je v grščini ὑδράργυρος, kar je nastalo iz besede ἄργυρος, *srebro*, in prej omenjene besede za vodo. Pa tudi beseda ὕδρα, kar pomeni *vidra, vodna kača*, bi ustrezala dejanskemu stanju. Nekaj je morda že na tem! Za učene etimologe pa je naslanjanje na grški izvor besede *Idrija* skoraj bogokletno početje.

Živo srebro pridobivajo iz rude, ki je rečemo *cinabarit*, po kemijsko *živosrebrov sulfid*. Zagonetna beseda je *cinabarit*, kar se izvora tiče. Grki so ji rekli κιννάβαρις, kar naj bi prihajalo iz perzijske besede زینجیفرح ali شنگرف, kar pomeni *zmajeva kri*, lahko pa tudi iz sanskrta सुगर. V latinščini so poleg besede *cinnabaris* uporabljali tudi besedo *minium*, kar je pomenilo *rdeči svinec*. Grk Teofrast, Θεόφραστος, je cinabarit že poznal. Z živim srebrom se je v 16. stoletju ukvarjal tudi sloviti Švicar Philippus Aureolus Theophrastus Bombastus von Hohenheim (1493–1541), krajše Paracelsus, ki je mladost preživel v nam bližnjem Beljaku. Dobro je poznal naš Ptuj in Idrijo, kjer se je srečal z zastrupitvijo rudarjev z živim srebrom.

Živo srebro je edini kemijski element, za katerega Slovenci uporabljamo dve besedi. Je pa tudi edina kovina, in to žlahtna, ki je pri sobni temperaturi v tekočem agregatnem stanju. O tem je rad pripovedoval naš pokojni ata, pa tudi v šoli smo se o tem učili pri kemiji in fiziki. Tudi to je povedal, kako so rudo spravljali iz globine zemlje v topilnico. Do tja so jo nekoč vozili po tračnicah v vagončkih, v mojih gimnazijskih časih pa z žičnico, ki je potekala izven mesta. Rudo so žgali v posebnih pečeh, nazadnje v ogromnih rotacijskih. S tem so ločili žveplo od živega srebra. Žveplo je v žveplovem dioksidu romalo navzgor nad mesto do posebnega dimnika. Živosrebrne pare pa so s hlajenjem utekočinili. Nekako tako je potekalo tudi kuhanje žganja iz sadne godlje doma. Ostanki od žganja rude so končali v Idrijci in v pet sto letih je živega srebra v taki ali drugačni obliki še preveč v Idrijci, Soči in Tržaškem zalivu. Žveplo pa je tudi opravilo svoje na rastlinstvu, živalstvu in ljudeh v idrijski kotlini.

Ata je rad pripovedoval, kako knape z dvigalom spuščajo v rudnik in dvigajo iz njega. Pravil je, da so najprej malo zalegli, ko so prispeli v jamo.

Dokler jih ni kakšen kapo preklel in dvignil na noge in k delu. Vsak knap je imel pripravljen za počitek kako lepo desko, ki jo je skrival za kakšnim opornikom. Starejši in izkušeni knapi so imeli že prav lepo spolirane od poležavanja, je pravil.

Poglejmo, kako živemu srebru pravijo drugi. Hrvati, Srbi in Makedonci so jedrnati: *živa* oziroma жива mu rečejo. Bolgari niso daleč od tega: живак. Tudi Turki ne: *civa*. Angleži zapišejo *mercury*, pa tudi *quicksilver*, Nemci zelo podobno: *Quecksilber*. Nizozemci so krajši: *qwik*. Švedi *kvicksilver*, Norvežani *kvikksølv*, Danci *kviksølv*, Islandci *kvikasilfur*, Finci pa *elohopea*. Madžari uporabljajo besedo *higany*, kar pomeni, da se otroci v šoli zlahka zapomnijo kemijski simbol Hg za živo srebro. Romanski jeziki imajo besedo izpeljano iz osnove *mercurius*: Italijani in Španci *mercurio*, Luzitanci *mercúrio*, Francozi *mercure*, Katalonci *mercuri*, Romuni *mercur*. Alkimistični znak za živo srebro je enak astrološkemu znaku za planet Merkur, to se pravi ☿. Nekateri slovanski jeziki imajo popolnoma nekaj drugega: Čehi *rtut'*, Slovaki *ortut'*, Poljaki *rtęć*, Rusi in Ukrajinci ртуть, Belorusi ртуць. V novi grščini je ostalo skoraj tako kot v klasični: υδράργυρος.

Za kakšno razposajeno mlado dekle smo včasih rekli, da je živahno kot živo srebro. V poletni vročini pravimo, da se živo srebro precej dvigne, v hudem mrazu pa spusti. To pa zato, ker smo včasih na veliko uporabljali živosrebrne termometre. Zamenjali so jih alkoholni. Ata je doma zagnal celo paniko, če se je razbil živosrebrni termometer. Zavedal se je namreč velike strupenosti živosrebrnih hlapov.

Strokovnjaki, ki se spoznajo na izvor imen, običajno hitro oporekajo napol ljudski etimologiji. Iz grščine naj bi beseda *Idrija* vendarle ne smela priti, pravijo. Imamo Idrijo, Spodnjo Idrijo, Idrijo pri Bači, reko Idrijco in rečico Idrijo med Italijo in Slovenijo. Tej rečici Italijani pravijo *Judrio*, Furlani pa *Judri*. Kaj pa če izhaja Idrija iz besede *udor*, morda *utor*? Saj je korito reke udrto oziroma utrto v tla. Še dandanes si *utiramo pot*, v snegu se nam *udira*, mojstri delajo v les *utore*.

Izvedenci za izvore besed poiščejo zapise imena reke vsepovsod: v urbarjih, starih zemljevidih, mašnih knjigah, nagrobnikih, krstnih listih, katastrih. Zapisi so lahko zelo različni, odvisno od zapisovalcev. Ti niso bili vedno najbolj vešči v pisanju, pa so zapisali, kakor so slišali, ob tem pa kakšen glas preslišali, katerega pa dodali po občutku. Ubogi jezikoslovci potem poskušajo bolj ali manj uspešno rekonstruirati, zakaj se reki tako reče, kot se. Korenine iščejo tudi v narečjih in drugih jezikih, po potrebi pogledajo v odročne kraje po svetu, če imajo kje kaj podobnega, kar se sliši vsaj približno kot obravnavana reka. Blizu Pskova v Rusiji je zaselek Идрица, pa tudi jezero Идрия. Zanimivo!

Kaj pa cerkljanska vas *Čeplez*? Ljudska etimologija pravi, da se je zato, ker se iz Planine v Čeplez pride *čez plaz*, sosednji vasi nekoč reklo *Čezplaz*, iz česar smo dobili postopoma laže izgovorljiv *Čeplez*. Obstaja tudi razlaga, ki temelji na rastlini *beli čepljec*, znanstveno *Asphodelus albus*. Obstajata pa tudi priimka *Cheplez* in *Cheples* ter v Makedoniji planinski dom Чеплес blizu Solunske glave.

Beseda *etimologija* izvira iz grške ἔτυμος, kar pomeni *resničen, pravi*, in dobro znane besede λόγος. Od nekdaj je ljudi zanimal izvor besed. Heraklit iz Efeza, Ἡράκλειτος ὁ Ἐφέσιος, se je okoli leta 500 pr. n. št. spraševal, koliko je beseda za nekaj v resnici ustrezna.

Tako kot cerkljanskemu učitelju Maksu Pagonu je tudi idrijskemu profesorju Karčniku Društvo matematikov, fizikov in astronomov Slovenije slavnostno izročilo društveno priznanje za uspešno pedagoško delo, in sicer Pagonu na 22. občnem zboru leta 1971 v Šmarjeških Toplicah, Karčniku pa na 25. občnem zboru leta 1974 v mondenem Portorožu. Žal me je slednji poučeval fiziko samo eno leto, in sicer v tretjem razredu gimnazije, ko smo obravnavali toploto, elektriko, nihanje in valovanje. Večkrat je omenil, da je obstoječi Kvaternikov učbenik fizike premalo za globlje razumevanje, da pa je dobro za briljantno znanje fizike vsaj pokukati v učbenike, ki sta jih napisala sedaj že pokojna profesorja Ivan Kuščer in Abton Moljk. Zlasti je poudarjal *en-*

tropijo, ki da sta jo avtorja tako temeljito razložila, da ne bi smelo biti nikakršnih težav. Moram priznati, da se mi entropija ni nikoli tako prilju-bila, da bi se me prijela. Še Strnadova[86] fizika mi kot študentu ni kaj dosti pomagala pri razumevanju te čudne fizikalne količine. Na srečo je profesor Karčnik v fizikalnici pred dijaki naredil precej poskusov in pri njem smo opravili tudi fizikalni praktikum. Poleg tega je organiziral več prevozov v veliko fizikalno predavalnico na Jadranski cesti v Ljubljani, kjer so takrat imeli posebna predavanja za srednješolce. Ob tisti priložnosti sem spoznal tudi nekaj svojih bodočih univerzitetnih profesorjev, med njimi že omenjena profesorja Kuščerja in Strnada, in nove kolege.

Na gimnaziji smo fizikalni učilnici rekli *fizikalnica*. Neki sošolec je predlagal, da bi učilnici za kemijo analogno rekli *kemišnica*. Bolj za zabavo smo nekaj časa res uporabljali to besedo. Pa recite, da slovenščina ni prožen jezik!

Pri fiziki smo nekoč opazovali nihanje sinusne električne napetosti na osciloskopu. Ko se je na zaslonu pojavila vzorna sinusoida, je profesor Karčnik rekel: "Nekaj takega bi rabili vi, da bi vam pri matematiki risalo sinusoide v vaše zvezke." Pri matematiki smo namreč ravno tisto leto risali na milimetrski papir razne krivulje, med njimi tudi sinusoide, ki smo jih premikali, raztegovali in krčili v vseh smereh. Pri raztegih, na primer v smeri ordinatne osi, je treba vse ordinate na krivulji pomnožiti z istim faktorjem k. "Če je ta faktor večji od 1, gre za pravi razteg, če pa je med 0 in 1, pa je ta razteg pravzaprav skrček.", je pojasnjeval. V razredu je bilo takoj začutiti malo nemira, saj nas je izpeljanka iz besede *krčiti* takoj spomnila na našega profesorja, ki smo mu v narečju rekli *Krčn'k*. Res pa je, da je zaradi njegove strogosti marsikoga dobesedno zgrabil *krč*, ko je bil vprašan. Še leta potem je bilo marsikateremu njegovemu nekdanjemu dijaku, še bolj pa dijakinji, neprijetno, če že ne srhljivo, srečati se z njim.

Krč bi me skoraj zagrabil, do sva se s sošolcem, katerega nemški priimek človek komaj stlači v marsikateri obrazec, pridružila starejšim dijakom, ki so

[86]Janez Strnad (1934–2015) – profesor fizike na ljubljanski univerzi.

bili namenjeni v Ljubljano v veliko fizikalno predavalnico na neko predavanje. Prevoz je organiziral profesor Karčnik in njega bi morala prositi za dovoljenje o pridružitvi. Ker ga pa nisva uspela najti, sva prosila profesorico nižjega ranga, ki je poučevala fiziko in matematiko in ni imela dokončane fakultete. Dovolila nama je. Karčnik ni rekel vso pot nič. Šele naslednji dan naju je poklical na raport, bil je hud in nama je dal vedeti, da ekskurzije organizira on ne pa kdo drug. Naslednjič sva se jim še pridružila in ga prosila za pridružitev tik pred odhodom na idrijski avtobusni postaji. Šele kasneje sem se zavedel odgovornosti, ki jih ima profesor pri takih rečeh.

V Idriji je precej nemških priimkov, kajti v času 500-letnega ubadanja z živim srebrom se je tja priselilo tudi iz nemških in čeških dežel veliko tujcev, ki so bili vešči rudarjenja. Na primer Breitenberger, Bebler, Kleindienst. Veliko jih je ostalo za stalno, sčasoma so se poslovenili in dali idrijskemu narečju, ki formalno spada med rovtarska, značilen naglas, ki ga ne morete zgrešiti, pa tudi mnogi Idrijčani ga zlepa ne morejo prikriti. Tudi cerkljansko narečje je rovtarsko, a precej drugačno od idrijskega. V obeh pa je ostalo precej izrazov nemškega, furlanskega in italijanskega izvora.

V mojih gimnazijskih časih so potekala tudi republiška tekmovanja iz matematike. Ker ni bilo denarja za priprave, smo se hodili skušat kar tako. Štirikrat sem šel tekmovat na gimnazijo na Šubičevi v Ljubljani. Tam sem srečeval svoje bodoče univerzitetne kolege. Nekateri so bili naučeni reševati že vseh vrst nalog. Že videti so bili strašno učeni. Dobili smo štiri naloge in jih reševali nekaj ur. No! Vsaj enkrat sem si prislužil pohvalo, kar je veliko, če marsikdo še te ni bil deležen. Saj pravijo, da je za marsikoga že kuhinjska omara vredna kakor oltar.

Vse skupaj se je začelo tako, da je profesor Karčnik prišel v razred, povedal, da je v soboto v Ljubljani tekmovanje, da gresta iz višjih razredov tja tudi Felc in Pirc, da naj v računovodstvu dvignem denar za potne stroške in se jima pridružim. Dodal je še, da naj posebno dobro preštudiram kvadratno funkcijo. Pa sem šel na avtobus v Čeplezu, se peljal čez Kladje prek Škofje Loke v Ljubljano. Takrat je bilo to dvourno potovanje, polovico po makadamskih cestah, pravcati projekt. Z izdatno merico omotice v glavi sem v Ljubljani našel Šubičevo in se pridružil tekmovalcem. Na znak smo začeli reševati naloge in se mučili na vse kriplje, vihteli svinčnike, šestila, trikotnike in ravnila ter na koncu oddali svoje papirje. Za rezultate smo izvedeli naslednji teden, v ponedeljek pa smo se morali javiti Karčniku na raport. Pripovedovali smo mu, kakšne naloge smo dobili in kaj smo znali in kaj ne. Po svojem izrazu na obrazu je bilo moč sklepati, da se nismo odrezali kaj prida. Pregled rezultatov idrijskih dijakov v času moje mladosti pa daje tako sliko:

Anton Primožič (1959, 3. letnik), knjižna nagrada; (1960, 4. letnik) 2. nagrada; bil je poslan na zvezno matematično tekmovanje, kjer je osvojil 3. nagrado; nekoč dijak nižje gimnazije v Cerknem, stric izvrstne alpske smučarke Nataše Bokal;

Danijel Magajne (1960), knjižna nagrada; meni neznana oseba;

Milan Hladnik (1966, 1. letnik), pohvala; ostal na ljubljanski univerzi, tako kot jaz;

Andrej Bekeš (1966, 4. letnik), 2. nagrada; prišel iz Kopra, kjer jo je prej tamkajšnjim profesorjem malo zagodel; diplomiral tam kot jaz, nato pa odpotoval v deželo vzhajajočega sonca in tam doktoriral iz japonščine kot prvi tujec, sedaj profesor japonologije na Filozofski fakulteti v Ljubljani;

Marko Razpet (1967, 3. letnik), pohvala;

Dušan Pagon (1972, 3. letnik), pohvala; sin mojega učitelja Maksa Pagona; v okviru evropskega projekta TEMPUS smo skupaj z mojo ženo po vratolomni vožnji čez Alpe obiskali Wagnerjevo mesto Bayreuth in tamkajšnjo univerzo;

Bojan Hvala (1977, 1. letnik), 2. nagrada; bil je poslan na zvezno matematično tekmovanje, kjer je osvojil 1. nagrado; (1978, 2. letnik), 3. nagrada; (1979, 3. letnik), pohvala; (1980, 4. letnik), pohvala.

Glede uspešnosti na tekmovanjih je treba posebej povedati, da so mnogi uspešni tekmovalci kasneje postali tudi dobri matematiki, žal pa so tudi taki, ki so se v življenju popolnoma zaplezali. Dijaki, rojeni okoli leta 1955, so bili zelo uspešni. Bilo jim je seveda tudi veliko laže. Takrat, ko so začeli tekmovati, so se že dobile knjige z rešenimi tekmovalnimi nalogami in organizirane so bile priprave na tekmovanja. Tudi študentom je bilo po letu 1970 veliko laže kot nam, saj je bilo vedno več učbenikov, priročnikov in zbirk nalog za univerzitetno matematiko.

Omenili smo matematične olimpijade. Samostalnik *olimpijada* je grškega izvora, ime je dobila po starodavni Olimpiji (Ὀλυμπία) v Elidi (Ἦλις) na zahodu Peloponeza (Πελοπόννησος), kjer so Grki prirejali olimpijske igre v čast bogu Zevsu (Ζεύς). Peloponez je dobil ime po Pelopsu (Πέλοψ). Iz besed Πέλοψ in νῆσος, kar pomeni *otok* ali *polotok*, je nastal (Πελοπόννησος). Pelops je v grški mitologiji sin lidijskega kralja Tantala (Τάνταλος) in Dione (Διώνη). Tantal je človeštvu dal izraz *Tantalove muke* in ime za kemijski element *tantal* (Ta) in njegove spojine. Ime *Pelops* je tudi sestavljeno, in sicer iz besede πελιος, *mrak*, in ὄψ, *oko*. Lidija (Λυδία) je zgodovinska pokrajina v Mali Aziji.

Slovenci se zadnja desetletja redno udeležujejo mednarodnih matematičnih olimpijad, kjer dosegajo kar lepe uspehe. Pri tem ne smemo pozabiti na tisto, peto po vrsti, ki je leta 1963, od 5. do 13. julija potekala v Wrocławu, kjer je Franc Dacar osvojil prvo, Peter Petek pa drugo nagrado. Tekmoval je tudi Stanko Vrščaj, ki takrat ni bil nagrajen, pač pa je zablestel na naslednji olimpijadi leta 1964 v Moskvi, kjer je prejel tretjo nagrado. Olimpijade v Wrocławu se je udeležilo osem držav, Jugoslavija prvič. Samo tekmovanje je trajalo dva dneva, vsak dan so štiri ure reševali po tri naloge. Da bi dobili občutek o težavnosti nalog na matematični olimpijadi v Wrocławu, navedimo dve, prvo in peto:

1. Poiščite vse realne korene enačbe

$$\sqrt{x^2 - p} + 2\sqrt{x^2 - 1} = x,$$

pri čemer je p realno število.

5. Dokažite enakost

$$\cos\frac{\pi}{7} - \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{3\pi}{7} = \frac{1}{2}.$$

Nihče nam ne brani, da ju ne poskusimo rešiti tudi sami. Franc Dacar me je na Fakulteti za strojništvo nadomeščal, ko sem leta 1976 služil v JLA v daljnem Titovem Velesu ob Vardarju. V kasarno sem prišel sredi zime, ki sem si jo posebno zapomnil po mrazu in severnih, mrzlih vetrovih. Tam ni takih gozdov kot pri nas, vse gričevje je bolj golo, le tu in tam raste kak grm. Spomladi je bilo dosti bolje, ko so vetrovi začeli veti z Egejskega morja. Profesor Petek pa je bil vrsto let moj kolega na fakulteti in sva o mnogočem rekla marsikatero modro.

Bojan Hvala je Cerkljan, ki nadaljuje svojo matematično kariero na mariborski univerzi, tako kot Pagonov sin Dušan. Bojan je temeljito preštudiral Močnikovo razpravo o Cauchyjevi metodi in o tem predaval na seminarju v Cerknem, prirejenem Močniku v čast. Prav tako je sodeloval pri odkritju spomenika Močniku na starem trgu v Cerknem. Spomenik, ki so ga kasneje preselili pred muzej, je bil naslonjen na fasado hiše, v kateri je bil pod Italijo hotel Porezen. Bojana sem spoznal na Fakulteti za strojništvo v Ljubljani, kjer je še kot študent–demonstrator, zaradi pomanjkanja asistentov, vodil vaje iz matematike. Naš profesor Anton Suhadolc ga ni mogel prehvaliti, kako dober asistent je bil pri njem. Bojanova soproga je bila celo moja diplomantka, ki se je ukvarjala s kvazinilpotentno ekvivalenco, ki sem jo sam uporabil v svojem magistrskem delu.

Ker smo omenili cerkljanski hotel Porezen, je treba povedati zanimivo zgodbo. Slikar in črkoslikar, ki so mu rekli *Mon*, ker je bil doma Pri Monu v Cerknem, je dobil nalogo, napisati na pročelje hotela, tam, kjer je nekoč stal Močnikov spomenik, samo precej više, z lepimi velikimi tiskanimi črkami ALBERGO MONTE PORSENA. Najprej je napisal ALBERGO MON, nato pa je stopil z odra, od daleč pogledal napol opravljeno delo in si mislil: "Dobro je!" Potem je stopil v eno od cerkljanskih gostiln, ki jih v Cerknem takrat ni manjkalo. Po Cerknem se je hitro razbobnalo, da je Mon prevzel hotel. Ko je to prišlo na ušesa naročniku, so Mona hitro poiskali in ga nagnali, da je dokončal napis.

Osebno poznam Idrijčana profesorja Milana Hladnika že vrsto let. Zgodilo se je pač tako, da sva bila v gimnazijskih in študentskih letih celo občana iste občine, čeprav rojena vsak v svoji, kajti okoli leta 1950 smo Cerkljani imeli še svojo občino, Idrijčani pa tudi. Imava pa vseeno marsikaj skupnega, na primer:

obiskovala sva isto idrijsko gimnazijo, bila sva le za en razred narazen;

imela sva istega gimnazijskega profesorja matematike;

udeleževala sva se republiških tekmovanj iz matematike;

vpisala sva se v Ljubljani na isto fakulteto in oba študirala tehnično matematiko;

imela sva štipendijo iz istega sklada;

stanovala sva v istem študentskem domu;

nekatera predavanja sva poslušala skupaj;

kot študenta sva sodelovala z matično gimnazijo;

diplomirala sva istega leta;

ostala sva na isti univerzi, čeprav bi morala prej odslužiti štipendijo.

Ko se je Milan v 4. letniku gimnazije odločeval, kaj bo študiral, se je napotil, kar je bila zame velika čast, do Očanca v Planini poizvedovat, kako je kaj na matematiki v Ljubljani. Žal me ravno takrat ni bilo doma, zato me je moral kasneje poiskati kar v Ljubljani, kjer sem se ravno pripravljal na izpit iz teorije množic. Tako je vsaj videl, kje sem doma in s kakšnimi težavami sem se moral spopadati kot dijak. Kje je prebival on, pa ni bilo težko izvedeti, saj sem kot gimnazijec skoraj vsak dan hodil pod oknom njegovega prebivališča v Idriji.

Milan je matematik, tako kot jaz, ki pa ga poleg kraljice znanosti zanima še marsikaj drugega. V sami matematiki ga zanimajo skoraj vsa področja. Na univerzi je bil že kot študent demonstrator, kar pomeni, da je vodil vaje.

Kasneje je z velikim veseljem in žarom predaval študentom različnih programov in stopenj in bil vseskozi zelo priljubljen predavatelj.

Demonstrator sem bil tudi sam, nekaj malega na matični fakulteti, nekaj pa na biotehnični, kjer sem imel dodatne vaje za agroživilce, katerim je matematiko predaval moj diplomski mentor profesor Rajko Jamnik. Bil je ljubitelj gora in se je smrtno ponesrečil v Karavankah blizu Kepe ravno v času, ko je Jugoslavija v avtomobilskem prometu uvedla nepriljubljeni sistem sodi–lihi. Zaradi krize z naftnimi derivati so lahko izmenoma vozili en dan avtomobili s sodimi registrskimi številkami, en dan pa z lihimi.

Od vsega začetka svojega delovanja na fakulteti pa je Hladnik veliko časa posvetil tudi delu pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije. Vedno se je globoko zavedal, kako pomembno je, da imamo po naših šolah dobre profesorje matematike. Zato je rad sodeloval pri društvenih in drugih seminarjih za učitelje matematike in izdajanju društvenih publikacij. Sam ali s soavtorji je pri Društvu matematikov, fizikov in astronomov izdal več učbenikov, zbirk rešenih nalog in drugih učnih gradiv. Nekatere zbirke nalog je bilo treba večkrat ponatisniti, kar samo kaže na njihovo odličnost. Nepogrešljivi za mlade, pa tudi za starejše matematike, sta njegovi knjižici *Moderna kvadratura kroga* in *Konveksne množice v ravnini*, ki sta izšli v zbirki Sigma.

V društveni reviji Obzornik za matematiko in fiziko je objavil številne strokovne, poljudne in pregledne znanstvene članke z različnih področij, življenjepise, recenzije, opise knjig in druge prispevke. Zato ni nič čudnega, da je postal pri Obzorniku področni urednik za matematiko in to delo opravljal od leta 1987 do 1992, v za nas usodnih letih 1991 in 1992 pa je bil celo glavni urednik. Njegovi prispevki v Obzorniku segajo na različna področja matematike, na primer: elementarno in uporabno matematiko, verjetnostni račun, analizo, robne probleme, zgodovino matematike.

Prav tako je prispeval v Presek, list za mlade matematike, več odličnih člankov, ki obravnavajo različne probleme, na primer: nenavadne ulomke in stare slovenske geometrijske izraze. Presek je konec leta 2011 dobil priznanje *Prometej znanosti za odličnost v komuniciranju znanosti* ob 40-letnici neprekinjenega izhajanja. Leta 1990 je Milan sodeloval pri pripravi in izvedbi republiškega tekmovanja iz matematike v svoji rojstni Idriji.

Ob 100-letnici smrti matematika Franca Močnika leta 1992 in tudi kasneje se je z veliko vnemo posvetil življenju in delu našega izvrstnega pedagoga in avtorja v veliko jezikov prevedenih učbenikov za ljudske šole in gimnazije. Prav tako je zbral veliko gradiva o novejših slovenskih matematikih. Še posebej je treba poudariti njegove napore za počastitev 90-letnice rojstva našega akademika profesorja Ivana Vidava. Za to priložnost je Milan zbral številne fotografije, dokumente, članke in drugo gradivo, ki pričajo ne le o življenju in delu profesorja Vidava, ampak tudi drugih matematikov in fizikov, o nastajanju Društva matematikov, fizikov in astronomov, Obzornika za matematiko in fiziko ter Preseka, pa tudi zgodovini slovenske matematike nasploh. Precej tega gradiva je bilo objavljenega na plakatih, v zborniku *Ivan Vidav – 90 let* in v Obzorniku za matematiko in fiziko. Temeljito je obdelal zgodovino Društva matematikov, fizikov in astronomov.

Vse navedene Milanove objave odlikujejo natančnost, urejenost, razumljivost in izbrušen slovenski jezik v skladu z njegovimi lastnimi objavljenimi navodili, kako v slovenskem jeziku pisati dobra matematična besedila, kar ni ravno lahko, o čemer bi razen avtorjev lahko največ povedali recenzenti in uredniki revij in knjižnih zbirk.

Na občnem zboru 26. novembra leta 2005 v Cerknem bi Milan moral prejeti za vse svoje dotakratno delo priznanje Društva matematikov, fizikov in astronomov. Žal se pa zaradi krutih vremenskih razmer podelitve ni mogel udeležiti in zato mu je bilo priznanje podeljeno ob neki drugi priložnosti. Ravno tiste dni je na Idrijskem in Cerkljanskem zapadlo precej snega. V Cerknem ga je bilo okoli pol metra, kar je za ta kraj malo neobičajno. Ceste so sicer hitro splužili in usposobili za promet, a tistega majhnega klančka, po katerem se pride do Milanovega stanovanja, ni pravočasno očistil nihče, tako da nagrajenec zaradi popolnoma banalnega razloga ni mogel v Cerkno na podelitev. Je pa kljub temu naš občni zbor v Cerknem marsikateremu udeležencu ostal v lepem spominu.

Novembra leta 2006 je Gozd Martuljek gostil strokovno srečanje in občni zbor Društva matematikov, fizikov in astronomov. Takrat smo člani društva Milana izvolili za svojega predsednika. To funkcijo je poleg svoje redne službe na fakulteti zgledno opravljal ves čas svojega mandata, do novembra leta 2008, ko smo v Podčetrtku izvolili novega predsednika. Milan je tudi sicer večkrat sodeloval v upravnem in v nadzornem odboru društva, se redno udeleževal strokovnih srečanj in občnih zborov društva, kjer je tako ali drugače sodeloval pri organizaciji.

Odkar poteka na Fakulteti za matematiko in fiziko v Ljubljani oziroma na daljavo prek Zooma *Seminar za zgodovino matematičnih znanosti*, je Milan njegov redni udeleženec. Pri tem sodeluje z vprašanji in konstruktivnimi pripombami, prav rad pa tudi sam pripravi zanimive teme. Veliko je vložil tudi v raziskave o življenju in delu Josipa Plemlja, prvega rektorja ljubljanske univerze.

Milan se je prej, kot bi človek pričakoval, odločil, da gre v pokoj. Imel je pač svoje razloge. Upamo pa, da se bomo kljub temu ob raznih priložnostih še pogosto srečevali in pokramljali o starih časih, matematiki in drugem. Morda kdaj skupaj kreneva iz Cerknega do Očanca in premeriva celotno pot, ki sem jo nekoč prehodil vsak šolski dan. Če bom le še zmogel!

Kljub vsemu pa moram biti prav svojemu učitelju Maksu Pagonu in profesorju Jožetu Karčniku hvaležen, da sta me le nekaj naučila, ko je bil še pravi čas za to. Dokler je človek mlajši od 20 let, se brez težav lahko nauči skoraj vse. Pa še k izobrazbi marsikoga drugega, ki je tudi uspešno dokončal študij na fakulteti ali pa morda še kaj več, sta veliko pripomogla, kar morda ne cenimo dovolj. Leta 2011 sem prejel celo državno nagrado za življenjsko delo na področju visokega šolstva. Država je takrat nagradila deset zaslužnih oseb s področja šolstva, od otroških vrtcev pa vse do fakultet. Ko me je prijazna novinarka s cerkljanskega radia ob tej priložnosti povprašala, če mi je kdo od mojih učiteljev ostal v posebno lepem spominu, mi je bil odgovor lahek: Maks Pagon in Jože Karčnik.

Kakšnega pretiranega medijskega odziva pa ta nagrada ni doživela. Podeljevali so jih namreč ravno v času, ko se je že dodobra razmahnila volilna kampanja zaradi znamenitih prvih predčasnih parlamentarnih volitev v Sloveniji. Še huje pa je bilo tisto leto zaradi gospodarske krize in recesije, o čemer smo se nekoč samo učili v šoli in bili mnenja, da se nam kaj takega nikoli ne more zgoditi. In glej ga zlomka! Ljudi se je polotilo nekakšno malodušje ali apatija, tako da se jim, kot lahko sklepamo iz vsega tega, niti ni dalo pisati predlogov za nagrade na področju šolstva. Tako jih je bilo pol manj kot prejšnja leta. Za društvena priznanja in častno članstvo v Društvu matematikov, fizikov in astronomov Slovenije pa je bila množica predlogov prazna. Matematik bi jo zapisal kot $\{\}$ ali $\emptyset$. Še dobro, da takrat niso vedeli, da bo naslednje leto na vrsti uravnoteženje javnih financ. Slutilo pa se je že, da dolgo tako ne bo šlo, kot je do takrat.

Vzgojitelji v otroških vrtcih in drugje, učitelji na osnovnih šolah, profesorji na srednjih šolah in celo univerzitetni profesorji so se znašli med tako imenovanimi *javnimi uslužbenci*, ki jih financira država. Ko tej v svoji nesposobnosti, nepremišljenosti, ošabnosti, lakomnosti, lahkomiselnosti in drugih naglavnih grehih začne zmanjkovati denarja, se njeni nosilci takoj spomnijo na javne uslužbence in jim zmanjša plače ali pa jih napodi v pokoj. Obenem taki in podobni zlahka naščuvajo rajo, da javni uslužbenci tako in tako malo ali celo nič ne delajo, kar se takoj prime. Res! Veliko je ljudi, ki so prepričani, da je pravo delo samo tisto ob stroju, tekočem traku ali na polju. Največ imajo seveda povedati tisti, ki se na šolstvo in javno upravo spoznajo toliko kot svinja na boben. Pa razni falirani študentje in njim podobni.

Uporabili smo besedo *kriza*, ki izhaja kajpak iz grške, in sicer iz besede κρίσις, kar pomeni kup reči: *ločitev, spor, prepir, boj, odločitev*. Dandanes pomeni *hudo nevarno, težavno stanje*. Tudi beseda *apatija* je grška. Beseda πάθος pomeni med drugim *strast, vznesenost, zanos, pretirana čustvenost*, ἀπάθεια pa je nasprotje tega: *brezčutnost, ravnodušnost, otopelost*. Seveda so besede, ki jih kar naprej uporabljamo, *matematik, fizik, astronom* tudi grškega izvora. Spomnimo se besed μάθημα, φύσις. ἀστήρ, νόμος, ki po vrsti pomenijo *znanje, narava, zvezda, zakon*.

