

Figurativna števila skozi zgodovino

Marko Razpet

Seminar za zgodovino matematičnih znanosti

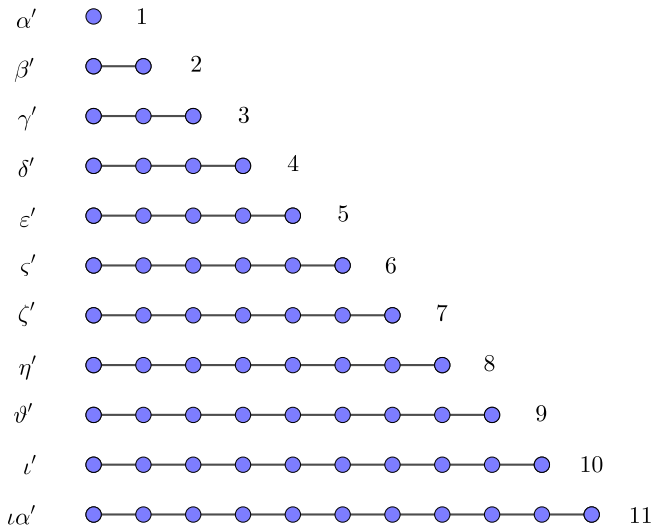
Ljubljana, 12. december 2019

Večkotniška števila so poseben primer figurativnih števil.

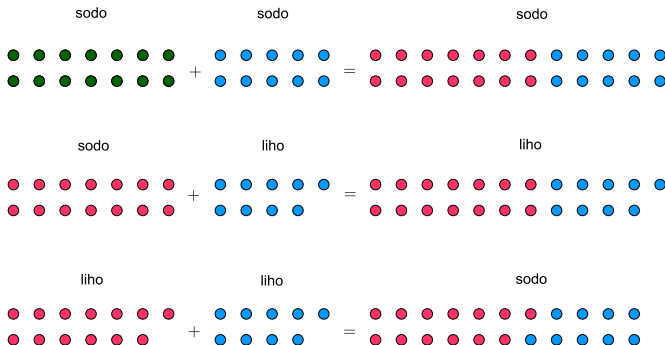
Kdo se je ukvarjal z njimi?

Pitagora, Hipsikles, Plutarh, Nikomah, Teon iz Smirne, Diofant, Jamblih, Fibonacci, Stifel, Cardano, Méziriac, Descartes, Fermat, Pell, Pascal, Euler, Lagrange, Legendre, Gauß, Cauchy, Jacobi, Sierpiński, B. Wallis.

Naravna števila



Soda in liha števila



ἄρτιος ἀριθμός – sod, περισσός, περιττός ἀριθμός – lih

Lucij Mestrij Plutarh iz Hajroneje (48–127) – Λούκιος Μέστριος Πλούταρχος ὁ Χαιρωνεύς

Dela:

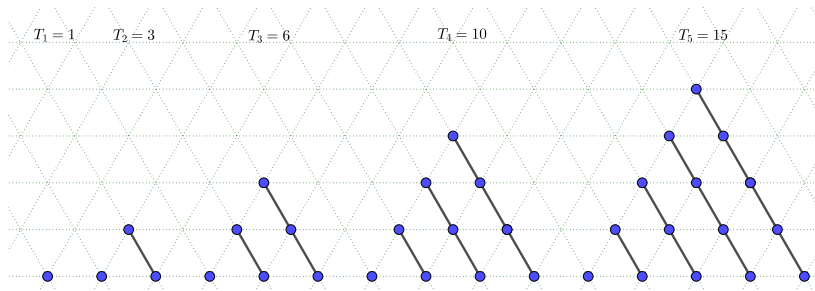
Moralia – Ἠθικά

Vzporedni življenjepisi – Βίοι παράλληλοι

O Arhimedu iz Sirakuz (3. st. pr. n. št.) – Ἀρχιμήδης ὁ Συρακόσιος – piše Plutarh v poglavju, ki je posvečeno Tebancu Pelopidu (4. st. pr. n. št.) – Πελοπίδας – in Rimljanu Marku Klavdiju Marcelu (268–208 pr. n. št.). Plutarh je študiral matematiko, retoriko in filozofijo v letih 66–67 v Atenah. Omenil je, da se je Anaksagora (5. st. pr. n. št.) – Ἀναξαγόρας – v zaporu ukvarjal s kvadraturu kroga.

Naj se bogovom na nebu daruje liho število žrtev, bogovom podzemlja pa sodo. (Plutarh: *Vzporedni življenjepisi* – Numa in Likurg). Likurg (9.–8. st. pr. n. št.) – Λυκοῦργος – špartanski zakonodajalec.

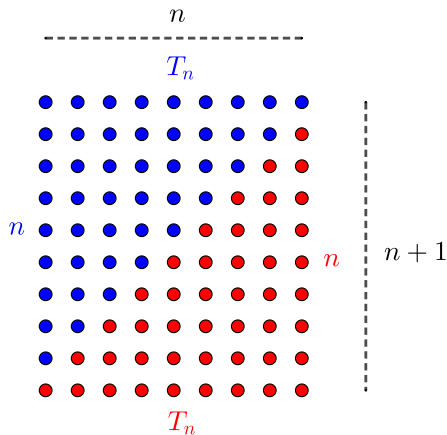
Trikotniška števila $T_n, n = 1, 2, 3, 4, 5$



$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Trikotniško število – τρίγωνος ἀριθμός

Splošna formula za T_n



$$T_n + T_n = 2T_n = n(n+1) \implies T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

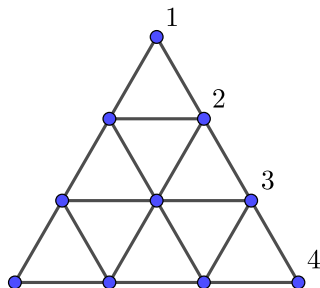
Vsota prvih n naravnih števil in trikotniška števila

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$$

$$T_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2T_n = (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1) + (n+1) = n(n+1)$$

$$T_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$



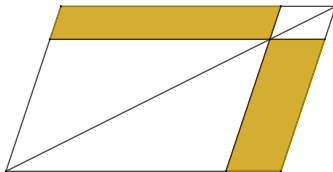
$$1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

Pitagora s Samosa (6. st. pr. n. št.) – Πυθαγόρας ὁ Σάμιος

Četverstvo — τετρακτύς

Elementi: γῆ, γέα, γαῖα – zemlja, ὕδωρ – voda, πῦρ – ogenj, ἀήρ – zrak.

