

Šestilo in Lorenzo Mascheroni

Marko Razpet

Seminar za zgodovino matematičnih znanosti

Ljubljana, 4. april 2011

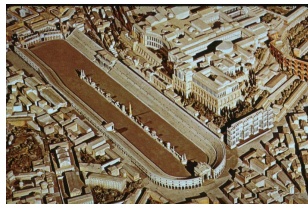
Jarmovka

Na Cerkljanskem je nas otroke nekoč zanimalo, od kod izvirajo besede: Cerkno, Cerknica, Cerklje, cerkev, cirkus, cirkle (nar. šestilo), kasneje pa tudi Kirchheim (nem. Cerkno), Circhina (ita. Cerkno). To je dalo povod za malo raziskavo.

V stari grščini je κρίκος (kríkos) beseda za neki obroček pri vpregi, po naše bi rekli *jarmovka*. Skozi take obročke so vtikali ojesa.



Iz besede κίρκος je z medsebojno zamenjavo dveh glasov nastala beseda za obroč oziroma krog: κίρκος (kírkos). Iz nje se je razvila latinska beseda *circus* z enakim pomenom. Zato imamo besedo *cirkus*, ki je vsem znana, saj so bili prvi cirkusi okrogli ali ovalni.

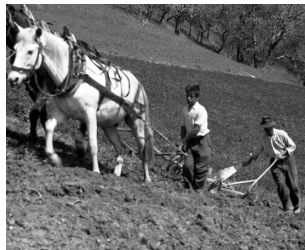


Zanimivo je tudi, da starogrška beseda κίρκος pomeni tudi kanjo, kragulja in skobca. Čudno to ni, saj ti ptiči *krožijo* po zraku, ko iščejo plen. Povsem upravičeno so rjavega in pepelastega lunja, ki sta tudi ujedi, znanstveno poimenovali *Circus aeruginosus* oziroma *Circus cyaneus*.



κρίκος, ó obroč(ek); jarmovka (skozi katero se je vtikalo oje), τῶν ἰστίων obročki, na katerih so bila pritrjena jadra.

κίρκος, ó kanja, kragulj, skobec.



Κίρκη, ἡ čarovnica na otoku Ajaji.

κύκλος, ὁ krog, kolobar, okrožje, obod, okroglina.

Κύκλωψ, ὁ Kiklop.

κυριακὴ οἰκία, Gospodova hiša.

Iz te besede se je razvila beseda *cerkev*, nemško *Kirche*, staroangleško *cirice*.

κύριος, ὁ gospod, vladar, mož, soprog.

V prvi knjigi Evklidovih Elementov piše (Ευκλείδης, Στοιχεῖα):

ιγ'. Κέντρον δὲ τοῦ κύκλου τὸ σημεῖον καλεῖται.

In točka se imenuje središče kroga.

Šestilo je poleg ravnila osnovno načrtovalno geometrijsko orodje. Že v osnovni šoli, ali pa morda že prej, spoznamo, da s šestilom lahko razdelimo krog na šest enakih delov. Zato običajno niti ne razmišljamo o tem, da je beseda *šestilo* ravno zato izpeljana iz števnik *šest*. Hrvati in Srbi uporabljajo za šestilo besedo, ki tudi izhaja iz števnik *šest*, namreč *šestar* oziroma *уесmap*. Prav tako Makedonci. Toda v nekaterih drugih jezikih je popolnoma drugače.

V češčini se šestilu reče *kružítko*, ker je izpeljano iz besede *kruh*, kar pomeni po slovensko *krog*. Starejša češka beseda za šestilo pa je *kružidlo*, ki jo še uporabljajo Slovaki.



Pomanjševalnica latinske besede *circus* je beseda *circulus*, ki se uporablja v pomenu krog, na primer v geometriji. Iz nje so se razvile besede za šestilo v nekaterih jezikih.