Kosinusni izrek sferne trigonometrije je pogosto iztočnica za vprašanje na zagovorih diplomskih del naših študentov matematike z vezavami. Kandidat se mora spomniti, da je nekje na začetku študija spoznal razvoje nekaterih elementarnih funkcij v Maclaurinovo vrsto, tudi funkcije kosinus. Naučil se je, da za vsako realno število x velja razvoj

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots$$

Vrsta na desni za vsak realen x celo absolutno konvergira. Manjši kot je x, hitreje to počne. Če pa se preprosto požvižgamo na člene, ki vsebujejo potence x^4, x^6, $\ldots$, lahko zapišemo:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3).$$

Mali o pomeni infinitezimalo, ki gre hitreje proti 0 kot tista reč za njim v oklepaju:

$$\lim_{x\to 0} \frac{o(x^3)}{x^3} = 0.$$

V našem primeru je

$$o(x^3) = x^3\left(\frac{x}{4!} - \frac{x^3}{6!} + \ldots\right) = x^3 g(x)\,,$$

kjer je $g(x)$ neka povsod zvezna funkcija, ki je infinitezimala v točki 0, se pravi, da $g(x)$ stremi proti 0, ko x gre proti 0. Iz zgornjega izraza razberemo, da je zapis $o(x^3)$ v razvoju $\cos x$ upravičen. Sedaj si mislimo, da leži naš pravokotni sferični trikotnik na sferi radija R, tako da lahko vse dolžine stranic ℓ_a, ℓ_b in ℓ_c zapišemo s središčnimi koti $\ell_a = Ra$, $\ell_b = Rb$ in $\ell_c = Rc$. Nato izrazimo še:

$$\cos a = 1 - \frac{a^2}{2} + o_1(a^3)\,, \cos b = 1 - \frac{b^2}{2} + o_2(b^3)\,, \cos c = 1 - \frac{c^2}{2} + o_3(c^3).$$

Če to vstavimo v enakost $\cos c = \cos a \cos b$, dobimo:

$$1 - \frac{c^2}{2} + o_3(c^3) =$$

$$= 1 - \frac{a^2}{2} - \frac{b^2}{2} + o_1(a^3) + o_2(b^3) + o_1(a^3)o_2(b^3) - \frac{a^2}{2}o_2(b^3) - \frac{b^2}{2}o_1(a^3) + \frac{a^2b^2}{4}.$$

Za majhne stranice c velja neenakost $\cos c < \cos a$ in zato $a < c$. Prav tako je $b < c$. Zato so vsi členi v zgornji enakosti razen 1 in kvadratov stranic taki, ki gredo proti 0 hitreje kot c^3, kar pomeni:

$$c^2 = a^2 + b^2 + o(c^3).$$

Če pomnožimo obe strani dobljene relacije z R^2, dobimo:

$$\ell_c^2 = \ell_a^2 + \ell_b^2 + \frac{\ell_c^3}{R} \cdot \frac{o(\ell_c^3/R^3)}{\ell_c^3/R^3}.$$

Ko naredimo nazadnje še limitni prehod $R \to \infty$, preide sfera v ravnino in dobimo vsem dobro znani Pitagorov izrek $\ell_c^2 = \ell_a^2 + \ell_b^2$.

Pojma limita zaporedja in limita funkcije v dani točki sta osnovna v matematični analizi. Marsikomu se njuni definiciji dolgo, dolgo ne uležeta. Vse se mu zdi zelo abstraktno, polno nekih besedic, ki se mu ne zdijo bistvene. Spominjam se časov, ko nam je profesor Karčnik prvič napisal na tablo

$$A = \lim_{x \to a} f(x)$$

in nam razlagal, kaj to pomeni. Posebej je poudarjal, da "x gre na katerikoli način proti a". To je ponovil še vsaj dvakrat. Mene je vse skupaj takoj preusmerilo v Tavčarjevo Visoško kroniko v tisti del, kjer Izidor pride k škofu Janezu Frančišku na loški grad moledovat za Agato Emo Schwarzkoblerjevo, ki je bila po nedolžnem obtožena čarovništva. Prečastiti škof pravi Izidorju: "Če pride Agata na katerikoli način, na katerikoli način živa iz vode, je njena nedolžnost dokazana." Še dandanes, ko se vozim po Poljanski dolini mimo Visokega, se spominjam na profesorja Karčnika in na limito funkcije v točki.

Na gimnaziji nismo izpustili niti primerov, ko je a ali A v limiti ∞ ali $-\infty$. Večinoma pa smo se ukvarjali le z limitami racionalnih in trigonometričnih funkcij. Uporabljajo pa ljudje različne izraze za limito: Nemci *Grenzwert*, Angleži *limit*, Rusi предел, Poljaki *granica*. Tudi izraz za funkcijo *sinus* ni pri vseh isti. Italijani, Španci in Luzitanci zapišejo *seno*, Angleži pa *sine*. Na srečo pa vsi razumejo, kaj pomeni $\sin\alpha$.

V uteho in ponos vsakemu profesorju pa je, da si študentje zapomnijo vsaj limito

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1 \tag{21}$$

in celo to, da mora biti pri tem x v absolutnih kotnih enotah, to je v radianih. Večina zna zgornji rezultat dokazati celo z uporabo geometrije. Limita (21) je ena najpomembnejših, saj z njo pridemo do odvodov trigonometričnih funkcij in za nekatere od le-teh do razvojev v potenčne vrste. Fizikom pa (21) pride prav, da za dovolj majhne kote x nadomestijo nelinearno sinusno funkcijo kar z identično funkcijo, ki pa je linearna: $\sin x\approx x$. Pravimo, da smo sinusno funkcijo *linearizirali*.

Pri nitnem nihalu dolžine ℓ lahko opazujemo, kako se s časom t spreminja kot φ, to je odmik od mirovne lege. Dobimo nelinearno diferencialno enačbo drugega reda:

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{\ell}\sin\varphi=0. \tag{22}$$

Čas začnemo šteti pri začetnem odmiku Φ, ko nihalo spustimo, da začne nihati. Začetna pogoja za kot φ sta $\varphi(0)=\Phi$ in $\dot{\varphi}(0)=0$. V času T, nihajni dobi, se povrne tja, od koder smo ga spustili. Trenje, upor zraka in maso niti zanemarimo. Diferencialna enačba (22) pri navedenih začetnih pogojih po eksistenčnem izreku ima natančno eno rešitev, kar nam je na nekaj načinov na fakulteti v živo dokazal France Križanič na svojih predavanjih. Ni pa rešitve možno podati z elementarnimi funkcijami in se nam lahko nihalo z enačbo (22) vred samo smeji v brk. Akademik Anton Kuhelj nam je potem pri mehaniki, ki smo jo imeli v tretjem letniku na fakulteti, in to ne malo, saj smo imeli namen postati inženirji, pokazal, da se rešitev izraža z Jacobijevimi eliptičnimi funkcijami.

Že profesor Karčnik je na gimnaziji poudarjal, da nitno nihalo niha sinusno samo pri majhnih amplitudah. Kaj pomeni tu "majhno"? Morda 10°? Poglejmo primera:

$$10^\circ = \frac{10\pi}{180} = 0.1745329251, \quad \sin 0.1745329251 = 0.1736481776.$$

Opazimo, da se tedaj kot in njegov sinus ujemata le v prvih dveh decimalkah. Relativna napaka je 0.5 %. Kaj pa pri kotu 3°? Zanj dobimo:

$$3^\circ = \frac{3\pi}{180} = 0.05235987755, \quad \sin 0.05235987755 = 0.05233595624.$$

Ujemanje na prvih štirih decimalkah je sedaj kar v redu. Relativna napaka je le 0.05 %. Dovolj točne rezultate dobimo z nitnim nihalom, ki niha z amplitudo 5°, če problem lineariziramo. Tako pri majhnih amplitudah nadomestimo enačbo (22) z linearno

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{\ell}\,\varphi = 0, \tag{23}$$

ki ima pri začetnih pogojih $\varphi(0) = \Phi$ in $\dot{\varphi}(0) = 0$ eno samo rešitev

$$\varphi(t) = \Phi \cos\left(\sqrt{\frac{g}{\ell}}\,t\right).$$

Krožna frekvenca tega nihanja je, kar lahko preberemo iz rešitve, $\omega = \sqrt{g/\ell}$, nihajna doba $T = 2\pi/\omega$ pa je zato

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

kjer je $g = 9.81\ \mathrm{ms}^{-2}$ pospešek prostega pada, ki ga običajno uporabljamo v izračunih. Je pa odvisen od nadmorske višine. Izraz za čas T velja pri majhnih amplitudah. Pripovedovali so nam, da je Galileo Galilei meril nihajno dobo lestencev v cerkvi in prišel do zgornje formule. Ker ni imel na voljo štoparice, si je pomagal kar s periodičnim utripanjem svojih žil. Pogosto pravijo, da nihajna doba nitnega nihala ni odvisna od amplitude. To je približno res za majhne amplitude, nekje do 5°.

Točna formula, ki jo razmeroma lahko dobimo z zakonom o ohranitvi mehanske energije, vsebuje tudi amplitudo Φ, in se glasi:

$$T = 4\sqrt{\frac{\ell}{g}}\,\mathrm{K}(k), \quad k = \sin(\Phi/2).$$

Pri tem je $\mathrm{K}(k)$ tako imenovani popolni eliptični integral prve vrste v Legendrovi obliki, to je

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad 0 < k < 1.$$

Popolni eliptični integral $\mathrm{K}(k)$, kjer je k njegov modul, ima lep razvoj v potenčno vrsto:

$$\mathrm{K}(k) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^2 k^{2n}\right\}.$$

Dobimo ga z razvojem podintegralske funkcije po potencah $\sin u$ in z uporabo Wallisovega[87] integrala

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u\, du = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Če upoštevamo le en člen, dobimo za nihajno dobo nihala znano formulo. S seštevanjem več nadaljnjih členov pa upoštevamo tudi amplitudo Φ. Navadno to pokažemo celo študentom v drugem letniku, da bi videli, kako sta fizika in matematika med seboj povezani znanosti. Wallisov integral (24) pa izračunamo mimogrede. Vedeti pa je treba, kaj pomenita dva klicaja za naravnim številom. Razlikujemo znak !!, ki je zapisan za lihimi in za sodimi števili:

$$1!! = 1, \quad 3!! = 1 \cdot 3, \quad 5!! = 1 \cdot 3 \cdot 5, \ldots,$$

[87] John Wallis (1616–1703) – angleški matematik samouk.

$$2!! = 2, \quad 4!! = 2 \cdot 4, \quad 6!! = 2 \cdot 4 \cdot 6, \ldots$$

To je bilo potrebno pojasniti, da ne bi kdo mislil, da pomeni $n!!$ isto kot $(n!)!$. Wallisov je tudi integral

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} u \, du = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \tag{25}$$

Pri tem je treba sprejeti, da je po definiciji $0!! = 1$, podobno kot $0! = 1$.

Poglejmo, kako je nihajna doba odvisna od amplitude Φ na primeru Foucaultovega nihala dolžine $\ell = 67$ m v pariškem Panthéonu leta 1851. Rezultate smo zbrali v tabeli (10). Izračunali smo jih tudi za primere, ko zidovje pariške veličastne zgradbe nihalu ne dopušča tako velikih odklonov. Pariški Panthéon so gradili med letoma 1758 in 1790. V njem so našle poslednji počitek nekatere velike osebnosti, tudi nekateri matematiki in fiziki: Joseph-Louis Lagrange, Gaspard Monge, zakonca Pierre in Marie Curie, Jean Baptiste Perrin, Paul Langevin.

Φ [°]	T [s]	Φ [°]	T [s]
2	16.4216	30	16.7062
4	16.4254	35	16.8117
6	16.4316	40	16.9350
8	16.4404	45	17.0767
10	16.4517	50	17.2378
15	16.4910	55	17.4192
20	16.5463	60	17.6220
25	16.6179	90	19.3816

Tabela 10: Nihajna doba nihala v odvisnosti od amplitude.

Razlike za majhne amplitude niso velike, lahko bi jih primerjali z razlikami časov najboljših smučarjev na nekem smuku, pri večjih amplitudah pa že gre za razlike v desetinkah sekunde. Kakor nam je profesor Anton Kuhelj pripovedoval, Foucaultovo nihalo ni bilo nameščeno zato, da bi merili njegovo nihajno dobo, ampak da bi ljudem pokazali, da nihalo ne niha zaradi rotacije Zemlje celi dan v isti ravnini. Posredno naj bi s tem dokazali še zadnjim nevernim Tomažem, da se Zemlja vrti okoli svoje osi. Takih nihal so po svetu postavili še več, večinoma po nekaterih cerkvah, univerzah, muzejih in inštitutih. Eno največjih Foucaultovih nihal je bilo nameščeno v enem od največjih sakralnih objektov na svetu, v katedrali sv. Izaka Dalmatinskega v Sankt Peterburgu (Исаакиевский Собор). Gradili so jo med letoma 1818 in 1858. Leta 1931 so katedralo spremenili v Muzej zgodovine religije in veličastno podobo sv. Duha pod vrhom kupole zamenjali z nihalom dolžine prek 90 m. Njegova nihajna doba je bila okoli 19.5 s. Leta 1990 so katedrali vrnili prvotno namembnost, nihalo pa odstranili.

Panthéon se sliši podobno kot Partenon. Slednji, kakršen pač je, stoji na atenski Akropoli, v klasični grščini Ἀκρόπολις τῶν Ἀθηνῶν, in je bil zgrajen v 5. stoletju pr. n. št. Po grško se piše Παρθενών. Bil je tempelj, posvečen deviški boginji Ateni. Ime verjetno prihaja iz grške besede Παρθένος, kar pomeni *devica*. V Rimu so v drugem stoletju našega štetja zgradili *Pantheon*, grško Πάνθεον, v čast vsem bogovom. V Parizu pa stoji *Panthéon*, ki so ga gradili, kot smo že zapisali, v 18. stoletju. Pa še bi se v svetu našla kakšna zgradba s tem visoko zvenečim imenom. Ob tem se nehote spomnim, da je bilo v mojih študentskih časih pogosto slišati na radiu odlično francosko pevko Mireille Mathieu, ki je prepevala:

Acropolis adieu, adieu l'amour
Les roses blanches d'Athénée se sont fanées
On s'est aimés quelques jours
Acropolis adieu!

13 Stožnice

Stožnicam smo na gimnaziji rekli *stožernice*. Ime so dobile, ker nastanejo kot preseki ploskve dvojnega stožca z ravninami v različnih legah. Zato je stožnica na primer v nemščini *Kegelschnitt*, v angleščini *conic section* ali samo *conic*, v francoščini *conique*, v latinščini *sectio conica*, v ruščini коническое сечение. Ime je stožnicam dal Apolonij iz Perge, Ἀπολλώνιος ὁ Περγαῖος, okoli leta 225 pr. n. št. Nekaj njegovih del je izgubljenih, nekaj se jih je ohranilo, nekatera zahvaljujoč arabskim prevodom. Nekatera, nekoč grška mesta v Mali Aziji, imajo podobna imena. Imamo Pergamon ali tudi Pergam, Πέργαμον ali redkeje Πέργαμος v starodavni Miziji, Μυσία, bolj na zahodu današnje Turčije. Po tem mestu smo dobili besedo *pergament*. Pergament je preprosto strojena živalska koža, na katero so nekdaj pisali. Uporabljali so kozje, ovčje, telečje ali oslovske kože. Najfinejši pergament so izdelovali iz kož še nerojenih živali. Pergament je nadomeščal papirus in je veljal za zelo drag izdelek. Pogosto so star popisan pergament malo očistili in ga znova uporabili. Še dandanes se dogaja, da prve napise na starinskem pergamentu slučajno odkrijejo in jih skušajo prebrati z najsodobnejšimi pripomočki in metodami. Bolj na južni maloazijski obali pa je bila Perga, Πέργη, v zgodovinski pokrajini Pamfilija, grško Παμφυλία.

Elipsa nastane, če stožec presekamo z ravnino tako, da seka vse tvorilke izven vrha. Zanimivo je za marsikoga, da so japonski matematiki imeli elipso za presek okrogle valjaste ploskve z ravnino. Pri tem mora ravnina sekati vse valjeve tvorilke. Nekako tako, kot bi salamo prerezali z nožem. Če bi del tako prerezane salame brez drsenja kotalili po ravnini, bi dobili krivočrtni štirikotnik, ki je na eni strani omejen s sinusoido.

Definicije stožnic (elipsa, hiperbola in parabola) so razmeroma preproste. Prav tako so preproste njihove enačbe v kartezičnih koordinatah. Pri iskanju enačb stožnic v polarni obliki pa se rado kaj zatakne, če ne izberemo dobro koordinatnega sistema, zlasti pri elipsi in hiperboli. Videli pa bomo, da lahko vse tri stožnice zapišemo enotno v polarni obliki, če postavimo pol polarnega sistema v gorišče stožnice, polarno os skozi gorišči elipse oziroma hiperbole, pri paraboli pa skozi gorišče, pravokotno na vodnico. Pri hiperboli se bomo zadovoljili z eno njeno vejo.

1. Parabola je množica tistih točk P v ravnini, ki so enako oddaljene od dane premice v in od dane točke G, ki ni na tej premici. Premica v je vodnica, točka G pa gorišče parabole. Vzemimo, da je razdalja gorišča G od vodnice v enaka p. Seveda je $p > 0$.

Vpeljimo polarni koordinatni sistem tako, kot kaže slika 76. Poiskali bomo polarni radij r poljubne točke P parabole v odvisnosti od polarnega kota φ. Naj bo ϱ oddaljenost točke P od vodnice v. Ker mora veljati enakost $r = \varrho$, takoj dobimo:

$$r = \varrho = p + r\sin(\varphi - \frac{\pi}{2}) = p - r\cos\varphi.$$

Ko izrazimo r iz te enačbe, dobimo polarno enačbo parabole:

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \cos\varphi}.$$

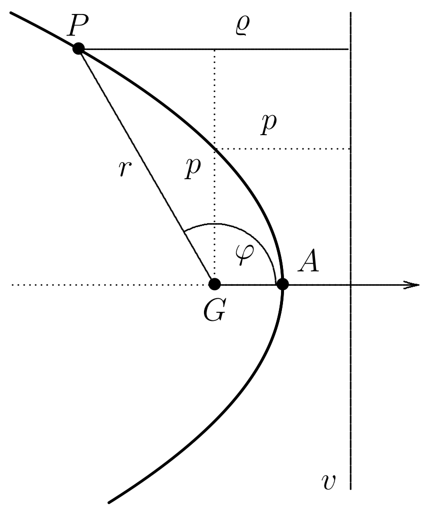
Račun in slika nam povesta:

$$r(\pi/2) = r(-\pi/2) = p,\ r(0) = p/2.$$

Parameter p je ordinata parabole v gorišču. Točka A je teme parabole.

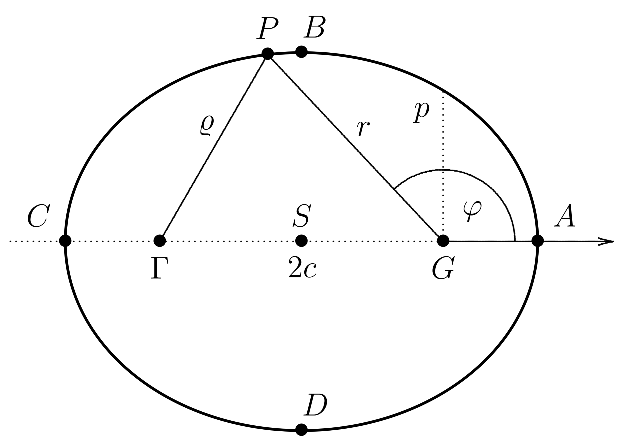
2. Elipsa je množica vseh tistih točk P v ravnini, katerih vsota razdalj od danih točk Γ in G je stalna, in sicer $2a$. To pomeni, z oznakami na sliki 77: $r + \varrho = 2a$. Gorišči sta narazen za $2c$ in c je linearna ekscentričnost elipse. Razmerju $\varepsilon = c/a$ pravimo numerična ekscentričnost elipse, ker je to število brez enote. Ker je $c < a$, je pri elipsi $0 \leq \varepsilon < 1$. Če gorišče Γ bližamo gorišču G, preide elipsa v krožnico in ε v 0. Točke A, B, C in D, ki so ekstremno oddaljene od središča S elipse, so temena elipse.

Pri tem je $a > 0$ velika polos elipse. Točki Γ in G sta gorišči, $2a$ pa velika os elipse. Mala polos elipse je $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Tudi pri elipsi vpeljemo parameter p, ordinato elipse v gorišču. Po Pitagorovem izreku in po definiciji



Slika 76: Parabola v polarnih koordinatah.

elipse dobimo za ordinato p v desnem gorišču elipse enačbo $(2a-p)^2 = p^2+4c^2$, ki ima rešitev $p = b^2/a$. Enak rezultat dobimo v levem gorišču.



Slika 77: Elipsa v v koordinatnem sistemu.

Enačbo elipse v polarni obliki dobimo s kosinusnim izrekom v trikotniku ΓGP in z definicijo elipse:

$$\varrho^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos(\pi - \varphi) \quad \text{in} \quad r + \varrho = 2a.$$

Ko izločimo ϱ, dobimo najprej

$$(2a-r)^2 = r^2 + 4c^2 + 4rc\cos\varphi\,,$$

nato pa takoj:

$$a^2 - ar = c^2 + rc\cos\varphi.$$

Nazadnje je pred nami enačba elipse v polarni obliki:

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Ker imamo pogosto opravka z izrazom $1-\varepsilon^2$, ga za vsak primer izrazimo s polosema a in b elipse:

$$1-\varepsilon^2 = 1 - \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2-c^2}{a^2} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Za kontrolo izračunajmo iz enačbe elipse v polarni obliki:

$$r(\pm\pi/2) = p\,,\ r(0)+r(\pi) = \frac{p}{1+\varepsilon} + \frac{p}{1-\varepsilon} = \frac{2p}{1-\varepsilon^2} = 2a.$$

3. Hiperbola je množica vseh tistih točk P v ravnini, katerih absolutna vrednost razlike razdalj od danih točk G in Γ je stalna, in sicer $2a$. To pomeni, z oznakami na sliki 78: $|r-\varrho| = 2a$. Gorišči sta narazen za $2c$ in c imenujemo linearna ekscentričnost hiperbole. Razmerju $\varepsilon = c/a$ pravimo numerična ekscentričnost hiperbole, ker je to zgolj število, brez enote. Ker je $c > a$, je pri hiperboli $\varepsilon > 1$. Točki A in B, ki sta najmanj oddaljeni od središča S hiperbole, sta temeni hiperbole. Parabola ima eno teme, hiperbola dve, elipsa pa štiri.

Pri tem je $a > 0$ realna polos hiperbole. Točki G in Γ sta gorišči, $2a$ pa realna os hiperbole. Imaginarna polos hiperbole je $b = \sqrt{c^2-a^2}$. Tudi pri hiperboli vpeljemo parameter p, ordinato hiperbole v gorišču. Po dobro znanem Pitagorovem izreku in po definiciji hiperboli dobimo za levo gorišče $(2a+p)^2 = p^2 + 4c^2$. Iz tega pa takoj izračunamo: $p = b^2/a$. Enak rezultat dobimo v desnem gorišču hiperbole.

Realna os hiperbole povezuje njeni temeni A in B, imaginarna pa ne povezuje nobenega para njenih točk.

Enačbo leve veje hiperbole v polarni obliki dobimo s kosinusnim izrekom v trikotniku $G\Gamma P$ in z definicijo hiperbole:

$$\varrho^2 = r^2 + (2c)^2 - 2r(2c)\cos\varphi \quad \text{in} \quad \varrho - r = 2a.$$

Ko izločimo ϱ, dobimo najprej

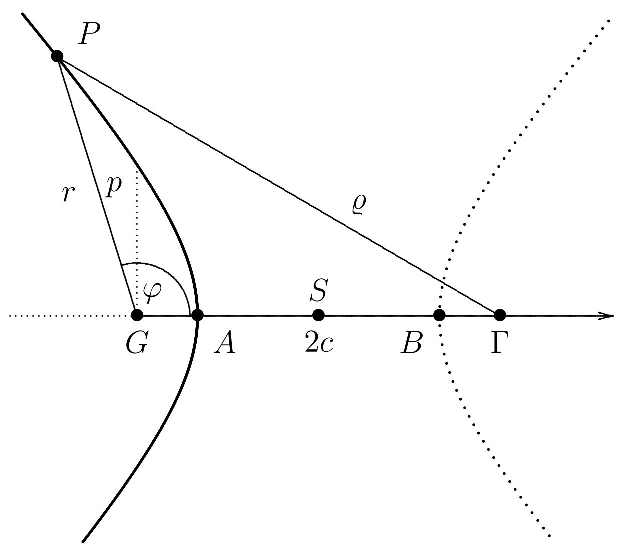
$$(2a + r)^2 = r^2 + 4c^2 - 4rc\cos\varphi\,,$$

nato pa takoj:

$$a^2 + ar = c^2 - rc\cos\varphi.$$

Nazadnje je pred nami enačba leve veje hiperbole v polarni obliki:

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$



Slika 78: Hiperbola in polarne koordinate.

Ugotovili smo, da imajo parabola, elipsa in leva veja hiperbole isto obliko enačbe v polarni obliki, pri čemer je p ordinata v gorišču:

$$r = r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} \qquad \begin{cases} 0 < \varepsilon < 1, & \text{elipsa,} \\ \quad \varepsilon = 1, & \text{parabola,} \\ \quad \varepsilon > 1, & \text{hiperbola.} \end{cases}$$

Slika 79 hkrati kaže vse tri krivulje, ki imajo isti parameter p in skupno gorišče G. Polarno os smo usmerili od gorišča stožnice proti njenemu najbližjemu temenu.

Tudi v besedni umetnosti imamo elipso, hiperbolo in parabolo. Navedimo nekaj zgledov, da si bomo laže predstavljali, za kaj pravzaprav gre. Potem tudi hitro najdemo še kakšnega.

Izpust ali *elipsa* (iz grške besede ἔλλειψις) izpušča kak stavčni člen ali tudi cel stavek, ki ga lahko sami dopolnimo.

Dobro naredil, dobro povedal. (I. Cankar.)

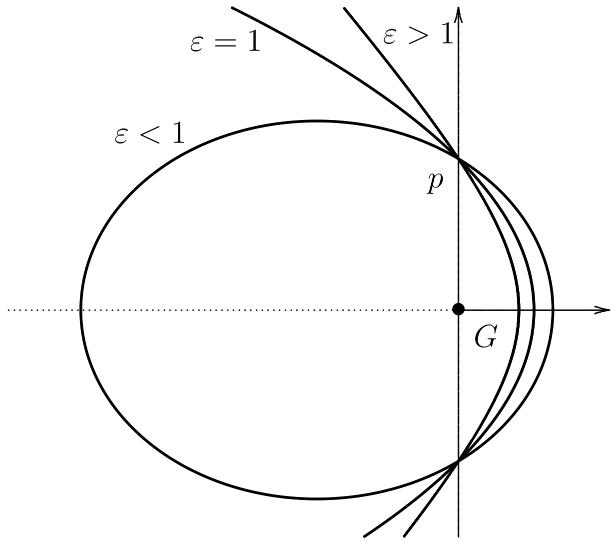
Pretiravanje ali *hiperbola* (iz grške besede ὑπερβολή) je zaradi večje učinkovitosti do nemogočega pretirana trditev ali primera.

Za gradom teče rdeča kri,
da b' gnala mlinske kamne tri. (Ljudska.)

Primera ali *parabola* (iz grške besede παραβολή) je kratka, izmišljena, a verjetna zgodba s poučno poanto.

Našli smo predpis, kako se pri stožnicah spreminja polarni radij $r(\varphi)$, to je razdalja točke P od gorišča G. Elipsa je sklenjena krivulja in ko polarni kot φ teče od $-\pi$ do π, točka elipso obkroži v pozitivni smeri ravno enkrat. Kakšno je pri tem integralsko povprečje $\bar{r}$ polarnega radija $r(\varphi)$? Po definiciji je

$$\bar{r} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi)\, d\varphi.$$



Slika 79: Parabola, elipsa in hiperbola s skupnim goriščem in parametrom p.

Izračunati je torej treba integral

$$I(\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$

Univerzalna substitucija ali zamenjava, katero je z dobršno mero previdnosti še kako hvalil profesor Ziegler pri analizi v prvem letniku fakultete, nas vedno privede do rezultata. Primerna je za računanje integralov funkcij, v katerih racionalno nastopata $\cos\varphi$ in $\sin\varphi$. Nato izrazimo, pri čemer še kako prav pride znanje trigonometričnih obrazcev, $\cos\varphi$ s polovičnim argumentom in nato uvedemo novo integracijsko spremenljivko $u = \tan(\varphi/2)$. V našem primeru ves račun poteka takole:

$$\cos\varphi = \frac{\cos^2(\varphi/2) - \sin^2(\varphi/2)}{\cos^2(\varphi/2) + \sin^2(\varphi/2)} = \frac{1 - u^2}{1 + u^2}\,,\ d\varphi = \frac{2du}{1 + u^2}.$$

Ko vstavimo oboje v integral in mu najdemo novi meji, dobimo:

$$I(\varepsilon) = 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon)u^2}.$$

S substitucijo $\sqrt{1-\varepsilon}\,u = \sqrt{1+\varepsilon}\,w$, s katero dosežemo pri kvadratni funkciji v imenovalcu enaka koeficienta, nato dobimo:

$$I(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dw}{1+w^2}.$$

Rezultat bi sedaj lahko takoj zapisali, toda z nekim namenom vpeljimo še $w = \tan(E/2)$. Dobimo:

$$I(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \int_{-\pi}^{\pi} dE = \frac{2\pi}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Substitucija, ki bi prvotni integral neposredno prelevila v slednjega, je

$$\sqrt{1-\varepsilon}\,\tan(\varphi/2) = \sqrt{1+\varepsilon}\,\tan(E/2)$$

ali mnogo lepše

$$\tan(E/2) = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan(\varphi/2)\,,$$

kar je znana povezava med pravo anomalijo φ in ekscentrično anomalijo E v astronomiji. Toda več o anomalijah v astronomiji nekoliko kasneje. V resnici je tukaj veliko matematiziranja, ki pa je zgolj idealizacija, morda model za primer gibanja planetov okoli Sonca. Zaradi vseh nepravilnosti in motenj drugih nebesnih teles so vsi naši modeli kljub zahtevni matematiki le bolj ali manj natančni približki za dejansko gibanje. Povejmo še to, da je beseda *anomalija* grškega izvora. V grščini namreč pomeni ἀνωμαλία *neravnost, hrapavost, neenakost, raznovrstnost, nepravilnost*.

Nazadnje imamo za integralsko povprečje $\bar{r}$ polarnega radija:

$$\bar{r} = \frac{p}{2\pi} I(\varepsilon) = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = b.$$

Z istima substitucijama lahko izračunamo tudi ploščino S elipse in pridemo do znanega rezultata: $S = \pi ab$. Račun poteka tako:

$$S = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (r(\varphi))^2\,d\varphi = \frac{p^2}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

Sedaj je treba izračunati integral

$$J(\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2}.$$

Da pa ne bi ponavljali prejšnjih substitucij, uporabimo raje pravilo odvajanja pod integralskim znakom, torej

$$I'(\varepsilon) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-\cos\varphi\, d\varphi}{(1+\varepsilon\cos\varphi)^2} = \frac{J(\varepsilon) - I(\varepsilon)}{\varepsilon},$$

tako da imamo

$$J(\varepsilon) = (\varepsilon I(\varepsilon))' = 2\pi \left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\right)' = \frac{2\pi}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}.$$

Torej se ploščina izraža v obliki:

$$S = \frac{p^2}{2} J(\varepsilon) = \frac{\pi p^2}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}} = \pi ab.$$

Znano je, da je Johannes Kepler (1571–1630) na podlagi astronomskih opazovanj, ki jih je opravil danski astronom Tycho Brahe (1546–1601), prišel do svojih treh znamenitih zakonov, ki naj bi jih obvladali že kot gimnazijci. Tycho v tistih časih vestno opazoval in beležil podatke o gibanju planetov, še posebej Marsa, in zapustil Keplerju svoje dragocene zapiske. Kasneje je Isaac Newton (1642–1727) lahko s Keplerjevimi zakoni utemeljil splošni gravitacijski zakon. Splošni zato, ker naj bi veljal kjerkoli v vesolju, tudi tam, od koder je našo Zemljo komaj opaziti, ali pa tam, kjer se sicer komaj da zaznati neki modrikastozeleni planetek, na katerem se ljudje med seboj neprestano prerivajo, tepejo, streljajo, drug drugega iztrebljajo in tudi sicer počnejo vsakršne grdobije, pa vendar se tudi ljubijo, rojevajo in umirajo.

Oglejmo si malo podrobneje gibanje planetov z dostopnimi matematičnimi orodji, ki jih spoznajo danes študenti tehniških fakultet že v prvih letnikih in bi morali kadarkoli in kjerkoli o njih vsaj nekaj vedeti.

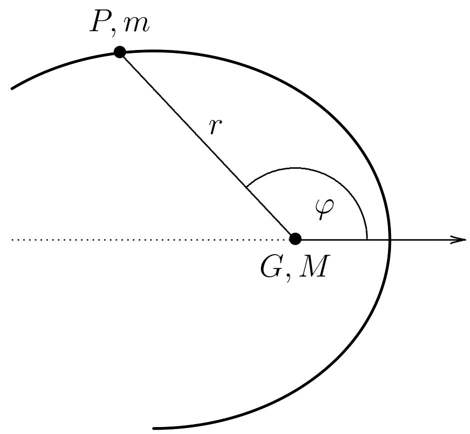
Kepler je po globokoumnih in dolgotrajnih študijah odkril, da vsak planet kroži okoli Sonca po elipsi, v enem od njenih gorišč pa je Sonce, bolje rečeno njegovo središče. Gibanje planeta je torej ravninsko. Do teh spoznanj ni bilo nič kaj lahko priti, še manj pa razumeti, kajti preveč je bil v znanstvenih krogih tistih časov zakoreninjen Ptolemajev model Sončevega sistema. Vemo pa, tudi dandanes, da se je težko znebiti starih predsodkov, navad in fiksnih idej. Teh se lahko znebi le močna in globokoumna osebnost.