Gnomon



γνῶμων – 1. poznavalec, veščak, razsojevalec; nadzornik svetih oljk; 2. kazalec na sončni uri, sončna ura; merilo.

Arhimedov problem o govedu

Problem o govedu – Πρόβλημα βοεικόν

Na problem je leta 1773 opozoril nemški pisatelj, filozof, dramatik, publicist, umetnostni kritik Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781).

Problem, ki se ga je v epigramih izmislil Arhimed in ga je v pismu posredoval Eratostenu iz Kirene za študente takih reči v Aleksandriji.

Πρόβλημα ὅπερ Ἀρχιμήδης ἐν ἐπιγράμμασιν εὐρών τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν ἐν τῇ πρὸς Ἑρατοσθένην τὸν Κυρηναῖον ἐπιστολῇ.

Arhimedov problem o govedu – 1

Tujec, prisedi, preštej vse Sončevo lepo govedo.
(Bistrac nabrusi ostro, naloga bo, bogme, zavita.)
Pašnike sočne Trinakra, Sicilije polja preleti,
štiri boš črede našel, po pasmah jih ločil natanko:
Ta se kot mleko beli. Kot morja viharnega vali
temna je v oni živina. Rjavordeča je tretja,
z lisami zadnja pokrita. S pogledom jih vseh ne objameš,
množica bikov krepkih že šteje nesluteno moč.
Strašna je moč, a vendar pregledna. Poslušaj me, tujec:
Belih je bikov, poglej, prav toliko kolikor skupaj
temnih **tretjina** in **pol** z rjavimi biki nanese.
Črnih število dobiš, če lisastih bikov **petini**
brž **četrtno** dodaš in ruse v celoti navržeš.
Koliko, vedel bi rad, je lisastih bikov. Dodeni
bikom rjavim lepo **sedmino** in **šesti** del belih.

Arhimedov problem o govedu – 2

Pa se lotiva še krav po vrsti od črede do črede.
Belih število dobiš, če črne govedi **tretjino**
k delu **četrtemu** daš. Iz lisaste črede povzameš,
koliko črnih je krav: **petini** dodaj **četrtno**.
Lisaste krave preštela spet bova, tujec, brez muje:
Množico z isto močjo iz ruse sestavi živine,
vzemi od **šestih** en del, zedini ga z enim od **sedmih**.
Štetje rjavih samic na belo nasloniva čredo:
pol le **tretjine** dodaj **sedmini**.

Zdaj si ti na vrsti.

Koliko vsake govedi Sonce vardeva, povej mi,
bikov mogočnih in krav z bogatimi vimeni mleka.

Arhimedov problem o govedu – 3

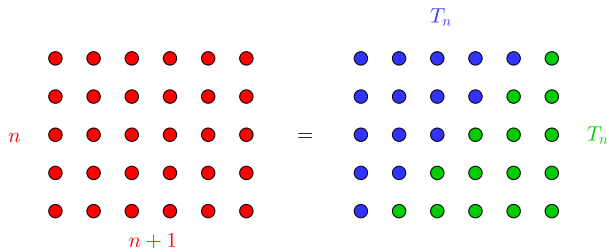
Če boš pravilno preštel od glave do glave vse črede,
spretno s števili ravnaš – rad ti bom, tujec, priznal.
Ali med modrece, vedi, ne bom te z rojaki zapisal,
dokler pogojev še dveh ne vzameš pri štetju v zakup:
Bele in črne premešaj vse bike, tesno razpostavi,
kamor ti seže pogled v širino naj bo al' globino,
bik naj ob biku stoji. Na travnikih sicilijanskih
mukal in zemljo teptal tedaj bo kvadrat brez primere.
Bike marogaste v čredo postavi z rusimi skupaj,
enega najprej pa dva in dalje natanko v stopnicah,
v dir jih poženi. Po polju rohnal bo živi trikotnik.
Če še to zanko razmotaš, prevrtaš z ostrim razumom,
čredam orjaškim moči do repa natanko pretehtaš,
z zmago odidi odtod. Ponosnega spremljaj te slava,
da si visoko nad nas v modrosti se, tujec, povzpел.

Problem pripelje preko sedmih linearnih diofantskih enačb z osmimi neznankami najprej z zahtevo po trikotniškem številu do Pellove enačbe

$$x^2 - 4\,729\,494y^2 = 1$$

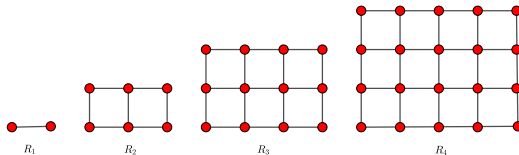
Števili x in y , ki rešita to enačbo, imata več kot 40 desetiških števk. Rešitev Arhimedovega problema, ki zahteva kvadratno število, vsebuje števila z več kot 200 000 desetiškimi števki (August Amthor, 1880).

Podolžna števila



Podolžno število – ἑτερομήκης ἀριθμός, iz pridevnika ἕτερος, različen, drugačen, in samostalnika μήκος, dolgost, dolžina. Tudi προμήκης, spredaj podolgovat, dolg, podolgast; πρό pomeni naprej, spredaj, pred.

Predstavitev podolžnih števil



Podolžno število, tudi pravokotniško število: $R_n = n(n + 1)$.

