

Franc Močnik in konstrukcija pravilnega petkotnika

Milan Hladnik

Seminar za zgodovino matematike in matematičnih znanosti

13. oktober 2014

Vsebina predavanja

- Približna Močnikova konstrukcija
- Eksaktne Močnikove konstrukcije
- Druge eksaktne metode
- Nekaterne nestandardne konstrukcije

Naloga iz Močnikovega učbenika geometrije za nižje gimnazije

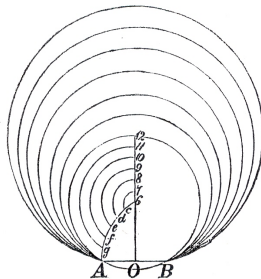
Konstruirati pravilni petkotnik z dano stranico AB npr. dolžine 1.

Ideja:

Iščemo krožnico, ki ima daljico AB za tetivo in v katero lahko to daljico naneseemo ravno petkrat. Njeno središče leži na simetrali daljice AB . Na njej najprej poiščemo točko C , tako da je trikotnik $\triangle ABC$ enakostranični. Če bi šlo za pravilni šestkotnik, bi bila točka C središče ustrezne krožnice, tako pa za pravilni petkotnik leži malo nižje, za pravilni sedemkotnik malo više, za pravilni osemkotnik še više itd.

Močnikova približna konstrukcija

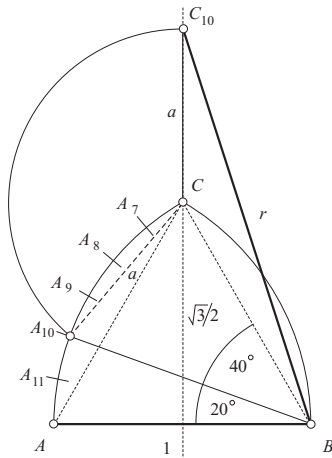
Fig. 35.



Ist AB (Fig. 35) die gegebene Gerade, so errichte man im Halbierungspunkte O eine Senkrechte, beschreibe aus B mit dem Halbmesser AB den Bogen A 6, und theile denselben zuerst in 2, und jede Hälfte noch in 3 gleiche Theile; sodann ziehe man aus dem Punkte 6 als Mittelpunkt die Kreisbogen c 7, d 8, e 9 u. s. w. In dem Kreise, dessen Mittelpunkt 6 und dessen Halbmesser A 6 ist, läßt sich nun AB 6mal herumtragen; in dem Kreise, dessen Mittelpunkt 7 und der Halbmesser A 7 ist, kann AB 7mal aufgetragen werden; u. s. w.

Slika: Fotokopija originalne Močnikove skice za risanje pravilnih večkotnikov iz *Geometrische Anschauungslehre für die Unter-Gymnasien* iz leta 1868

Približna metoda za $n = 10$



Slika: Skica Močnikove približne metode za pravilni desetkotnik.

Izvedba

Lok s polmerom 1 in središčem v B od točke A do točke C razdelimo na šest enakih delov (ustrezni kot 60° torej na šest delov po 10°). Označimo delilne točke loka v smeri od C proti A z A_7, A_8, A_9, A_{10} in A_{11} . Če dodamo še krajišči loka, $A_6 = C$ in $A_{12} = A$, lahko s pomočjo točke A_n načrtamo 'pravilni' n -kotnik za $6 \leq n \leq 12$.

Razdaljo $A_n C$ namreč naneseemo na simetralo daljice AB od točke C navzgor, da dobimo središče krožnice C_n , v katero lahko potem n -krat zaporedoma včrtamo daljico dolžine 1 in dobimo 'pravilni' n -kotnik.

Opomba

V tem postopku se skriva tretjinjenje kota 60° , ki, kot vemo, z ravnilom in šestilom ni možno.

Močnik je pri tem učencem kar naročil, naj kote po 10° odmerijo s kotomerom ali, kot so takrat rekli, s *prenašavnikom*.

Zanimivo vprašanje: V kolikšni meri se je Močnik problema tretjinjenja kota z evklidskim orodjem sploh zavedal?

Da to v splošnem ni mogoče, je dokazal francoski matematik [Pierre Laurent Wantzel](#) (1814-1848) leta 1837 (kakšnih 16 let pred morebitno prvo Močnikovo približno konstrukcijo).