V sami latinščini je šestilo *circinus*,

v nemščini *Zirkel*,

v luksemburščini potegnejo v *Zierkel*,

v estonščini *sirkel*,

v poljščini *cyrkiel*,

v ruščini in ukrajinščini *циркуль* (*cirkulj*),

v beloruščini *цыркуль* (*cyrkulj*),

v litovščini *circulis*, v esperantu *cirkelo*.

Šestilo iz arabščine

Bolgari uporabljajo besedo
пергел (pergel).

Turki pa tudi *pergel*. Slednji
so jo sprejeli iz arabščine in
posredovali Bolgarom.



Cela vrsta jezikov pa besedo za šestilo izvaja iz vulgarne latinske besede *compasso*, kar pomeni *odmerjam s koraki*, kajti korak je po latinsko *passus*. Ta beseda pomeni tudi stopinjo, sled ali pa rimsko dolžinsko enoto. S šestilom res lahko odmerjamo kote in razdalje ter jih prenašamo.

Zato imamo besede za šestilo: v italijanščini *compasso*, v španščini *compás*, v katalonščini in okcitanščini (južna Francija) *compàs*, v romunščini *compasul* in moldavščini *комnacyл*, v portugalščini *compasso*, v francoščini *compas*, v nizozemščini *passer*, danščini in norveščini (bokmål) *passer* pa tudi *passeren*, v norveščini (nynorsk) *passaren*, v švedščini *passare*, pa tudi *passaren* ali *cirkelpassaren*, v angleščini *compass* oziroma *compasses*, kar pa je pravzaprav okrajšava za izraz *pair of compasses*, v irščini *an kompás*.

Finci uporabljajo za šestilo besedo *harppi*, Madžari *körző*, proti vsem pričakovanjem pa Grki besedo διαβήτης (v novi grščini se to prebere *diavitis*). *Skriestuv* se reče šestilu v letonščini. Bretonci pravijo šestilu *kelc'hier*, Islandci *hringfarinn* in Baski *konpas*. Na Škotskem pa so nekoč šestilu rekli *an roinneadair*.

Grška beseda διαβήτης, ki nas spominja na vse kaj drugega kot na šestilo, prihaja iz glagola **διαβαίνω**, delam velike korake, razkoračim se.

Šestil je več vrst, odvisno od namena uporabe, pojavlja pa se tudi v nekaterih simbolih.



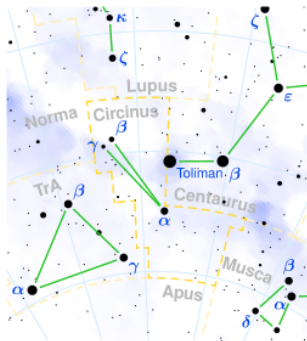
Šestilo v teologiji

V srednjem veku je bilo šestilo simbol za geometrijo, vesoljni red in načrtno delo, zlasti v gradbeništvu, pa tudi v zemljemerstvu.



Ozvezdje

Obstaja tudi ozvezdje Šestilo,
po latinsko *Circinus*, in sicer
na južnem nebu.



Spoznali smo torej, da je izvor besed za šestilo različen: nekatere so nastale iz števnik *šest*, druge iz latinske besede *passus*, tretje iz ustrezne besede za krog.

Lorenzo Mascheroni

Geometrijske konstrukcije samo s šestilom so *Mascheronijeve konstrukcije*. Lorenzo Mascheroni (1750–1800) je bil italijanski matematik, po katerem so take konstrukcije dobile ime.



LA GEOMETRIA DEL COMPASSO DI LORENZO MASCHERONI.



P A V I A anno V della Repubblica Francese.

Presso gli Eredi di Pietro Galeazzi
(1797)

Euler-Mascheronijeva konstanta

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1) \right\}.$$

$$\gamma = 0.577215664901532860606512090082 \dots$$

Za vsako naravno število n velja relacija

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

iz katere sledi po logaritmiranju

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right).$$

Euler-Mascheronijeva konstanta – 1

Levo polovico prepíšemo v obliko

$$\ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n},$$

desno polovico pa v obliko:

$$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n.$$

Namesto naravnega n pišemo raje k :

$$\frac{1}{k+1} < \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}.$$

Euler-Mascheronijeva konstanta – 2

Vse dobljene relacije za $k = 1, 2, \dots, n$ seštejemo in dobimo:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n+1} < \ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Vsota

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

je n -ta delna vsota harmonične vrste

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots$$

Nazadnje lahko zapišemo relacijo

$$h_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < h_n.$$

Takoj vidimo, da harmonična vrsta nima končne vsote.