Vsote zaporednih lihih in sodih števil

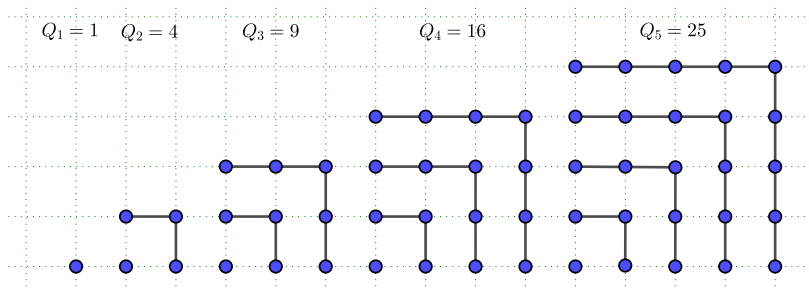
$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

$$2 + 4 + 6 + \dots + (2n) = n(n + 1)$$

Posledica:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Kvadratna števila $Q_n, n = 1, 2, 3, 4, 5$



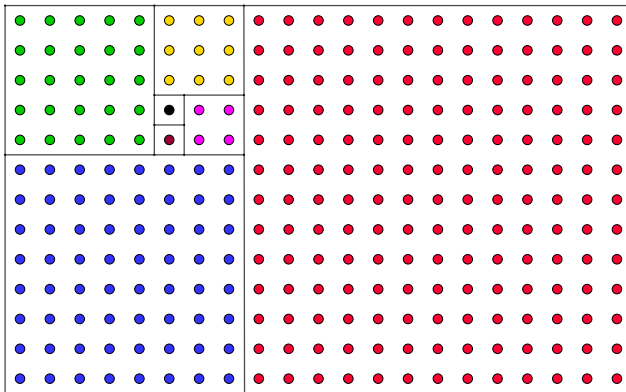
$$Q_n = n^2$$

$$Q_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$$

Enakost uporablja Leonardo iz Pise, Fibonacci (1170–1250) v svojem delu *Liber quadratorum*. Zelo znan po zaporedju:

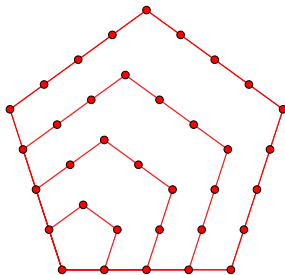
$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n \quad (F_0 = 0, F_1 = 1)$$

Fibonaccijev pravokotnik



$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + \dots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$$

Peto petkotniško število



$$P_n = \frac{n(3n-1)}{2}$$

$$P_5 = \frac{5(3 \cdot 5 - 1)}{2} = 35$$

$$3P_n = T_{3n-1}$$

Eulerjev izrek o petkotniških številih

Števila

$$\frac{n(3n-1)}{2}$$

so za $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ nenegativna. Za $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ dobimo zaporedje

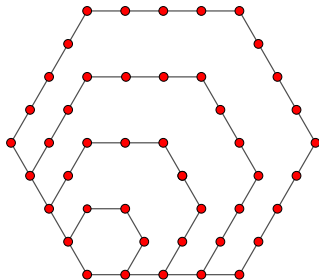
$$1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26, 35, \dots$$

Vsak drugi člen je petkotniško število. Leonhard Euler je dokazal:

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1-x^n) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(x^{n(3n-1)/2} + x^{n(3n+1)/2} \right) \quad (|x| < 1)$$

$$(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots = 1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+x^{26}-\dots$$

Peto šestkotniško število



$$H_n = n(2n - 1)$$

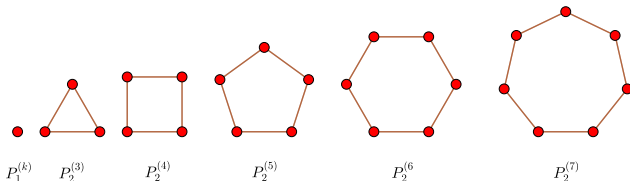
$$H_5 = 5(2 \cdot 5 - 1) = 45$$

$$H_n = n(2n - 1) = T_{2n-1}$$

Začetna večkotniška števila

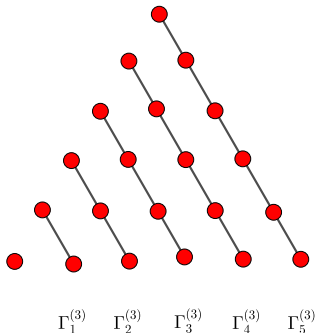
$$P_1^{(k)} = 1$$

$$P_2^{(k)} = k$$



Teon iz Smirne – Θέων ὁ Σμυρναῖος (1.–2. st. n. št.),
Jamblih iz Kalhide (Sirija) – Ἰάμβλιχος ὁ Χαλκιδεύς (3.–4. st. n. št.) sta tudi pisala o večkotniških številih (Diofantov zapis).