Ravninsko gibanje točkastega telesa z maso m v točki P okoli negibnega privlačne mase M in masnim središčem v točki G najlaže opišimo v polarnih koordinatah v ravnini gibanja s polom v G in izbrano polarno osjo. Lahko vzamemo, da je tudi negibna masa M kar točkasto telo. Geometrijsko naj opisuje gibanje točke P krivulja $r = r(\varphi)$ v polarnih koordinatah φ in r, ki se s časom t spreminjata (slika 80). V nadaljevanju bomo odvode nastopajočih funkcij po polarnem kotu označevali s črtico, na primer $r'(\varphi) = dr/d\varphi$. Odvode po času označujemo s piko, na primer $\dot{r} = dr/dt$. Ko imamo opravka z odvodi višjih redov, uporabimo za oznako odvoda ustrezno število črtic in pik. Odvod $\dot{\varphi}$ označuje trenutno kotno hitrost.

Odvode in integrale, infinitezimalni račun, smo se naučili že na gimnaziji tako dobro, da na fakulteti večinoma niso delali posebnih težav, ne pri analizi, ne pri fiziki. Na gimnaziji smo se bolj posvečali tehniki odvajanja in integriranja, na univerzi pa smo dali več poudarka strogim definicijam, izpeljavam, lastnostim, izrekom, zlasti eksistenčnim. Popolnoma po Aristotelu: ugotoviti, da nekaj obstaja in zakaj obstaja, kakšna tale reč je in zakaj taka v resnici je.

Za čim bolj udobno računanje vpeljemo pri elipsi krajevni vektor $\vec{r} = \overrightarrow{GP}$ točke P (slika 81). Njegova absolutna vrednost je $r = |\vec{r}|$. Prav tako vpeljemo vektor $\vec{\varrho} = \overrightarrow{\Gamma P}$ z absolutno vrednostjo $\varrho = |\vec{\varrho}|$. Oba vektorja sta odvisna od kota φ. Če pa vpeljemo še konstantni vektor $2\vec{c} = \overrightarrow{\Gamma G}$, potem imamo zvezo $\vec{\varrho} = \vec{r} + 2\vec{c}$. Iz tega pa z odvajanjem dobimo: $\vec{r}\,' = \vec{\varrho}\,'$.

Enotski vektor v smeri vektorja $\vec{r}$ naj bo $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, enotski vektor v smeri vektorja $\vec{\varrho}$ pa $\vec{e}_\varrho = \vec{\varrho}/\varrho$. Po definiciji elipse seveda velja enakost $r + \varrho = 2a$.



Slika 80: Gibanje v gravitacijskem polju.

Če jo prepišemo v obliko

$$\sqrt{\vec{r}\vec{r}} + \sqrt{\vec{\varrho}\vec{\varrho}} = 2a$$

in nato odvajamo po kotu φ, dobimo enakost:

$$\vec{r}\,'\vec{e}_r + \vec{\varrho}\,'\vec{e}_\varrho = \vec{0}.$$

Iz nje pa sledi enakost

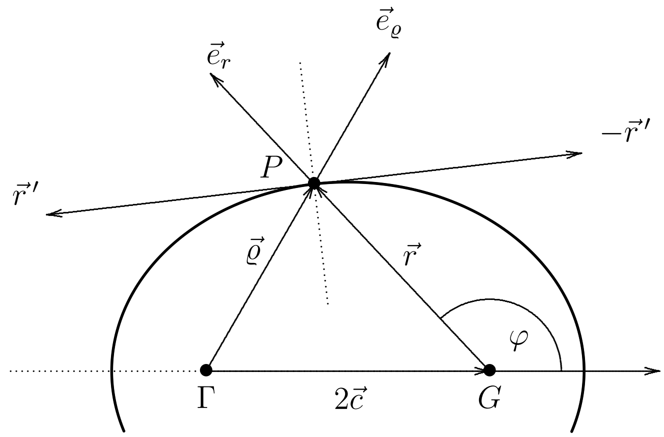
$$\vec{r}\,'\vec{e}_r = -\vec{r}\,'\vec{e}_\varrho\,,$$

ki ima lep geometrijski pomen. Vektor $\vec{r}\,'$ kaže v smeri tangente na elipso, in sicer v smeri naraščanja kota φ, vektor $-\vec{r}\,'$ pa tudi v smeri tangente, toda v nasprotni smeri. Zgornja enakost pa pove, da je kot med vektorjema $\vec{r}\,'$ in $\vec{e}_r$ enak kotu med vektorjema $-\vec{r}\,'$ in $\vec{e}_\varrho$. Z drugimi besedami, normala na elipso v poljubni točki P razpolavlja kot med vektorjema $\overrightarrow{\Gamma P}$ in $\overrightarrow{GP}$.

Označimo kot med tangento na elipso v točki P in radijema r ter ϱ z γ, kot med normalo na elipso v točki P in radijema r ter ϱ pa z $\gamma\,'$. Pri tem je seveda $\gamma + \gamma\,' = \pi/2$.

Kot med radijema je potem $\pi - 2\gamma$. Po kosinusnem izreku velja

$$(2c)^2 = r^2 + \varrho^2 - 2r\varrho\cos(\pi - 2\gamma) = r^2 + \varrho^2 + 2r\varrho\cos(2\gamma)$$



Slika 81: Tangenta in normala na elipso.

in iz tega

$$\cos(2\gamma) = \frac{4c^2 - r^2 - \varrho^2}{2r\varrho}.$$

Izračunajmo:

$$2\sin^2\gamma = 1 - \cos(2\gamma) = 1 - \frac{4c^2 - r^2 - \varrho^2}{2r\varrho} = \frac{(r+\varrho)^2 - 4c^2}{2r\varrho}.$$

Ker je pri elipsi $r + \varrho = 2a$ in $a^2 - b^2 = c^2$, dobimo:

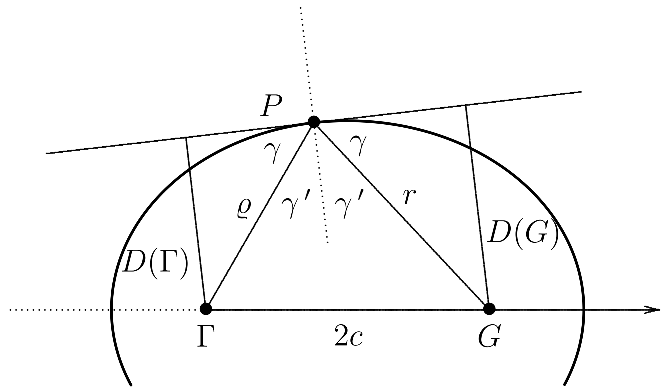
$$\sin^2\gamma = \frac{a^2 - c^2}{r\varrho} = \frac{b^2}{r\varrho}.$$

Očitno je gorišče G oddaljeno od tangente na elipso (slika 82) v točki P za $D(G) = r\sin\gamma$, gorišče Γ pa za $D(\Gamma) = \varrho\sin\gamma$. Produkt teh dveh razdalj pa je konstanten, neodvisen od točke P na elipsi, saj je:

$$D(G)D(\Gamma) = r\varrho\sin^2\gamma = b^2.$$

Pri elipsi kot γ ne more biti 0 ali π, zato velja, da sta razdalji $D(G)$ in $D(\Gamma)$ v istem razmerju kor radija r in ϱ:

$$\frac{D(G)}{D(\Gamma)} = \frac{r}{\varrho}.$$



Slika 82: Razdalji gorišč elipse od njene tangente.

V resnici lastnost, da je produkt razdalj dveh točk od tangent krivulje stalen, ni značilna samo za elipso, saj jo imata tudi hiperbola in premica, ki je sama sebi tangenta. Dokaz opustimo.

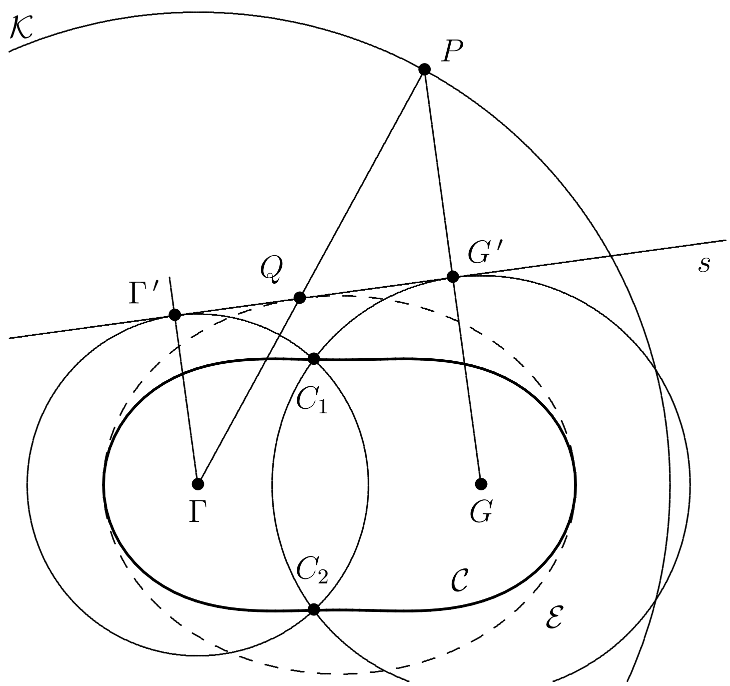
Opisano lastnost elipse lahko izkoristimo za konstrukcijo točk Cassinijevega ovala, ki je definiran tako, da je za vsako njegovo točko P produkt razdalj r in ϱ od dveh izbranih točk, gorišč ovala G in Γ, konstanten, denimo b^2, to pomeni $r\varrho = b^2$. Cassinijev oval je torej določen z izbranima goriščema G in Γ, ki sta med seboj oddaljeni za $2c$, in s pozitivno konstanto b. Če elipso z goriščema G in Γ ter polosjo b že imamo in na njej izbrano točko Q tudi, potem tangenta na elipso v točki Q razpolavlja kot med enim radijem in premico nosilko drugega radija. Razdalji $D(G)$ in $D(\Gamma)$ ni težko konstruirati. Načrtamo krožnici s središčema v G in Γ z ustreznima polmeroma $D(G)$ in $D(\Gamma)$, pa sta njuni presečišči že točki Cassinijevega ovala.

Stari Cassini iz Perinalda je bil celo mnenja in od njega ni odstopil, da so tiri planetov okoli Sonca njegovi ovali. Še sreča, da niso, sicer bi bilo računanje z ovali še mnogo težje kot je že tako in tako zapleteno računanje s stožnicami.

Opisana konstrukcija je primerna za tiste računalniške programe, ki so namenjeni dinamični geometriji. Pri tej je dovolj konstruirati eno točko iskane krivulje, ostale pa dobimo kot sled.

Z goriščema G in Γ ter z veliko polosjo a sta elipsa in Cassinijev oval določena. Polovica razdalje med goriščema elipse je njena linearna ekscentričnost c. Seveda mora biti $a > c$. Mala polos b elipse je potem $b = \sqrt{a^2 - c^2}$.

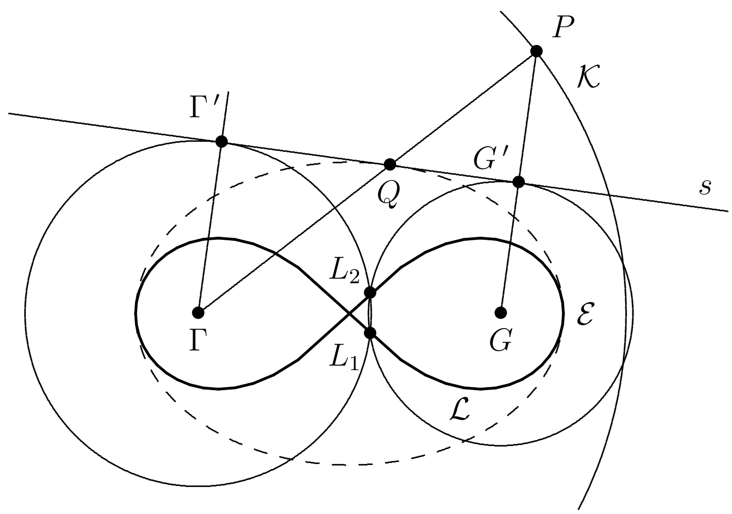
Načrtamo krožnico $\mathcal{K}$ polmera $2a$ in središčem v Γ. Na krožnici torej izberemo točko P in konstruiramo simetralo s daljice s krajiščema P in G. Središče te daljice naj bo G'. Točka Q, presečišče daljice s krajiščema Γ in P, je točka iskane elipse $\mathcal{E}$, simetrala s pa tangenta na elipso v točki Q. Ko točka P kroži po krožnici $\mathcal{K}$, točka Q potuje po iskani elipsi. Iz gorišča Γ postavimo na tangento pravokotnico, ki jo seka v točki Γ'. Naj bo $D(\Gamma)$ razdalja med točkama Γ in Γ', $D(G)$ pa razdalja med točkama G in G'. Presečišči C_1 in C_2 krožnic s središčema v G in Γ z ustreznima polmeroma $D(G)$ in $D(\Gamma)$ sta točki Cassinijevega ovala $\mathcal{C}$ (slika 83).



Slika 83: Konstrukcija Cassinijevega ovala.

Oblika Cassinijevega ovala je odvisna od razmerja b/c. V primeru $b = c$, ko je $a = c\sqrt{2}$, dobimo Bernoullijevo lemniskato $\mathcal{L}$. Slika 84 kaže konstrukcijo njenih točk L_1 in L_2.

Beseda *lemniskata* je grškega izvora, ki je nastala iz besede λημνίσκος, kar je pomenilo *volneni trak*, s katerim so v antiki zmagovalcem na glavo privezovali vence. To se je vsekakor spodobilo, da se ne bi osramotili kar z neko navadno vrvico ali srobotom. Lemniskata nas nehote spominja na otok Lemnos, grško Λῆμνος, otok v Egejskem morju. Morda omenjeni trak izvira s tega otoka, ki je bil sicer posvečen bogu Hefajstu, grško Ἥφαιστος, ki je bil pristojen za ogenj in kovaštvo. Beseda *lemniscus* pa je znana tudi v anatomiji človeka.



Slika 84: Konstrukcija lemniskate.

Cassinijev oval najlaže obravnavamo, če postavimo pravokotni kartezični koordinatni sistem tako, da bo njegovo izhodišče v točki O, v središču daljice z goriščema Γ in G. Pozitivna polovica osi x gre skozi G, os y pa je v O pravokotna na os x. Koordinati gorišč sta: $\Gamma(-c, 0)$ in $G(c, 0)$. Poljubna točka Cassinijevega ovala naj bo $T(x, y)$. Takoj dobimo kvadrata obeh radijev:

$$|\Gamma T|^2 = (x + c)^2 + y^2\,, \quad |GT|^2 = (x - c)^2 + y^2.$$

Iz definicije Cassinijevega ovala $|\Gamma T| \cdot |GT| = b^2$ dobimo s preprostim računanjem njegovo implicitno enačbo:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = b^4 - c^4.$$

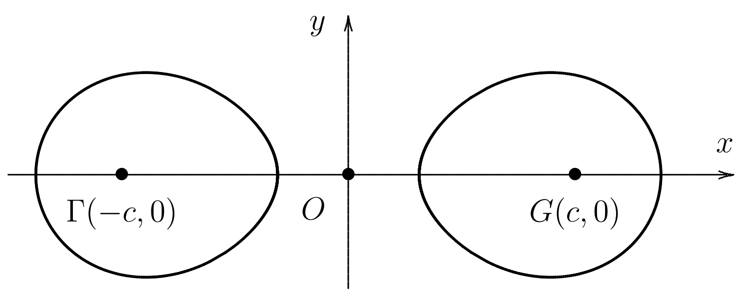
Cassinijev oval je torej algebrska krivulja četrte stopnje. Iz njegove enačbe se vidi, da za b, ki so zelo veliki v primerjavi s c, enačba Cassinijevega ovala prehaja v enačbo

$$(x^2 + y^2)^2 = b^4,$$

ki po korenjenu da

$$x^2 + y^2 = b^2,$$

kar je enačba krožnice. Pri stalnem c torej Cassinijev oval pri večanju parametra b postaja vedno bolj okrogel. Bernoullijevo lemniskato dobimo



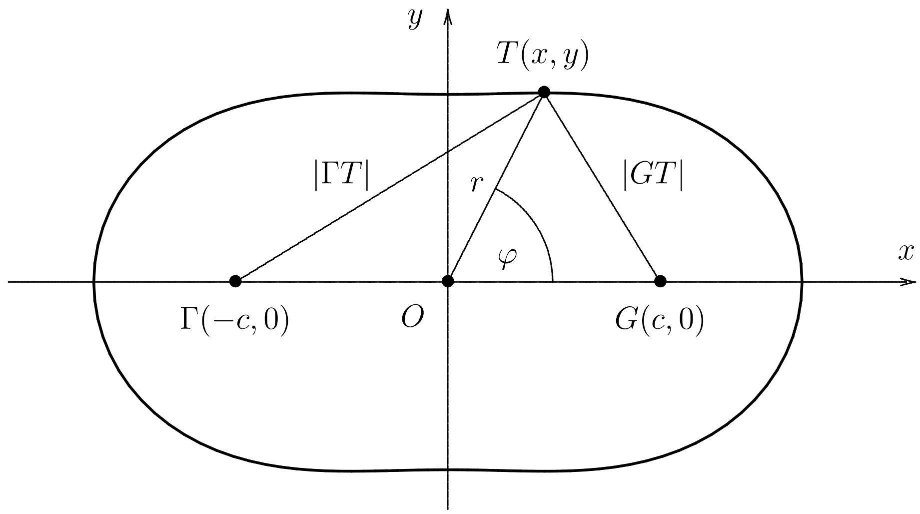
Slika 85: Dvodelni Cassinijev oval.

v primeru $b = c$:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2c^2(x^2 - y^2) = 0.$$

V primeru $b \geq c$ je Cassinijev oval enodelna krivulja, v primeru $b < c$ pa dvodelna, sestavljena iz dveh manjših ovalov, ki obkrožata vsak svoje gorišče (slika 85). Koordinatni osi x in y pa sta vselej simetrali Cassinijevega ovala.

Z uvedbo polarnih koordinat r in φ, pri čemer je pol polarnega sistema v koordinatnem izhodišču O, polarna os pa se prekriva s pozitivno polovico



Slika 86: Cassinijev oval in polarne koordinate.

koordinatne osi x, dobimo z zamenjavo $x = r\cos\varphi$ in $y = \sin\varphi$

$$r^4 - 2c^2 r^2 \cos 2\varphi + (c^4 - b^4) = 0\,,$$

v primeru Bernoullijeve lemniskate pa

$$r^2 = 2c^2\cos(2\varphi).$$

Ploščina S lika, ki ga ta krivulja ograjuje, je:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\pi/4} r^2\,d\varphi = 2\int_0^{\pi/4} 2c^2\cos(2\varphi)\,d\varphi = 2c^2.$$

Računanje dolžine s Bernoullijeve lemniskate poteka takole:

$$s = 4\int_0^{\pi/4}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\varphi = 4c\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\sqrt{\cos(2\varphi)}} = 4c\sqrt{2}\int_0^{\pi/4}\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}}.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke u, ki je s staro φ v zvezi $\sin u = \sqrt{2}\sin\varphi$, dobimo:

$$s = 4c\sqrt{2}\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1 - \frac{1}{2}\sin^2 u}}.$$

Dobljeni integral je po obliki popolni eliptični integral prve vrste v Legendrovi obliki, to je

$$\mathrm{K}(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}\,,$$

kjer je modul k med 0 in 1. Torej imamo za Bernoullijevo lemniskato naslednji izraz za njeno dolžino:

$$s = 4c\mathrm{K}(\sqrt{2}/2).$$

Včasih je ugodno izraziti polarni kot φ s polarnim radijem r. To gre, če je le r povratno enolična funkcija kota φ. Tako dobimo formuli za ločno dolžino in ploščino:

$$s = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \varphi'^2}\, dr\,, \quad S = \frac{1}{2} \int_{r_1}^{r_2} r^2 \varphi'\, dr\,, \quad \varphi' = \frac{d\varphi}{dr}.$$

Pri Bernoullijevi lemniskati dobimo v prvem kvadrantu:

$$\varphi = \frac{1}{2} \mathrm{arc\ cos} \frac{r^2}{2c^2}\,, \quad \varphi' = -\frac{r}{\sqrt{4c^4 - r^4}}.$$

Za ploščino dobimo

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{c\sqrt{2}} \frac{r^3\, dr}{\sqrt{4c^4 - r^4}}$$

in nato z novo integracijsko spremenljivko $u = 4c^4 - r^4$ pridemo do enakega rezultata kot prej:

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{4c^4} \frac{du}{\sqrt{u}} = 2c^2.$$

Za ločno dolžino Bernoullijeve lemniskate pa imamo:

$$s = 4 \int_0^{c\sqrt{2}} \sqrt{1 + \frac{r^4}{4c^4 - r^4}}\, dr = 8c^2 \int_0^{c\sqrt{2}} \frac{dr}{\sqrt{4c^4 - r^4}}.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke u, ki je s staro povezana z relacijo $r^4 = 4c^4 u$, dobimo:

$$s = c\sqrt{2} \int_0^1 u^{-3/4} (1 - u)^{-1/2}\, du\,,$$

kar lahko izrazimo s funkcijama B in Γ (funkciji beta in gama) ali Eulerjevima integraloma. Na fakulteti smo ju obravnavali v drugem letniku pri matematični analizi. Izkažeta se za zelo uporabni za hiter izračun nekaterih pogostih tipov določenih integralov.

Realna funkcija Γ je definirana za pozitiven parameter p z izrazom:

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty x^{p-1}\exp(-x)\,dx.$$

Realna funkcija B pa je definirana za dvojico pozitivnih parametrov p in q takole:

$$\mathrm{B}(p,q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Glavno, kar je treba vedeti o teh dveh funkcijah, je naslednje:

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)\,, \quad \Gamma(n+1) = n! \quad \text{za} \quad n = 0,1,2,\ldots,$$

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}\,, \quad \mathrm{B}(p,q) = \mathrm{B}(q,p)\,, \quad \mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Za vsak p, $0 < p < 1$, pa velja še formula

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin(p\pi)}.$$

Zato lahko izrazimo dolžino s Bernoullijeve lemniskate tudi v obliki

$$s = c\sqrt{2}\mathrm{B}(1/2,1/4) = c\sqrt{2}\frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/4)}{\Gamma(3/4)}$$

oziroma

$$s = c\,\frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}}.$$

Do izraza s popolnim eliptičnim integralom prve vrste v Legendrovi obliki pridemo, če v integral

$$\mathrm{B}(1/4,1/2) = \int_0^1 u^{-3/4}(1-u)^{-1/2}\,du$$

vpeljemo novo integracijsko spremenljivko ϕ z relacijo $u = \cos^4 \phi$:

$$\mathrm{B}(1/4, 1/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \cos^3 \phi \sin \phi \, d\phi}{\cos^3 \phi \sqrt{1 - \cos^4 \phi}} = \int_0^{\pi/2} \frac{4 \sin \phi \, d\phi}{\sqrt{(1 - \cos^2 \phi)(1 + \cos^2 \phi)}}.$$

S preprosto poenostavitvijo dobimo

$$\mathrm{B}(1/4, 1/2) = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{2 - \sin^2 \phi}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 \phi}} = \frac{4}{\sqrt{2}} \mathrm{K}(\sqrt{2}/2).$$

V splošnem primeru Cassinijevega ovala pa v primeru $b \geq c$ dobimo najprej

$$r^2 = c^2 \cos(2\varphi) + \sqrt{c^4 \cos^2(2\varphi) + b^4 - c^4}.$$

Ploščina S lika, ki ga tedaj ograjuje Cassinijev oval, je:

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 \, d\varphi = 2 \int_0^{\pi/2} (c^2 \cos(2\varphi) + \sqrt{c^4 \cos^2(2\varphi) + b^4 - c^4}) \, d\varphi.$$

Integral prvega člena je 0, drugega pa preoblikujemo:

$$S = 2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{b^4 - c^4 \sin^2(2\varphi)} \, d\varphi.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke $u = 2\varphi$ dobimo:

$$S = b^2 \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \frac{c^4}{b^4} \sin^2 u} \, du = 2b^2 \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{c^4}{b^4} \sin^2 u} \, du.$$

Vidimo, da se ploščina izraža s popolnim eliptičnim integralom druge vrste $\mathrm{E}(k)$ v Legendrovi obliki:

$$S = 2b^2 \mathrm{E}(c^2/b^2).$$

Za $0 < k < 1$ je popolni eliptični integral druge vrste definiran z integralom:

$$\mathrm{E}\,(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 u} \, du.$$

Tudi v tem primeru pridemo do ploščine in ločne dolžine tako, da izrazimo φ z r v prvem kvadrantu. Izraz je kar zapleten:

$$\varphi = \frac{1}{2}\text{arc cos}\,\frac{c^4 - b^4 + r^4}{2c^2r^2}.$$

Za nekoliko krajši zapis uvedimo razdalji g in h s formulama:

$$g^2 = b^2 - c^2\,, \quad h^2 = b^2 + c^2.$$

Po nekoliko daljšem računanju najdemo izraz

$$\varphi\,' = -\frac{r^4 + g^2h^2}{r\sqrt{(h^4 - r^4)(r^4 - g^4)}}\,,$$

od koder pa sledita izraza za diferenciala ločne dolžine in ploščine Cassinijevega ovala:

$$ds = \frac{2a^2r^2\,dr}{\sqrt{(h^4 - r^4)(r^4 - g^4)}}\,, \quad dS = \frac{r(r^4 + g^2h^2)\,dr}{2\sqrt{(h^4 - r^4)(r^4 - g^4)}}.$$

Poiskati je treba še meji za r v prvem kvadrantu. Za $\varphi = 0$ je radij r največji, za $\varphi = \pi/2$ pa najmanjši:

$$r_{min} = \sqrt{b^2 - c^2} = g\,, \quad r_{max} = \sqrt{b^2 + c^2} = h.$$

Izraza za ločno dolžino s in ploščino S sta torej:

$$s = 8b^2\int_g^h \frac{r^2\,dr}{\sqrt{(h^4 - r^4)(r^4 - g^4)}}\,, \quad S = 2\int_g^h \frac{r(r^4 + g^2h^2)\,dr}{\sqrt{(h^4 - r^4)(r^4 - g^4)}}.$$

Obeh integralov se lotimo s substitucijo

$$r^4 - g^4 = (h^4 - g^4)\cos^2 u\,,\ h^4 - r^4 = h^4 - g^4 - (h^4 - g^4)\cos^2 u = (h^4 - g^4)\sin^2 u\,,$$

$$r = (g^4 + (h^4 - g^4)\cos^2 u)^{1/4}\,,$$

$$dr = -\frac{1}{2}(h^4 - g^4)(g^4 + (h^4 - g^4)\cos^2 u)^{-3/4}\sin u\cos u\,du.$$

Pri zamenjavi integracijskih spremenljivk dobimo namesto starih integracijskih mej g in h novi meji 0 in $\pi/2$. Krajši račun, v katerem mimogrede kosinuse izrazimo s sinusi, nam da:

$$s = 4b^2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt[4]{h^4 - (h^4 - g^4)\sin^2 u}}\,,$$

$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{(g^2h^2 + (h^4 - (h^4 - g^4)\sin^2 u)\,du}{\sqrt{h^4 - (h^4 - g^4)\sin^2 u}}.$$

Prvi integral spominja na popolni eliptični integral prve vrste v Legendrovi obliki, vendar to ni. Izrazimo ga pa lahko s hipergeometrijsko funkcijo. Integral za ploščino je lažji:

$$S = g^2h^2 \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{h^4 - (h^4 - g^4)\sin^2 u}} + \int_0^{\pi/2} \sqrt{h^4 - (h^4 - g^4)\sin^2 u}\,du.$$

Po vpeljavi števila

$$k = \sqrt{\frac{h^4 - g^4}{h^4}} = \frac{2bc}{b^2 + c^2}$$

lahko zapišemo:

$$s = \frac{4b^2}{h} \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt[4]{1 - k^2\sin^2 u}}\,, \quad S = g^2\mathrm{K}(k) + h^2\mathrm{E}(k).$$

Ploščino raje izrazimo z b in c:

$$S = (b^2 - c^2)\mathrm{K}(k) + (b^2 + c^2)\mathrm{E}(k)\,, \quad k = \frac{2bc}{b^2 + c^2}.$$

Da bi lahko izrazili ločno dolžino z znano funkcijo, se spomnimo na hipergeometrijsko funkcijo

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\ldots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\ldots(\gamma+n-1)} z^n,$$

pri kateri vrsta konvergira absolutno in enakomerno pri pogoju $|z| < 1$. Zapišimo razvoj v binomsko vrsto:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{1 - k^2\sin^2 u}} = (1 - k^2\sin^2 u)^{-1/4} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{-1/4}{n} (-1)^n k^{2n} \sin^{2n} u =$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+1)\ldots(\frac{1}{4}+n-1)}{n!} k^{2n} \sin^{2n} u.$$

Spomnimo se na Wallisov integral (24), ki ga najprej predelamo v

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n} u\, du = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!},$$

da dobimo:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt[4]{1-k^2\sin^2 u}} =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{1}{4}(\frac{1}{4}+1)\ldots(\frac{1}{4}+n-1)\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\ldots(\frac{1}{2}+n-1)}{n!^2} k^{2n}\right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} F(1/4, 1/2; 1; k^2).$$

Tako smo nazadnje našli celotno dolžino Cassinijevega ovala za primer $b \geq c$:

$$s = \frac{2b^2\pi}{\sqrt{b^2+c^2}} F(1/4, 1/2; 1; k^2), \quad k = \frac{2bc}{b^2+c^2}.$$

Ker pa imajo hipergeometrijske funkcije F več svojih identitet, ki jih najdemo v knjigah, ki obravnavajo tako imenovane *specialne funkcije*, lahko dolžino s izrazimo tudi kako drugače, recimo z enakostjo

$$F(\alpha, \beta; 2\beta; \frac{4z}{(1+z)^2}) = (1+z)^{2\alpha} F(\alpha, \alpha + 1/2 - \beta; \beta + 1/2; z^2).$$

Za $z = c^2/b^2$ dobimo:

$$F(1/4, 1/2; 1; k^2) = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{b} F(1/4, 1/4; 1; c^4/b^4).$$

Tako imamo še lepšo obliko:

$$s = 2\pi b\, F(1/4, 1/4; 1; c^4/b^4).$$

V lemniskatnem primeru $a = c$ je $h = c\sqrt{2}$, $g = 0$ in $k^2 = 1$, tako da si pomagamo z enakostjo

$$F(\alpha, \beta; \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha)\Gamma(\gamma - \beta)}\,,$$

ki velja za poljubne realne parametre α, β, γ pri pogojih $\gamma \neq 0, -1, -2, \ldots$ in $\gamma - \alpha - \beta > 0$. Po ne kaj prida težkem računu dobimo:

$$s = 2\pi c\, F(1/4, 1/4; 1; 1) = 2\pi \frac{\Gamma(1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(3/4)\Gamma(3/4)} = 2\pi c \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma^2(3/4)}.$$

S preprosto transformacijo dobljenega izraza najdemo:

$$s = c\,\frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}}.$$

Do enakega rezultata pridemo tudi direktno, to pomeni

$$\int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt[4]{1 - \sin^2 u}} = \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{1}{2}\mathrm{B}(1/4, 1/2)\,,$$

kar nam nazadnje le da pričakovani rezultat

$$s = c\sqrt{2}\mathrm{B}(1/4, 1/2) = c\,\frac{\Gamma^2(1/4)}{\sqrt{\pi}}.$$

Tu se je treba spomniti dveh integralov dveh parametrov, ki sta posplošitvi obeh vrst eliptičnih integralov:

$$\mathrm{K}(a, b) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}\,, \mathrm{E}(a, b) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}\, d\phi.$$

Pri tem sta a in b pozitivna parametra. Z uvedbo komplementarnega kota za novo spremenljivko v integrala takoj vidimo, da velja:

$$\mathrm{K}(a, b) = \mathrm{K}(b, a)\,, \mathrm{E}(a, b) = \mathrm{E}(b, a).$$

Zato brez škode za splošnost lahko vzamemo $0 < a < b$. Primer $a = b$ ni zanimiv, saj takoj najdemo

$$\mathrm{K}(a, a) = \frac{\pi}{2a}\,, \mathrm{E}(a, a) = \frac{a\pi}{2}.$$

V nadaljevanju bomo srečali geometrično sredino $a_1 = \sqrt{ab}$ in aritmetično sredino $b_1 = (a+b)/2$ števil a in b. Vemo, da pri pogoju $a < b$ velja $a < a_1 < b_1 < b$. V oba integrala vstavimo

$$u = u(\phi) = \sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}$$

in preprost račun pokaže, da je

$$\frac{du}{d\phi} = \frac{\sqrt{(u^2 - a^2)(b^2 - u^2)}}{u}$$

in zato:

$$\mathrm{K}(a,b) = \int_a^b \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(b^2 - u^2)}}\,, \mathrm{E}(a,b) = \int_a^b \frac{u^2\,du}{\sqrt{(u^2 - a^2)(b^2 - u^2)}}.$$

Sedaj pa vpeljemo v oba dobljena integrala novo spremenljivko

$$v = v(u) = \frac{1}{2}\left(u + \frac{a_1^2}{u}\right).$$

Njen odvod je

$$\frac{dv}{du} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a_1^2}{u^2}\right)\,,$$

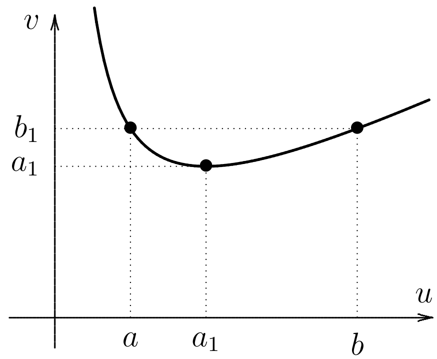
ki je enak 0 pri $u = a_1$, kjer ima v svoj lokalni minimum, ki je tudi enak a_1. Funkcija v pada od $v = b_1$ pri $u = a$ do $v = a_1$ pri $u = a_1$, nato pa narašča spet do $v = b_1$ pri $u = b$, kar je razvidno iz slike 87.