Zakaj pravzaprav rečemo obravnavani vrsti *harmonična*?

Harmonična sredina $H(a, b)$ pozitivnih števil a in b je obratna vrednost povprečja njunih obratnih vrednosti:

$$H(a, b) = \left(\frac{1}{2} (a^{-1} + b^{-1}) \right)^{-1}.$$

V harmonični vrsti je vsak člen od vključno drugega naprej harmonična sredina svojega levega in desnega soseda:

$$H\left(\frac{1}{n-1}, \frac{1}{n+1}\right) = \left(\frac{1}{2}((n-1) + (n+1))\right)^{-1} = \frac{1}{n}.$$

Zato torej govorimo o harmonični vrsti.

ἁρμονία, ἡ skladnost, pravo razmerje.

Da bi dokazali obstoj Euler-Mascheronijeve konstante, vpeljemo zaporedje $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots$, kjer je $\gamma_n = h_n - \ln n$. Zaporedje s členi γ_n limito. Najprej je seveda $\gamma_1 = 1$ dobimo relacijo

$\gamma_{n+1} = h_{n+1} - \ln(n+1) < 1$ za $n \geq 1$. Torej velja $\gamma_n \leq 1$ za vsak naraven n , nato pa še $\gamma_n = h_n - \ln n > \ln(n+1) - \ln n > 0$ za vsak naraven n . Zaporedje s členi γ_n je torej na obe strani omejeno:

$0 < \gamma_n \leq 1$. Po definiciji števil γ_n in zaradi navedenih relacij imamo $\gamma_{n+1} - \gamma_n = h_{n+1} - \ln(n+1) - h_n + \ln n < 0$. Zaporedje s členi γ_n je torej padajoče in omejeno in zato konvergentno in njegovo limito označimo z γ in to je Euler-Mascheronijeva konstanta.

Eulerjeva konstanta γ je tudi limita zaporedja s splošnim členom $h_n - \ln(n+1)$. Nič čudnega, saj lahko zapišemo

$$h_n - \ln(n+1) = (h_n - \ln n) - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

iz česar dobimo z upoštevanjem zveznosti logaritemske funkcije:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (h_n - \ln(n+1)) = \gamma.$$

Zato lahko enakovredno definiramo:

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln(n+1)\right).$$

Zaporedje s splošnim členom $h_n - \ln n - \gamma$ ima limito 0. Za dovolj velik n je potemtakem $\ln n + \gamma$ poljubno blizu n -ti delni vsoti divergentne harmonične vrste. Kako počasi divergira harmonična vrsta, povesta na primer $h_{1000} \approx 7.48$ in $h_{1000000} \approx 14.39$, o čemer se lahko prepriča bralec sam.

Kot primer uporabe izračunajmo

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right).$$

Očitno lahko izrazimo z delnimi vsotami harmonične vrste in s števili γ_n :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} = \\ & = h_{2n} - h_n = (\gamma_{2n} + \ln(2n)) - (\gamma_n + \ln n) = \gamma_{2n} - \gamma_n + \ln 2. \end{aligned}$$

Euler-Mascheronijeva konstanta – 7

Podzaporedje $\gamma_2, \gamma_4, \gamma_6, \dots$ konvergentnega zaporedja s členi γ_n je tudi konvergentno z isto limito γ . Torej imamo rezultat:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \ln 2.$$

Eulerjeva konstanta se pojavlja v precej zapletenih računih, ki jih tu ne bomo delali. Število e se da sorazmeroma enostavno izračunati, če seštejemo dovolj členov vrste

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots,$$

ki ima za vsoto ravno število e . Eulerjeva konstanta γ pa ni več tako preprosta reč. Razvili so zapletene postopke, s katerimi lahko γ izračunamo poljubno natančno. Sam Euler je svojo konstanto izračunal na 15 decimalk.