Gnomoni trikotniških števil



$$T_n = P_n^{(3)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

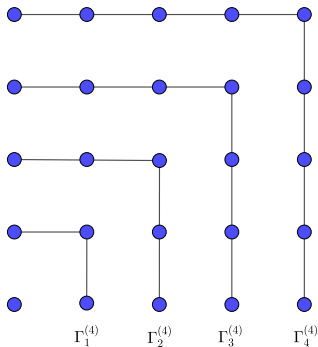
Prvi 3-gnomon: $\Gamma_1^{(3)} = 2$

Drugi 3-gnomon: $\Gamma_2^{(3)} = 3$

Tretji 3-gnomon: $\Gamma_3^{(3)} = 4$

n -ti 3-gnomon: $\Gamma_n^{(3)} = n + 1$

Gnomoni kvadratnih števil



$$Q_n = P_n^{(4)} = n^2$$

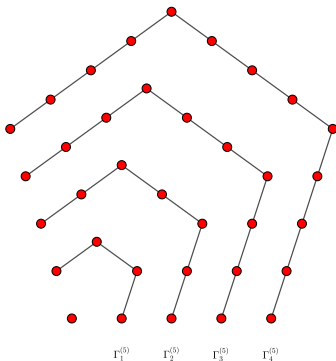
Prvi 4-gnomon: $\Gamma_1^{(4)} = 3$

Drugi 4-gnomon: $\Gamma_2^{(4)} = 5$

Tretji 4-gnomon: $\Gamma_3^{(4)} = 7$

n -ti 4-gnomon: $\Gamma_n^{(4)} = 2n + 1$

Gnomoni petkotniških števil



$$P_n = P_n^{(5)} = \frac{n(3n-1)}{2}$$

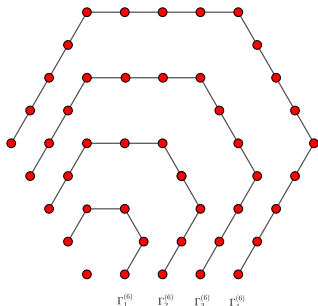
Prvi 5-gnomon: $\Gamma_1^{(5)} = 4$

Drugi 5-gnomon: $\Gamma_2^{(5)} = 7$

Tretji 5-gnomon: $\Gamma_3^{(5)} = 10$

n -ti 5-gnomon: $\Gamma_n^{(5)} = 3n + 1$

Gnomoni šestkotniških števil



$$H_n = P_n^{(6)} = n(2n - 1)$$

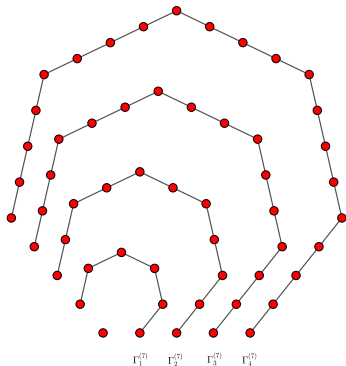
Prvi 6-gnomon: $\Gamma_1^{(6)} = 5$

Drugi 6-gnomon: $\Gamma_2^{(6)} = 9$

Tretji 6-gnomon: $\Gamma_3^{(6)} = 13$

n -ti 6-gnomon: $\Gamma_n^{(6)} = 4n + 1$

Gnomoni sedemkotniških števil



$$He_n = P_n^{(7)} = \frac{n(5n-3)}{2}$$

Prvi 7-gnomon: $\Gamma_1^{(7)} = 6$

Drugi 7-gnomon: $\Gamma_2^{(7)} = 11$

Tretji 7-gnomon: $\Gamma_3^{(7)} = 16$

n -ti 7-gnomon: $\Gamma_n^{(7)} = 5n + 1$

Večkotniška števila in njihovi gnomoni

Prvi k -gnomon: $\Gamma_1^{(k)} = k - 1$

Drugi k -gnomon: $\Gamma_2^{(k)} = 2(k - 2) + 1$

Tretji k -gnomon: $\Gamma_3^{(k)} = 3(k - 2) + 1$

n -ti k -gnomon: $\Gamma_n^{(k)} = (k - 2)n + 1$

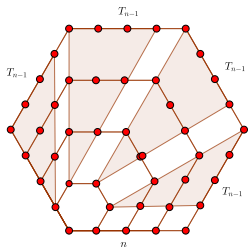
$$P_n^{(k)} = 1 + \Gamma_1^{(k)} + \Gamma_2^{(k)} + \dots + \Gamma_{n-1}^{(k)}$$

$$P_n^{(k)} = \frac{n}{2}(1 + \Gamma_{n-1}^{(k)}) = \frac{n}{2}(1 + (k - 2)(n - 1) + 1)$$

$$P_n^{(k)} = \frac{n}{2}((k - 2)n - (k - 4))$$

$$P_n^{(k)} = \frac{(k - 2)n^2 - (k - 4)n}{2}$$

Večkotniška števila, izražena s trikotniškimi



$$P_n^{(k)} = (k-2)T_{n-1} + n = \frac{(k-2)n(n-1) + 2n}{2}$$

$$P_n^{(k)} = (k-2)T_{n-1} + n = \frac{(k-2)n^2 - (k-2)n + 2n}{2}$$

$$P_n^{(k)} = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$

Tabela večkotniških števil

$k \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66
4	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121
5	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145	176
6	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190	231
7	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235	286
8	1	8	21	40	65	96	133	176	225	280	341
9	1	9	24	46	75	111	154	204	261	325	396
10	1	10	27	52	85	126	175	232	297	370	451
11	1	11	30	58	95	141	196	260	333	415	506
12	1	12	33	64	105	156	217	288	369	460	561

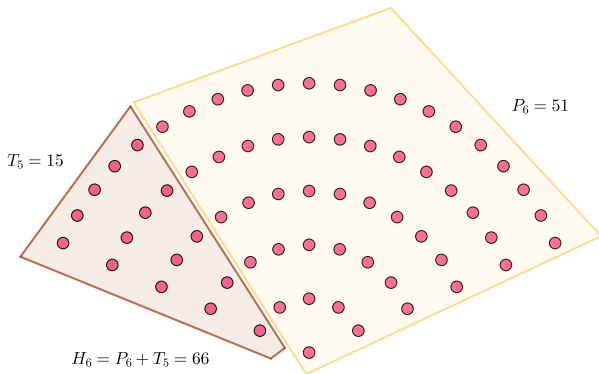
$$P_n^{(k+1)} - P_n^{(k)} = T_{n-1}$$

$$T_n^2 - T_{n-1}^2 = n^3$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n^2$$

Nikomah iz Gerase – Νικόμαχος ὁ Γερασένος (1.–2. st. n. št.)

Razširitev petkotniškega števila v šestkotniško število



$$P_n^{(k+1)} = P_n^{(k)} + T_{n-1}$$

Nikomahova formula

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = T_n^2$$

Izpeljava po Nikomahu:

$$1^3 = 1$$

$$2^3 = 3 + 5$$

$$3^3 = 7 + 9 + 11$$

$$4^3 = 13 + 15 + 17 + 19$$

$$\vdots$$

$$n^3 = (2T_{n-1} + 1) + \dots + (2T_n - 1)$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = T_n \cdot \frac{1 + (2T_n - 1)}{2} = T_n^2$$

V Diofantovi Aritmetiki je poglavje *O večkotniških številih* – Περι πολυγώνων ἀριθμῶν, kjer je dokazana formula

$$8(k-2)P_n^{(k)} + (k-4)^2 = (2(k-2)n - (k-4))^2,$$

ki pomaga odgovoriti na vprašanje, ali je naravno število N k -kotniško in katero po vrsti.