Eksaktnost za $n = 6$ in $n = 12$

V primeru $n = 6$ je Močnikova konstrukcija očitno eksaktna.

V primeru $n = 12$ za stranico v krog s polmerom r včrtanega pravielnega dvanajstkotnika dobimo:

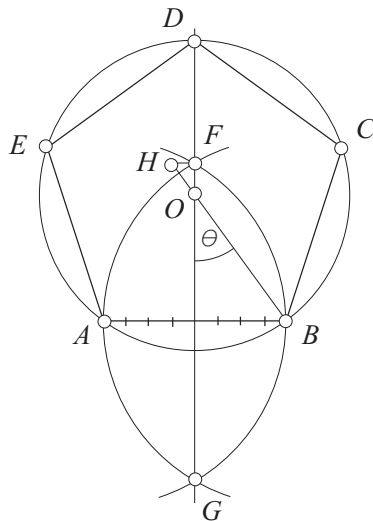
$$s_{12} = 2r \sin(2\pi/24) = r\sqrt{2 - 2\cos(\pi/6)} = r\sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

oziroma obratno $r = s_{12}/\sqrt{2 - \sqrt{3}} = s_{12}\sqrt{2 + \sqrt{3}}$. Pri nas je $s_{12} = 1$ in po Močnikovi metodi dobimo za r isto vrednost:

$$r = \sqrt{(1/2)^2 + (1 + \sqrt{3}/2)^2} = \sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

Pri drugih večkotnikih pride do napake, ki jo lahko numerično ocenimo.

Metoda Leonarda da Vincija (1452-1519)



Razlaga

Točki F in G sta na simetrali dane daljice AB (dolžine 1) za 1 oddaljeni od A oziroma B , daljica FH je vzporedna z AB in dolga $1/8$ (glej sliko). Točka O je potem kot presečišče O daljic BH in FG za $1/5$ višine v enakostraničnem trikotniku $\triangle ABF$ nižje od F in pomeni središče kroga, katerega tetiva AB je stranica včrtanega petkotnika.

Petkotnik $ABCDE$ lahko potem hitro načrtamo s prenašanjem razdalj. Po tej metodi smo odmerili nekoliko premajhen središčni kot θ , namreč $\sin \theta \approx 0.5852$ namesto $\sin 36^\circ \approx 0.5878$. Relativna napaka je približno 0.004.

Podobnost in razlika z Močnikovo metodo

Da Vincijeva metoda malce spominja na Močnikovo.

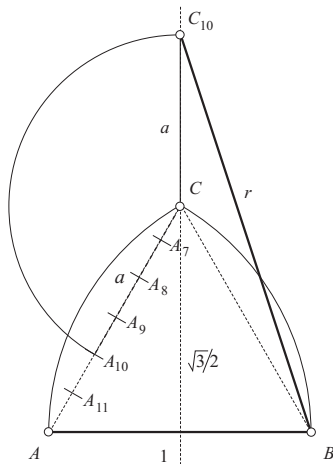
Podobnost pa se v večji meri pokaže pri konstrukciji pravih osem- in devetkotnika, ko je treba središče O dvigniti nad F .

V tem primeru je da Vinci dodal tretjino oziroma polovico daljice AB , medtem ko je Močnik dodal tetivo nad tretjino oziroma nad polovico ustreznega loka.



J. L. Coolidge, *The Mathematics of Great Amateurs*, Dover Publ. Inc. New York 1963.

Leonardova metoda za $n > 6$

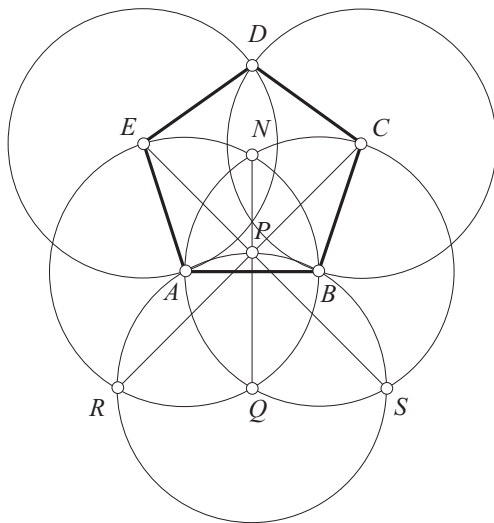


Slika: Skica Leonardove približne metode za pravilni desetkotnik.