Lorenzo Mascheroni se je rodil 13. maja 1750 v Bergamu. Bil je italijanski matematik in pesnik. Najvažnejši so njegovi prispevki v matematični analizi, zlasti na področju integralskega računa in naravnih logaritmov, ter v geometriji, kjer je dokazal, da se konstrukcije z ravnilom in šestilom da opraviti samo s šestilom. Ukvarjal se je tudi s trdnostjo obokov v gradbeništvu. Bil je sin Marije Ciribelli in Paola Mascheronija dell'Olmo, bogatega veleposestnika. Namenjen je bil za cerkveno kariero, v starosti 17 let je postal opat in bil posvečen v duhovnika pri svojih 24 letih.

Leta 1773 je začel s poučevanjem, najprej retorike v bergamskem semenišču (Seminario di Bergamo) in nato na Marijanskem kolegiju (Collegio Mariano), prestižni ustanovi iz 16. stoletja, ki je sedaj Klasični licej Sarpi. Kmalu potem je opustil neuporabno in abstraktno sholastično filozofijo in se strastno posvetil eksperimentalnim znanostim in matematični analizi. Zaradi svojih sposobnosti je bil 3. septembra 1775 sprejet na Akademijo vzbujenih v Bergamu (Accademia degli Eccitati).



Leta 1778 je pričel še s poučevanjem filozofije, ki je v tistem času zajemala tudi logiko, metafiziko in fiziko. Učne načrte na Marijanskem kolegiju so temeljito prenovili leta 1784, pri čemer je izdatno sodeloval tudi Mascheroni, in prišel v spore z učitelji tradicionalisti. Mascheroni je postal učitelj fizike in eksperimentalne fizike. Kmalu po tistem (1785) je v Bergamu objavil svojo fundamentalno matematično delo v statiki: *Nove raziskave o ravnovesju obokov* (Nuove ricerche sull'equilibrio delle volte). Postopoma je napisal tudi zbirko nalog iz matematične analize in geometrije. Leta 1786 je bil imenovan za profesorja algebre in geometrije na Univerzi v Pavii, kjer sta med drugimi poučevala Lazzaro Spallanzani (1729–1799) in Alessandro Volta (1745–1817). Imenovanje je pomenilo veliko priznanje enemu od vodilnih znanstvenikov iz obdobja razsvetljenstva.

Od 1788-1791 je bil tudi vodja Pavijske akademije zaupljivih (Accademia pavese degli Affidati), v letih 1789–1793 pa celo rektor univerze v Paviji. Med drugim je bil za svoje znanstvene dosežke sprejet tudi v Akademijo v Padovi in v Akademijo v Mantovi (Accademia Reale di Mantova), pa tudi v Italijansko znanstveno društvo (Società Italiana delle Scienze).



Naredil si je tudi politično kariero, saj je bil leta 1797 izvoljen za delegata Cisalpinske republike (Repubblica Cisalpina, 1797–1802, glavno mesto Milano), ki ga je poslala leta 1798 v Pariz, kjer je sodeloval v komisiji za dokončno določitev dolžine enega metra. Leta 1791 so določili, da je dolžina pariškega poldnevniškega kroga 40 milijonov metrov, nakar so začeli s poskusnimi meritvami (pod vodstvom Delambreja (1749–1822)) in potrebni so bili natančni izračuni. Komisija je svoje delo končala 10. decembra 1799, vendar pa se Mascheroni ni mogel vrniti domov zaradi avstrijsko–ruske (Aleksander V. Suvorov (1729–1800)) zasedbe Milana (konec aprila 1799), in je po kratki bolezni umrl v Parizu naslednje leto, 14. julija 1800.