Poseben primer:

$$8T_n + 1 = (2n + 1)^2$$

Diofant iz Aleksandrije – Διόφαντος ὁ Ἀλεξανδρεὺς (3. st. n. št.) – omenja, da je poligonska števila definiral Hipsikles (180–120 pr. n. št.) – Ὑψικλῆς ὁ Ἀλεξανδρεὺς, baje avtor apokrifne 14. knjige *Elementov*. Beseda ἀπόκρυφος pomeni skrit, tajen, ponarejen, nepristen.

Zaporedje trikotniških števil

1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136, 153, 171, 190, 210, 231, 253, 276, 300, 325, 351, 378, 406, 435, 465, 496, 528, 561, 595, 630, 666, 703, 741, 780, 820, 861, 903, 946, 990, 1035, 1081, 1128, 1176, 1225, 1275, 1326, 1378, 1431, 1485, 1540, 1596, 1653, 1711, 1770, 1830, 1891, 1953, 2016, 2080, 2145, 2211, 2278, 2346, 2415, 2485, 2556, 2628, 2701, 2775, 2850, 2926, 3003, 3081, 3160, 3240, 3321, 3403, 3486, 3570, 3655, 3741, 3828, 3916, 4005, 4095, 4186, 4278, 4371, 4465, 4560, 4656, 4753, 4851, 4950, 5050, 5151, 5253, 5356, 5460, 5565, 5671, 5778, 5886, 5995, 6105, 6216, 6328, 6441, 6555, 6670, 6786, 6903, 7021, 7140, 7260, 7381, 7503, 7626, 7750, 7875, 8001, 8128, 8256, 8385, 8515, 8646, 8778, 8911, 9045, 9180, 9316, 9453, 9591, 9730, 9870, 10011, 10153, 10296, 10440, 10585, 10731, 10878, 11026, 11175, 11325, 11476, 11628, 11781, 11935, 12090, 12246, 12403, 12561, 12720, 12880, 13041, 13203, 13366, 13530, 13695, 13861, 14028, 14196, 14365, 14535, 14706,

...

Trikotniška kvadratna števila

1, 36, 1225, 41616, 1413721, 48024900, 1631432881,
55420693056, 1882672131025, 63955431761796,
2172602007770041

Naj N_n pomeni n -to trikotniško kvadratno število. Splošna formula (Leonhard Euler (1707–1783)) je:

$$N_n = \frac{1}{32} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)^2$$

Velja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N_{n+1}}{N_n} = 12\sqrt{2} + 17$$

Kdaj je naravno število N trikotniško?

$$N = T_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2}$$

$$2N = n^2 + n$$

$$4(2N) = 4n^2 + 4n$$

$$8N + 1 = 4n^2 + 4n + 1 = (2n + 1)^2$$

Naravno število N je trikotniško natanko tedaj, ko je $8N + 1$ kvadrat lihega števila.

$$8T_n + 1 = Q_{2n+1}$$

Trditev omenja Plutarh v spisu *Platonska vprašanja* – Πλατωνικά ζητήματα.

Nekaj lastnosti trikotniških števil – 1

$$T_{n-1} + T_n = n^2$$

$$T_{n-1}^2 + T_n^2 = T_{n^2}$$

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$$

$$3T_n + T_{n-1} = T_{2n}$$

$$3T_n + T_{n+1} = T_{2n+1}$$

$$T_{n-1} + 6T_n + T_{n+1} = 8T_n + 1$$

Dokaz tretje enakosti:

$$\begin{aligned} T_{n+1}^2 - T_n^2 &= \left(\frac{(n+1)(n+2)}{2} \right)^2 - \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = \\ &= \frac{1}{4}((n+1)^2(n+2)^2 - n^2(n+1)^2) = \frac{1}{4}(n+1)^2((n+2)^2 - n^2) = \\ &= \frac{1}{4}(n+1)^2(n+2-n)(n+2+n) = \frac{1}{4}(n+1)^2 \cdot 2(2n+2) = (n+1)^3 \end{aligned}$$

Nekaj lastnosti trikotniških števil – 2

$$T_{n+1} = T_n + (n + 1)$$

$$T_{m+n} = T_m + T_n + mn$$

$$T_{m+n+p} = T_m + T_n + T_p + mn + np + mp$$

$$T_{mn} = T_m T_n + T_{m-1} T_{n-1}$$

$$T_n + T_{7n-2} = (5n - 1)^2$$

$$T_n + T_{7n+8} = (5n + 6)^2$$

Katera trikotniška števila so kvadratna?

$$T_n = Q_m$$

$$n^2 + n = 2m^2$$

$$4n^2 + 4n = 8m^2$$

$$(2n + 1)^2 = 2(2m)^2 + 1$$

Vpeljemo naravni števili

$$x = 2n + 1, \quad y = 2m; \quad n = \frac{x - 1}{2}, \quad m = \frac{y}{2}$$

Dobimo Pellovo enačbo:

$$x^2 - 2y^2 = 1$$

Splošna Pellova enačba je

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

Pri tem je D naravno število, ki ni kvadrat.

John Pell (1611–1685) je bil angleški matematik.

Reševanje Pellove enačbe

Trivialna rešitev Pellove enačbe $x^2 - 2y^2 = 1$ je $(x_0, y_0) = (1, 0)$, osnovna rešitev pa $(x_1, y_1) = (3, 2)$. Velja $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 8 = 1$. Osnovna rešitev da:

$$n_1 = 1, m_1 = 1 \implies N_1 = 1$$

Vse rešitve (x_n, y_n) dobimo iz zveze

$$x_n + y_n\sqrt{2} = (x_1 + y_1\sqrt{2})^n = (3 + 2\sqrt{2})^n$$

$$x_2 + y_2\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^2 = 17 + 12\sqrt{2} \implies (x_2, y_2) = (17, 12)$$

Dobimo:

$$n_2 = 8, m_2 = 6 \implies N_2 = 36$$

$$x_3 + y_3\sqrt{2} = (17 + 12\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) = 99 + 70\sqrt{2} \implies (x_3, y_3) = (99, 70)$$