Za $a \geq u \geq a_1$ lahko najdemo funkcijo $u_1 = u_1(v) = v - \sqrt{v^2 - a_1^2}$, za $a_1 \geq u \geq b$ pa funkcijo $u_2 = u_2(v) = v + \sqrt{v^2 - a_1^2}$. z odvodoma

$$\frac{du_1}{dv} = -\frac{u_1(v)}{\sqrt{v^2 - a_1^2}}\,, \quad \frac{du_2}{dv} = \frac{u_2(v)}{\sqrt{v^2 - a_1^2}}.$$

Za u_1 kakor tudi za u_2 pa velja enakost $u^2 + a_1^2 = 2uv$, tako da lahko izrazimo

$$(u^2 - a^2)(b^2 - u^2) = (u^2 + 2b_1 u + a_1^2)(-u^2 + 2b_1 u - a_1^2) = 4u^2(b_1^2 - v^2)\,,$$



Slika 87: Zamenjava integracijske spremenljivke.

Prvoten integral za $\mathrm{K}(a,b)$ sedaj razdelimo na dva dela, najprej v mejah a in a_1, kjer vpeljemo $u = u_1(v)$, nato pa v mejah od a_1 in b, kjer vpeljemo $u = u_2(v)$, in oba delna integrala seštejemo. Dobimo:

$$\mathrm{K}(a,b) = -\frac{1}{2}\int_{b_1}^{a_1} \frac{dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \frac{dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} = \mathrm{K}(a_1,b_1).$$

Dobljeni rezultat lahko dobimo tudi bolj neposredno, če v začetni integral za $\mathrm{K}(a,b)$ vpeljemo novo integracijsko spremenljivko θ z relacijo

$$\sin\phi = \frac{2a\sin\theta}{(a+b)+(a-b)\sin^2\theta}.$$

V vsakem primeru smo naredili tako imenovano *Landenovo transformacijo*, poimenovano po angleškem matematiku Johnu Landenu (1719–1790).

Rezultat $\mathrm{K}(a,b) = \mathrm{K}(a_1,b_1)$ omogoča hiter izračun integrala $\mathrm{K}(a,b)$, ker lahko postopek ponavljamo tako, da izračunamo nova parametra $a_2 = \sqrt{a_1 b_1}$ in $b_2 = (a_1+b_1)/2$, iz teh spet nova a_3 in b_3 in tako naprej. Velja $\mathrm{K}(a,b) = \mathrm{K}(a_1,b_1) = \mathrm{K}(a_2,b_2) = \ldots$ Ker obstaja skupna limita naraščajočega zaporedja $a, a_1, a_2, \ldots$ in padajočega zaporedja $b, b_1, b_2, \ldots$, označimo jo z $\nu(a,b)$, velja:

$$\mathrm{K}(a,b) = \mathrm{K}(a_1,b_1) = \mathrm{K}(a_2,b_2) = \ldots = \frac{\pi}{2\nu(a,b)}.$$

S podobnim računom dobimo

$$\mathrm{E}(a,b) = -\frac{1}{2}\int_{b_1}^{a_1} \frac{u_1(v)^2\,dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} + \frac{1}{2}\int_{a_1}^{b_1} \frac{u_2(v)^2 dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} =$$

$$= \int_{a_1}^{b_1} \frac{(2v^2-a_1^2)\,dv}{\sqrt{(v^2-a_1^2)(b_1^2-v^2)}} = 2\mathrm{E}(a_1,b_1) - a_1^2\mathrm{K}(a_1,b_1).$$

Dobljeni rezultat

$$\mathrm{E}(a,b) = 2\mathrm{E}(a_1,b_1) - a_1^2\mathrm{K}(a_1,b_1)$$

pa lahko z večkratno uporabo izkoristimo za numeričen izračun integrala $\mathrm{E}(a,b)$.

Najprej za vsak k, $0<k<1$, očitno veljata enakosti

$$\mathrm{K}(k) = \mathrm{K}(\sqrt{1-k^2},1) \quad \text{in} \quad \mathrm{E}(k) = \mathrm{E}(\sqrt{1-k^2},1).$$

Iz prve dobimo:

$$\mathrm{K}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}) = \mathrm{K}(\frac{1-k}{1+k},1) = (1+k)\mathrm{K}(1-k,1+k) =$$

$$= (1+k)\mathrm{K}(\sqrt{1-k^2},1) = (1+k)\mathrm{K}(k).$$

Nato pa izpeljemo podobno še:

$$(1+k)\mathrm{E}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}) = (1+k)\mathrm{E}(\frac{1-k}{1+k},1) =$$

$$= \mathrm{E}(1-k,1+k) = 2\mathrm{E}(\sqrt{1-k^2},1) - (1-k^2)\mathrm{K}(\sqrt{1-k^2},1) =$$

$$= 2\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\mathrm{K}(k).$$

Tako smo dobili potrebni povezavi:

$$\mathrm{K}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}) = (1+k)\mathrm{K}(k) \quad \text{in} \quad (1+k)\mathrm{E}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}) = 2\mathrm{E}(k) - (1-k^2)\mathrm{K}(k).$$

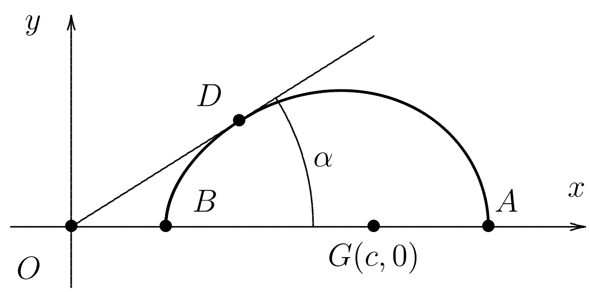
Kako je s ploščino? Z zgornjima formulama takoj izračunamo:

$$g^2\,\mathrm{K}(\frac{2bc}{b^2+c^2}) = \frac{b^4-c^4}{b^2}\mathrm{K}(\frac{c^2}{b^2})\,,h^2\,\mathrm{E}(\frac{2bc}{b^2+c^2}) = 2b^2\mathrm{E}(\frac{c^2}{b^2}) - \frac{b^4-c^4}{b^2}\mathrm{K}(\frac{c^2}{b^2}).$$

Nazadnje spet pridemo do starega rezultata:

$$S = 2b^2 \mathrm{E}(c^2/b^2).$$

Kaj pa je s ploščino Cassinijevega ovala v primeru $b < c$? Očitno je dovolj, da izračunamo ploščino $S_1/2$ zgornje polovice desnega ovala (slika 88).



Slika 88: Meja za polarni kot Cassinijevega ovala v primeru $b < c$.

V tem primeru bomo določili kot α, pri čemer je $0 < \alpha < \pi/4$, tako da velja: $b^2 = c^2 \sin(2\alpha)$. Potem je točka D s polarnim kotom α in polarnim radijem $c\sqrt{\cos(2\alpha)}$ na krivulji dotikališče za tangento skozi koordinatno izhodišče O in točke na loku od temena $A(\sqrt{c^2 + b^2}, 0)$ do dotikališča D imajo polarni radij r_2, ki je dan z enačbo

$$r_2^2 = c^2(\cos(2\varphi) + \sqrt{\sin^2(2\alpha) - \sin^2(2\varphi)}\,),$$

medtem ko imajo točke na loku krivulje med temenom $B(\sqrt{c^2 - b^2}, 0)$ polarni radij r_1, ki je dan z enačbo:

$$r_1^2 = c^2(\cos(2\varphi) - \sqrt{\sin^2(2\alpha) - \sin^2(2\varphi)}).$$

Ploščina desnega ovala je torej očitno:

$$S_1 = \int_0^\alpha r_2^2\, d\varphi - \int_0^\alpha r_1^2\, d\varphi = 2c^2 \int_0^\alpha \sqrt{\sin^2(2\alpha) - \sin^2(2\varphi)}\, d\varphi.$$

Sedaj v dobljeni integral uvedemo novo integracijsko spremenljivko u z relacijo $\sin(2\varphi) = \sin(2\alpha)\sin u = k\sin u$, pri čemer je $k = \sin(2\alpha) = b^2/c^2$ in $0 < k < 1$. Novi meji sta potem 0 in $\pi/2$ in

$$d\varphi = \frac{k\cos u\, du}{2\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\,, \qquad \sqrt{\sin^2(2\alpha)-\sin^2(2\varphi)} = k\cos u.$$

Torej je

$$S_1 = c^2\int_0^{\pi/2}\frac{k^2\cos^2 u\, du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}} = c^2\int_0^{\pi/2}\frac{((1-k^2\sin^2 u)-(1-k^2))\, du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}$$

Tako smo dospeli do izraza

$$S_1 = c^2\left(\int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2 u}\, du - (1-k^2)\int_0^{\pi/2}\frac{du}{\sqrt{1-k^2\sin^2 u}}\right),$$

tako da nazadnje lahko brez skrbi zapišemo skupno ploščino S obeh ovalov v obliki:

$$S = 2c^2(\mathrm{E}(k)-(1-k^2)\mathrm{K}(k))\,, \quad k = \frac{b^2}{c^2}.$$

Z rezultatom še nismo povsem zadovoljni, na srečo pa ga lahko izrazimo tudi drugače, ker velja:

$$2\mathrm{E}(k)-2(1-k^2)\mathrm{K}(k) = (2\mathrm{E}(k)-(1-k^2)\mathrm{K}(k)) - (1-k)(1+k)\mathrm{K}(k) =$$

$$= (1+k)\mathrm{E}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}) - (1-k)\mathrm{K}(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}).$$

Ker je

$$\frac{2\sqrt{k}}{1+k} = \frac{2b/c}{1+b^2/c^2} = \frac{2bc}{b^2+c^2}\,,$$

dobimo nazadnje izraz za ploščino:

$$S = (b^2-c^2)\mathrm{K}(k) + (b^2+c^2)\mathrm{E}(k)\,, \quad k = \frac{2bc}{b^2+c^2}.$$

Po obliki je enak izrazu za primer $b \geq c$, toda v primeru $b < c$ je prvi člen negativen.

Kako pa je z ločno dolžino v primeru $b < c$? Očitno je treba posebej zapisati dolžino loka od temena A do dotikališča D in od temena B do D. Navsezadnje pa dobimo

$$s = \frac{2b^2\pi}{\sqrt{b^2+c^2}}\, F(1/4, 1/2; 1; k^2)\,, \quad k = \frac{2bc}{b^2+c^2}.$$

Z enako transformacijo kot v primeru $b \geq c$ pa dobimo tudi:

$$s = \frac{2\pi b^2}{c}\, F(1/4, 1/4; 1; b^4/c^4).$$

Pri izrazu za dolžino Cassinijevega ovala nam ni čisto všeč, da smo obstali pri četrtem korenu v integralu, ki nas je zapeljal v zapleteno hipergeometrijsko funkcijo F. Lepše bi bilo, pa tudi udobneje za numerično računanje, če bi imeli kvadratni koren v integralu. To je obvladal že A. G. Greenhill leta 1892, ko je bil moj ded Ivan star okoli 18 let. V primeru $b \geq c$ smo prišli do integrala

$$s = 8b^2 \int_g^h \frac{r^2\, dr}{\sqrt{(h^4-r^4)(r^4-g^4)}}\,, \quad g^2 = b^2 - c^2\,, \quad h^2 = b^2 + c^2.$$

Podkorensko funkcijo zapišimo v obliki

$$(h^4-r^4)(r^4-g^4) = (g^2+h^2)^2 r^4 - (r^4+g^2h^2)^2 = (g^2+h^2)^2 r^4 \left(1 - \frac{(r^4+g^2h^2)^2}{(g^2+h^2)^2 r^4}\right).$$

Potem pa pazljivo vpeljemo v integral novo spremenljivko

$$y = \frac{r^4+g^2h^2}{(g^2+h^2)r^2} = \frac{1}{2b^2}\left(r^2 + \frac{g^2h^2}{r^2}\right).$$

Ta zavzame najmanjšo vrednost, ko je $r^2 = g^2h^2/r^2$, to je pri $r = \sqrt{gh}$.

Očitno lahko izrazimo:

$$\frac{r^2}{\sqrt{(h^4-r^4)(r^4-g^4)}} = \frac{1}{2b^2\sqrt{1-y^2}}.$$

Ko spremenljivka r raste od g proti h, najprej y pada od 1 do $r = gh/b^2$, nato pa narašča proti 1.

Zveza med r in y ni povratno enolična. Brez težav najdemo

$$r^2 = b^2 y \pm \sqrt{(b^2 y + gh)(b^2 y - gh)}\,,$$

kar se pa na vso srečo da zapisati v obliki

$$r^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{b^2 y + gh} \pm \sqrt{b^2 y - gh}\right)^2.$$

Sedaj vzamemo funkciji

$$r_-(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{b^2 y + gh} - \sqrt{b^2 y - gh}\right), \quad g \le r \le \sqrt{gh}\,,$$

$$r_+(y) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{b^2 y + gh} + \sqrt{b^2 y - gh}\right), \quad \sqrt{gh} \le r \le h.$$

Torej se dolžina s izraža tako:

$$s = 4\left(\int_1^{gh/b^2} r'_-(y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} + \int_{gh/b^2}^1 r'_+(y)\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) =$$

$$= 4\left(\int_{gh/b^2}^1 (r'_+(y) - r'_-(y))\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = 4\left(\int_{gh/b^2}^1 (r_+(y) - r_-(y))'\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right).$$

Ker je

$$r_+(y) - r_-(y) = \frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{b^2 y - gh}\,, \quad (r_+(y) - r_-(y))' = \frac{b^2}{\sqrt{2}\sqrt{b^2 y - gh}}\,,$$

lahko zapišemo:

$$s = \frac{4b^2}{\sqrt{2}}\int_{gh/b^2}^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(b^2 y - gh)}}.$$

Integracijsko spremenljivko y bomo zamenjali s spremenljivko u z relacijo

$$\sin^2 u = \frac{b^2(1-y)}{b^2 - gh}.$$

Iz nje izrazimo:

$$1 - y = \frac{b^2 - gh}{b^2}\sin^2 u\,, 1 + y = 2 - \frac{b^2 - gh}{b^2}\sin^2 u\,, b^2 y - gh = (b^2 - gh)\cos^2 u\,,$$

$$dy = -\frac{2(b^2 - gh)}{b^2} \sin u \cos u \, du.$$

Ko vstavimo dobljeni izraz v integral, dobimo po vsem poenostavljanju:

$$s = 4b \int_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}\,, \quad k^2 = \frac{b^2 - gh}{2b^2}.$$

Ker pa je

$$k^2 = \frac{b^2 - gh}{2b^2} = \frac{2b^2 - 2gh}{4b^2} = \frac{g^2 + h^2 - 2gh}{4b^2} = \frac{(h-g)^2}{4b^2}\,,$$

lahko celotno dolžino Cassinijevega ovala v primeru $b \geq c$ izrazimo s popolnim eliptičnim integralom prve vrste v obliki:

$$s = 4b\mathrm{K}(k)\,, \quad k = \frac{\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{b^2 - c^2}}{2b}.$$

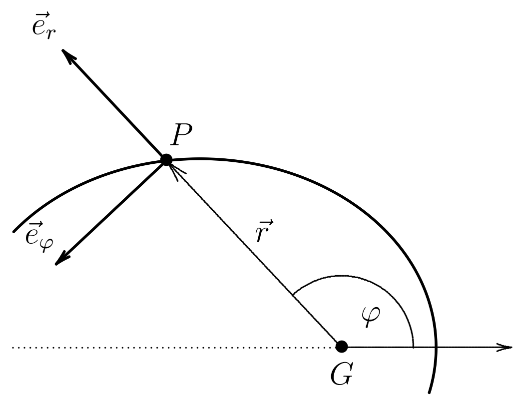
Ne pozabimo: zgornji rezultat velja, če je $b \geq c$. V primeru $b < c$ dobimo podoben rezultat kot zgoraj:

$$s = \frac{4b^2}{c}\mathrm{K}(k)\,, \quad k = \frac{\sqrt{b^2 + c^2} - \sqrt{c^2 - b^2}}{2c}.$$

Kot vidimo, v nobenem primeru račun ni preprost in zahteva temeljito analizo. Treba se je enostavno usesti, vzeti v roke svinčnik in papir in izpeljati račun. Samo z gledanjem zapisanega, kakor bi se včasih marsikdo rad naučil matematiko, se ni moč zanašati na svoje znanje. Pa tako lepo smo vpeljali Cassinijeve ovale!

14 Keplerjevi zakoni

Vrnimo se k gibanju točkastega telesa po elipsi. Ker je v ravnini gibanja za njegov opis treba imeti vektorsko bazo, vpeljimo v tej ravnini še enotski vektor $\vec{e}_\varphi$, pravokotno na vektor $\vec{e}_r$ v smeri naraščanja polarnega kota (slika 89). Če je $\vec{k}$ enotski vektor normale na ravnino gibanja in usklajen z naraščanjem polarnega kota, potem je $\vec{k} \times \vec{e}_r = \vec{e}_\varphi$ in $\vec{k} \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r$.



Slika 89: Lokalna vektorska baza na tirnici.

Enotska vektorja $\vec{e}_r$ in $\vec{e}_\varphi$ s časom in kotom spreminjata svoji smeri. Ker je $\vec{e}_r\vec{e}_r = 1$, dobimo z odvajanjem: $\vec{e}_r\vec{e}_r\,' = 0$. Zato ima vektor $\vec{e}_r\,'$ isto smer kot vektor $\vec{e}_\varphi$, to se pravi, da pri nekem pozitivnem skalarju λ velja: $\vec{e}_r\,' = \lambda\vec{e}_\varphi$. Ko kot φ raste, recimo od α do β, se vektor $\vec{e}_r$ zasuka za kot $\Delta\varphi = \beta - \alpha$ in pri tem njegovo krajišče opiše krožni lok $\ell = \alpha - \beta$ (slika 90). Po drugi strani pa je ta lok enak

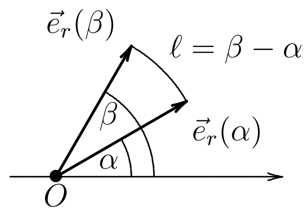
$$\ell = \int_\alpha^\beta |\vec{e}_r\,'(\varphi)|\, d\varphi = \lambda \int_\alpha^\beta |\vec{e}_\varphi(\varphi)|\, d\varphi = \lambda(\beta - \alpha) = \lambda\ell\,,$$

tako da je iz tega $\lambda = 1$ in s tem $\vec{e}_r\,' = \vec{e}_\varphi$. Za $\vec{e}_\varphi\,'$ pa lahko računamo tako:

$$\vec{e}_\varphi\,' = (\vec{k} \times \vec{e}_r)' = \vec{k} \times \vec{e}_r\,' = \vec{k} \times \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_r.$$

Torej velja

$$\vec{e}_r\,' = \vec{e}_\varphi\,, \quad \vec{e}_\varphi\,' = -\vec{e}_r.$$



Slika 90: Odvod enotskega vektorja.

Iz tega dobimo še:

$$\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\,, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\,\vec{e}_r.$$

Gibanje točke P torej opisuje vektorska funkcija

$$\vec{r} = \vec{r}\,(\varphi) = r(\varphi)\,\vec{e}_r.$$

Za njeno hitrost $\vec{v}$ hitro najdemo:

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi.$$

Vidimo, da ima hitrost dve komponenti: radialno $v_r = \dot{r} = r'\,\dot{\varphi}$ v smeri vektorja $\vec{e}_r$ in azimutalno $v_\varphi = r\dot{\varphi}$ v smeri vektorja $\vec{e}_\varphi$. Podobno izračunamo pospešek $\vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}}$ točke P:

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{r}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + r\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - r\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_r.$$

Po preureditvi členov imamo:

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi.$$

Tudi pospešek točke P ima dve komponenti: radialno $a_r = \ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2$ in azimutalno $a_\varphi = r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi}$.

Obravnavajmo sedaj ravninsko gibanje točke P okrog negibnega privlačnega središča v točki G. Ta naj deluje samo radialno na maso m v točki P na razdalji r s silo

$$\vec{F} = -F(r,\varphi)\,\vec{e}_r.$$

Kot bomo kmalu videli, $\vec{F}$ nima azimutalne komponente, če predpostavimo, da velja drugi Keplerjev zakon, ki pravi, da je ploščinska hitrost konstantna, to se pravi, da vektor $\overrightarrow{GP}$ v enakih časih opiše enake ploščine. Pri tem je F neka pozitivna funkcija radija r in kota φ. To naj bo tudi edina zunanja sila, ki deluje na maso m. Po Newtonovem zakonu velja:

$$m\,\ddot{\vec{r}} = -F(r,\varphi)\,\vec{e}_r.$$

Torej

$$(\ddot{r} - r\,\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_r + (r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi})\,\vec{e}_\varphi = -\frac{1}{m}\,F(r,\varphi)\,\vec{e}_r.$$

Vidimo, da mora veljati diferencialna enačba:

$$r\,\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\,\dot{\varphi} = 0.$$

Da bi si jo lahko geometrijsko razlagali, jo najprej pomnožimo z $r/2$, tako da dobimo enačbo

$$\frac{1}{2}\,r^2\,\ddot{\varphi} + r\,\dot{r}\,\dot{\varphi} = 0\,,$$

ki jo prepišemo v pripravnejšo obliko

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\varphi}\right) = 0\,,$$

kar pomeni, da je izraz

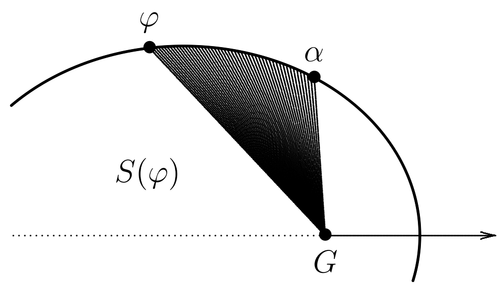
$$\frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\varphi}$$

konstanten, s časom t se ne spreminja. Zaradi udobnejšega računa označimo konstanto s $C/2$:

$$\frac{1}{2}\,r^2\,\dot{\varphi} = \frac{C}{2}.$$

Iz poglavja o uporabi določenega integrala je znano, da se ploščina S krivočrtnega izseka (slika 91), ki je omejen s poltrakoma s polarnim kotom α in φ ter krivuljo $r = r(\varphi)$ izraža s formulo

$$S(\varphi,\alpha) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\varphi r^2(u)\,du.$$



Slika 91: Krivočrtni izsek.

Odvod $\dot{S}$ pa pove, kako se s časom spreminja ploščina krivočrtnega izseka, ki ga popiše vektor $\overrightarrow{GP}$. Dobimo:

$$\dot{S} = \frac{1}{2}\, r^2\, \dot{\varphi}.$$

Konstantnost ploščinske hitrosti, kar je v bistvu drugi Keplerjev zakon, je v danih razmerah potrebni in zadostni pogoj za to, da ima sila privlačnega središča samo radialno komponento.

Ugotovili smo torej, da se točka P giblje tako, da je ploščinska hitrost konstantna. To pomeni, da se lahko v izrazu za radialno komponento pospeška znebimo trenutne kotne hitrosti $\dot{\varphi} = C/r^2$. Najprej imamo

$$\dot{r} = r'\, \dot{\varphi} = r'\, \frac{C}{r^2} = -C\, \frac{d(1/r)}{d\varphi}\,,$$

nato pa še

$$\ddot{r} = -C\, \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}\, \dot{\varphi} = -\frac{C^2}{r^2}\, \frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2}.$$

Tako lahko izrazimo radialno komponento pospeška v naslednji obliki:

$$a_r = \ddot{r} - r\, \dot{\varphi}^2 = -\frac{C^2}{r^2}\, \frac{d^2(1/r)}{d\varphi^2} - r\frac{C^2}{r^4} = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} + \frac{1}{r}\right).$$

Podobno izrazimo kvadrat hitrosti:

$$v^2 = (\dot{r})^2 + r^2(\dot{\varphi})^2 = C^2\left(\left(\frac{d(1/r)}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right).$$

Za stožnico

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}$$

dobimo

$$v^2 = \frac{C^2}{p^2}(\varepsilon^2 \sin^2\varphi + (1 + \varepsilon\cos\varphi)^2) = \frac{C^2}{p^2}(1 + 2\varepsilon\cos\varphi + \varepsilon^2).$$

Ko v^2 izrazimo z radijem r, dobimo:

$$v^2 = \frac{C^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1-\varepsilon^2}{p}\right).$$

Nazadnje lahko rezultat izrazimo tako:

$$v^2 = \frac{C^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \delta\,\frac{1}{a}\right) \qquad \left\{\begin{array}{rl} \delta = 1, & \text{elipsa,} \\ \delta = 0, & \text{parabola,} \\ \delta = -1, & \text{hiperbola.} \end{array}\right.$$

Enačba za polarni radij r torej sledi iz prej zapisanega Newtonovega zakona:

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{r^2}{mC^2}\,F(r,\varphi).$$

To je Binetova diferencialna enačba (Jacques Binet, 1786–1856). Če se točka P giblje po stožnici $r = p/(1 + \varepsilon\cos\varphi)$ oziroma $1/r = (1 + \varepsilon\cos\varphi)/p$, mora veljati:

$$\frac{1}{p} = \frac{r^2}{mC^2}\,F(r,\varphi).$$

Iz tega dobimo obliko funkcije F:

$$F(r,\varphi) = F(r) = \frac{mC^2}{pr^2}.$$

Pri eliptičnem gibanju vektor $\overrightarrow{GP}$ opiše v eni obhodni dobi T ravno vso elipso. Zato zaradi konstantne ploščinske hitrosti, kar smo zapisali v obliki $\dot{S} = C/2$, dobimo:

$$\pi ab = CT/2.$$

To pomeni, da smo našli konstanto C:

$$C = \frac{2\pi ab}{T}.$$

Upoštevajmo še tretji Keplerjev zakon pri eliptičnem gibanju, to se pravi

$$\frac{a^3}{T^2} = K,$$

kjer je K konstanta, neodvisna od mase m, ampak le od privlačnega središča. S preprostim računom dobimo:

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \cdot \frac{b^2}{a} = 4\pi^2 pK\,,$$

To pomeni, da lahko zapišemo

$$F(r) = \frac{mC^2}{pr^2} = \frac{4\pi^2 mK}{r^2}.$$

Ker je v privlačnem središču masa M, potem je konstanta K odvisna od M. Sedaj sklepamo tako: če masa M privlači maso m s silo F, potem po tretjem Newtonovem zakonu tudi m privlači M z enako, toda nasprotno usmerjeno silo. Ker morajo biti naravni zakoni enake oblike, mora veljati:

$$\frac{4\pi^2 mK(M)}{r^2} = \frac{4\pi^2 MK(m)}{r^2}\,,$$

kar pomeni:

$$m/M = K(m)/K(M) \quad \text{ali} \quad \begin{vmatrix} m & M \\ K(m) & K(M) \end{vmatrix} = 0.$$

To pa gre le, če sta vrstici determinante linearno odvisni: $K(m) = km$, $K(M) = kM$, kjer je k neka konstanta. Tako smo iz Keplerjevih zakonov našli obliko splošnega gravitacijskega zakona:

$$\vec{F} = -\frac{4\pi^2 kmM}{r^2}\,\vec{e}_r.$$

Če vpeljemo splošno gravitacijsko konstanto $\kappa = 4\pi^2 k$, imamo znano obliko:

$$\vec{F} = -\frac{\kappa m M}{r^2}\,\vec{e}_r.$$

Če je gibanje okoli negibnega privlačnega središča v točki G ravninsko in velja zanj drugi Keplerjev zakon, deluje to središče na točkasto telo s silo samo v radialni smeri. Velja pa tudi obratno: če središče deluje na točkasto telo radialno, je njeno gibanje ravninsko in zanjo velja drugi Keplerjev zakon. Iz oblike sile privlaka

$$\vec{F} = -F\,\vec{e}_r\,,$$

kjer zapišemo $\vec{e}_r = \vec{r}/r$, in Newtonovega zakona

$$m\ddot{\vec{r}} = -\frac{F}{r}\,\vec{r}$$

dobimo enačbo

$$\vec{r}\times\ddot{\vec{r}} = \vec{0}$$

oziroma

$$\frac{d}{dt}(\vec{r}\times\dot{\vec{r}}) = \vec{0}.$$

To pomeni, da je

$$\vec{r}\times\dot{\vec{r}} = \vec{C}\,,$$

kjer je $\vec{C}$ konstanten vektor. Ker velja $\vec{C}\vec{r} = 0$, se gibanje masne točke dogaja v ravnini, ki poteka skozi točko G in je pravokotna na vektor $\vec{C}$. Vektor $\vec{r}\times\dot{\vec{r}}$ pa je ravno dvakratna ploščinska hitrost.

Poglejmo si še, kako rešujemo Binetovo diferencialno enačbo v primeru negibnega privlačnega središča, ko je

$$F(r) = \frac{\kappa m M}{r^2}.$$

$$\frac{d^2(\frac{1}{r})}{d\varphi^2} + \frac{1}{r} = \frac{r^2}{mC^2}\,\frac{\kappa m M}{r^2} = \frac{\kappa M}{C^2}.$$

Za njeno splošno rešitev dobimo

$$\frac{1}{r} = C_1 \cos(\varphi + \alpha) + \frac{\kappa M}{C^2}\,,$$

kjer sta C_1 in α integracijski konstanti. če vpeljemo $1/p = \kappa M/C^2$, dobimo

$$r = \frac{1}{\frac{1}{p} + C_1 \cos(\varphi + \alpha)} = \frac{p}{1 + pC_1 \cos(\varphi + \alpha)}\,,$$

kar je enačba stožnice s parametrom p in numerično ekscentričnostjo $\varepsilon = pC_1$.

Denimo, da ima točkasto telo v točki A v razdalji R od privlačnega središča G hitrost v_0 v pozitivni matematični smeri, pravokotno na vektor $\overrightarrow{GP}$. Tedaj skozi A postavimo polarno os s polom v G in merimo polarni kot φ tako kot doslej. Potem lahko izberemo $\alpha = 0$ in imamo:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi}.$$

Iz znane formule najdemo hitrost telesa v poljubni točki P pri polarnem kotu:

$$v^2 = \frac{C^2}{p}\left(\frac{2}{r} - \frac{1-\varepsilon^2}{p}\right).$$

Pri $\varphi = 0$ je $1/r = 1/R = (1+\varepsilon)/p$ in

$$v_0^2 = \frac{C^2}{p}\left(\frac{2+2\varepsilon}{p} - \frac{1-\varepsilon^2}{p}\right) = \frac{C^2}{p^2}\,(1+\varepsilon)^2.$$

Tako imamo enačbi

$$\frac{p}{1+\varepsilon} = R \quad \text{in} \quad \frac{C(1+\varepsilon)}{p} = v_0.$$

če ju zmnožimo in izrazimo ε, dobimo pričakovani rezultat:

$$C = Rv_0\,,\ \varepsilon = \frac{p}{R} - 1.$$

Ugodno je vpeljati pospešek prostega pada g na razdalji R od točke G takole: $mg = \kappa m M/R^2$, tako da je $\kappa M = gR^2$. Potem lahko izrazimo parameter p v obliki:

$$p = \frac{C^2}{\kappa M} = \frac{R^2 v_0^2}{gR^2} = \frac{v_0^2}{g}.$$

Ekscentričnost iskane stožnice je torej

$$\varepsilon = \frac{v_0^2}{Rg} - 1.$$

Ugodno je vpeljati hitrosti $v_1 = \sqrt{Rg}$ in $v_2 = \sqrt{2Rg}$. Ko govorimo o majhnih telesih, izstreljenih tangencialno z Zemlje, sta to prva in druga kozmična hitrost. Obravnavajmo le primer $v_0 \geq v_1$.

Če je $v_0 = v_1$, dobimo $\varepsilon = 0$, $p = R$ in $r = p$. Tir gibanja je krožnica s središčem v točki G.

Če je $v_1 < v_0 < v_2$, je $0 < \varepsilon < 1$ in tir gibanja je elipsa z goriščem v G.

Če je $v_0 = v_2$, je $\varepsilon = 1$ in tir gibanja je parabola z goriščem v točki G.

Če je $v_0 > v_2$, je $\varepsilon > 1$ in tir gibanja je hiperbola z goriščem v točki G.

Vrnimo se sedaj k eliptičnemu gibanju točkastega telesa okoli privlačnega središča. Radi bi našli povezavo med polarnim kotom φ ali pravo anomalijo in časom t, to je $\varphi = \varphi(t)$. Ploščinsko hitrost $\dot{S}$ lahko izrazimo v obliki:

$$\dot{S} = \frac{dS}{dt} = \frac{dS}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{2}.$$

Ker je

$$\frac{dS}{d\varphi} = \frac{p^2}{2} \cdot \frac{1}{(1 + \varepsilon \cos\varphi)^2}\,,$$

dobimo najprej diferencialno enačbo

$$\frac{d\varphi}{(1 + \varepsilon \cos\varphi)^2} = \frac{C}{p^2}\, dt.$$

V trenutku $t = t_0$ naj bo $\varphi = 0$, v poljubnem trenutku t pa $\varphi = \varphi(t)$. V primeru elipse imamo periodično gibanje in zato je dovolj najprej reševati problem na časovnem intervalu $(-T/2, T/2)$, kar ustreza kotom φ na intervalu $(-\pi, \pi)$. Z integracijo pri teh pogojih dobimo:

$$\frac{2}{p^2} S(\varphi, 0) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon \cos\phi)^2} = \frac{C}{p^2} \int_{t_0}^{t} d\tau = \frac{C}{p^2}(t - t_0).$$

Vso pozornost je torej treba posvetiti integralu

$$J(\varphi,\varepsilon)=\int_0^{\varphi}\frac{d\phi}{(1+\varepsilon\cos\phi)^2}\,,\quad 0<\varepsilon<1.$$

Standarden, šolski postopek računanja integrala $J(\varphi,\varepsilon)$ poteka prek nekaj zamenjav integracijske spremenljivke. Najprej uvedemo vanj, tako kot smo naredili pri računanju povprečja $\bar{r}$, novo integracijsko spremenljivko $u=\tan(\phi/2)$ in dobimo:

$$J(\varphi,\varepsilon)=\int_0^{U}\frac{2\,du}{(1+u^2)\left(1+\varepsilon\dfrac{1-u^2}{1+u^2}\right)^2}=2\int_0^{U}\frac{(1+u^2)du}{((1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)u^2)^2}\,,$$

pri čemer je $U=\tan(\varphi/2)$. Substitucija $u=\tan(\phi/2)$ je ugodna tudi zato, ker nam interval $(-\pi,\pi)$ dolžine 2π bijektivno preslika na realno os.