Mascheroni je veliko pripomogel k popularizaciji in razvoju infinitezimalnega računa, ki so ga pričeli študirati Leibniz (1646–1716), Newton (1643–1727) in Euler (1707–1783) v prvi polovici 18. stoletja.

Mascheroni in Euler

Leta 1790 je objavil delo *Adnotationes ad calculum integralem Euleri*, kjer je med drugim objavil prvih 32 decimalk konstante γ . Mascheronijev rezultat je napačen na 20., 21. in 22. decimalki, predstavlja pa napredek glede na prvih 13 pravih decimalk, ki jih je izračunal Euler leta 1736. Konstanto γ Euler prvič omenja v svojem delu *De progressionibus harmonicis observationes*, 1734/35.

$$\gamma = 0.577215\ 664901\ 532860\ 606512\ 090082\ 402431 \dots$$

0,577215 664901 5235, ut Eulerus invenit loco citato.
Eadem Euleri methodo actu collectis centum terminis feriet.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \&c. \text{ invenimus esse}$$

$$A = 0,577215\ 664901\ 532860\ 618112\ 090082\ 39.$$

$$\text{Cum vero sit } M = e^{(A-L)} + 1 \text{ erit } M = 1 - 1.2 + 1.2.3 - \&c.$$

$$= 0,403652\ 637676\ 805925\ 7 \dots$$

Cum valor $1 - 1.2 + 1.2.3 - \&c.$ sit realis a valore $x = 0$ usque ad valorem $x = 1 - \omega$, ubi ω est quantitas infinitesima, erit etiam intra hos limites

$$\int \frac{dx}{1-x} = A + 1 - 1.2 + 1.2.3 - \frac{(1.2)^2}{2.2} + \frac{(1.2)^3}{2.3.3} - \frac{(1.2)^4}{2.3.4.4} + \&c. \dots$$

ubi nihil intercedet imaginarium.

Njegovo najbolj znano delo pa je nedvomno *Šestilna geometrija* (La geometria del compasso), ki je izšlo leta 1797, kjer je pokazal, da je mogoče vse geometrijske konstrukcije, ki so izvedljive z ravnilom in šestilom, izvesti že samo s šestilom, če le privzamemo, da je premica določena, čim imamo konstruirani dve njeni točki. Najprej pokaže, kako samo s šestilom in razpolovimo dani krožni lok, nato, kako seštevamo in odštevamo dolžine daljic, kako najdemo četrto sorazmernico treh daljic, kako poiščemo presečišče danih dveh premic in kako najdemo presečišče dane premice s krožnico. Potem Mascheroni dokaže, da je mogoče vse osnovne geometrijske konstrukcije, ki se dajo narediti z ravnilom, opraviti samo s šestilom. V duhu razsvetljenstva vse te konstrukcije niso le same sebi namen, ampak so uporabne tudi pri konstruiranju preciznih inštrumentov.

Prvo teorijo o konstrukcijah samo s šestilom pravzaprav ni razvil Mascheroni, ampak manj znani danski matematik Jørgen (Georg) Mohr (1640–1697), ki jo je objavil v knjigi *Euclides Danicus* leta 1672. To delo pa je ostalo neznano vse do leta 1928, ko so en izvod knjige odkrili po golem naključju. Oba matematika sta teorijo razvila povsem drugače. Zato danes odkritje pripisujejo večinoma samo Mascheroniju. Po Mohru se imenujejo danska gimnazijska matematična tekmovanja: *Georg Mohr-Konkurrencen*.

EUCLIDES DANICUS,

Beskaande udi Too Deele.

Dend Første Deel : Handter udaf de Geometrie / Euclids Bøger / de der udflygessne Maathsmæssige Bevisførsler.

Dend Anden Deel : Giffver anledning til at skilte Bevisførsler af givne / konstruering / Nødvendige / Deeling / Skilbar Legenkeft og Geometriske. Afhandlet med en Cirkel (foruden Enmaal at bruge) med Geometriske af Minder.

Færdigfærdiget.

af

Georg Mohr.



Printet i Amsterdam af Jacob van Delfen.
For Auctore, Aar 1672.