Dobimo:

$$n_3 = 49, m_3 = 35 \implies N_3 = 1225$$

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{2} = (3 + 2\sqrt{2})^{n+1} = (x_n + y_n\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})$$

$$x_{n+1} = 3x_n + 4y_n, \quad y_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

Iz prve enačbe je

$$y_n = \frac{1}{4}(x_{n+1} - 3x_n)$$

Vstavimo v drugo enačbo in po preurejanju dobimo:

$$x_{n+2} = 6x_{n+1} - x_n; \quad x_0 = 1, x_1 = 3$$

Na podoben način dobimo še:

$$y_{n+2} = 6y_{n+1} - y_n; \quad y_0 = 0, y_1 = 2$$

Nastavka:

$$x_n = \lambda^n, \quad y_n = \lambda^n$$

Karakteristična enačba:

$$\lambda^2 = 6\lambda - 1$$

Rešitvi karakteristične enačbe:

$$\lambda_{1,2} = 3 \pm 2\sqrt{2} = (1 \pm \sqrt{2})^2$$

Rešitvi rekurzivnih enačb:

$$x_n = A\lambda_1^n + B\lambda_2^n; \quad x_0 = 1, x_1 = 3$$

$$y_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n; \quad y_0 = 0, y_1 = 2$$

$$x_n = \frac{1}{2} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} + (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)$$

$$y_n = \frac{\sqrt{2}}{4} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)$$

Iz $N_n = m_n^2 = y_n^2/4$ dobimo:

$$N_n = \frac{1}{32} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)^2$$

Rekurzivna enačba za N_n :

$$N_{n+2} = 34N_{n+1} - N_n + 2; \quad N_0 = 0, N_1 = 1$$

Pellova števila p_n so definirana z rekurzivno formulo

$$p_{n+2} = 2p_{n+1} + p_n$$

pri začetnih pogojih $p_0 = 0$ in $p_1 = 1$. Ustrezna karakteristična enačba je

$$\lambda^2 = 2\lambda + 1$$

s korenoma $\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ in $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$. Splošna formula:

$$p_n = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\lambda_1^n - \lambda_2^n) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((1 + \sqrt{2})^n - (1 - \sqrt{2})^n \right)$$

$$\frac{1}{4}p_{2n}^2 = \frac{1}{32} \left((1 + \sqrt{2})^{2n} - (1 - \sqrt{2})^{2n} \right)^2$$

$$N_n = \frac{1}{4}p_{2n}^2$$

Brahmagupta in Bhaskara II.

Pellovo enačbo, bolje Fermatovo enačbo, sta poznala že indijska matematika

Brahmagupta (598–668) – ब्रह्मगुप्त

in

Bhaskara Učitelj (Bhaskaračarja, Bhaskara II.) (1114–1185) –

भास्कारचार्य.

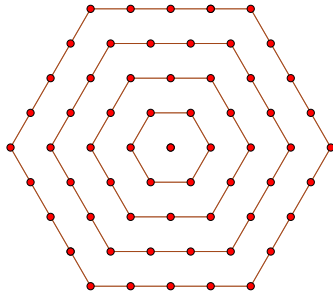
Slednjemu je bila na primer znana osnovna rešitev enačbe

$$x^2 - 61y^2 = 1,$$

ki je

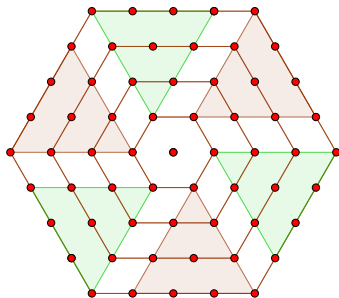
$$(x_1, y_1) = (1766319049, 226153980).$$

Središčno večkotniška števila



$$H'_5 = 61$$

Formula za središčno večkotniško število



$$H'_5 = 1 + 6T_4 = 1 + 6 \cdot 10 = 61$$

Splošno:

$$P_n^{(k)} = 1 + kT_{n-1} = \frac{2 + kn(n-1)}{2}$$

Kdaj je središčno trikotniško število trikotniško?

$$T_n = T'_m$$

$$n(n+1) = 2 + 3m(m-1)$$

$$4n^2 + 4n = 8 + 3(4m^2 - 4m)$$

$$(2n+1)^2 = 6 + 3(2m-1)^2$$

Z uvedbo $x = 2n + 1$ in $y = 2m - 1$ dobimo enačbo

$$x^2 - 3y^2 = 6,$$

kar je posplošena Pellova enačba. Pripada ji Pellova enačba

$$x^2 - 3y^2 = 1,$$

ki ima trivialno rešitev $(x_0, y_0) = (1, 0)$ in osnovno rešitev $(x_1, y_1) = (2, 1)$, iz katere najdemo vse druge po znanem postopku.

Rešitve (x_k, y_k) dobimo namreč s formulo

$$x_k + y_k\sqrt{3} = (x_1 + y_1\sqrt{3})^k = (2 + \sqrt{3})^k.$$

Cela števila x_k in y_k za $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ sestavljajo neskončni zaporedji. Zanju lahko najdemo ločeni rekurzivni enačbi. Najprej zapišemo:

$$x_{k+1} + y_{k+1}\sqrt{3} = (x_1 + y_1\sqrt{3})^{k+1} = (2 + \sqrt{3})(x_k + y_k\sqrt{3}).$$

Dobimo sistem rekurzivnih enačb:

$$x_{k+1} = 2x_k + 3y_k,$$

$$y_{k+1} = x_k + 2y_k.$$

Z izločitvijo y_k iz prve in x_k iz druge enačbe dobimo linearni homogeni rekurzivni enačbi drugega reda z začetnimi pogoji:

$$x_{k+2} = 4x_{k+1} - x_k, \quad x_0 = 1, x_1 = 2;$$

$$y_{k+2} = 4y_{k+1} - y_k, \quad y_0 = 0, y_1 = 1.$$

Karakteristična enačba prejšnjih rekurzivnih enačb je $\lambda^2 = 4\lambda - 1$ s korenoma $\lambda_1 = 2 + \sqrt{3}$ in $\lambda_2 = 2 - \sqrt{3}$. Po znanem postopku dobimo rešitvi:

$$x_k = \frac{1}{2}(\lambda_1^k + \lambda_2^k), \quad y_k = \frac{\sqrt{3}}{6}(\lambda_1^k - \lambda_2^k)$$