Substitucija $\sqrt{1-\varepsilon}\,u=\sqrt{1+\varepsilon}\,w$ prevede imenovalec pod integralskim znakom na vzorno, kanonsko obliko. Dobimo

$$J(\varphi,\varepsilon)=\frac{2}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{1}{1+\varepsilon}\int_0^{W}\frac{dw}{(1+w^2)^2}+\frac{1}{1-\varepsilon}\int_0^{W}\frac{w^2\,dw}{(1+w^2)^2}\right)\,,$$

kjer je W dan z enačbo $\sqrt{1-\varepsilon}\,U=\sqrt{1+\varepsilon}\,W$. V nova integrala sedaj vpeljemo novo spremenljivko η s predpisom $w=\tan(\eta/2)$ in dobimo:

$$\int_0^{W}\frac{dw}{(1+w^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{E}\cos^2(\eta/2)\,d\eta=\frac{1}{4}(E+\sin E)$$

in

$$\int_0^{W}\frac{w^2\,dw}{(1+w^2)^2}=\frac{1}{2}\int_0^{E}\sin^2(\eta/2)\,d\eta=\frac{1}{4}(E-\sin E)\,,$$

kjer je zgornja integracijska meja E določena z enačbo $\tan(E/2)=W$. Torej lahko nazadnje izrazimo s spremenljivko E:

$$J(\varphi,\varepsilon)=\frac{1}{2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\left(\frac{E+\sin E}{1+\varepsilon}+\frac{E-\sin E}{1-\varepsilon}\right)=\frac{1}{\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}(E-\varepsilon\sin E).$$

Tako smo našli, kar smo iskali:

$$E - \varepsilon \sin E = \frac{C\sqrt{(1-\varepsilon^2)^3}}{p^2}(t - t_0)$$

ali lepše:

$$E - \varepsilon \sin E = \frac{C}{ab}(t - t_0) = \frac{2\pi}{T}(t - t_0) = \bar{\omega}(t - t_0).$$

To je Keplerjeva enačba, ki povezuje ekscentrično anomalijo $E = E(t)$ in srednjo anomalijo $\mu = \mu(t) = \bar{\omega}(t - t_0)$, kjer smo vpeljali povprečno kotno hitrost $\bar{\omega} = 2\pi/T$ eliptičnega gibanja okoli privlačnega središča. Ko izrazimo pravo anomalijo $\varphi = \varphi(t)$ z ekscentrično anomalijo $E = E(t)$, dobimo:

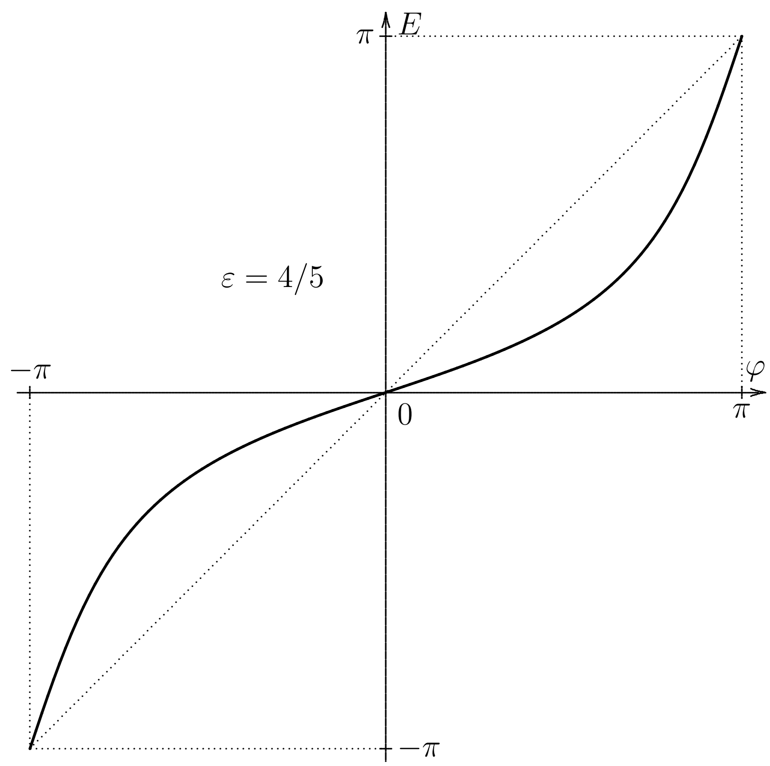
$$\tan\frac{E}{2} = \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}}\tan\frac{\varphi}{2}. \tag{26}$$

Za $\varphi = 0$ je tudi $E = 0$. Ko φ narašča proti π, se isto dogaja tudi z E (slika 92). Prav tako se spušča E proti $-\pi$, ko φ gre proti $-\pi$. Zato lahko z enačbo (26) ekscentrično anomalijo E zvezno razširimo na poljuben kot. To naredimo tako: če je n poljubno celo število in $(2n-1)\pi \leq \varphi \leq (2n+1)\pi$ oziroma $(2n-1)\pi \leq E \leq (2n+1)\pi$ potem izberemo tisti rešitvi E oziroma φ enačbe (26), ki ležita na istem intervalu.

Da dobimo položaj točke P na elipsi v danem trenutku t, je zato treba najprej kakorkoli rešiti Keplerjevo enačbo $E - \varepsilon \sin E = \mu$, nato pa rešitev E vstaviti v enačbo (26) in izračunati kot φ. Keplerjeva enačba ima pri vsakem danem μ_0 natanko eno rešitev E_0, kar se lepo vidi na ustreznem grafu. Leva stran Keplerjeve enačbe je namreč na vsej realni osi naraščajoča funkcija spremenljivke E. S tem pa je točka P na elipsi natanko določena.

Keplerjevo enačbo poskušamo reševati z metodo iteracije, z iterativno metodo, s kakršno smo že računali sinus ene kotne stopinje in kvadratne korene pozitivnih števil.

Rešitev E Keplerjeve enačbe se da sicer zapisati v obliki vrste, lahko pa jo pri danem μ_0 njeno rešitev najdemo z numeričnimi metodami. Če jo

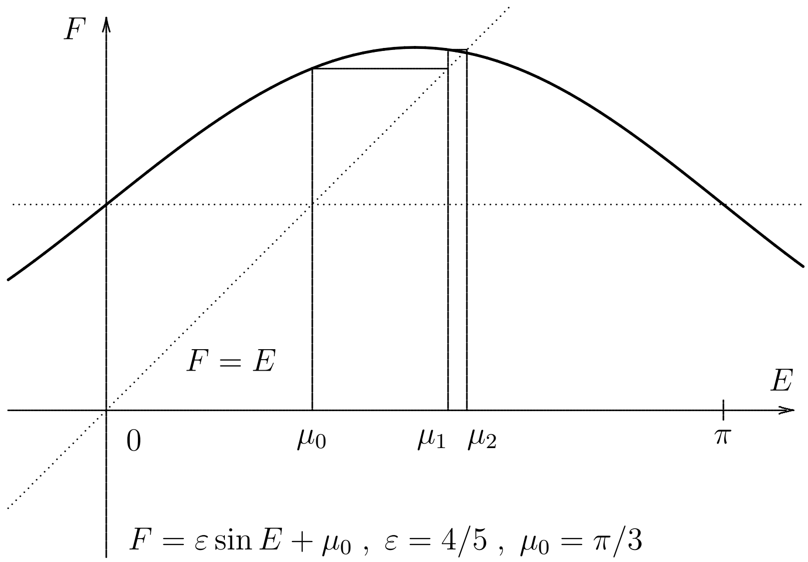


Slika 92: Odvisnost ekscentrične od prave anomalije.

prepišemo v obliki $E = \varepsilon \sin E + \mu_0 = f(E)$, lahko poiščemo njeno rešitev z iterativno metodo, ki se najbolje obnese za majhne ε. Vzamemo $\eta_0 = \mu_0$ in nato $\eta_1 = f(\eta_0)$, $\eta_2 = f(\eta_1)$, $\eta_3 = f(\eta_2)$, ... Na sliki 93 se v koordinatnem sistemu EF vidi, da zaporedje $\eta_0, \eta_1, \eta_2, \ldots$ lepo konvergira proti rešitvi, presečišču krivulj $F = f(E)$ in $F = E$, rešitvi Keplerjeve enačbe. Keplerjevo enačbo $E - \varepsilon \sin E = \mu$ lahko obravnavamo tudi z izrekom o implicitni funkciji. V ta namen vpeljemo funkcijo $f(E, \mu, \varepsilon) = E - \varepsilon \sin E - \mu$, ki je povsod definirana in zvezna z vsemi svojimi parcialnimi odvodi vred. Ker je

$$f(0, 0, \varepsilon) = 0 \quad \text{in} \quad \frac{\partial f}{\partial E}(0, 0, \varepsilon) = 1 - \varepsilon \neq 0$$

zaradi neenakosti $\varepsilon \neq 1$, obstaja ena sama zvezna in poljubno mnogokrat odvedljiva funkcija $E = E(\mu, \varepsilon)$ v neki okolici točke $\mu = 0$, ki pri njej zadošča



Slika 93: Reševanje Keplerjeve enačbe.

enakosti

$$f(E(\mu,\varepsilon),\mu,\varepsilon) = E(\mu,\varepsilon) - \varepsilon \sin E(\mu,\varepsilon) - \mu = 0\,,$$

pri tem pa je očitno $E(0,\varepsilon) = 0$ in $E(\mu, 0) = \mu$. S slike 94 razberemo, da je ta okolica kar vsa realna os. Pri tem ε jemljemo kot parameter, glede na katerega je $E(\mu,\varepsilon)$ prav tako zvezna in poljubno mnogokrat odvedljiva funkcija. Njen odvod lahko izrazimo v obliki:

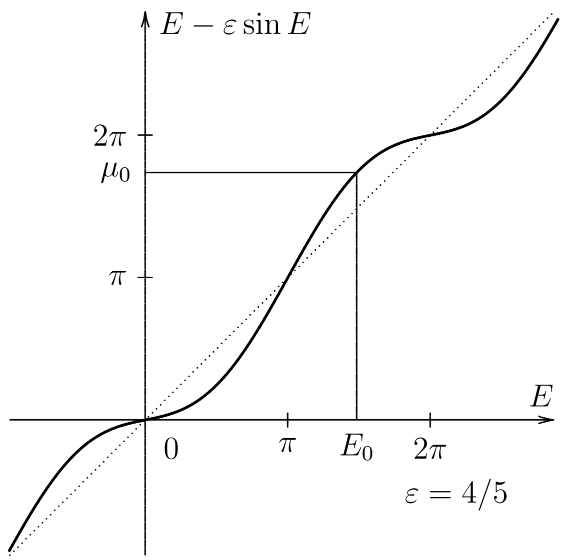
$$\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu,\varepsilon) = -\frac{\dfrac{\partial f}{\partial \mu}(E(\mu,\varepsilon),\mu,\varepsilon)}{\dfrac{\partial f}{\partial E}(E(\mu,\varepsilon),\mu,\varepsilon)} = \frac{1}{1-\varepsilon\cos E(\mu,\varepsilon)}.$$

V posebnem primeru je

$$\frac{\partial E}{\partial \mu}(0,\varepsilon) = 1.$$

Z odvajanjem enakosti $E(\mu,\varepsilon) - \varepsilon \sin E(\mu,\varepsilon) = \mu$ dobimo:

$$\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu,\varepsilon) - \varepsilon \cos E(\mu,\varepsilon)\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu,\varepsilon) = 1$$



Slika 94: Rešitev Keplerjeve enačbe.

in
$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}(\mu, \varepsilon) - \sin E(\mu, \varepsilon) - \varepsilon \cos E(\mu, \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial \varepsilon}(\mu, \varepsilon) = 0.$$
Iz teh dveh enakosti takoj sledi
$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}(\mu, \varepsilon) = \sin E(\mu, \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon) \quad \text{in} \quad \frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, 0) = 1.$$

V posebnem primeru imamo:
$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}(\mu, 0) = \sin E(\mu, 0) \frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, 0) = \sin \mu.$$

Velja še več. Če je g povsod definirana poljubno mnogokrat odvedljiva realna funkcija, potem lahko sestavimo funkcijo $h(\mu, \varepsilon) = g(E(\mu, \varepsilon))$. Po pravilu za odvajanje sestavljene funkcije takoj dobimo:
$$\frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(\mu, \varepsilon) = g'(E(\mu, \varepsilon)) \sin E(\mu, \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon).$$

Z metodo matematične indukcije se da v vsej strogosti dokazati, da za vsako naravno število n velja:
$$\frac{\partial^n h}{\partial \varepsilon^n}(\mu, \varepsilon) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \mu^{n-1}} \left(g'(E(\mu, \varepsilon)) \sin^n E(\mu, \varepsilon) \frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon) \right).$$

Za $n = 1$ zgornja enakost očitno drži. Predpostavimo, da drži na poljuben naraven n. Potem gre naprej dokazovanje takole:

$$\frac{\partial^{n+1} h}{\partial \varepsilon^{n+1}}(\mu, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(\frac{\partial^{n-1}}{\partial \mu^{n-1}}\left(g'(E(\mu, \varepsilon))\sin^n E(\mu, \varepsilon)\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right)\right).$$

Ker so vse nastopajoče funkcije zvezne z vsemi odvodi vred, smemo na desni strani zamenjati vrstni red odvajanj:

$$\frac{\partial^{n+1} h}{\partial \varepsilon^{n+1}}(\mu, \varepsilon) = \frac{\partial^{n-1}}{\partial \mu^{n-1}}\left(\frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(g'(E(\mu, \varepsilon))\sin^n E(\mu, \varepsilon)\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right)\right).$$

Označimo:

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial \varepsilon}\left(g'(E(\mu, \varepsilon))\sin^n E(\mu, \varepsilon)\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right).$$

Če pišemo kar brez argumentov, imamo:

$$\Lambda = g''\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}\sin^n E\frac{\partial E}{\partial \mu} + ng'\sin^{n-1} E\cos E\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}\frac{\partial E}{\partial \mu} + g'\sin^n E\frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon \partial \mu}.$$

Upoštevamo zvezi

$$\frac{\partial E}{\partial \varepsilon} = \sin E\frac{\partial E}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon \partial \mu} = \cos E\left(\frac{\partial E}{\partial \mu}\right)^2 + \sin E\frac{\partial^2 E}{\partial \mu^2}$$

in dobimo

$$\Lambda = (g''\sin^{n+1} E + (n+1)g'\sin^n E\cos E)\left(\frac{\partial E}{\partial \mu}\right)^2 + g'\sin^{n+1} E\frac{\partial^2 E}{\partial \mu^2}.$$

Izraz na desni strani lahko res zapišemo v obliki odvoda:

$$\Lambda = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(g'\sin^{n+1} E\frac{\partial E}{\partial \mu}\right).$$

Tako smo nazadnje le prišli do odvoda reda $n + 1$:

$$\frac{\partial^{n+1} h}{\partial \varepsilon^{n+1}}(\mu, \varepsilon) = \frac{\partial^{n-1}\Lambda}{\partial \mu^{n-1}}(\mu, \varepsilon) = \frac{\partial^n}{\partial \mu^n}\left(g'(E(\mu, \varepsilon))\sin^{n+1} E(\mu, \varepsilon)\frac{\partial E}{\partial \mu}(\mu, \varepsilon)\right).$$

Torej je izraz pravilen za vsako naravno število n.

V posebnem primeru $\varepsilon = 0$ pa lahko zapišemo:

$$h(\mu, 0) = g(\mu)\,, \quad \frac{\partial^n h}{\partial \varepsilon^n}(\mu, 0) = (g\,'(\mu)\sin^n\mu)^{\,(n-1)} \quad \text{za} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Sedaj lahko izrazimo z Maclaurinovo vrsto:

$$g(E(\mu, \varepsilon)) = h(\mu, \varepsilon) = h(\mu, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{\partial^n h}{\partial \varepsilon^n}(\mu, 0).$$

Končno je pred nami potenčna vrsta, ki izraža funkcijo ekscentrične anomalije E s povprečno anomalijo μ:

$$g(E(\mu, \varepsilon)) = g(\mu) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}(g\,'(\mu)\sin^n\mu)^{\,(n-1)}.$$

Zapišimo faktorje tik za $\varepsilon^n/n!$ pri nekaj začetnih členih za funkcijo $g(E) = E$, $g\,'(E) = 1$. Pri tem uporabimo pri računanju členov vrste nekaj preprostih enakosti iz trigonometrije, ki smo se je dovolj naučili že na gimnaziji. Za $n = 1$ imamo kar $\sin\mu$, za $n = 2$ pa:

$$(\sin^2\mu)\,' = 2\sin\mu\cos\mu = \sin(2\mu).$$

Za $n = 3$ je malo več dela, ni pa sile:

$$(\sin^3\mu)\,'' = 3(\sin^2\mu\cos\mu)\,' = (3/2)(\cos\mu - \cos(2\mu)\cos\mu)\,' =$$

$$= (3/4)(\cos\mu - \cos(3\mu))\,' = (3/4)(3\sin(3\mu) - \sin\mu).$$

Ko vstavimo v splošno vrsto, dobimo do členov z ε^3:

$$E = E(\mu, \varepsilon) = \mu + \varepsilon\sin\mu + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin(2\mu) + \frac{\varepsilon^3}{8}(3\sin(3\mu) - \sin\mu) + \ldots$$

Prav tako računamo za funkcijo $g(E) = \sin E$, $g\,'(E) = \cos E$. Faktorje tik za $\varepsilon^n/n!$ dobimo postopoma. Za $n = 1$ je to kar $\cos\mu\sin\mu = (1/2)\sin(2\mu)$. Za $n = 2$ pa

$$(\cos\mu\sin^2\mu)\,' = (1/4)(3\sin(3\mu) - \sin\mu)\,,$$

kjer uporabimo delni rezultat za funkcijo $g(E) = E$. Za $n = 3$ dobimo z malo več računanja:

$$(\cos\mu\sin^3\mu)'' = 2\sin(4\mu) - \sin(2\mu).$$

Torej imamo do členov z ε^3 naslednji razvoj:

$$\sin E = \sin\mu + \frac{\varepsilon}{2}\sin(2\mu) + \frac{\varepsilon^2}{8}(3\sin(3\mu) - \sin\mu) + \frac{\varepsilon^3}{6}(2\sin(4\mu) - \sin(2\mu)) + \ldots$$

Za funkcijo $g(E) = \sin(2E)$, $g'(E) = 2\cos(2E)$ dobimo faktorje takoj za $\varepsilon^n/n!$ po istem postopku. Za $n = 1$ je to $2\cos(2\mu)\sin\mu = \sin(3\mu) - \sin\mu$, za $n = 2$ imamo

$$(2\cos(2\mu)\sin^2\mu)' = 2\sin(4\mu) - 2\sin(2\mu)$$

in za $n = 3$ še

$$(2\cos(2\mu)\sin^3\mu)'' = (1/4)(25\sin(5\mu) - 27\sin(3\mu) + 4\sin\mu).$$

Torej je do členov z ε^3:

$$\sin(2E) = \sin(2\mu) + \varepsilon(\sin(3\mu) - \sin\mu) + \varepsilon^2(\sin(4\mu) - \sin(2\mu)) +$$

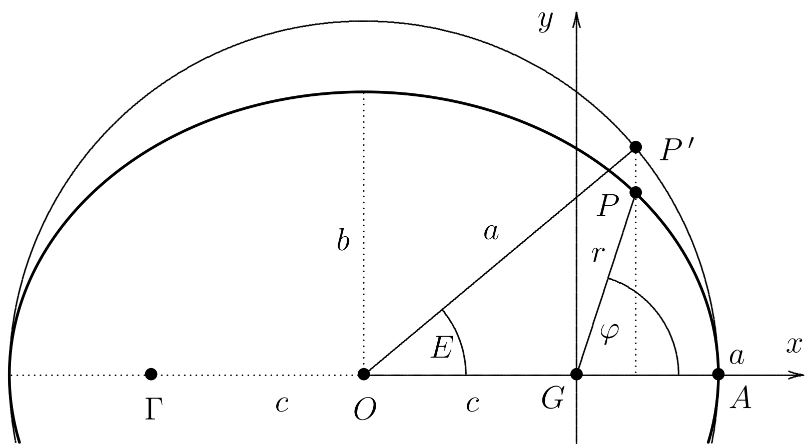
$$+ \frac{\varepsilon^3}{24}(25\sin(5\mu) - 27\sin(3\mu) + 4\sin\mu) + \ldots$$

Po istem postopku najdemo tudi razvoj

$$\sin(3E) = \sin(3\mu) + \frac{3\varepsilon}{2}(\sin(4\mu) - \sin(2\mu)) + \frac{3\varepsilon^2}{8}(5\sin(5\mu) - 6\sin(3\mu) + \sin\mu) +$$

$$+ \frac{3\varepsilon^3}{4}(3\sin(6\mu) - 4\sin(4\mu) + \sin(2\mu)) + \ldots$$

Relacijo med pravo in ekscentrično anomalijo lahko lepo razložimo tudi na sliki 95, na kateri elipsi očrtamo krožnico polmera a. Točka P na elipsi ima pravo anomalijo φ. Skozi točko P nato načrtamo pravokotnico na polarno os in označimo s P' presečišče s krožnico, in sicer na tistem bregu



Slika 95: Geometrijska razlaga relacije med pravo in ekscentrično anomalijo.

premice nosilke polarne osi, kjer leži točka P. Nato povežemo točko P' s središčem elipse oziroma krožnice. Ekscentrična anomalija E, ki ustreza pravi anomaliji φ, je potem kot med daljico OP' in polarno osjo, merjen v istem matematičnem smislu kot φ. Konstrukcijo utemeljimo z ne prezapletenim računom. Pokazati je treba samo, da velja relacija

$$a\cos E - c = r\cos\varphi = \frac{p\cos\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi}.$$

Ko izrazimo a in p z ε, dobimo enakovredno enačbo

$$\frac{(\cos E-\varepsilon)(1+\varepsilon\cos\varphi)}{\cos\varphi} = 1-\varepsilon^2,$$

ki jo bomo, kakor bomo videli, zlahka preverili.

Najprej izrazimo $\cos\varphi$ in $\cos E$ s polovičnimi koti po formuli

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2(\alpha/2)}{1+\tan^2(\alpha/2)}.$$

Najprej dobimo, da je izraz $(\cos E-\varepsilon)(1+\varepsilon\cos\varphi)/\cos\varphi$ enak:

$$\frac{(1-\varepsilon)-(1+\varepsilon)\tan^2(E/2)}{1+\tan^2(E/2)}\cdot\frac{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\tan^2(\varphi/2)}{1-\tan^2(\varphi/2)}.$$

Z relacijo (26) dobimo

$$(1-\varepsilon)-(1+\varepsilon)\tan^2(E/2)=(1-\varepsilon)(1-\tan^2(\varphi/2))$$

in

$$(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\tan^2(\varphi/2)=(1+\varepsilon)(1+\tan^2(E/2))\,,$$

tako da je nazadnje res

$$\frac{(\cos E-\varepsilon)(1+\varepsilon\cos\varphi)}{\cos\varphi}=(1-\varepsilon)(1+\varepsilon)=1-\varepsilon^2\,,$$

s čimer je konstrukcija utemeljena. Poleg tega pa takoj najdemo tudi izraz za odvisnost polarnega radija r od ekscentrične anomalije E:

$$r=\frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}=\frac{p}{1+\varepsilon\dfrac{1-\tan^2(\varphi/2)}{1+\tan^2(\varphi/2)}}=\frac{p(1+\tan^2(\varphi/2))}{(1+\varepsilon)+(1-\varepsilon)\tan^2(\varphi/2)}.$$

Ko uporabimo povezavo (26), dobimo

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon}\,\frac{(1-\varepsilon)+(1+\varepsilon)\tan^2(E/2)}{(1+\varepsilon)+(1+\varepsilon)\tan^2(E/2)}=\frac{p}{1-\varepsilon^2}\,(1-\varepsilon\cos E)$$

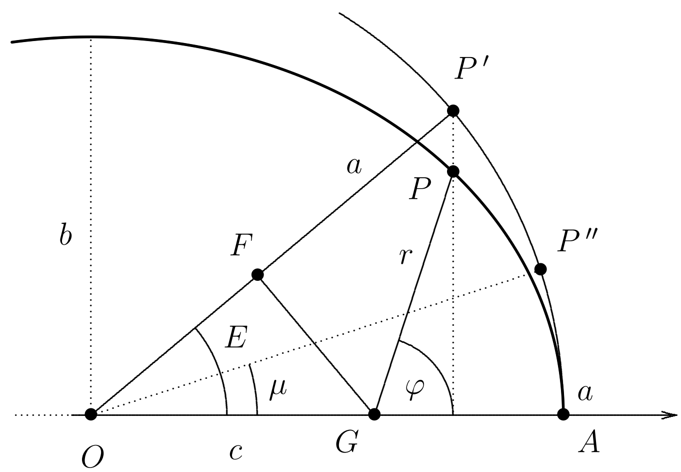
in končno:

$$r=a(1-\varepsilon\cos E).$$

Srednjo anomalijo μ dobimo v prvem kvadrantu (slika 96) tako, da gorišče G pravokotno projiciramo na daljico OP', tako da dobimo točko F. Razdaljo med točkama G in F, ki očitno meri $c\sin E$, nato po loku krožnice polmera a nanesemo v negativni smeri in dobimo točko P''. Zveznica OP'' oklepa s polarno osjo ravno kot μ. To konstrukcijo opravičuje enačba

$$aE-c\sin E=a\mu\,,$$

ki jo dobimo iz nam že dobro znane Keplerjeve enačbe. Za ostale kvadrante vpeljanega koordinatnega sistema postopamo popolnoma analogno.



Slika 96: Geometrijska razlaga relacije med pravo in srednjo anomalijo.

V matematiki se pogosto zatekamo k razlagi in izpeljavam s ploščinami. Spomnimo se samo na Pitagorov izrek in na adicijski izrek v trigonometriji, In to že od najstarejših časov matematike naprej. Keplerjevo enačbo lahko dobimo iz ugotovitve, da je ploščina lika GAP v istem razmerju s ploščino lika GAP' kot je razmerje ploščin elipse in kroga radija a, to je b/a. Drugače povedano, ploščina lika GAP', pomnožena s faktorjem b/a, je ploščina lika GAP.

To spoznamo na primer takole. Naj bodo $S(GAP)$ ploščina lika GAP, $S(GAP')$ ploščina lika GAP', $S(OAP')$ ploščina lika OAP' in $S(OGP')$ ploščina lika OGP' (slika 97). Očitno je $S(GAP') = S(OAP') - S(OGP')$, kar pomeni:

$$S(GAP') = \frac{1}{2}a^2E - \frac{1}{2}ac\sin E.$$

Torej je

$$\frac{b}{a}S(GAP') = \frac{1}{2}ab(E - \frac{c}{a}\sin E) = \frac{1}{2}ab(E - \varepsilon\sin E).$$

Po drugi strani pa, ko uporabimo konstantnost ploščinske hitrosti v obliki

$C = \pi ab/T$, najdemo še

$$S(GAP) = S(\varphi, 0) = \frac{C}{2}t = \frac{2\pi ab}{2T}t = \frac{1}{2}ab\mu.$$

Iz enakosti

$$\frac{b}{a}S(GAP') = S(GAP)$$

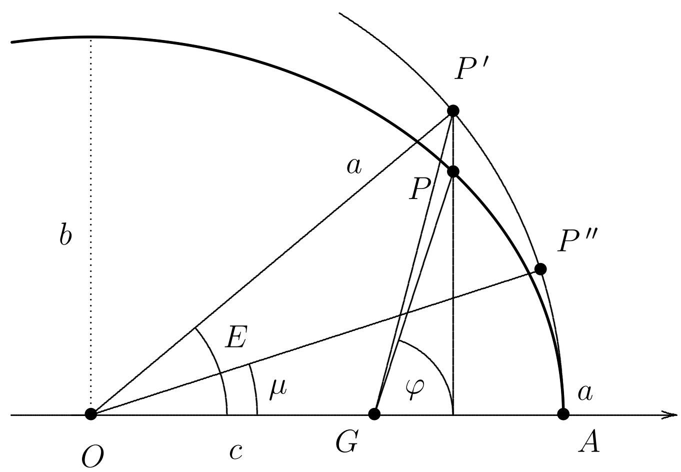
dobimo

$$\frac{1}{2}ab(E - \varepsilon \sin E) = \frac{1}{2}ab\mu$$

in nazadnje ponovno Keplerjevo enačbo:

$$E - \varepsilon \sin E = \mu.$$

Ploščina izseka OAP'' naj bo $S(OAP'')$. Očitno je



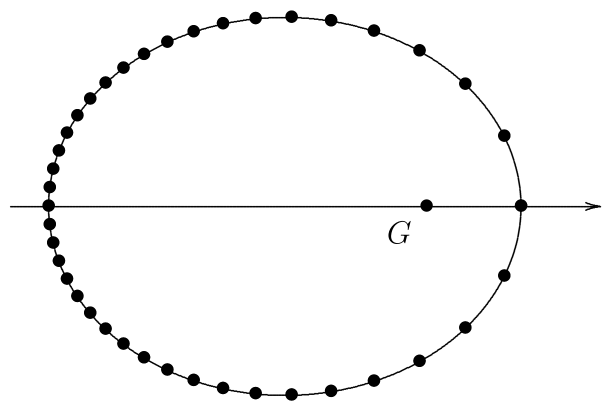
Slika 97: Geometrijska razlaga Keplerjeve enačbe.

$$S(OAP'') = \frac{1}{2}a^2\mu = \frac{1}{2}a^2\frac{2}{ab}S(GAP) = \frac{a}{b}S(GAP)\,,$$

tako da je ploščina lika GAP res enaka produktu ploščine lika OAP'' s faktorjem b/a. Gibanje predstavimo v enakomernih časovnih presledkih, kakor kaže slika 98.

Ugotovljeno spoznanje nam omogoča, da izračunamo radij r neposredno iz ekscentrične anomalije E. Ugodno je vpeljati tudi pravokotni kartezični koordinatni sistem xy z izhodiščem v gorišču G elipse z abscisno osjo x v smeri polarne osi. Elipsa je skrčitev krožnice za faktor b/a v smeri osi y in zato je ordinata y točke P enaka $(b/a)a\sin E = b\sin E$. Ker je $b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}$, imamo zvezi:

$$x = a(\cos E - \varepsilon)\,, \quad y = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin E.$$



Slika 98: Lege v enakomernih časovnih presledkih.

Iz tega dobimo iz enakosti $\cos\varphi = x/r$ in $\sin\varphi = y/r$ izraza:

$$\cos\varphi = \frac{\cos E - \varepsilon}{1 - \varepsilon\cos E}\,, \quad \sin\varphi = \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\sin E}{1 - \varepsilon\cos E}.$$

Obseg L elipse je neodvisen od njene gladke enakovredne parametrizacije in ga lahko izrazimo, kar po učbenikih ni ravno navada, s formulo:

$$L = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(dx/dE)^2 + (dy/dE)^2}\,dE.$$

Ko vstavimo izraza za x in y, dobimo:

$$L = a\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\sin^2 E + (1-\varepsilon^2)\cos^2 E}\,dE = 4a\int_{0}^{\pi/2} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 E}\,dE.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke $u = \pi/2 - E$ pa pridemo do znanega integrala:

$$L = 4a \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 u}\, du.$$

Obseg L elipse lahko izrazimo s popolnim eliptičnim integralom druge vrste $\mathrm{E}\,(k)$ v Legendrovi obliki:

$$L = 4a\mathrm{E}\,(\varepsilon).$$

Ploščino elipse lahko ponovno izračunamo, spet malo drugače, v parametrizaciji z ekscentrično anomalijo E po formuli:

$$S = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (x(dy/dE) - y(dx/dE))\, dE.$$

Po poenostavitvi dobimo:

$$S = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{1 - \varepsilon^2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varepsilon \cos E)\, dE = \pi ab.$$

Z reševanjem Keplerjeve enačbe in po formulah za x in y lahko v enakomernih časovnih presledkih zasledujemo gibanje po elipsi. Takoj opazimo, da je v soglasju z drugim Keplerjevim zakonom gibanje v gorišču, najbližjemu temenu, najhitrejše, ker so točke precej na redko, v najbolj oddaljenem pa najpočasnejše, ker so točke bolj na gosto.

Za eliptični tir Zemlje okoli Sonca je približno

$$\varepsilon = 0.01671123, \quad a = 149\,598\,261 \text{ km}, \quad b = 149\,577\,371 \text{ km}.$$

Vsako leto Zemljino središče prepotuje 939 887 968 km, kar niti ni tako malo, in to s povprečno hitrostjo 29.8 km/s.