Mascheroni in „matematik“ Napoleon

Napoleon (1769–1821) je Mascheronija srečal med svojimi vojaškimi pohodi po Italiji in v roke mu je prišla Mascheronijeva knjiga o integralnem računu. V Parizu so jo pokazali slavnima matematikoma Josephu Louisu Lagrangeu (1736–1813) in Laplaceu (1749–1827), 11. februarja 1797, takoj po mirovni pogodbi v Campoformido (tudi Campoformio, furlansko Cjampfuarmit).

GÉOMÉTRIE DU COMPAS,

PAR L. MASCHERONI.

Traduite de l'Italien

PAR A. - M. CARETTE,

OFFICIER SUPÉRIEUR DU GÉNIE.

SECONDE ÉDITION.



PARIS,

BACHELIER, SUCCESSION DE M^{me} V^e COURCIER,
Libraire pour les Mathématiques, quasi des Augustins ;

ET A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE.

1828.

Spomnimo se, da neki izrek o trikotniku pripisujejo cesarju Napoleonu, enega redkih pomembnih izrekov o trikotniku, ki je bil dokazan po zatonu grške geometrije. Mascheronijevo knjigo *La geometria del compasso* so hitro prevedli v francoščino in jo natisnili pri založbi Charette (Pariz 1798). Med zgodovinarji matematike so potekale živahne razprave o nekaterih geometrijskih izrekih, ki jih pripisujejo Napoleonu, verjetno pa so Mascheronijevi.

Mascheroni – asteroid

V njegovo čast so poimenovali
8. decembra 1996 odkriti
asteroid (observatorij Prescott
v Arizoni, astronom Paul G.
Comba) z začasnim imenom
1996 XW8 po Mascheroniju:
27922 Mascheroni.



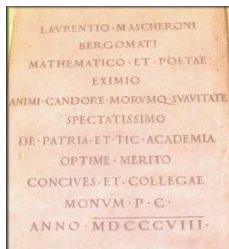
Mascheroni – spomini

Mascheroniju so odkrili tudi spominsko ploščo v njegovem rojstnem kraju (v Castagneti, danes del Bergama) in doprsni kip v središču Bergama (Sentierone). Po njem se imenuje tudi Liceo Scientifico Statale Lorenzo Mascheroni v Bergamu.



Mascheroni – pesnik

Mascheroni je tudi pesnil, in sicer v italijanščini in latinščini. Verze je pisal ob različnih priložnostih. Celo posvetilo Napoleonu v knjigi *La geometria del compasso* je sestavil v verzih. Glavno pesniško delo: *L'invito di Dafni Orobiano a Lesbia Cidonia*.

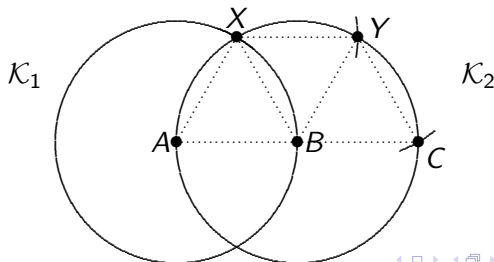


‘ Io pur ti vidi coll’ invitta mano,
Che parte i regni, e a Vienna intimo pace,
Meco divider con ricurvi giri
Il curvo giro del fedel compasso.
E ti vidi assaltar le chiuse rocche
D’ardui problemi col valor d’antico
Geometra maestro, e mi sovvenne
Quando l’Alpi varcasti Annibal novo
Per liberar tua cara Italia, e tutto
Rapidamente mi passò davanti
L’anno di tue vittorie, anno che splende
Nell’ abisso de’ secoli qual sole.
Segui l’impresa, e coll’ invitta mano
Guida all’ Italia tua liberi giorni. ’

1. naloga

Samo s šestilom podaljšaj daljico AB do točke C tako, da bo $|AB| = |BC|$.