Da bi splošno rešili enačbo $x^2 - 3y^2 = 6$, moramo poznati vsaj eno njeno celoštevilsko rešitev. Denimo, da je ta $(x, y) = (a, b) = (a_0, b_0)$. Velja torej $a^2 - 3b^2 = 6$. Oglejmo si število

$$a_1 + b_1\sqrt{3} = (x_k + y_k\sqrt{3})(a + b\sqrt{3}),$$

kjer sta a_1 in b_1 celi števili. Kratek račun pokaže, da veljata relaciji

$$a_1 = ax_k + 3by_k, \quad b_1 = bx_k + ay_k$$

in da sta a_1 in b_1 rešitvi enačbe $x^2 - 3y^2 = 6$.

Enačba $x^2 - Dy^2 = c$, kjer D ni kvadrat, nima rešitve (x, y) za vsak celi c . Če jo ima, potem obstaja ena, za katero y zadošča pogoju

$$|y| \leq \sqrt{\frac{|c|}{D}}(x_1 + y_1\sqrt{D}),$$

kjer je (x_1, y_1) osnovna rešitev Pellove enačbe $x^2 - Dy^2 = 1$.

V našem konkretnem primeru je $c = 6$, $D = 3$, $x_1 = 2$ in $y_1 = 1$. S tem dobimo $|y| \leq 2,73$, kar pomeni $y = \pm 1$ in $y = \pm 2$. V prvem primeru mora potem veljati $x^2 = 6 + 3 = 9$, kar nam da $x = \pm 3$. V drugem primeru pa dobimo $x^2 = 6 + 12 = 18$, kar pa ne pride v poštev. Rešitve so zato $(x, y) = (\pm 3, \pm 1)$. Zato lahko izberemo eno od 4 možnosti: $(a_0, b_0) = (\pm 3, \pm 1)$. Ker je za $(a_0, b_0) = (3, 1)$

$$(a_0 + b_0\sqrt{3})(x_1 + y_1\sqrt{3}) = (3 + \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 9 + 5\sqrt{3},$$

par $(a_1, b_1) = (9, 5)$ reši enačbo $x^2 - 3y^2 = 6$. To pomeni:

$$n_0 = (a_0 - 1)/2 = 1, m_0 = (b_0 + 1)/2 = 1 \text{ in}$$

$$n_1 = (a_1 - 1)/2 = 4, m_1 = (b_1 + 1)/2 = 3.$$

Če bi izbrali $(a, b) = (3, -1)$, ne bi dobili ničesar novega, ker je tedaj

$$(a + b\sqrt{3})(x_1 + y_1\sqrt{3}) = (3 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 3 + \sqrt{3} = a_1 + b_1\sqrt{3}.$$

Zato dobimo vse rešitve problema, če vzamemo $(a_0, b_0) = (3, 1)$ in

$$a_k + b_k\sqrt{3} = (a_0 + b_0\sqrt{3})(x_k + y_k\sqrt{3}),$$

nato pa $n_k = (a_k - 1)/2$, $m_k = (b_k + 1)/2$. Naloga ima nešteto rešitev, indeksiranih s $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Označimo s C_k število, ki je hkrati trikotniško in središčno trikotniško, k -to po velikosti, to se pravi

$$C_k = T_{n_k} = \frac{n_k(n_k + 1)}{2} = \frac{a_k^2 - 1}{8}.$$

Rezultate za začetne k zberemo v tabelo.

k	a_k	b_k	C_k	n_k	m_k
0	3	1	1	1	1
1	9	5	10	4	3
2	33	19	136	16	10
3	123	71	1891	61	36
4	459	256	26335	229	133
5	1713	989	366796	856	495

Iz tabele na primer preberemo: $T_{61} = T'_{36} = 1891$.

Števila C_k lahko izrazimo tudi direktno, če uporabimo enačbo $a_k + b_k\sqrt{3} = (3 + \sqrt{3})(x_k + y_k\sqrt{3})$, iz katere je

$$a_k = 3x_k + 3y_k = \frac{3}{2}(\lambda_1^k + \lambda_2^k) + \frac{\sqrt{3}}{2}(\lambda_1^k - \lambda_2^k).$$

Po daljšem računu dobimo

$$C_k = \frac{a_k^2 - 1}{8} = \frac{3}{16} \left((2 + \sqrt{3})^{2k+1} + (2 - \sqrt{3})^{2k+1} \right) + \frac{1}{4}$$

in

$$C_k = \frac{3}{16} \left(\lambda_1 (7 + 4\sqrt{3})^k + \lambda_2 (7 - 4\sqrt{3})^k \right) + \frac{1}{4}.$$

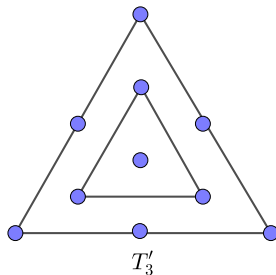
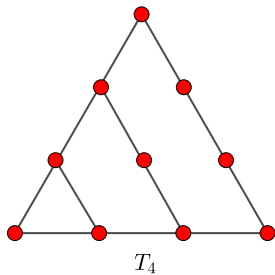
Če vpeljemo števili $\mu_1 = 7 + 4\sqrt{3}$ in $\mu_2 = 7 - 4\sqrt{3}$, ki sta korena enačbe $\mu^2 = 14\mu - 1$, zakaj spoznamo, da števila C_k zadoščajo nehomogeni linearni rekurzivni enačbi

$$C_{k+2} = 14C_{k+1} - C_k + A$$

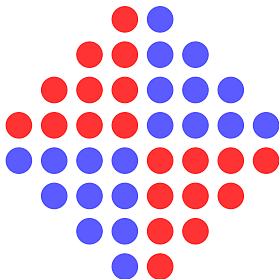
pri začetnih pogojih $C_0 = 1$ in $C_1 = 10$ za neko konstanto A . Ni težko videti, da je $A = -3$. Rekurzivna enačba za števila C_k je torej