V primeru paraboličnega tira ($\varepsilon = 1$) imamo drug tip integrala:

$$\frac{2}{p^2} S(\varphi, 0) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{(1 + \cos\phi)^2} = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{4\cos^4(\phi/2)} = \frac{C}{p^2} \int_{t_0}^{t} d\tau = \frac{C}{p^2}(t - t_0).$$

Z uvedbo nove spremenljivke $u = \tan(\phi/2)$ in nove zgornje meje $\Phi = \tan(\varphi/2)$ dobimo razmeroma preprost integral:

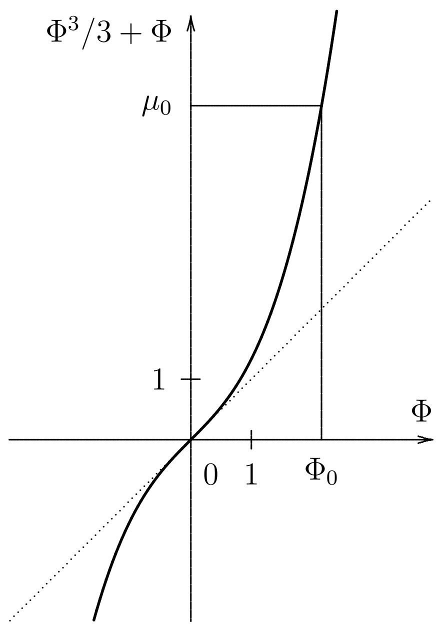
$$\int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{4\cos^4(\phi/2)} = \int_0^{\varphi} \frac{(1 + \tan^2(\phi/2))\, d\phi}{4\cos^2(\phi/2)} = \frac{1}{2} \int_0^{\Phi} (1+u^2)\, du = \frac{1}{2} \left(\Phi + \frac{1}{3}\Phi^3 \right).$$

Torej imamo v tem primeru kubično enačbo

$$\Phi + \frac{1}{3}\Phi^3 \ = \frac{2C}{p^2}(t - t_0).$$

To je Keplerjeva enačba za parabolično gibanje. Očitno ima pri vsaki dani desni strani μ_0 natanko eno rešitev Φ_0 (99). Radij r pa lahko izrazimo tako:

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi} = \frac{p}{2\cos^2(\varphi/2)} = \frac{p}{2}(1 + \tan^2(\varphi/2)) = \frac{p}{2}(1 + \Phi^2).$$



Slika 99: Rešitev Keplerjeve enačbe za parabolično gibanje.

Kaj pa pri hiperboličnem gibanju, ko je $\varepsilon > 1$? Spet bi začeli z enakostjo

$$\frac{2}{p^2}S(\varphi, 0) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon\cos\phi)^2} = \frac{C}{p^2}\int_{t_0}^{t} d\tau = \frac{C}{p^2}(t - t_0).$$

V integral vpeljemo novo spremenljivko $u = \tan(\phi/2)$ in dobimo:

$$J(\varphi, \varepsilon) = \int_0^{\varphi} \frac{d\phi}{(1 + \varepsilon\cos\phi)^2} = 2\int_0^{U} \frac{(1 + u^2)du}{((\varepsilon + 1) - (\varepsilon - 1)u^2)^2}\,,$$

pri čemer je $U = \tan(\varphi/2)$.

Ne smemo pozabiti, da pridejo v poštev le tisti koti φ z intervala $(-\pi, \pi)$, za katere je radij r pozitiven. Ni težko ugotoviti, da mora veljati relacija $-\varphi_0 < \varphi < \varphi_0$, pri čemr je

$$\tan(\varphi_0/2) = \sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}$$

pri pogoju $0 < \varphi_0 < \pi$.

Substitucija $\sqrt{\varepsilon-1}\,u = \sqrt{\varepsilon+1}\,w$ prevede imenovalec pod integralskim znakom na kanonsko obliko. Dobimo

$$J(\varphi,\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left(\frac{1}{\varepsilon+1}\int_0^W \frac{dw}{(1-w^2)^2} + \frac{1}{\varepsilon-1}\int_0^W \frac{w^2\,dw}{(1-w^2)^2}\right),$$

pri čemer je W dan z enačbo $\sqrt{\varepsilon-1}\,U = \sqrt{\varepsilon-1}\tan(\varphi/2) = \sqrt{\varepsilon+1}\,W$. Zaradi omejitve kota φ je w v ustreznih mejah: $-1 < w < 1$.

V zgornja integrala vpeljemo hiperbolično substitucijo $w = \tanh(\eta/2)$ in dobimo:

$$\int_0^W \frac{dw}{(1-w^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^H \cosh^2(\eta/2)\,d\eta = \frac{1}{4}(\sinh H + H)$$

in

$$\int_0^W \frac{w^2\,dw}{(1-w^2)^2} = \frac{1}{2}\int_0^H \sinh^2(\eta/2)\,d\eta = \frac{1}{4}(\sinh H - H)\,,$$

kjer je zgornja integracijska meja H določena z enačbo $\tan(H/2) = W$. Torej lahko zapišemo

$$J(\varphi,\varepsilon) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon^2-1}}\left(\frac{\sinh H + H}{\varepsilon+1} + \frac{\sin H - H}{\varepsilon-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon^2-1)^3}}(\varepsilon\sinh H - H).$$

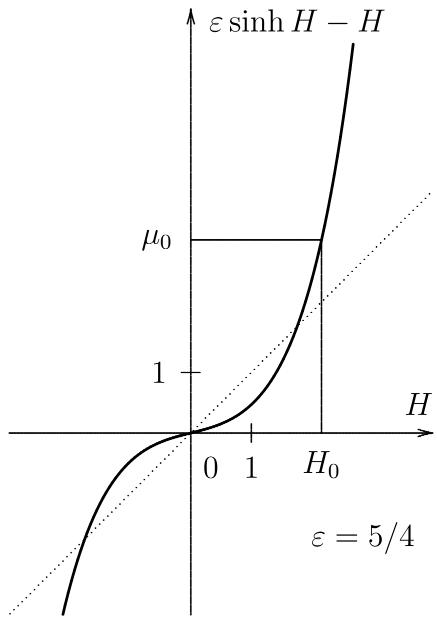
Nazadnje imamo enačbo

$$\varepsilon\sin H - H = \frac{C\sqrt{(\varepsilon^2-1)^3}}{p^2}(t-t_0)$$

ali lepše

$$\varepsilon \sin H - H = \frac{C}{ab}(t - t_0)$$

To je Keplerjeva enačba za hiperbolično gibanje. Ker pa gibanje po hiperboli



Slika 100: Rešitev Keplerjeve enačbe za hiperbolično gibanje.

ni periodično, izraza na desni ne moremo zapisati z neko časovno periodo kot pri elipsi. Za vsako dano desno stran μ_0 pa lahko najdemo natanko eno rešitev H_0 enačbe

$$\varepsilon \sin H - H = \mu_0 \,,$$

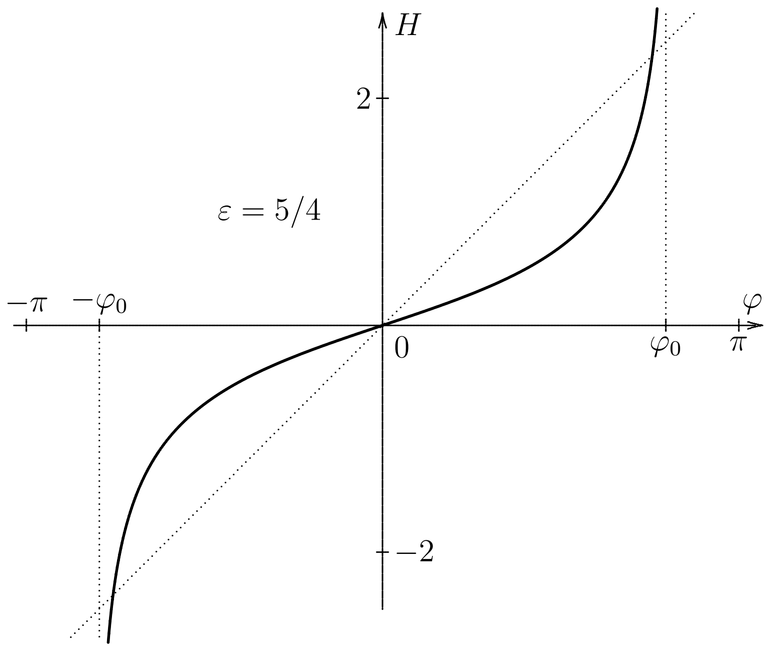
ker je funkcija na levi strani povsod naraščajoča (slika 100).

Zveza med φ in H je sedaj taka:

$$\tanh \frac{H}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}} \tan \frac{\varphi}{2}.$$

Z dobljeno zvezo lahko tako kot v eliptičnem primeru tudi sedaj poenostavimo radij r in dobimo:

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi} = a(\varepsilon \cosh H - 1).$$



Slika 101: Relacija med anomalijama H in φ.

Pri $\pm\varphi_0$ ima graf navpično asimptoto (slika 101). V tem se tudi bistveno razlikuje od grafa, ki prikazuje odvisnost ekscentrične anomalije E od prave anomalije φ pri eliptični tirnici.

Za vajo zapišimo še Fourierovo vrsto polarnega radija r, ki je periodična funkcija polarnega kota φ s periodo 2π v eliptičnem primeru ($0 < \varepsilon < 1$):

$$r(\varphi) = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos\varphi} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\varphi).$$

Fourierove koeficiente a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, izačunamo z integrali:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} r(\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi = \frac{p}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(n\varphi)\, d\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{\pi} \cdot \mathrm{Re} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\exp(in\varphi)\, d\varphi}{1 + \varepsilon\cos\varphi}.$$

Tokrat se, opremljeni z bogatimi izkušnjami v integriranju, lotimo integrala s kompleksnimi funkcijami in izrekom o ostankih (residuih).

Najprej zapišemo $z = \exp(i\varphi)$, nato $\cos\varphi = (\exp(i\varphi) + \exp(-i\varphi))/2 = (z + 1/z)/2$ ter $d\varphi = dz/(iz)$. Integracija po spremenljivki z poteka v pozitivni smeri po enotski krožnici $|z| = 1$ v kompleksni ravnini (z). Nato izvedemo kratek račun:

$$\frac{p}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(in\varphi)\,d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{p}{\pi}\oint_{|z|=1}\frac{z^n\dfrac{dz}{iz}}{1+\dfrac{\varepsilon}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)} = \frac{2p}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^n\,dz}{\varepsilon z^2+2z+\varepsilon}.$$

Podintegralska racionalna funkcija $f(z) = z^n/(\varepsilon z^2 + 2z + \varepsilon)$ ima enostavna pola $z_1 = (-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$ in $z_2 = (-1-\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$, od katerih je z_1 znotraj krožnice $|z| = 1$. Kot je znano, je

$$\operatorname{Res}(f(z), z_1) = \left.\frac{z^n}{(\varepsilon z^2+2z+\varepsilon)'}\right|_{z=z_1} = \frac{z_1^n}{2(\varepsilon z_1+1)}.$$

Nazadnje dobimo z izrekom o ostankih realen rezultat:

$$\frac{p}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(in\varphi)\,d\varphi}{1+\varepsilon\cos\varphi} = \frac{2p}{\pi i}\cdot 2\pi i\cdot\operatorname{Res}(f(z), z_1) = 2p\frac{(\sqrt{1-\varepsilon^2}-1)^n}{\varepsilon^n\sqrt{1-\varepsilon^2}}.$$

Tako smo našli iskane koeficiente

$$a_n = 2b\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}\right)^n,$$

s tem pa tudi polarno enačbo tira

$$r(\varphi) = b\left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}-1}{\varepsilon}\right)^n\cos(n\varphi)\right).$$

Spet vidimo, da je povprečje polarnega radija r glede na pravo anomalijo φ enako mali polosi b elipse.

Sicer pa povprečja v vsakdanjem življenju ljudi otopijo ali pa pomehkužijo. Malokatera klasična družina ima tri otroke. Prvi od njih doštudira in celo doktorira, drugi samo diplomira, tretji sicer študira in nikoli ne diplomira, je falirani študent, torej ostane samo maturant. V povprečju so torej otroci kar uspešni.

Kdor svojega sina pomehkuži, si mora lastne rane obvezovati, pri vsakem kriku se strese njegovo srce.
(Sirahova knjiga, 30, 7)

Pravijo, da smo v preteklosti preveč trošili in smo zato zašli v finančne in druge težave. Zato naj bi sedaj varčevali, kjer se le da. Govorijo v množini. Kdo je preveč trošil? Vsi že ne. Najbrž smo v povprečju preveč zapravljali. Doslej varčen človek je lahko upravičeno užaljen in jezen obenem, ko sliši zgodbo o prevelikem trošenju.

Po prevelikem zapravljanju pride kot pribito na vrsto veliko varčevanje, zategovanje pasu in vse, kar zraven spada. Zakaj človek varčuje? Denar zato, da si bo lahko kasneje nekaj kupil. Seveda, če mu ne bo inflacija prej vsega požrla oziroma ne bo prej šla banka k vragu. Nima pa nobenega smisla varčevati krompirja v kleti, saj mu bo prej ali slej zgnil. Nekateri pa tako in tako nikoli nič ne varčujejo, ampak samo gledajo, kje bi lahko kaj vzeli. Jemlje pa se na različne načine: kar tako, organizirano, na silo, pod okriljem zakonov in paragrafov.

Kako se to hitro rado zgodi, vem že od otroških nog. Nekoč smo nabirali kostanj. Kakor hitro sem pogledal stran od svoje košare, v kateri ga je že bilo nekaj, je že sosedov mulec iztegnil roko in mi hotel odtujiti nekaj lepih temnorjavih sadežev. Moral sem se skoraj stepsti zanje. Pa je imel ravno tako možnost, da jih nabere sam.

15 Besselove funkcije

Sledi precej zahteven del te knjige, poln enačb in izpeljav. Brez škode ga lahko preskoči, kdor ne mara matematike.

Besselovo funkcijo $J_n(x)$ celoštevilskega indeksa n lahko definiramo kot integral s parametrom x z izrazom:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\, d\phi.$$

Nekaj lastnosti preverimo brez težav:

$$J_n(-x) = (-1)^n J_n(x)\,, \quad J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x).$$

Obe navedeni enakosti preverimo z uvedbo nove integracijske spremenljivke $\theta = \pi - \phi$. Prvo enakost preverimo takole:

$$J_n(-x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\phi + x\sin\phi)\, d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - n\theta + x\sin(\pi-\theta))\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\pi - (n\theta - x\sin\theta))\, d\theta = (-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta = (-1)^n J_n(x).$$

Drugo enakost preverimo podobno:

$$J_{-n}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-n\phi - x\sin\phi)\, d\phi = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(-n\pi + n\theta - x\sin(\pi-\theta))\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos((n\theta - x\sin\theta) - n\pi)\, d\theta = (-1)^n\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - x\sin\theta)\, d\theta = (-1)^n J_n(x).$$

Tri zaporedne Besselove funkcije $J_{n-1}(x), J_n(x)$ in $J_{n+1}(x)$ povezujeta enakosti

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = 2nJ_n(x)\,, \quad J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x).$$

Preverimo ju s faktorizacijo vsote in razlike kosinusov pod integralskim znakom:

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = \frac{x}{\pi}\int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x\sin\phi) + \cos((n+1)\phi - x\sin\phi))\, d\phi =$$

$$= \frac{2x}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\cos\phi \, d\phi = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(x\cos\phi - n)\, d\phi +$$
$$+ \frac{2n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\, d\phi = 2nJ_n(x)\,,$$
ker je predzadnji integral enak 0, kar dobimo takoj s preprosto substitucijo $u = n\phi - x\sin\phi, du = (n - x\cos\phi)\, d\phi$ v integral.

Za odvod Besselove funkcije $J_n(x)$ dobimo po pravilu za odvajanje pod integralskem znakom:

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi \, d\phi.$$

S tem rezultatom lahko nadaljujemo:

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos((n-1)\phi - x\sin\phi) - \cos((n+1)\phi - x\sin\phi))\, d\phi =$$
$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi \, d\phi = J'_n(x).$$

Besselova funkcija $J_n(x)$ je ena od rešitev Besselove diferencialne enačbe:

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0.$$

Prvi odvod že imamo. Spotoma ga še preoblikujemo z metodo integracije per partes:

$$J'_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(n\phi - x\sin\phi)\sin\phi \, d\phi =$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(n - x\cos\phi)\cos\phi \, d\phi.$$

Drugi odvod dobimo iz prve oblike za prvi odvod:

$$J''_n(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)\sin^2\phi \, d\phi.$$

Ko vse zložimo skupaj, dobimo:

$$x^2 J''_n(x) + xJ'_n(x) + (x^2 - n^2)J_n(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(-x^2\sin^2\phi + nx\cos\phi - x^2\cos^2\phi + x^2 - n^2)\, d\phi =$$

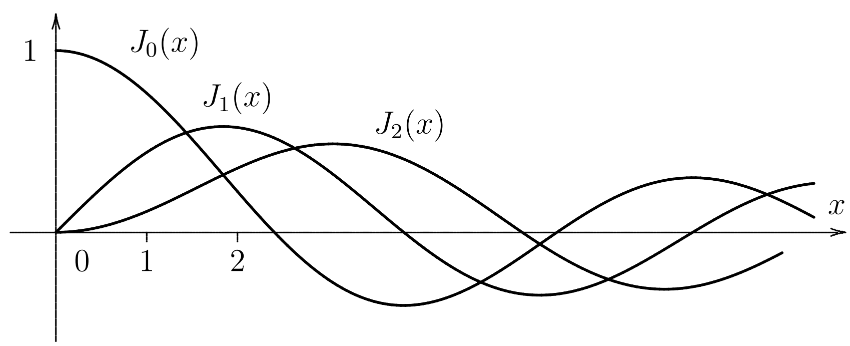
$$= \frac{n}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\phi - x\sin\phi)(x\cos\phi - n)\, d\phi = 0.$$

Čisto v zadnjem integralu spet uporabimo substitucijo $u = n\phi - x\sin\phi$.

Vse Besselove funkcije $J_n(x)$ imajo v točki $x = 0$ vrednost 0 razen J_0, ki ima tam vrednost 1. To lahko izrazimo s Kroneckerjevim[88] simbolom:

$$J_n(0) = \delta_{n,0}.$$

Grafi prvih treh Besselovih funkcij za $x \geq 0$ so na sliki 102.



Slika 102: Grafi Besselovih funkcij.

Besselova funkcija celoštevilskega indeksa se izraža tudi v obliki potenčne vrste. Ker je funkcija $\cos(n\phi - x\sin\phi)$ soda glede na spremenljivko ϕ, funkcija $\sin(n\phi - x\sin\phi)$ pa liha, lahko zapišemo:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(n\phi - x\sin\phi))\, d\phi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp(in\phi)\exp(-ix\sin\phi)\, d\phi.$$

Z razvojem v vrsto in z uvedbo kompleksne spremenljivke $z = \exp(i\phi)$ takoj dobimo:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}(x/2)^k \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{(z^2-1)^k\, dz}{z^{k-n+1}}.$$

[88]Leopold Kronecker (1823–1891) – nemški matematik in logik.

Vpeljimo kompleksno funkcijo $g_k(z) = (z^2-1)^k$. Seveda je dovolj obravnavati primer $n \geq 0$. Tedaj je zaradi regularnosti funkcije $g_k(z)/z^{k-n+1}$ znotraj pozitivno orientirane krožnice $|z| = 1$ zgoraj nastopajoči integral enak 0 za $k < n$. Za $k \geq n$ pa lahko zapišemo po Cauchyjevi integralski formuli za $(k-n)$-ti odvod:

$$g_k^{(k-n)}(0) = \frac{(k-n)!}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{g_k(z)\, dz}{z^{k-n+1}}.$$

To pomeni, da lahko izrazimo:

$$J_n(x) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-n)!} (x/2)^k \cdot g_k^{(k-n)}(0) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+n}}{(k+n)!k!} (x/2)^{k+n} \cdot g_{k+n}^{(k)}(0).$$

Funkcija $g_k(z)$ je soda funkcija za vsak nenegativen k in prav tako so sode funkcije njeni odvodi sodega reda. Njeni odvodi lihega reda pa so lihe funkcije in zato so za $z = 0$ enaki 0. Funkcijo $g_{2k+n}(z)$ odvajajmo torej $2k$-krat, še prej pa jo razvijemo po binomski formuli:

$$g_{2k+n}^{(2k)}(z) = \left(\sum_{j=0}^{2k+n} (-1)^{n-j} \binom{2k+n}{j} z^{2j} \right)^{(2k)} =$$

$$= \sum_{j=k}^{2k+n} (-1)^{n-j} \binom{2k+n}{j} (2k)! \binom{2j}{2k} z^{2j-2k}.$$

Iz dobljenega izraza dobimo:

$$g_{2k+n}^{(2k)}(0) = (-1)^{n-k} \binom{2k+n}{k} (2k)!.$$

Torej lahko izrazimo

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+n}}{(2k+n)!(2k)!} (x/2)^{2k+n} \cdot (-1)^{n-k} \binom{2k+n}{k} (2k)!.$$

Po poenostavitvi imamo:

$$J_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

Besselove funkcije realnega argumenta x in celoštevilskega indeksa n imajo razmeroma enostavno rodovno funkcijo $\mathcal{G}(x,z)$, ki ima, razvita v Laurentovo vrsto kompleksne spremenljivke z, $z \neq 0$, obliko:

$$\mathcal{G}(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.$$

Najprej pokažimo, da je

$$\mathcal{G}(x,z) = \exp \frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right) = \exp \frac{xz}{2} \cdot \exp \frac{-x}{2z}.$$

Najprej oba faktorja razvijemo za $z \neq 0$ v absolutno konvergentni vrsti:

$$\exp \frac{xz}{2} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j z^j}{2^j j!}, \quad \exp \frac{-x}{2z} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^k z^{-k}}{2^k k!}.$$

Z množenjem dobljenih vrst dobimo:

$$\mathcal{G}(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+j} z^{j-k}}{2^{k+j} j! k!}.$$

Dobljeno dvojno vrsto razdelimo na dva dela:

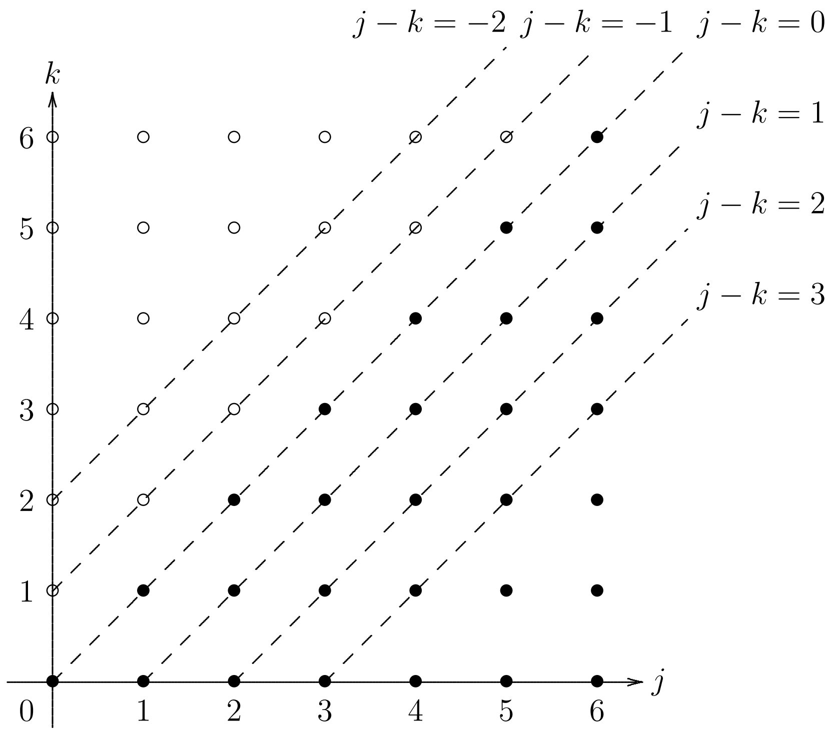
$$\mathcal{G}(x,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} (-1)^k \frac{x^{k+j} z^{j-k}}{2^{k+j} j! k!} + \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=j+1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{k+j} z^{j-k}}{2^{k+j} j! k!}.$$

Da se bolje znajdemo v vseh teh sumacijskih indeksih, si narišemo celoštevilski prvi kvadrant s točkami (j,k), kjer je $j \geq 0$ in $k \geq 0$. Temne točke $\bullet$ označujejo območje seštevanja v prvi vsoti, svetle $\circ$ pa v drugi (slika 103).

V obe vrsti vpeljemo nov sumacijski indeks $n = j - k$ in ju preoblikujemo. Dobimo:

$$\mathcal{G}(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} + \sum_{n=-1}^{-\infty} z^n \sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}.$$

V prvem členu takoj spoznamo funkcijo $J_n(x)$, v drugem členu pa je vrsta, ki jo mimogrede, pri negativnem n, še malo preoblikujemo in spet pridemo do izraza za $J_n(x)$:



Slika 103: Območje indeksov, po katerih seštevamo.

$$
\sum_{k=-n}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k-n}}{(k-n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-2n+n} =
$$

$$
= (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-n)!k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} = (-1)^n J_{-n}(x) = J_n(x).
$$

Tako imamo nazadnje:

$$
\mathcal{G}(x,z) = \sum_{n=0}^{\infty} J_n(x) z^n + \sum_{n=-1}^{-\infty} J_n(x) z^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) z^n.
$$

Sedaj lahko dobimo nekaj zanimivih razvojev, če vzamemo $z = \exp(i\phi)$. Očitno je $\mathcal{G}(x, \exp(i\phi)) = \exp(ix\sin\phi)$ in zato:

$$
\exp(ix\sin\phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)\exp(in\phi) =
$$

$$= J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\phi) + 2i\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin((2n-1)\phi).$$

Za vsak realen ϕ in realen x je zato:

$$\cos(x\sin\phi) = J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x)\cos(2n\phi)$$

in

$$\sin(x\sin\phi) = 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1}(x)\sin((2n-1)\phi).$$

V posebnem primeru $\phi = 0$ dobimo vsak realen x

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1.$$

Formula

$$x(J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)) = 2nJ_n(x)$$

se na prvi pogled zdi primerna za računanje vrednosti Besselovih funkcij $J_n(x)$ pri danem argumentu $x > 0$, če poznamo na primer $J_0(x)$ in $J_1(x)$. Uporabili bi zvezo

$$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

za $n = 1$ in dobili bi $J_2(x)$, nato bi vzeli $n = 2$ in dobili bi $J_3(x)$ in tako dalje. Kmalu pa pridemo zaradi sprotnega zaokroževanja do znatnih napak. Pravimo, da je izbrana računska shema nestabilna in s tem neuporabna. Primer za $x = 1.6$ je pokazan s tabelo 11.

Takoj opazimo napako, ki se širi vzdolž tabele in pri J_4 že opazimo neujemanje, ki je nastalo zaradi sprotnega zaokroževanja.

Zato uporabimo drugačen postopek: začnemo z dovolj velikim n in računamo navzdol z zvezo:

$$J_{n-1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n+1}(x).$$

Postavimo kar približno: $J_m(x) = 0$ za $m > n$ in $J_n(x) = 1$ in računamo navzdol po zgornji rekurzijski zvezi, vse do $J_1(x)$ in $J_0(x)$. Dobimo seveda

n	J_n (zg. shema)	J_n (točno)
0	0.4554021676	0.4554021676
1	0.5698959352	0.5698959352
2	0.2569677514	0.2569677514
3	0.0725234433	0.0725234433
4	0.0149951610	0.0149951611
5	0.0024523616	0.0024523620
6	0.0003320987	0.0003321012
7	0.0000383788	0.0000383972
8	0.0000037161	0.0000038744
9	–0.0000012183	0.0000003469
10	–0.0000174216	0.0000000279

Tabela 11: Napake pri direktni rekurziji.

popolnoma napačne rezultate, označimo jih z $\mathcal{J}_n(x)$, toda zaradi linearnosti rekurzijske zveze in zaradi enakosti

$$J_0(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) = 1$$

na koncu normiramo rezultate tako, da $\mathcal{J}_n(x)$ delimo z vsoto

$$\mathcal{S}_n(x) = \mathcal{J}_0(x) + 2\sum_{k=1}^{n} \mathcal{J}_{2k}(x).$$

S tem dobimo kar natančno vrednosti $J_k(x) = \mathcal{J}_n(x)/\mathcal{S}_k(x)$ za nekaj začetnih k. Poglejmo to, zaradi primerjave, spet na primeru $x = 1.6$. V tem primeru je $\mathcal{S}_{14}(1.6) = 2.075090687 \cdot 10^{12}$. Takoj opazimo zelo dobro ujemanje po tem postopku izračunanih vrednosti $\mathcal{J}_k(1.6)/\mathcal{S}_n(1.6)$ s pravimi vrednostmi za $J_k(1.6)$ za $0 \leq k \leq 10$ (tabela 12).

Čeprav je zelo slabo kazalo, nam je vendar nekaj imenitno uspelo. Besselove funkcije nam pomagajo pri računanju lastnih frekvenc okrogle opne. Denimo

n	$\mathcal{J}_n(1.6)$	$\mathcal{J}_k(1.6)/\mathcal{S}_n(1.6)$	J_n (točno)
15	0	0.0000000000	
14	1	0.0000000000	
13	17.5	0.0000000000	
12	283.375	0.0000000001	
11	4233.125	0.0000000021	
10	$5.792209375 \cdot 10^4$	0.0000000279	0.0000000279
9	$7.197930468 \cdot 10^5$	0.0000003469	0.0000003469
8	$8.039749682 \cdot 10^6$	0.0000038744	0.0000038744
7	$7.967770377 \cdot 10^7$	0.0000383972	0.0000383972
6	$6.891401583 \cdot 10^8$	0.0003321012	0.0003321012
5	$5.088873483 \cdot 10^9$	0.0024523620	0.0024523620
4	$3.111631911 \cdot 10^{10}$	0.0149951611	0.0149951611
3	$1.504927220 \cdot 10^{11}$	0.0725234434	0.0725234433
2	$5.332313883 \cdot 10^{11}$	0.2569677516	0.2569677514
1	$1.182585748 \cdot 10^{12}$	0.5698959353	0.5698959352
0	$9.450007967 \cdot 10^{11}$	0.4554021675	0.4554021676

Tabela 12: Računanje z inverzno rekurzijo

tiste pri bobnih v glasbeni skupini. Morda pa bi si lahko z njimi pomagali pri opisu valovanja Blejskega jezera. Morda je o tem premišljeval akademik profesor Josip Plemelj, doma na Bledu, ko se je sprehajal ob jezeru.

Dežela kranjska nima lep'šga kraja,
ko je z okol'šč'no ta, podoba raja.
(F. Prešeren, Krst pri Savici)

Priimek *Plemelj* je bil starim Cerkljanom znan. Okrog leta 1850 se je na območje današnjega Gorenjca med Želinom in Cerknim z Gorenjske preselil Jernej Plemelj. Posestvo je malo pred letom 1900 prevzel njegov sin Jožef, ki je leta 1908 na Cerknici postavil vodno napravo za pogon mlina, čez dve leti pa je na istem mestu zgradil žago in elektrarno, s katero je razsvetljeval tudi bližnje hiše, kadar elektrike ni potreboval zase. Ker so bili Plemlji doma na Gorenjskem, se je domačije prijelo ime *Pri Gorenjcu*, kar ostalo vse do današnjih dni. Plemelj se pojavi v zapisnikih starešinskih sej občine Cerkno pred prvo svetovno vojno. Iz zapisnikov je razvidno, da je takrat Gorenjčevo posestvo v katastrskem smislu spadalo pod Ravne, ne pa pod Cerkno. Januarja 1902 so Jožefa Plemlja sprejeli v cerkljansko občinsko zvezo, aprila 1906 pa so mu dovolili na njegovem zemljišču, ki je spadalo v davčno občino Ravne, zidati novo hišo.

Rešitev Keplerjeve enačbe $E = \mu + \varepsilon \sin E$, ki nastopa pri obravnavi gibanja planeta okoli Sonca, se da izraziti tudi v obliki vrste. Pri tem je E ekscentrična anomalija, ε numerična ekscentričnost eliptične tirnice planeta in $\mu = 2\pi t/T$ srednja anomalija. S T smo označili obhodno dobo planeta, t pa čas.