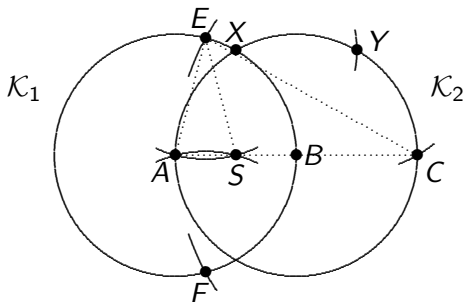
Rešitev. Načrtamo krožnico $\mathcal{K}_1$ s središčem v točki A skozi točko B , nato pa še krožnico $\mathcal{K}_2$ s središčem v točki B skozi točko A . Dobimo presečišče X obeh krožnic. Točko Y na $\mathcal{K}_2$ dobimo kot presečišče krožnega loka polmera $|AB|$ in s središčem v točki X . Nazadnje dobimo točko C na krožnici $\mathcal{K}_2$ kot presečišče krožnega loka polmera $|AB|$ in s središčem v točki Y .



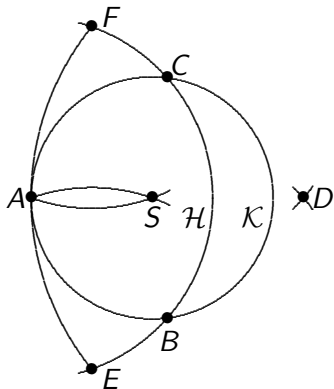
2. naloga

Samo s šestilom poišči središče S daljice AB .

Rešitev. Najprej ponovimo konstrukcijo 1. naloge. Nato načrtamo krožna loka s središčem v točki C in s polmerom $|AC|$, tako da sekata krožnico $\mathcal{K}_1$ v točkah E in F . Nazadnje narišemo še krožna loka s središčema v teh dveh točkah in s polmerom $|AB|$ tako, da se sekata v točkah A in S . Točka S je iskano razpolovišče daljice AB .



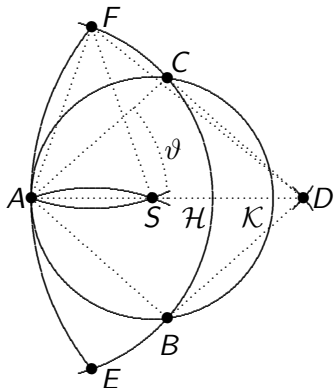
3. naloga



Samo s šestilom poišči središče krožnice $\mathcal{K}$.

Rešitev. Dana je krožnica $\mathcal{K}$ z neznanim središčem. Na $\mathcal{K}$ izberemo kjerkoli točko A in načrtamo krožnico $\mathcal{H}$ poljubnega polmera s središčem v A , tako da preseka $\mathcal{K}$ v točkah B in C . Nato načrtamo krožna loka s središčema v B in C in polmerom $|AC|$, ki se sekata v točki D . Nato načrtamo krožni lok s polmerom $|AD|$ in središčem v D , ki seka krožnico $\mathcal{H}$ v točkah E in F . Krožna loka s polmerom $|AF|$ in središčema v E in F se potem sekata v točki A in v točki S , ki je iskano središče krožnice $\mathcal{K}$.

3. naloga – nadaljevanje



Štirikotnik $ABDC$ je očitno romb s stranico $|AC|$. Naj bo ϑ kot ob oglišču A trikotnika ADC in R radij iskane krožnice. Potem je očitno

$$|AC| = 2R \cos \vartheta,$$

$$|AD| = 2|AC| \cos \vartheta = 4R \cos^2 \vartheta.$$

Trikotnika ASF in FAD pa sta enakokraka in sta si podobna, ker se ujemata v enem kotu, kar pomeni, da velja: $|AS|/|AF| = |AF|/|AD|$.
 Dobimo $|AS|/|AC| = |AC|/|AD|$.
 Nazadnje imamo:

$$|AS| = \frac{|AC|^2}{|AD|} = \frac{4R^2 \cos^2 \vartheta}{4R \cos^2 \vartheta} = R.$$

Hvala za vašo pozornost