Primerjava relativne napake pri Močniku in pri Leonardu

Št. str.	6	7	8	9	10	11	12
Rel. n. M	0.000	0.001	0.004	0.006	0.007	0.005	0.000
Rel. n. L	0.000	-0.004	-0.006	-0.005	-0.003	-0.002	0.000

Metoda Albrechta Dürerja iz leta 1528



Dürerjev postopek

Najprej narišemo sekajoči se krožnici s skupnim polmerom $AB = 1$ in skupno tetivo NQ , ki pravokotno razpolavlja polmer AB , ter nato krožnico s središčem v Q skozi A oziroma B , ki seka tetivo NQ v točki P , prvotni krožnici pa v R in S .

Premica skozi P in R naj seka krožnico s središčem v B v točki C , premica skozi P in S pa krožnico s središčem v A pa v točki E . Točka D naj bo zunanje presečišče krožnice s središčem C in s polmerom CB ter enako velike krožnice s središčem E . Potem je petkotnik $ABCDE$ približek pravilnega petkotnika.

Napaka

Da se izračunati, da je kot $\angle CBR \approx 138.3661^\circ$ in zato kot $\angle ABC \approx 108.3661^\circ$, kar je zelo blizu kotu 108° , ki je notranji kot v pravilnem petkotniku.

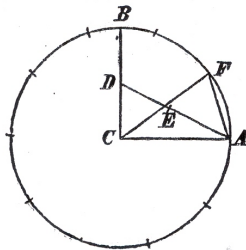
Kot $\angle BAE$ je zaradi simetrije enak kotu $\angle ABC$. Tudi kota pri C in E sta enaka, in sicer merita nekoliko manj kot 108° (natančneje 107.0378°). Kot pri D pa je malce večji, meri okrog 109.1921° .

Največja relativna napaka pri notranjih kotih znaša okrog 1%.

Eksaktna konstrukcija stranice pravilnega desetkotnika

§. 151. Die Peripherie in 10 gleiche Theile zu theilen. Kako se krogovi obvod na deset enakih delov razdeli.

Fig. 116.



Man ziehe (Fig. 116) zwei auf einander senkrechte Halbmesser CA und CB , verbinde die Mitte D des einen mit dem Endpunkte A des anderen durch die Gerade AD , und beschreibe aus D mit dem Halbmesser DB einen Kreisbogen, welcher die AD in E schneidet. Die AE lässt sich nun mit dem Zirkel

genau zehnmal in der Peripherie herumtragen, und theilt dieselbe in 10 gleiche Theile.

Slika: Močnikova skica iz njegove *Geometrije za nižje realke* 1856.

Ponovno o konstrukciji stranice pravilnega desetkotnika

71

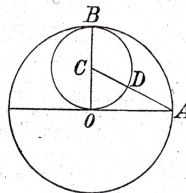
4. Einem Kreise (Fig. 110: $AO = r$) ein regelmäßiges Zehneck einzuschreiben. Die Seite kann nach der vorhergehenden Gleichung konstruiert werden. Es ist

$$AC = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2}, \quad AD = \sqrt{r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2} - \frac{r}{2}; \quad AD \text{ ist}$$

mithin die Seite des eingeschriebenen regelmäßigen Zehneckes.

Der Flächeninhalt eines regulären Vieleckes ist gleich dem halben Produkte aus dem Umfange desselben und dem Abstände des Mittelpunktes von einer Seite.

Fig. 110.

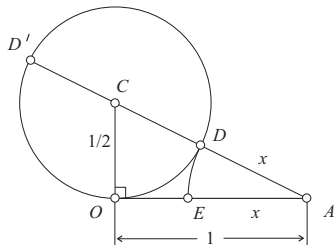


§ 93.

Slika: Fotokopija iz Močnikove Geometrije za 4. do 8. razred gimnazij 1910.



Močnikov zlati rez iz leta 1904



Slika: Delitev daljice v razmerju zlatega reza.

Dokaz: $AO^2 = AD \cdot AD'$, torej $AD' : AO = AO : AD$ oziroma $(AD' - AO) : AO = (AO - AD) : AD$. Upošteva je $AO = DD'$, $AE = AD$ in $EO = AO - AE = AO - AD$, dobimo $AE : AO = EO : AE$ oziroma $AE^2 = AO \cdot EO$, tj. $x^2 = 1 - x$.