Ker je $\sin E$, posredno, periodična funkcija spremenljivke μ s periodo 2π, lahko zapišemo:

$$\varepsilon \sin E = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\mu).$$

Fourierove koeficiente izračunamo po formuli:

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon \sin E \sin(n\mu)\, d\mu\,.$$

Z uvedbo nove integracijske spremenljivke E, ki jo z μ povezuje Keplerjeva enačba, dobimo $d\mu = (1 - \varepsilon \cos E)\, dE$ in zato:

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon \sin E \sin(nE - n\varepsilon \sin E)(1 - \varepsilon \cos E)\, dE$$

ali

$$\pi b_n = \operatorname{Im} \int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon \sin E \exp(inE - in\varepsilon \sin E)(1 - \varepsilon \cos E)\, dE.$$

Sedaj se bomo ukvarjali z itegralom

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varepsilon \sin E \exp(inE - in\varepsilon \sin E)(1 - \varepsilon \cos E) dE =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (\varepsilon \sin E - \frac{\varepsilon^2}{2} \sin(2E)) \exp(inE)) \exp(-in\varepsilon \sin E)\, dE.$$

Vemo, da je funkcija $\exp(-iz \sin\varphi)$ rodovna funkcija za Besselove funkcije $J_k(x)$ celoštevilskega indeksa k:

$$\exp(-iz \sin\varphi) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) \exp(-ik\varphi).$$

Izračunajmo najprej pri poljubnem realnem x in poljubnih celih q ter n:

$$K_{n,q}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(q\varphi) \exp(in\varphi) \exp(-iz \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Z uporabo rodovne funkcije in enakosti $\sin(q\varphi) = -i(\exp(iq\varphi) - \exp(-iq\varphi))/2$ dobimo:

$$K_{n,q}(x) = -\frac{i}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x) \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(n-k)\varphi)(\exp(iq\varphi) - \exp(-iq\varphi))\, d\varphi.$$

Sedaj uporabimo lastnost ortogonalnosti funkcijskega zaporedja $\{\exp(ik\varphi)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ na intervalu $[-\pi, \pi]$, to se pravi

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(ik\varphi) \exp(-in\varphi)\, d\varphi = 2\pi\delta_{k,n}\,,$$

kjer je $\delta_{k,n}$ Kroneckerjev simbol. Dobimo:

$$K_{n,q}(x) = -\pi i \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)(\delta_{n-k,-q} - \delta_{n-k,q}).$$

Tako smo prišli do

$$K_{n,q}(x) = \pi i(J_{n-q}(x) - J_{n+q}(x))).$$

Torej je

$$\pi b_n = \operatorname{Im}\left(\varepsilon K_{1,n}(n\varepsilon) - \frac{\varepsilon^2}{2} K_{2,n}(n\varepsilon)\right)$$

oziroma

$$b_n = \frac{\varepsilon^2}{2}(J_{n+2}(n\varepsilon) - J_{n-2}(n\varepsilon)) - \varepsilon(J_{n+1}(n\varepsilon) - J_{n-1}(n\varepsilon))$$

Večkrat uporabimo dobro znano rekurzijsko formulo

$$xJ_{n-1}(x) + xJ_{n+1}(x) = 2nJ_n(x)$$

in dobimo enakost

$$\frac{x^2}{2}(J_{n+2}(x) - J_{n-2}(x)) = nx(J_{n+1}(x) - J_{n-1}(x)) + 2nJ_n(x)\,,$$

ki za $x = n\varepsilon$ in po deljenju z n^2 preide v:

$$\frac{\varepsilon^2}{2}(J_{n+2}(n\varepsilon) - J_{n-2}(n\varepsilon)) = \varepsilon(J_{n+1}(n\varepsilon) - J_{n-1}(n\varepsilon)) + \frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)\,,$$

Tako smo našli

$$b_n = \frac{2}{n}J_n(n\varepsilon)$$

in s tem

$$\varepsilon \sin E = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon)\sin(n\mu).$$

Rešitev Keplerjeve enačbe torej lahko izrazimo v obliki vrste

$$E = \mu + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(n\varepsilon)\sin(n\mu).$$

Opogumljeni s tem rezultatom poglejmo, kako izrazimo polarni radij r eliptičnega gibanja okoli privlačnega središča v obliki Fourierove vrste. Ker že imamo izraz $r = a(1 - \varepsilon\cos E)$, razvijemo najprej

$$1 - \varepsilon\cos E = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(n\mu).$$

Fourierovi koeficienti α_n se sedaj izračunajo po formuli:

$$\pi\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varepsilon\cos E)\cos(n\mu)\, d\mu.$$

Tako kot zgoraj dobimo z zamenjavo integracijske spremenljivke:

$$\pi\alpha_n = \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varepsilon\cos E)^2 \cos(nE - n\varepsilon\sin E)\, dE$$

ali

$$\pi\alpha_n = \mathrm{Im}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \varepsilon\cos E)^2 \exp(inE - in\varepsilon\sin E)\, dE.$$

Tokrat vpeljimo pri poljubnem realnem x in poljubnih celih q ter n:

$$H_{n,q}(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \cos(q\varphi)\exp(in\varphi)\exp(-ix\sin\varphi)\, d\varphi.$$

Z uporabo enakosti $\cos(q\varphi) = (\exp(iq\varphi) + \exp(-iq\varphi))/2$ in rodovne funkcije Besselovih funkcij dobimo podobno kot zgoraj pri integralih $K_{n,q}(x)$:

$$H_{n,q}(x) = \pi(J_{n-q}(x) + J_{n+q}(x))).$$

Ker je

$$(1 - \varepsilon\cos E)^2 = (1 + \frac{\varepsilon^2}{2}) - 2\varepsilon\cos E + \frac{\varepsilon^2}{2}\cos(2E)\,,$$

dobimo naslednji izraz:

$$\pi\alpha_n = (1 + \frac{\varepsilon^2}{2})H_{n,0}(n\varepsilon) - 2\varepsilon H_{n,1}(n\varepsilon) + \frac{\varepsilon^2}{2}H_{n,2}(n\varepsilon).$$

Hitro najdemo $\alpha_0 = 2 + \varepsilon^2$. Z uporabo rekurzijske formule za Besselove funkcije najdemo za $n \geq 1$:

$$\alpha_n = \frac{\varepsilon}{n}(J_{n+1}(n\varepsilon) - J_{n-1}(n\varepsilon)) = -2\varepsilon\frac{J_n'(n\varepsilon)}{n}.$$

Torej je:

$$r = a\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2} - 2\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_n'(n\varepsilon)}{n}\cos(n\mu)\right).$$

Torej je povprečje radija r glede na srednjo anomalijo μ enako $a(1+\varepsilon^2/2)$.

Pri eliptičnem gibanju je med pravo anomalijo φ in ekscentrično anomalijo E tudi naslednja preprosta zveza:

$$\tan\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{\sin E}{\cos E-\varepsilon}.$$

Iz nje hitro dobimo:

$$d\varphi = \sqrt{1-\varepsilon^2}\frac{dE}{1-\varepsilon\cos E}.$$

Funkcijo $1/(1-\varepsilon\cos E)$ lahko razvijemo v Fourierovo vrsto:

$$\frac{1}{1-\varepsilon\cos E} = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos(nE)\,,$$

kjer so Fourierovi koeficienti dani s formulo:

$$\pi A_n = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(nE)\,dE}{1-\varepsilon\cos E} = \mathrm{Re}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(inE)\,dE}{1-\varepsilon\cos E}.$$

Z uvedbo kompleksne spremenljivke $z=\exp(iE)$ dobimo:

$$\pi A_n = -\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z^n\,dz}{\varepsilon z^2-2z+\varepsilon}.$$

Podintegralska racionalna funkcija $g(z)=z^n/(\varepsilon z^2-2z+\varepsilon)$ ima tokrat enostavna pola $z_1=(1+\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$ in $z_2=(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})/\varepsilon$, od katerih je z_2 znotraj krožnice $|z|=1$. Kot je znano, je

$$\mathrm{Res}\,(g(z),z_2) = \left.\frac{z^n}{(\varepsilon z^2-2z+\varepsilon)\,'}\right|_{z=z_2} = \frac{z_2^n}{2(\varepsilon z_2-1)}.$$

Nazadnje dobimo

$$A_n = 2\frac{(1-\sqrt{1-\varepsilon^2})^n}{\sqrt{1-\varepsilon^2}\varepsilon^n}.$$

in s tem:

$$d\varphi = \left(1+2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^n\cos(nE)\right)\,dE.$$

Z integracijo ob upoštevanju pogoja, da je $\varphi = 0$, ko je $E = 0$, dobimo:

$$\varphi = E + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\left(\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon}\right)^n \sin(nE).$$

Izraz

$$\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \frac{a-b}{c},\ c = \sqrt{a^2-b^2},$$

ima svoj geometrijski pomen. Izraža tangens četrtine kota, pod katerim vidimo pri elipsi daljico med goriščema G in Γ iz temen, v katerih je elipsa s polosema a in b najmanj ukrivljena.

Če razvijemo v vrsto po potencah ε, dobimo:

$$\frac{1-\sqrt{1-\varepsilon^2}}{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{\varepsilon^{2n-1}}{(2n-1)2^{2n}} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} + \ldots$$

Če zapišemo člene, ki vsebujejo kvečjemu potence ε^3, imamo razvoj:

$$\varphi = E + 2\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} + \ldots\right)\sin E + \left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} + \ldots\right)^2 \sin(2E) +$$

$$+\frac{2}{3}\left(\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon^3}{8} + \ldots\right)^3 \sin(3E) + \ldots$$

Tako imamo približno:

$$\varphi \approx E + \left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{4}\right)\sin E + \frac{\varepsilon^2}{4}\sin(2E) + \frac{\varepsilon^3}{12}\sin(3E).$$

Z uporabo razvojev funkcij ekscentrične anomalije E s srednjo anomalijo μ dobimo:

$$\varphi \approx \mu + 2\varepsilon\sin\mu + \frac{5\varepsilon^2}{4}\sin(2\mu) + \frac{\varepsilon^3}{12}(13\sin(3\mu) - 3\sin\mu).$$

Sedaj lahko izrazimo približek za trenutno kotno hitrost $\omega(t)$:

$$\omega(t) = \dot{\varphi}(t) = \varphi'(\mu)\dot{\mu}(t) = \frac{2\pi}{T}\varphi'(\mu).$$

Dobimo:

$$\omega(t) \approx \frac{2\pi}{T}\left(1 + 2\varepsilon\cos\mu + \frac{5\varepsilon^2}{2}\cos(2\mu) + \frac{\varepsilon^3}{4}(13\cos(3\mu) - \cos\mu)\right).$$

Kot θ v ravnini nebesnega ekvatorja naj bo pravokotna projekcija kota ϕ v ravnini ekliptike. Kot ϕ merimo od kota $-\varphi_0$, ko je Zemlja točno v zimskem solsticiju. Nekaj dni kasneje brez velikega pompa smukne skozi perihelij ali prisončje (slika 104). Pazimo na oznake z grškimi črkami: φ ni isto kot ϕ, ϑ pa ne isto kot θ.

Beseda *perihelij* je nastala iz grškega predloga περί, *pri, ob, okrog, okoli*, in samostalnika ἥλιος, *sonce*. Za *afelij, odsončje*, je razlaga rahlo bolj zapletena. Predlog ἀπό pomeni *od*. Ta se skrajša v ἀπ' pred ἥλιος, ki se izgovarja *hélios*, *p* in *h* pa se zlijeta v *f*, torej v φ, ki so ga sami Grki φ izgovarjali s pridihom kot $\mathrm{p^h}$, podobno kot so χ izgovarjali kot $\mathrm{k^h}$. Zato ni čudno, če so φ v latinščini nadomestili s ph, χ pa s ch. To se pozna še danes v nekaterih zahodnih jezikih. Center privlaka je pri tej stvari Sonce (☉).

Luna (☽) in umetni sateliti se tudi gibljejo okoli Zemlje po eliptičnem tiru in so v nekem trenutku najbliže Zemlji (⊕), v nekem drugem pa najbolj stran od nje. Točki, kjer se to zgodi, imata tudi posebni imeni: *perigej* ali *prizemlje* in *apogej* ali *odzemlje*. Tokrat grška predloga περί in ἀπό povežemo z besedo γῆ, kar pomeni *zemlja*.

Matematik s perigeji, periheliji, apogeji in afeliji ne more biti ravno zadovoljen. Ker Keplerjevi zakoni veljajo po širnem vesolju, nam hitro zmanjka imen, pred katera pritikamo predloga περί in ἀπό. Tedaj govorimo o *apsidah*. Apsidi sta točki na eliptični tirnici, ki sta ekstremno oddaljeni od privlačnega središča. Po analogiji s prejšnjimi pojmi delimo apside na *periapside* in *apoapside*. Beseda *apsida* izhaja iz grške besede ἅψίς z več pomeni: *spajanje, vezanje, pentlja, zanka, platišče kolesa, krog, nebesni svod*. V arhitekturi je apsida pri romanskih cerkvah polkrožni prostor s kupolo.

Glede na osrednje nebesno telo so si izmislili celo serijo imen za apside. Za bližnjo Luno sta apsidi *perilunij* in *apolunij*, pa tudi *perisintij* in *aposintij*, na podlagi grške besede Κυνθία, vzdevku Artemide, boginje lova, živali, narave, rasti in rojstva, Ἄρτεμις, ki je bila rojena na gori Kintos, Κύνθος, najvišji gori na otoku Delos, Δήλος. Gora za naše pojme ni visoka, dviga se samo 112 m nad gladino morja. Kaj ima Artemida z Luno? Ima. Pri Amazonkah je bila Artemida boginja meseca. V poklasičnem obdobju, tudi v renesansi, so jo upodabljali s polmesecem. Za apsidi v zvezi z Luno uporabljajo tudi besedi *periselenij* in *aposelenij*, ki imata za osnovo grško besedo σελήνη, luna.

Veliko mitologije se skriva v teh imenih. Apsidi za planet Merkur (☿) sta *perihermij* in *apohermij*, ker je krilati bog Merkur, ki je planetu posodil ime, dvojnik grškega boga Hermesa, Ἑρμῆς, ki je bil sel bogov, bog pastirjev in čred ter zaščitnik popotnikov, trgovcev in tatov. V zvezi s planetom Venera (♀) govorimo v tem smislu o *perisiteriju* in *apositeriju*. Kitera, grško Κύθηρα, je Afroditin otok, kjer se je boginja Afrodita, Ἀφροδίτη, rodila iz morske pene. Venera, po kateri imenujemo planet, je rimska dvojnica grške boginje Afrodite, boginja ljubezni, lepote in plodnosti. Po latinsko so Kitera pisali kot Cythera, zlog *cy* pa so začeli izgovarjati kot *si* in zato imamo namesto perikiterij perisiterij. Podobno sta poimenovani apsidi za planet Mars (♂) *periarej* in *apoarej*. Mars, po katerem se planet imenuje, je rimski dvojnik grškega boga vojne Aresa, grško Ἄρης. Tudi preostali planeti Sončevega sistema, Jupiter (♃), Saturn (♄), Uran (♅), Neptun (♆) in Pluton (♇), imajo apside, ki nosijo eksotična imena iz grško-rimske mitologije.

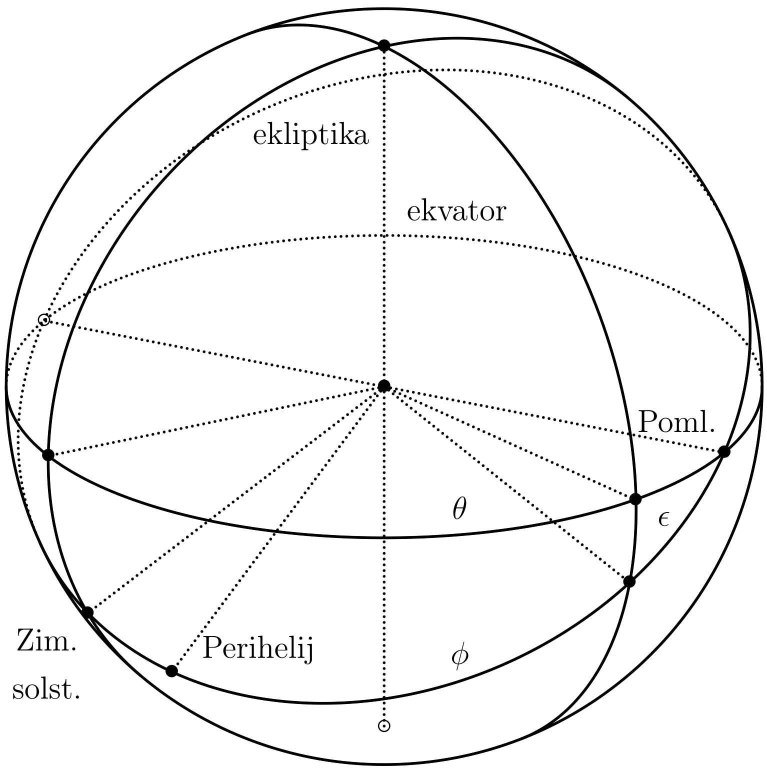
Vrnimo se k zimskemu solsticiju in smuku Zemlje skozi perigej. Obe ravnini oklepata oster kot ϵ. Velja preprosta zveza:

$$\tan\theta = \frac{\tan\phi}{\cos\epsilon}.$$

Izpeljemo jo iz pravokotnega trikotnika s hipotenuzo $\pi/2-\phi$, kateto $\pi/2-\theta$ ter kotom ϵ nasproti te katete. Zanje velja enačba

$$\tan(\pi/2-\theta) = \tan(\pi/2-\phi)\cos\epsilon\,,$$

iz katere dobimo zgornjo zvezo. Preprost račun nas pripelje do odvoda, to je



Slika 104: Zemlja v ekvatorskem koordinatnem sistemu.

do projekcijskega faktorja:

$$f(\phi) = \frac{d\theta}{d\phi} = \frac{\cos\epsilon}{1 - \sin^2\epsilon\cos^2\phi}.$$

To funkcijo razvijmo v kosinusno Fourierovo vrsto:

$$f(\phi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\phi)$$

s Fourierovimi koeficienti

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\phi)\cos(n\phi)\,d\phi = \frac{\cos\epsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos(n\phi)\,d\phi}{1 - \sin^2\epsilon\cos^2\phi}\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Integral prevedemo s substitucijo $z = \exp(i\phi)$ na integral kompleksne funkcije po pozitivno orientirani enotski krožnici:

$$a_n = \mathrm{Re}\,\frac{\cos\epsilon}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\exp(in\phi)\,d\phi}{1-\sin^2\epsilon\cos^2\phi} = \mathrm{Re}\,\frac{\cos\epsilon}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^{n-1}\,dz}{1-\sin^2\epsilon(z+1/z)^2}.$$

S poenostavljanjem dobimo:

$$a_n = \mathrm{Re}\,\frac{4\cos\epsilon}{\pi i}\oint_{|z|=1}\frac{z^{n+1}\,dz}{2z^2(2-\sin^2\epsilon)-z^4\sin^2\epsilon-\sin^2\epsilon}.$$

Podintegralska funkcija $g(z)$ ima 4 pole, od katerih sta $z_1 = \tan(\epsilon/2)$ in $z_2 = -\tan(\epsilon/2)$ znotraj krožnice $|z| = 1$. Ni težko izračunati ostanka funkcije $g(z)$ v točkah z_1 in z_2:

$$\mathrm{Res}\,(g(z), z_1) = \frac{\tan^n(\epsilon/2)}{8\cos\epsilon}\,, \quad \mathrm{Res}\,(g(z), z_2) = (-1)^n\frac{\tan^n(\epsilon/2)}{8\cos\epsilon}.$$

Nazadnje je pred nami rezultat:

$$a_n = \mathrm{Re}\,\frac{4\cos\epsilon}{\pi i}\cdot 2\pi i(\mathrm{Res}\,(g(z), z_1) + \mathrm{Res}\,(g(z), z_2)) = \tan^n(\epsilon/2)(1+(-1)^n).$$

Očitno je treba razlikovati med lihimi in sodimi indeksi:

$$a_{2n} = 2\tan^{2n}(\epsilon/2)\,, \quad a_{2n+1} = 0\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Torej imamo razvoj:

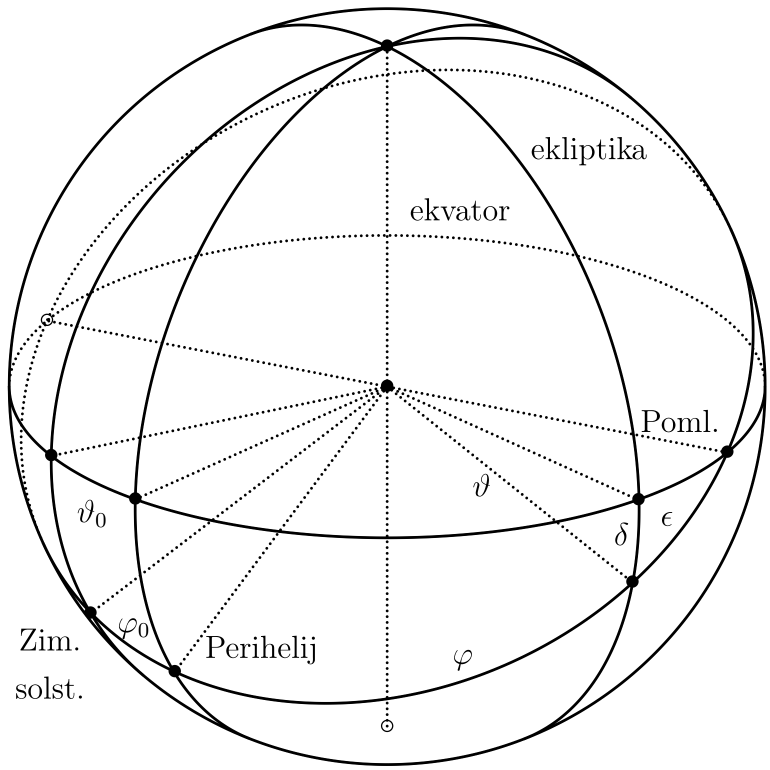
$$f(\phi) = \frac{d\theta}{d\phi} = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\tan^{2n}(\epsilon/2)\cos(2n\phi).$$

Z integracijo najdemo

$$\theta = \phi + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\tan^{2n}(\epsilon/2)\sin(2n\phi) + \theta_c\,,$$

kjer je θ_c integracijska konstanta. V času spomladanskega enakonočja pa velja (slika 105): $\theta = \phi = \pi/2$, iz česar takoj sledi, da je $\theta_c = 0$.

Vse to, kar smo doslej izračunali, je precej zapletena reč, čemur se ni treba čuditi, saj je Zemljina os nagnjena glede na ravnino ekliptike, poleg



Slika 105: Koti v ekvatorskem koordinatnem sistemu.

tega gibanje Zemlje ni krožno, ampak eliptično. Pa še to v idealnih pogojih, saj nismo upoštevali ne precesije, ne nutacije, ne drugih nebesnih teles, ne dejstva, da se Sonce in Zemlja vrtita okoli skupnega težišča, ki je rahlo odmaknjeno od središča Sonca, in drugih motenj.

Pravo anomalijo φ merimo od polarne osi, ko je Zemlja v periheliju, kjer tudi začnemo meriti čas t in srednjo anomalijo $\mu = \bar{\omega}t$. Označimo s ϑ pravokotno projekcijo kota φ na ravnino nebesnega ekvatorja, s ϑ_0 pa pravokotno projekcijo kota ϕ_0. Za kota $\phi = \varphi + \varphi_0$ in $\theta = \vartheta + \vartheta_0$ potem velja:

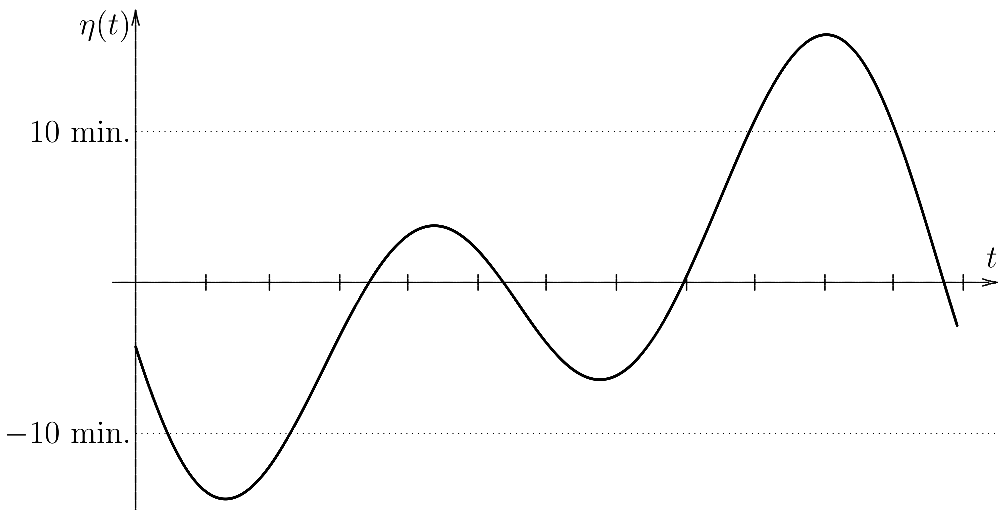
$$\vartheta + \vartheta_0 = \varphi + \varphi_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{2n}(\epsilon/2) \sin(2n(\varphi + \varphi_0)) \,,$$

pri tem pa velja zveza

$$\tan\vartheta_0 = \frac{\tan\varphi_0}{\cos\epsilon}.$$

Tako imamo naslednjo povezavo med pravo anomalijo φ in njeno pravokotno projekcijo ϑ na ravnino nebesnega ekvatorja:

$$\vartheta = (\varphi_0 - \vartheta_0) + \varphi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan^{2n}(\epsilon/2)\sin(2n(\varphi+\varphi_0)).$$

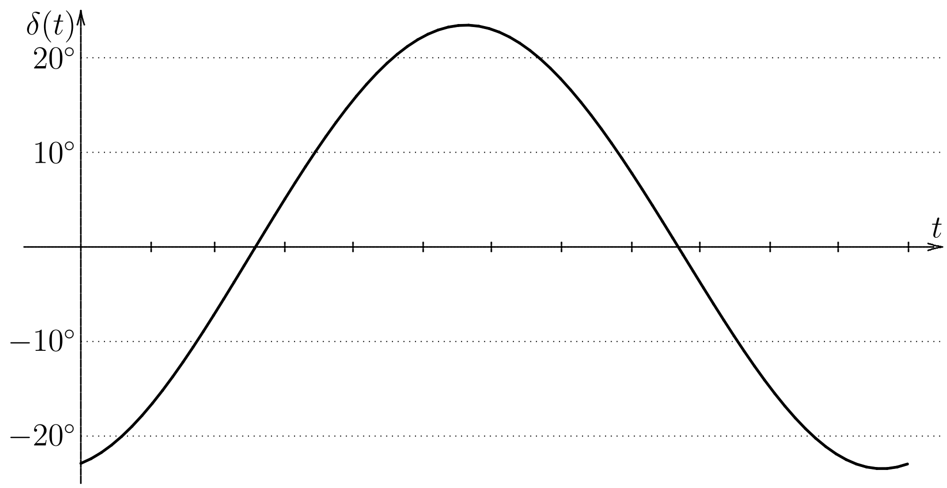


Slika 106: Časovna enačba.

Razliko med srednjo anomalijo μ in pravokotno projekcijo ϑ prave anomalije φ na ravnino ekvatorja imenujemo *časovna enačba*, ki jo označujemo z $\eta = \eta(t)$, to se pravi

$$\eta(t) = \mu(t) - \vartheta(t).$$

Med letom se časovna enačba spreminja tako, kot kaže slika 106. Kot vidimo, časovna enačba kar precej odstopa od nič, na vsako stran za približno 15 minut.

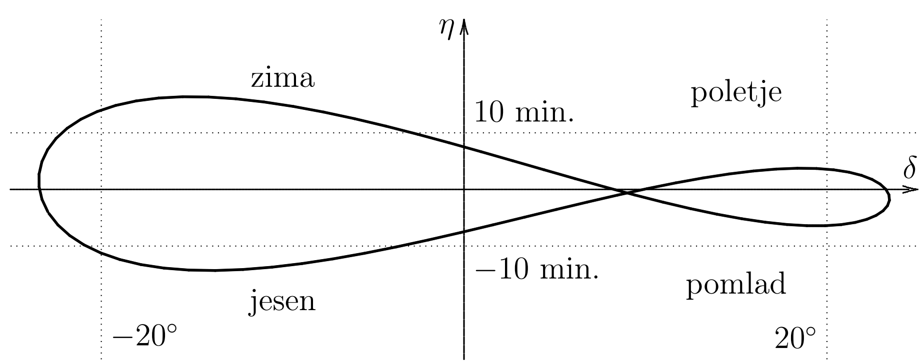


Slika 107: Deklinacija Sonca.

Zaradi nagnjenosti Zemljine osi na ravnino ekliptike se namreč med letom spreminja deklinacija Sonca, ki jo izrazimo s sinusnim izrekom sferne trigonometrije, to je v obliki

$$\sin\delta = -\sin\epsilon\cos(\varphi+\varphi_0)\,,$$

Spreminjanje deklinacije Sonca po mesecih v letu ponazarja slika 107.



Slika 108: Analema.

Izrazimo pravo anomalijo φ s srednjo anomalijo μ, nato pa projekcijo ϑ prave anomalije na ravnino nebesnega ekvatorja. Časovna enačba η pove razliko med pravim in srednjim Sončevim časom. Če v pravokotni koordinatni sistem v smeri ene koordinatne osi nanašamo η, v drugi pa deklinacijo Sonca δ, dobimo osmici podobno krivuljo, ki ji pravijo *analema*.

Beseda *analema* je grškega izvora. Samostalnik ἀνάλημμα pomeni podstavek pri sončni uri. O analemi je pisal že Klavdij Ptolemaj, grško Κλαύδιος Πτολεμαῖος. Analemo dobimo, če dan za dnem opazujemo točno opoldne lego Sonca na nebu. To lego vnesemo v koordinatni sistem kot točke in jih povežemo v krivuljo, ki ima obliko nekoliko popačene osmice.

Ptolemajevo najbolj znano delo je *Almagest*, kar je polatinjena oblika drugega dela arabskega naslova *Al-kitabu al-majisti*, الكتاب المجسطي, kar bi lahko prevedli kot *Veliki zbornik*. Arabci so besedo *majisti* izpeljali iz grškega presežnika μέγιστος, *največji*. Grki pa so jo imeli za *Veliko razpravo*, Ἡε μεγάλη συντάξις.

Trigonometrija vendarle ni tako težka, kot me je v Cerknem nekoč skušal prepričati zobozdravniški par. Pa vsemu navkljub ima ta veda kar častitljivo starost. Zrasla je z opazovanjem neba, ki se je še v mojem šolskem obdobju ponoči imenitno videlo v primerjavo z današnjim. Opazovanje neba je omogočilo sestavljati koledarje, ki so bili potrebni v poljedelstvu. Zemlja je bila vir preživetja in spoštovana dobrina, ne pa tako kot danes, ko se odgovorni z veliko lahkoto pogovarjajo le še o zemljiščih, kako jih bodo čim ugodneje prodali in ob tem čim bolj mastno zaslužili, obenem pa jih pozidali in zabetonirali.

Zaradi opazovanja neba se je najprej razvila sferna trigonometrija, katere osrednji pojem je sferni trikotnik. Njegove stranice potekajo po glavnih krogelnih krogih. Astronomsko znanje zasledimo pri starodavnih Kaldejcih, Babiloncih in Egipčanih. Seveda se je razvijala tudi ravninska trigonometrija in s tem povezano merjenje zemlje in stavbarstvo. Od starih narodov so se veliko naučili Grki. Običajno v zvezi s tem navajamo Aristarha, Hiparha, Menelaja, Evklida in Ptolemaja. Po grško zapisani: Ἀρίσταρχος, Ἵππαρχος, Μενέλαος, Εὐκλείδης, Πτολεμαῖος. Znanje trigonometrije se je razširilo v Indijo, kjer so ga še oplemenitili. V zvezi s tem najčešče omenjajo Aryabhato in Bhaskaro I., ki sta poznala sinusno funkcijo skoraj v taki obliki kot danes. Sestavila sta tudi tabele zanjo. Indijska matematika z imenom Bhaskara sta dva, Bhaskara II. je živel nekaj stoletij kasneje kot Bhaskara I., v zvezi s katerim omenjajo letnico 600. Številčenje obeh mož dodajamo zaradi razlikovanja. Tudi v osnovni šoli smo bili njega dni v nekem razredu trije Razpeti: Razpet I., Razpet II. in Razpet III. Indijsko znanje trigonometrije so sprejeli Arabci in jo spet oplemenitili s svojim znanjem. Od 9. do 13. stoletja so ji dodali marsikaj. Omeniti je treba imena Al-Battani, arabsko البتاني, Abu al-Wafa, arabsko ابو الوفا, in Al-Biruni, البيروني.

V 15. stoletju so se s trigonometrijo, zahvaljujoč Arabcem, začeli ukvarjati tudi Evropejci. Omenjajo imena, kot so na primer Johannes Müller iz Königsberga na Bavarskem, latinsko Johannes de Monte Regio, zato bolj znan kot Regiomontanus, François Viète, če hočete tudi Vieta, Georg Joachim Rheticus, Bartholomaeus Pitiscus, Leonhard Euler, Johann Heinrich Lambert in baron Jurij Vega, rojen v Zagorici, nekoč v moravški fari.

Bolj znan je pruski Königsberg, ki je bil nekoč cvetoče mesto ob Baltiku. V njem je živel filozof Immanuel Kant (1724–1804), v njem je krajši ali daljši čas delovalo kar nekaj znanih matematikov, na primer Christian Goldbach, Carl Gustav Jacob Jacobi, Friedrich Wilhelm Bessel, Ferdinand von Lindemann, David Hilbert, Adolf Hurwitz, Hermann Minkowski, Heinrich Weber. Ko sem nekega nemškega matematičnega zgodovinarja nekoč vprašal, kaj je danes s Königsbergom, mi je odgovoril, da to že davno ni več Königsberg, kar dobesedno pomeni *kraljeva gora*, ampak je samo še Калининград. Kaliningrad je danes v ruski enklavi, stisnjeni med Poljsko in Litvo. Študenti si navadno zapomnijo vsaj problem königsberških sedmih mostov, ki ga je rešil sam Euler in s tem postavil osnove kar dveh matematičnih področij: teorije grafov in topologije. Nekoliko teže jim gre v glavo, kaj pomeni, da je π transcendentno število. Ta trd oreh je leta 1882 strl ravno omenjeni Lindemann in s tem dokazal, enkrat za vselej, da kvadratura kroga z ravnilom in šestilom ni mogoča. Morda je s tem prihranil trud marsikomu, ki bi rad rešil ta znameniti antični matematični problem. Še vedno pa ni bil nihče do danes kos Goldbachu. Goldbach je postavil domnevo, da se **vsako** sodo število, ki je večje od 2, da zapisati kot vsota dveh praštevil. Res je

$$4 = 2 + 2,\ 6 = 3 + 3,\ 8 = 3 + 5,\ 10 = 3 + 7,\ 12 = 5 + 7,$$

toda, da se tako da zapisati **vsako** sodo število, tega pa še nihče ni zmogel **dokazati**. Z Jacobijem se študenti srečajo vsaj pri uvedbi novih spremenljivk v dvojni in trojni integral, kjer potrebujejo Jacobijevo determinanto. Tudi o preostalih königsberških matematikih bi lahko povedali kaj zanimivega, kar pa ni težko najti v bogati svetovni literaturi, ki je povezana z zgodovino matematike.

Dodajmo še to, da v vsakdanjem življenju uporabljamo razmeroma veliko izrazov, ki so arabskega izvora. Poleg kafre in kave jih je nekaj, ki se začnejo na *al*, kar je arabski določni člen ال. Beseda *alkohol* je arabskega izvora. Beseda الكحول je prvotno pomenila neki fini antimonov prašek za ličenje. Kasneje je postala splošen izraz v organski kemiji. V vsakdanjem življenju pa vemo, kako je z alkoholom. Obnese se v medicini kot razkužilo, po drugi strani pa uničuje zdravje posameznikov in celih družin. Države pa pobirajo davek od njega, tako kot tudi od drugih uničevalcev zdravja, tobaka na primer. Skupaj z evangelistom sv. Janezom lahko samo zakričimo, čeprav ne bo nič bolje: "Véliki Babilon, mati vseh vlačug in gnusob na zemlji."

Veja matematike, vsem znana *algebra*, je dobila ime iz naslova znamenitega dela الكتاب المختصر في حساب الجبر والمقابلة, ki ga je ustvaril matematik Muhammad ibn Musa Al-Khwarizmi, محمد بن موسى الخوارزمي. Algebra se skriva v besedi الجبر, celoten naslov pa pomeni nekaj takega kot *Knjižica o računskih postopkih z dopolnjevanjem in izravnavanjem*. Al-Khwarizmiju, ki je živel v 9. stoletju, gre zahvala tudi zaradi popularizacije indijskih številk, iz njegovega imena pa so skovali tudi besedo *algoritem*, latinsko *algoritmus*. Algoritem pomeni v matematiki natančno določen postopek, zaporedje korakov, po katerih iz danih podatkov pridemo do rezultata. Profesor Karčnik nas je že v prvem razredu gimnazije naučil *Evklidov algoritem*, s katerim smo računali največji skupni delitelj dveh naravnih števil, kasneje pa še *Hornerjev algoritem*, s katerim smo tratili čas in svojo mladost z dolgočasnim iskanjem ničel polinomov, in to brez uporabe elektronskih računal, ki jih takrat sploh še ni bilo.

William George Horner (1786–1837), v Bristolu rojeni matematik, nam je zapustil svoj algoritem, ki ni nič posebnega ne v izpeljavi ne v uporabi. Izkazalo se je, da sta ga že prej obvladala neki Kitajec in Italijan Paolo Ruffini (1765–1822). Da kljub vsemu algoritem skoraj vsi vprek imenujejo po Hornerju, je kriv Škot Augustus De Morgan (1806–1871), ki je tako pisal v svojih številnih člankih. Ruffinija srečamo v Abel–Ruffinijevem izreku, ki trdi, da ničel polinomov pete ali višje stopnje v splošnem ne moremo izraziti z osnovnimi aritmetičnimi operacijami in koreni. Niels Henrik Abel (1802–1829), norveški matematik, je študentom matematike znan po *Abelovih grupah*. Nekateri raje govorijo o *abelovskih grupah*. Odlični matematik nam je zapustil, kljub temu, da je mlad umrl, bogato dediščino. Zato ni nič čudnega, če so ustanovili *Abelovo nagrado* za izjemne matematike. Nagrajence izbira posebna komisija pri Norveški akademiji znanosti, podeljuje pa jo sam norveški kralj. Prvič se je to zgodilo leta 2003. Nagrada je podobna Nobelovi. Zlobni jeziki pravijo, da Nobelove nagrade za matematiko ni zato, ker njen ustanovitelj, Alfred Nobel (1833–1896), ni maral matematike.

De Morgan je bil pa tisti, ki je ugotovil, da je v logiki negacija konjunkcije izjav P in Q logično ekvivalentna disjunkciji njunih negacij, negacija disjunkcije izjav P in Q pa logično ekvivalentna konjunkciji njunih negacij, kar s simboli zapišemo takole:

$$\neg(P \wedge Q) \iff \neg P \vee \neg Q,\ \neg(P \vee Q) \iff \neg P \wedge \neg Q.$$

Videti je, kot da so nekoč že vse odkrili in nam prepustili same najtežje in nerešljive probleme. De Morgan se je ukvarjal tudi z verjetnostnim računom, pri čemer je vztrajno metal kovanec in štel, kolikokrat je padel grb in kolikokrat številka, pogovorno cifra. Kovanec je vrgel 4090-krat, grb mu je padel 2047-krat, številka pa 2043-krat. Človek bi pričakoval, da bo grb po zelo velikem številu metov padel enako mnogokrat kot številka, a sam verjetnostni račun pove, da se to le malokdaj zgodi.

Beseda *cifra* je arabskega izvora, ki je prišla v Evropo skupaj z arabskimi številkami, med katerimi je tudi znak za nič, po arabsko الصفر. Tako je arabska beseda za nič postala pri Nemcih izraz za vse števke. Nemci so začeli v tem smislu uporabljati besedo *Ziffer* in od njih je k nam prišla beseda *cifra*. Iz iste arabske besede je naslala še *šifra*, v francoščini *chiffre*, v angleščini *cipher*, v ruščini шифр, kar uporabljamo v zvezi s tajnimi pisavami. Iz njih se je razvila cela znanost, *kriptografija*, ki se ukvarja s tem, kako zapisati informacijo, da jo ne more ravno vsak cepec prebrati, ampak samo tisti, kateremu je namenjena. Tako se eni trudijo, kako informacijo čim bolj učinkovito šifrirati, drugi pa, kako jo dešifrirati. Beseda *kriptografija* je sestavljena iz dveh grških elementov: κρυπτός pomeni *skrit, tajen, skriven*, γράφω pa med drugim *pišem, zapišem*. Pametni Nemci so razvili slavni šifrirni stroj *Enigma*. Ime izhaja iz grške besede αἴνιγμα, kar pomeni *uganka, zagonetka*. Kljub zagonetnosti Enigme je le-ta med drugo svetovno vojno padla zahvaljujoč poljskim in angleškim matematikom. Morda se je vojna v Evropi tudi zato prej končala.

Ker so arabske številke pravzaprav indijske, povejmo še to, na je ničla v sanskrtu *sūnya*, zapisano v pisavi devanagari kot शून्य. Komplet indijskih števk je ० १ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९, arabskih pa ٠ ١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩.

Iznajdba desetiškega sistema in mestnega zapisa na tleh Indije se mi ne zdi nič čudnega. Enostavno rečeno, potreba po zapisu velikanskih števil, ki se pojavljajo v indijskih svetih spisih, Vedah, v sanskrtu वेद, kar pomeni *znanje, veda*, je narekovala uvedbo mestnega zapisa. V starodavnih vedah se omenja na primer časovni cikel *satja juga*, v sanskrtu सत्य युग, ki traja

1 728 000 let. V šoli smo se učili o indijskih epih Mahabharata, v sanskrtu महाभारत, ko jo sestavlja okoli 100 000 dvojnih verzov, tako da sta Iliada in Odiseja prava pritlikavca v primerjavo z njo, in Ramajana, v sanskrtu रामायण, ki je približno štirikrat manj obsežna. Težko bi zapisali taka števila brez desetiškega sistema.

Poiščimo še kakšno besedo arabskega izvora. Že v osnovni šoli smo z nekakšnim zaničevanjem, ki je bilo takrat v modi za vse, kar je bilo staro, slišali besedo *alkimija*, kemijo srednjega veka, iskanje kamna modrosti in zdravil. *Alkimija* je arabskega izvora, nastala iz besede الكيمياء. Pravijo, da so si Arabci besedo izposodili od Grkov, ki so uporabljali za ulivanje kovin besedo χημεία, ki pa je verjetno egiptovskega izvora. Čudnega nič, saj so Egipčani že davno znali mumificirati pokojnike, torej so kar dobro obvladali pomemben del kemije.

V vsakdanjo rabo je po čudni poti prišla iz arabščine beseda *zenit*, ki pomeni po naše *nadglavišče*, to je točka na namišljeni nebesni obli, nad opazovalcem. V arabščini je bila to سمت الرأس, kar dobesedno pomeni *smer nad glavo, teme*. Od vsega skupaj so v Evropi obdržali besedo سمت, *samt*, kar pomeni *smer*. Nekdo je napačno zapisal v latinici *semt* ali *zemt*, naslednji je namesto *m* prepisal *ni*, kakor marsikdaj naredi dandanes elektronski optični čitalnik, ko razpoznava črke, pa smo dobili besedi *senit* oziroma *zenit*, ki sta se prijeli in ostali. Prav tako smo iz arabščine dobili besedo *nadir*, *podnožišče*, ki je nasprotno od zenita, pod opazovalcem. V arabščini namreč beseda نظير pomeni *nasprotno*.

Astronomom je znana zvezda *Mizar*, ki pa z izdelovanjem miz nima nobene povezave. Mizar je v ozvezdju Velikega voza, in sicer srednja zvezda v njegovem ojesu. Učeno: *Zeta Ursae Maioris*, ζ *Uma*. V arabščini je ta zvezda مئزر, najdemo pa tudi ميزر, kar pomeni *pas* oziroma *plašč*. Navidezno zelo blizu Mizarju je zvezda *Alkor*. Že dolgo raziskujejo, ali sta Mizar in Alkor dvozvezdje ali kaj drugega. Nekoč je veljalo, da zares dobro vidi tisti, ki s prostimi očmi razločuje obe zvezdi. Besedo *Alkor* je teže pojasniti. Arabskega izvora je tudi ime zvezd Betelgeza, Vega in Atair.

Azimut je pogosta beseda, ki izhaja iz arabščine. Beseda السموت pomeni *poti*, torej pot v množini. Azimut je pri orientaciji v naravi vodoravni kot, ki ga oklepa smer iz nekega opazovališča proti severu s smerjo opazovane točke, meri pa se v smeri gibanja kazalcev na uri.

Tudi beseda *admiral*, ki označuje najvišjo vojaško stopnjo v mornarici, je arabskega izvora. Izvira iz arabskih besed أمير البحر, kar pomeni *komandant morja*. Admiralu ustreza v kopenski vojski general.

Gazela, ime ljubke, urne in rogate živali, je po arabsko غزال. Gazela je tudi krajša arabsko-perzijska lirska pesniška oblika. Prav tako je beseda *žirafa* arabskega izvora. Izhaja namreč iz besede زرافة.

Beseda *hašiš*, droga iz indijske konoplje, je po arabsko حشيش, kar dobesedno pomena *posušena rastlina* ali *trava*. V Cerknem ga dolgo niso poznali. Da pa bi šli tudi Cerkljani v korak s časom, so ga kaj kmalu prinesli dijaki in študentje, tako da so se kmalu pojavile njegove konkretne sledi okoli osnovne šole in celo otroškega vrtca.

Obstaja še cel kup bolj ali manj znanih besed arabskega izvora: *almanah, arzenal, kaliber, karat, cifra, eliksir, harem, limona, magazin, oranža, soda, zofa, sirup, tarifa, albatros, baobab, monsun, sezam, žep*.

Za konec

Čemu smo v tole delo vnesli toliko stare grščine? Zato, ker veliko, kakor smo spoznali že na začetku, celo vsakdanjih besed izvira v tem jeziku, če nam je všeč ali ne. Da o besedah grškega izvora v znanosti raje ne govorimo. Celo pogosto uporabljena beseda *temelj* je grška: θεμέλιος ali θεμέλιον. Pogovorna beseda *kišta*, to je *zaboj*, je po čudni poti prišla iz grščine. Grki so besedo κίστη uporabljali v pomenu *zaboj, skrinja, kovček*. Kaže, da so jo prek latinske oblike *cista* prevzeli Nemci, od njih pa Slovenci. Ko so naši vrli jezikoslovci čistili jezik, je *kišta* iz znanih razlogov padla v nemilost in postala nezaželena. Beseda *koliba* je tudi iz grščine: καλύβη namreč pomeni *šotor, koča, koliba, streha*. Govorimo učeno in se delamo učene, pa se pri tem ne zavedamo, da so nekatere besede grškega izvora, torej stare več tisoč let. Praznujemo binkošti, pa le malokdo ve, da prihaja ta beseda iz grške: πεντηκοστός – *petdeseti*. Binkošti so pač petdeseti dan po veliki noči. Rimljani so od Grkov prevzeli veliko besed in jih po pisavi in naglasu prilagodili latinščini. V latinizirani obliki so se besede ohranile v evropskih jezikih do današnjih dni. Veliko je v angleščini besed s črko *Y* ali dvočrkovjem *PH*, ki so grškega izvora. Primeri: pharos – svetilnik, grško Φάρος, otok v aleksandrijskem pristanišču s svetilnikom, eno od sedmerih čudes starega sveta; philosophy – filozofija, modroslovje, grško φιλοσοφία; paradigma – vzor, zgled, grško παράδειγμα; crystal – kristal, grško κρύσταλλος; tragedy – tragedija, žaloigra, grško τραγῳδία. Beseda je nastala iz dveh: τράγος, kar pomeni *kozel*, in ᾠδή, *pesem, petje*. Dobesedno je torej tragedija kozlovska pesem. V starih časih so morda Grki igrali tragedije oblečeni v kozlovske kože, morda so kozla celo dobivali za nagrado ali pa so žival žrtvovali in posnemali njen glas ob usmrtitvi. Kdo ve!

Veliko damo na ekonomijo, imamo ekonomske fakultete, ekonome, ekonomiste. Besede so nastale iz grške οἶκος, kar pomeni *hiša, poslopje, stanovanje*, in νόμος, kar pomeni med drugim *načelo, pravilo, predpis, odredba, zakon,* *postava*. Dvoglasnik οι so v latinščino prevzeli kot *oe*, zato imajo Nemci poleg svoje besede *Wirtschaft* na zalogi še besedo *Ökonomie*. Podobno je z *ekologijo*, ki jo Nemci zapišejo kot *Ökologie*. V antiki (na primer Aristotel) še niso poznali besede *astronomija*, ampak samo *astrologijo*, skovano iz besed ἀστήρ, *zvezda*, in λόγος, *beseda, nauk, veda*. Pod *astrologijo* so razumeli sploh vse, kar je bilo povezano z opazovanjem in preučevanjem zvezd.

Štiri leta sem hodil na gimnazijo, ne da bi se zavedal, da ime tako pomembne šole prihaja iz grščine. Sicer je profesor zgodovine, umetnostne zgodovine, sociologije in filozofije Niko Mozetič nekaj pripovedoval o tem, predvsem da so grški mladeniči nagi telovadili v tako imenovanem *gimnaziju*, grško γυμνάσιον, kamor pa mladenke niso imele vstopa. Beseda izvira v pridevniku γυμνός, kar pomeni *nag*. V Atenah je deloval tudi Likej, Λύκειον, po katerem smo dobili besedo *licej* za naziv neke vrste šole. Aristotel je poučeval v Likeju, ki je stal v gaju, posvečenem bogu Apolonu. V grščini obstajata precej podobni besedi λύκος in λύκη. Prva pomeni *volk*, druga pa je iz arhaične grščine in pomeni *svetloba*. Apolon je imel tudi pridevek Λύκειος, ker je bil tudi bog svetlobe. Zato si niso enotni, po kateri besedi je Likej dobil ime. Apolon je imel tudi svojo temno stran, ki jo je simboliziral ravno volk. Pravijo pa tudi, da so Likej krasili kipi volkov. Ker je bil gimnazij prostor za brezdelico, prosti čas, telesne in duhovne vaje, po grško σχολή, smo iz vsega tega dobili še besedo *šola*.

Štiri gimnazijska leta seveda niso bila vržena stran. Marsikaj smo se naučili, lahko pa bi se še več. Zaradi voženj v Idrijo in nazaj sem bil tako ali drugače odsoten z doma vsaj 10 ur dnevno. Vstajanje ob šestih zjutraj, več kot 20 km poti do Idrije in prav toliko nazaj, pouk v soboto, domače naloge in pomoč doma so bili stalnica. Marsikaj bi lahko povedal še o neurejeni prehrani. Počitnice so bile več kot dobrodošle. Takih primerov ni bilo malo. V Idrijo se niso vozili vsak dan le dijaki s Cerkljanske, ampak tudi iz Godoviča, Črnega Vrha nad Idrijo in celo s Cola. Ob vsem tem mučenju s šolo se marsikomu zdi za malo, ko dandanes sliši in bere, da je ta in ta ponaredil spričevalo ali ga preprosto kupil za nekaj sto nemških mark, prepisal diplomsko in magistrsko delo ali celo doktorsko disertacijo. Tak se bi verjetno iz vseh nas, ki smo vsa leta pošteno garali na gimnaziji in tudi kasneje, delal celo norca.

Kje so bili v Rimu s kulturo, ko so Grki že vneto pesnili, z veliko truda uprizarjali tragedije in komedije, vestno zapisovali svoje epe, na veliko filozofirali, prirejali odmevna tekmovanja v pesništvu, organizirali bleščeče olimpijade, ustvarjali vrhunske likovne umetnine, gradili veličastne templje? Najbrž so hodili naokrog še v živalskih kožah. Marsikateri grški suženj, δοῦλος, je znal več filozofije kot nekateri današnji izobraženci. Žal je Grke na koncu pokopala njihova lastna politika in nenehni medsebojni spori.

Geometrije je bilo na gimnaziji precej. Seveda evklidske geometrije, ki se imenuje po starogrškem matematiku Evklidu, grško Εὐκλεῖδης. Beseda *geometrija* je nastala iz dveh grških besed: γῆ pomeni *zemlja*, μέτρον pa *mera, merilo, merska palica* in podobno. Že zelo zgodaj so ljudje nekaj merili, pogosto obdelovalno zemljo. Zato so začetki geometrije v Egiptu in Mezopotamiji, ker je bilo treba po poplavah zemljo na novo meriti in razdeliti med lastnike. Veliko besed grškega izvora se konča na *-gram*, kar pride iz γραμμή, kar pomeni *črta, poteza*, ter na *-graf*, ki izvira iz glagola γράφω, kar pomeni med drugim *vrežem, pišem*. Pridevnik παράλληλος pomeni *vzporeden, drug poleg drugega*. Sestavimo jo z γραμμή, pa imamo ravninski lik *paralelogram*: παραλληλογράμμον, Močnikov *vštričnik*. Njegov *polvštričnik*, *trapez*, prihaja iz besede τράπεζα, kar pomeni *miza, obed, oltar, plošča*. Precej besed v geometriji ima v sebi zlog *-gon-*, ki pride iz grške besede za kot, γωνία: *goniometrija, trigonometrija, pentagon, poligon, ortogonalnost, diagonala*. Prav tako je veliko besed, ki se končajo na *-ida*. Končnica pride iz grške εἰδής, kar pomeni *podoben, ki ima obliko* tega ali onega.

Besedo *akademija* smo razložili že pri razmišljanju o platonskih telesih. V Ljubljani pa smo imeli Pedagoško akademijo, preden je le-ta prešla v Pedagoško fakulteto. Tudi beseda *pedagoška* je grškega izvora. Sestavljena pa je iz dveh delov. Glagol παιδεύω ima izvor v besedi παῖς z rodilnikom παιδός, *otrok*. Zato pomeni παιδεύω *vzgajam, poučujem*. Glagol ἄγω pa pomeni *vodim, peljem*, ker je nekoč suženj pripeljal otroka v šolo.

Vemo pa vsaj to, da študenti na univerzi čedalje manj poznajo grški alfabet (tabela 13). Večina jih zna zapisati in prebrati le α, β, γ, δ in π, potem pa se že ustavi. Pa samo 24 črk ima. Nič čudnega, če nam je profesor Karčnik za prvo domačo nalogo dal prepisati iz priročnika grški alfabet, in to vse lepo po vrsti, velike ter male črke. Namenoma uporabljamo za urejeno zbirko vseh grških črk besedo *alfabet*, ker črka *c*, ki nastopa v besedi *abeceda*, ni grška. Prav tako običajno govorimo o hebrejskem, arabskem in koptskem alfabetu, ne pa o abecedi.

Na univerzi je profesor Jože Vrabec, ki je bil nam brucem še asistent, na prvih vajah iz matematične analize, ki so potekale v manjši predavalnici v nekdanjem Deželnem dvorcu na Kongresnem trgu, poklical nekoga k tabli, potem pa smo s skupnimi močmi lepo in počasi napisali ali, bolje povedano, po opisu narisali grški alfabet na že precej zdelano črno tablo, seveda vse velike in male črke (tabela 13). Profesor Vrabec je v naslednjem študijskem letu odšel v ZDA, kjer je doktoriral, prinesel domov zvrhano skledo znanja, ki ga je dolga leta razdajal študentom in kolegom.

$\mathrm{A}\ \alpha$	alfa	$\mathrm{I}\ \iota$	jota	$\mathrm{P}\ \rho$	ro
$\mathrm{B}\ \beta$	beta	$\mathrm{K}\ \varkappa$	kapa	$\Sigma\ \sigma\ \varsigma$	sigma
$\Gamma\ \gamma$	gama	$\Lambda\ \lambda$	lambda	$\mathrm{T}\ \tau$	tav
$\Delta\ \delta$	delta	$\mathrm{M}\ \mu$	mi	$\Upsilon\ \upsilon$	ipsilon
$\mathrm{E}\ \varepsilon$	epsilon	$\mathrm{N}\ \nu$	ni	$\Phi\ \varphi$	fi
$\mathrm{Z}\ \zeta$	zeta	$\Xi\ \xi$	ksi	$\mathrm{X}\ \chi$	hi
$\mathrm{H}\ \eta$	eta	$\mathrm{O}\ o$	omikron	$\Psi\ \psi$	psi
$\Theta\ \vartheta$	theta	$\Pi\ \pi$	pi	$\Omega\ \omega$	omega

Tabela 13: Grški alfabet.

Nam najbližji vzhodni alfabeti se začnejo z *A, B, G, D*. Grški z *alfa, beta, gama, delta*, koptski z *alfa, vita, gama, delta* (vita – bita, betacizem kot nekoč na Šentviški planoti ali v novi grščini), arabski z *alif, ba, ta, tha*, perzijski z *alef, be, pe, te*, hebrejski z *alef, bet, gimel, dalet*, aramejski z *alaf, bet, gamal, dalat*, feničanski z *alf, bet, gaml, delt*, gruzinski z *an, ban, gan, don*. Vsi našteti razen arabskega in perzijskega imajo na tretjem mestu črko *G*, na četrtem pa *D*. Zakaj se je potem v latinski abecedi znašla črka *C*, ne pa *G* na tretjem mestu? Orientalski *G*, ki se je pisal na različne načine kot dve stikajoči se črtici, je v Rimu prek znaka, ki je bil podoben $<$ prešel v *C*, ki so ga izgovarjali kot *K* ali *G*. Ta dva sta v paru, prvi je nezveneč, drugi zveneč. To se lepo vidi v slovenščini, saj pri prilikovanju *K* preide v *G*. Marsikdo zato zapiše *gdo* namesto *kdo*. Grki pa so postopoma za *G* osvojili črko Γ. Nekje v 3. stoletju pr. n. št. so se v Rimu zavedli, da pravzaprav *G* ni isto kot *K*, pa so črki *C* dodali prečko in dobili novo črko *G*. Postavili so jo na sedmo mesto, kjer je v grškem alfabetu črka Z, črka *C* pa je ostala na tretjem. Črko *Z* pa so Rimljani postavili na konec svoje abecede, ker je njihov jezik ni potreboval, uporabljali pa so jo v grških izposojenkah. Po tradiciji pa v okrajšavi imen *Gaius* in *Gnaeus* niso zamenjali črk, tako da so še naprej pisali *C.* za prvo, *CN.* pa za drugo.

Zapisali smo, da so črko Z na sedmem mestu zamenjali z *G*. Kako to, saj je Z v tabeli 13 na šestem mestu? Res je! Toda zamenjava se je zgodila, ko so Grki še uporabljali črko digama, F oziroma ϝ v mali varianti na šestem mestu, Z pa je bila na sedmem. Črko F so izgovarjali kot dvoustični *U*, a so jo nadomestili z drugimi črkami in sčasoma opustili. Stari grški alfabet se je namreč začel z A α, B β, Γ γ, Δ δ, E ε, F ϝ, Z ζ. Digama se je v latinščini razvila v črko *F*. Zato je logično, da se po vseh teh spremembah latinska abeceda začne z *A a, B b , C c, D d, E e , F f, G g*.

In kdo pravzaprav je matematik? Po mnenju nekaterih samo tisti, ki je v zadnjih petih letih objavil vsaj dva originalna znanstvena članka v uglednih mednarodnih matematičnih revijah. Da ju le ne bi kdo spregledal! Pomembno pa je v takih člankih tudi pravilno navajanje drugih člankov in knjig. Vsakdo naj bi jih čim bolj navajal ali, znanstveno rečeno, citiral, kot se temu učeno reče, in vsak si želi, da je čim večkrat naveden v delih drugih. Čim več citiraj in morda te bodo tudi drugi nekega dne citirali! Sicer jo moraš kar sam hitro nekam pocitrati. V Reziji uporabljajo glasbilo, ki mu pravijo *citira*. To ni nič drugega kot približno za malo terco više uglašena violina. *Citira* in *bunkula*, mali bas s tremi strunami, dajeta značilnim rezijanskim plesom pravi ritem.

Glede citiranja in objavljanja pa je vse skupaj videti nekako tako, kot pravi Martin Krpan:

> *Še tu med nami, če kdo kakega slepca ali belouško ubije, ne ve,*
> *na kateri grm bi jo obesil, da bi jo videlo več ljudi.*
>
> *(F. Levstik)*

Če ne gre citiranje zlepa, gre pa skoraj zgrda. Marsikdaj kdo poreče avtorju, da ga naj citira, potem pa bo drugič on njega ali pa mu bo šel tako ali drugače na roko. Posebej je treba omeniti še razsodnike za to, kdaj se bo kaj sprejelo v objavo ali ne. Nekateri hitro opravijo svojo nalogo, tako da avtor kmalu izve, pri čem je. Nemalo pa je takih, ki delajo počasi, nekaj pa takih, ki delo zavrnejo, nato pa ga predelajo, si prisvojijo osnovno zamisel in ga objavijo pod svojim imenom. Možnost zlorabe v znanosti je na pretek, tako da se je treba proti njim kar naprej boriti. Obstajajo tudi avtorji, ki pišejo članke pod drugimi, neizmišljenimi imeni, na vse kriplje pa citirajo svoje, že objavljene članke.

V mojih študentskih letih je pevka Eva Sršen prepevala:

> *Ljubi, ljubi, ljubi, ljubi vse ljudi,*
> *slej ko prej boš ljubljen tudi ti, ...*

Dandanes bi morda potrebovali nekoga, ki bi pel nekaj takega:

Le citiraj, le citiraj vse ljudi,
slej ko prej citiran boš tud' ti, ...

Beseda *ljubi* ima le dva zloga, *citiraj* pa tri. Zato se je bilo treba zaradi ritma izmisliti nekoliko spremenjeno besedilo, ki pa vseeno dovolj pove.

Je pa treba priznati, da je sklicevanje na predhodnike otelo marsikatero starodavno misel. Spomnimo se na starogrške filozofe in druge učenjake, od katerih bi ne ostalo nič, če njihove ideje bi ne zapisali mlajši, tako da se je precej le ohranilo. Astronom Ptolemaj je na primer pridno navajal Aristarha, Eratostena, Hiparha, Menelaja in druge. Znanstvene misli so se nam kljub preganjanju, požigom knjižnic in drugim neumnostim ter katastrofam tako ali drugače, na primer s prepisovanjem in prevajanjem, le ohranile.

Dokler so ljudje pisali na pisalni stroj, je bilo še kar, odkar pa zahtevajo članek v elektronski obliki, nekateri razsodniki malo pogledajo besedilo na svojem zaslonu, prečešejo zadevo s črkovalnikom in že izrečejo sodbo. Pogosto nekdo, ki mu materni jezik ni angleščina, najbolj godrnja, češ da je jezik popolnoma zanič. Nekateri morda niti dobro ne razumejo pomembnost znanstvenega odkritja in članek zavrnejo. To se je žal pogosto dogajalo v zgodovini matematike. Spomnimo se samo na Galoisa, mlajšega Bolyaija in Grassmanna. Na srečo so vsaj kasneje našli pravo mesto v zgodovini.

V resnici so objave resna stvar. Če ne objavljaš, te v svetu znanosti preprosto ni. Če ne objavljaš, te hitro in neusmiljeno postavijo na stranski tir. Če ne dokažeš vsak dan sedmih izrekov in treh lem, si odpadnik. Če nikogar ne citiraš, si morda plagiator ali celo izdajalec. Če nikogar ne napišeš kot soavtorja, pa si že egoist, po domače sebičnež. Nekatera dela imajo po nekaj strani navedenih virov in jih kar naprej citirajo, tako da bralec sploh ne more razbrati, katere misli in ugotovitve so pravzaprav avtorjeve. V tem delu sem vsemu navkljub namenoma citiral kar se le da malo.

Upoštevati je treba, da znanstveniki vsega sveta objavljajo vse, ne glede na to, ali je res pomembno ali ne, ker jih v to sili sistem. Revij pa ni neomejeno mnogo. Vse skupaj pa tudi nekaj stane, v resnici kar precej.

Še dobro, da so ljudje pripravljeni delati skoraj zastonj. Odkar se pišejo članki elektronsko, so avtorji praktično tudi stavci, lektorji in ilustratorji. V založbah pa se gredo nekakšne gospode, katerim je treba vse dati, še avtorske pravice. Glede na to, da je vsak sedmi Zemljan Kitajec, je temu ustrezno tudi kitajskih avtorjev. Tako preostali vedno teže pridejo zraven.

Velikokrat pomislim na profesorja Tomaža Pavšiča, rojenega istega leta kot moja pokojna najstarejša sestra, tistega, ki naj bi nekoč šel za pastirja na Mekinovše, pa mu je dež prekrižal načrte, in ki je nekoč poučeval na idrijski gimnaziji. Ker ni bilo drugega profesorja, ki bi z nami šel na maturantski izlet v Dubrovnik, smo dijaki prosili njega in ni nam odklonil. Na izletu smo se veliko pogovarjali o vsem mogočem. Tomaž je o meni menil, da se spoznam le na matematiko in da o filozofskih vprašanjih nimam pojma. Vedel je, da bom šel študirat matematiko v Ljubljano. Ko je pa videl, da se spoznam kar dobro še ne marsikaj drugega, mi je rekel: "Marko! Tebe bodo matematiki še uničili. A ni škoda, da se podajaš na njihova pota?" Zaenkrat se to ni zgodilo in iskreno upam, da se ne bo, čeprav sem doživel že marsikaj.

Tomažu so nekateri kolegi na gimnaziji marsikaj očitali, od raztresenosti in pozabljivosti naprej. Bil je eden redkih Idrijčanov, ki so se v železnih časih marsikaj upali. Kot sodelavec revije *Kaplje* zagotovo ni bil vsem všeč. Kmalu po moji maturi je zapustil gimnazijo in postal kustos Mestnega muzeja v Idriji. V samostojni Sloveniji je bil član slovenskega parlamenta in konzul v Trstu in dejaven pri Svetovnem slovenskem kongresu. Za kaj takega je bil nedvomno primeren, saj je obvladal kar nekaj tujih jezikov. Zadnja svoja leta je veliko publiciral, v glavnem v zvezi z zamejsko, pa tudi z domačo problematiko. Njegova knjiga *Ob stari meji*, ki obravnava nekdanjo rapalsko mejo med Italijo in Jugoslavijo, je doživela že dva natisa. Bil je skoraj že zadnji čas, da je kdo kaj takega napisal, saj je prič za medvojno dogajanje v naših krajih iz dneva v dan manj.

Tako kot povsod, je tudi v matematiki obnašanje njihovih nosilcev različno. Dobijo se resni, uspešni, toda skromni matematiki, pripravljeni na pogovor s komerkoli o čemerkoli.

> Μακάριοι οἱ πραεῖς, ὅτι αὐτοὶ κληρονομήσουσιν τὴν γῆν.
>
> *Blagor krotkim, kajti deželo bodo podedovali.*
>
> *(Mt 5,5)*

Po drugi strani pa imamo prevzetne, ošabne, vzvišene in ohole ljudi tudi v znanosti, kakor da so dokazali poslednji Fermatov izrek, ugnali Poincaréjevo hipotezo, rešili problem kontinuuma in problem štirih barv ter strli za nameček še nekaj Hilbertovih problemov z Goldbachovo in Bieberbachovo domnevo vred. Ti ne govorijo radi ravno s komerkoli o čemerkoli. Morda pa mora biti tako, pa navadni Zemljani tega niti ne razumemo?

> Καὶ ταπεινωθήσεται πᾶς ἄνθρωπος, καὶ πεσεῖται ὕψος ἀνθρώπον,
> καὶ ὑψωθήσεται Κύριος μόνος ἐν τῇ ἡμέρᾳ ἐκείνῃ.
>
> *Smrtnikova prevzetnost bo klonila, človekova ošabnost bo ponižana,*
> *samo Gospod bo vzvišen tisti dan.*
>
> *(Iz 2, 17)*

V zadnjem dejanju nastopi Sonce v vsem svojem sijaju, pride Avrora, boginja jutranje zarje, obdana z dvanajstimi urami dneva in v spremstvu svita, nesoča v zlati posodi jutranjo roso, razžene vse temne oblake in napove lep dan. Tako se konča *Kraljevi balet noči*. Končajmo tudi mi.

Računalniško stavil avtor.
Skice in fotografije ustvaril avtor.