Jezikovna opomba

Močnik ni uporabljal izraza **zlati rez**.

Geometrija 1856: poimenovanju se izogne

Geometrija 1857 (v srbščini): **spoljašnja srednja razmera**

Geometrija 1874 (isto še 1904, 1910): **stetige Proportion**

*Die Seite der einem Kreise eingeschriebenen
regelmässigen Zehneckes ist gleich dem grösseren
Abschnitte des nach stetiger Proportion getheilten
Halbmessers.*

Geometrija za učiteljišče 1924 (A. Črnivec):

zdržno sorazmerje ali **zlata rez** (**sectio aurea**)

Razmerje med diagonalo in stranico pravilnega petkotnika

To razmerje lahko danes hitro izpeljemo iz trigonometrijskih formul $s_5 = 2 \sin(\pi/5)$ in

$$d = 2 \sin(2\pi/5) = 4 \sin(\pi/5) \sqrt{1 - \sin^2(\pi/5)} = s_5 \sqrt{4 - s_5^2}.$$

Torej je

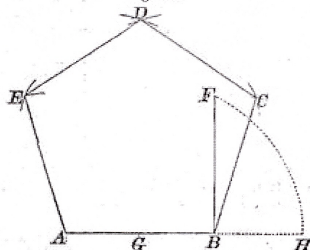
$$d/s_5 = \sqrt{4 - s_5^2} = \sqrt{4 - (5 - \sqrt{5})/2} = \sqrt{(3 + \sqrt{5})/2} = (\sqrt{5} + 1)/2.$$

To je razmerje **zlatega reza**.

Močnikova konstrukcija pravilnega petkotnika z dano osnovnico iz 1881 (Abul Wafa, konec 10. stoletja)

b) La costruzione del pentagono regolare può effettuarsi anche nel modo seguente.

Fig. 196.



Sia AB (fig. 196) la retta data. Si innalzi in B la perpendicolare $BF = AB$ e dimezzata la AB in G , da

Slika: Močnikova preprosta konstrukcija pravilnega petkotnika z uporabo diagonale.

Močnikova razlaga glede pravilnega desetkotnika iz *Geometrije za višje šole Kneževine Srbije* 1857.



Slika: Skica k izpeljavi zlatega reza iz zlatega trikotnika iz leta 1857

Močnikova izpeljava zlatega reza iz enakokrakega trikotnika s koti 36° , 36° , 72°

Na prejšnji sliki je kot $\angle AOC$ enak 36° oziroma $\pi/5$, daljica CB pa simetrala kota pri C , ki je velik 72° oziroma $2\pi/5$.

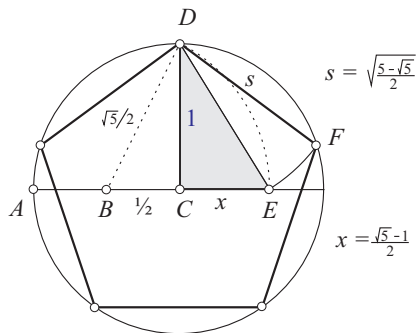
Zato je $m = n = p$ in iz podobnosti enakokrakih trikotnikov $\triangle AOC$ in $\triangle ABC$ zaradi $BC = BO$ dobimo $AO:BO = BO:AB$.

Torej je

$$BO^2 = AO \cdot AB$$

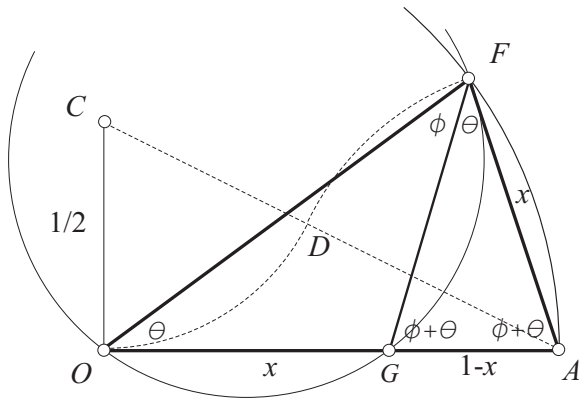
oziroma $BO:AB$ razmerje zlatega reza.

Moderna konstrukcija pravilnega petkotnika (Ptolemaj, 2. stoletje)



Slika: Standardna (šolska) konstrukcija pravilnega petkotnika.

Zlati trikotnik



Slika: Iskanje ustreznega enakokrakega trikotnika.

Razlaga

Na polmeru OA enotskega kroga smo označili dolžino $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ (tako da je $OG:GA$ razmerje zlatega reza), ki smo jo kot stranico pravilnega desetkotnika nanесли tudi na obod enotskega kroga.

Trikotnik $\triangle OAF$ je enakokrak. Ker velja $x^2 = 1 \cdot (1 - x)$, se mora tetiva AF enotskega kroga dotikati kroga, ki je očrtan trikotniku $\triangle OGF$, zato je tudi kot $\angle AFG$ enak θ (isti kot obodni kot $\angle FOG$ v trikotniku $\triangle OGF$). Potem pa sta tudi oba osnovna kota v trikotniku $\triangle AFG$ enaka $\phi + \theta$, torej je tudi to enakokrak trikotnik, podoben trikotniku $\triangle FOA$.

Torej je tudi trikotnik $\triangle OGF$ enakokrak in zato $\phi = \theta$ in $FG = x$. V enakokrakem trikotniku $\triangle FOA$ oziroma $\triangle AFG$ je osnovni kot enak 2θ , kot ob vrhu pa θ , torej v razmerju $2:1$.

Originalni Evklidov dokaz

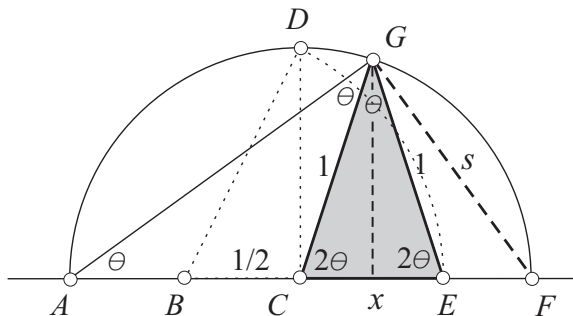
Opisana konstrukcija je v bistvu Evklidova in tudi njena utemeljitev povzema Evklidov dokaz, razbit v več trditev:

- O zlatem rezu (knjiga II, trditev 11)
- O enakokrakem trikotniku s koti v razmerju 2:1 (knjiga IV, trditev 10)
- O končnem načrtanju oglišč pravilnega petkotnika (knjiga IV, trditev 11)



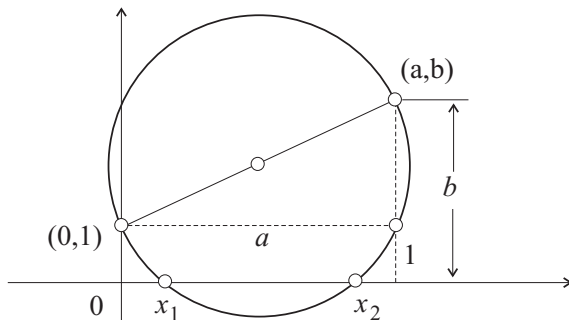
Euclid, T. L. Heath, *The Thirteen Books of the Elements*, Dover Publ. 1956, Vol. 1, 2.

Drugačna Evklidova konstrukcija stranice pravilnega petkotnika



Slika: Konstrukcija stranice pravilnega petkotnika z zlatim trikotnikom (s je stranica petkotnika).

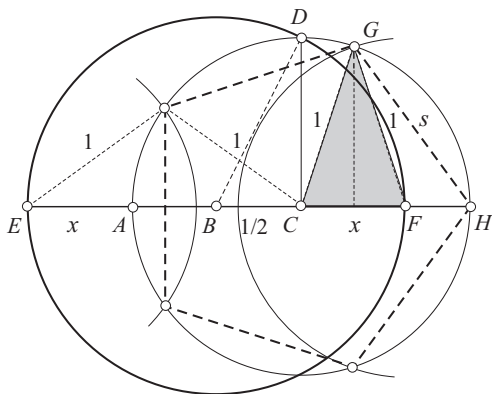
Carlyleova krožnica



$$x^2 - ax + b = 0, \quad x_1 + x_2 = a, \quad x_1 x_2 = b$$

Slika: Reševanje kvadratne enačbe s Carlyleovo krožnico.

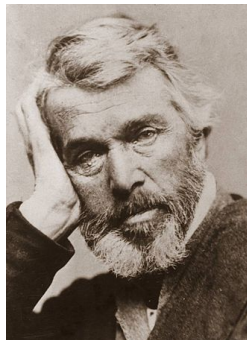
Carlyleova konstrukcija



Slika: Konstrukcija pravilnega petkotnika s Carlyleovo krožnico.

Dvojni abscisi oglišč: $EC = 2\cos(4\pi/5)$ in $CF = 2\cos(2\pi/5)$

Thomas Carlyle (1795-1881)



Slika: Škotski filozof, pisec in učitelj matematike Thomas Carlyle

Dokaz

Očitno je $x = (\sqrt{5} - 1)/2$, zato je CH stranica včrtanega pravilnega desetkotnika in CD stranica včrtanega pravilnega petkotnika.

Označimo $s = AB$. Iz pravokotnega trikotnika $\triangle ABH$ vidimo

$$s^2 = 4 - (1 + x)^2 = 4 - (1 + \sqrt{5})^2/4 = 4 - (3 + \sqrt{5})/2 = (5 - \sqrt{5})/2,$$

torej je s stranica včrtanega pravilnega petkotnika.

Dokaz

Kot $\angle OIA$ oziroma $\angle HGA$ označimo s θ , tako da je $\operatorname{tg} \theta = 2$.

Zdaj je $s^2 = (1 - h)^2 + (1 - h^2) = 2 - 2h$ in $2h = \operatorname{tg}(\theta/2) = x$.

Ker je $2 = \operatorname{tg} \theta = 2\operatorname{tg}(\theta/2)/(1 - \operatorname{tg}^2(\theta/2)) = 2x/(1 - x^2)$, dobimo $x^2 + x - 1 = 0$ oziroma $x = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Hitreje pa dobimo isti rezultat iz razmerja

$(1 - h)/h = (\sqrt{5}/2)/(1/2) = \sqrt{5}$ v trikotniku $\triangle OAI$,
od koder je

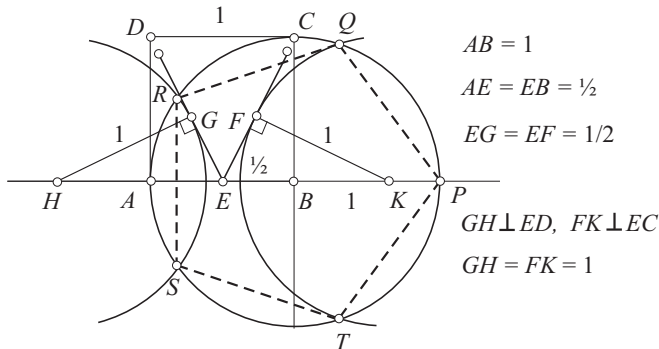
$h = 1/(\sqrt{5} + 1)$ in $x = 2/(\sqrt{5} + 1) = (\sqrt{5} - 1)/2$.

Herbert William Richmond (1863-1948)



Slika: Angleški matematik Herbert Richmond

Konstrukcija z ravnilom in zarjavelim šestilom (Abul Wafa, 10. stoletje)



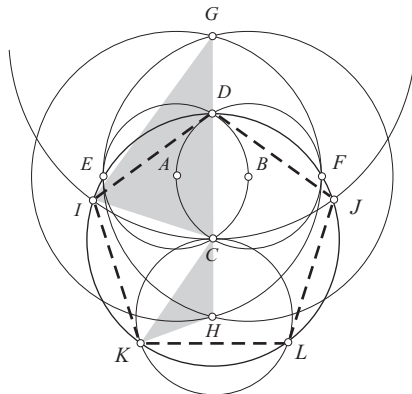
Slika: Konstrukcija pravilnega petkotnika z ravnilom in zarjavelim šestilom.

Abul Wafa (940-998)



Slika: V Bagdadu delujoči perzijski matematik Abul Wafa al-Buzjani

Mascheronijeva konstrukcija



Slika: Konstrukcija oglišč pravilnega petkotnika samo s šestilom.

Razlaga in dokaz

Dve enako veliki krožnici s skupnim polmerom AB naj se sekata v C in D . Krožnica s središčem v C skozi D seka prvotni krožnici v E in F , (A, B, E in F so kolinearne točke). Krožnica s središčem v A skozi F in krožnica s središčem B skozi E naj se sekata v G in H . Potem seka krožnica s središčem v G skozi C krožnico s središčem v C skozi D v I in J , krožnica s središčem v H skozi C pa isto krožnico v K in L .

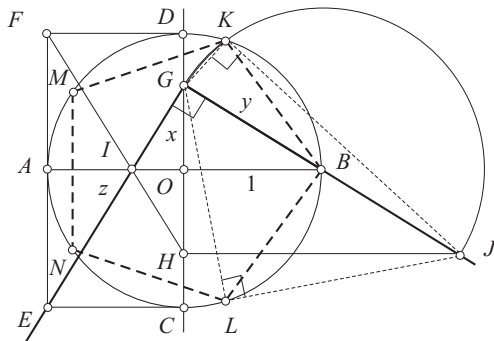
Ker pri pogoju $AB = 1$ velja $CG = (\sqrt{15} + \sqrt{3})/2$ in $CD = \sqrt{3}$, deli točka D daljico CG v razmerju zlatega reza, enako deli točka C daljico DH . Vidimo, da je $\triangle ICG$ zlati trikotnik in zato kot $\angle GCI$ enak 72° . Podobno se lahko iz enakokrakega trikotnika $\triangle HCK$ prepričamo, da je kot pri C enak 36° . Odtod sledi, da so tudi drugi središčni koti v krogu s središčem v C enaki 72° , zato je lik $DIKLJ$ pravilni petkotnik.

Lorenzo Mascheroni (1750-1800)



Slika: Italijanski matematik Lorenzo Mascheroni

Konstrukcija s kotnikom



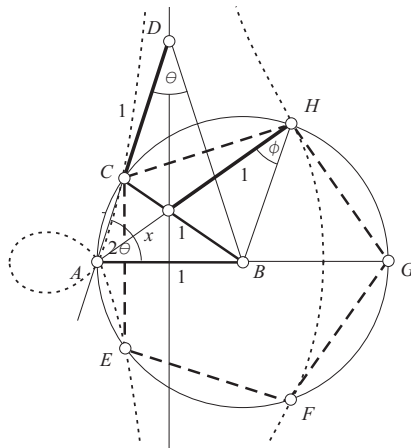
Slika: Konstrukcija v krog včrtanega pravilnega petkotnika samo s kotnikom.

Razlaga

En krak kotnika poteka skozi E , drugi skozi B , vogal pa leži na daljici OC npr. v točki G . Označimo $x = OG$, $y = BG$ in $z = EG$. Potem je $y^2 = x^2 + 1$, $z^2 = (x + 1)^2 + 1$ in $y^2 + z^2 = 5$, odkoder najdemo, da je $x = (\sqrt{5} - 1)/2$ stranica včrtanega pravilnega destkotnika, $y = \sqrt{(5 - \sqrt{5})/2}$ pa stranica in $z = \sqrt{(5 + \sqrt{5})/2}$ diagonala včrtanega pravilnega petkotnika.

Skozi presečišče I daljic AO in EG potegnimo zveznico FH , tako da je točka H zrcalna slika točke G glede na premer AB . Vzporednica k AB skozi H seka podaljšano daljico BG v točki J z lastnostjo $BG = BJ$. S kotnikom lahko po Talesovem izreku določimo točki K in L , ki ležita tako na osnovni krožnici s središčem v O kot na zamišljeni krožnici s središčem v B in polmerom BG . To sta dve oglišči, preostali dobimo brez težav.

Konstrukcija z vstavljanjem



Slika: Konstrukcija stranice pravilnega petkotnika z vstavljanjem.

Dokaz

Hitro vidimo, da je na sliki trikotnik $\triangle ABD$ zlati trikotnik, torej AC stranica včrtanega pravilnega desetkotnika.

Poleg tega iz trikotnika $\triangle ABH$ (z ustreznima oznakama x in ϕ) najdemo formuli $1 = 2x \cos \phi$ in $1 + x = 2 \cos \phi$, odkoder dobimo $1 = x + x^2$ oziroma $x = (1 + \sqrt{5})/2$. Torej je tudi $\triangle ABH$ zlati trikotnik.

Konec

HVALA ZA POZORNOST!