$$C_{k+2} = 14C_{k+1} - C_k - 3.$$

$$T_4 = T'_3$$



Azteško diamantna števila



$$A_4 = 40$$

$$A_n = 4T_n = 2R_n = 2n(n+1)$$

$$\mathcal{T}_1 = T_1 = 1$$

$$\mathcal{T}_2 = T_1 + T_2 = 4$$

$$\mathcal{T}_3 = T_1 + T_2 + T_3 = 10$$

$$\mathcal{T}_4 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 = 20$$

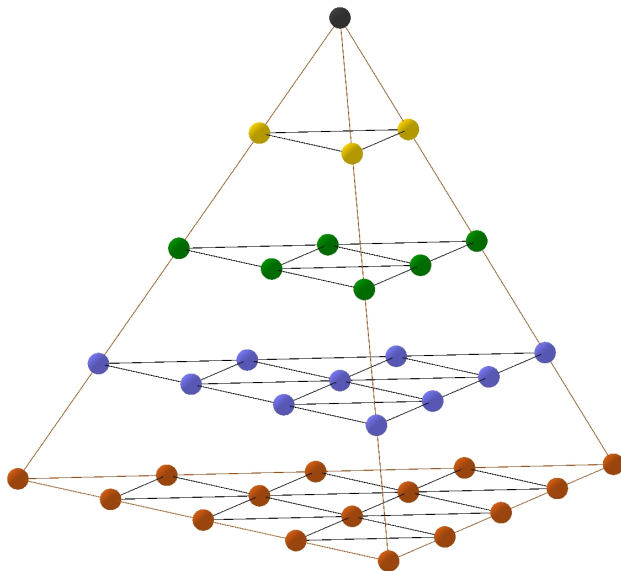
$$\mathcal{T}_5 = T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5 = 35$$

$$\vdots$$

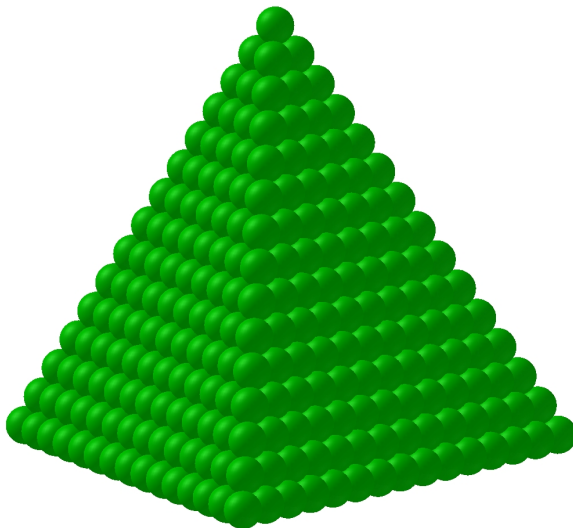
$$\mathcal{T}_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\mathcal{T}_5 = 35, \quad \mathcal{T}_{15} = 680$$

Predstavitev petega tetraedrskega števila



Predstavitev petnajstega tetraedrskega števila



Trikotniška, kvadratna in tetraedrska števila

Tetraedrska števila sestavljajo naraščajoče zaporedje naravnih števil:

$$(\mathcal{T}_n)_{n=1}^{\infty} = (1, 4, 10, 20, 35, 56, 84, 120, 165, 220, 286, 364, 455, 560, \dots).$$

Dokazano je, da so med njimi samo tri kvadratna in pet trikotniških števil:

$$\mathcal{T}_1 = Q_1 = 1, \mathcal{T}_2 = Q_2 = 4, \mathcal{T}_{48} = Q_{140} = 19600,$$

$$\mathcal{T}_1 = T_1 = 1, \mathcal{T}_3 = T_4 = 10, \mathcal{T}_8 = T_{15} = 120,$$

$$\mathcal{T}_{20} = T_{55} = 1540, \mathcal{T}_{34} = T_{119} = 7140.$$

$$G(x, T) = \frac{x}{(1-x)^3} = T_1x + T_2x^2 + T_3x^3 + T_4x^4 + \dots,$$

$$G(x, Q) = \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = Q_1x + Q_2x^2 + Q_3x^3 + Q_4x^4 + \dots,$$

$$G(x, P^{(k)}) = \frac{x((k-3)x+1)}{(1-x)^3} = P_1^{(k)}x + P_2^{(k)}x^2 + P_3^{(k)}x^3 + P_4^{(k)}x^4 + \dots,$$

$$G(x, P'^{(k)}) = \frac{x(x^2 + (k-2)x + 1)}{(1-x)^3} = P_1'^{(k)}x + P_2'^{(k)}x^2 + P_3'^{(k)}x^3 + P_4'^{(k)}x^4 + \dots,$$

$$G(x, \mathcal{T}) = \frac{x}{(1-x)^4} = \mathcal{T}_1x + \mathcal{T}_2x^2 + \mathcal{T}_3x^3 + \mathcal{T}_4x^4 + \dots,$$

$$|x| < 1$$

Številске vrste z inverzi figurativnih števil

$$S(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{X_n}, \quad (X \in \{T, T', Q, Q'\})$$

$$S(T) = 2, \quad S(Q) = \frac{\pi^2}{6}, \quad S(T') = \frac{2\pi}{\sqrt{15}} \operatorname{th} \left(\frac{5\pi}{2\sqrt{15}} \right),$$

$$S(Q') = \frac{\pi}{2} \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} \right), \quad S(\mathcal{T}) = \frac{3}{2}$$

Splošno za $X = P^{(k)}$:

$$S(P^{(k)}) = \frac{2\pi}{\sqrt{k(8-k)}} \operatorname{th} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{8-k}{k}} \right) \quad (3 \leq k \leq 7)$$

$$S(P^{(k)}) = \frac{2\pi}{\sqrt{k(k-8)}} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{k-8}{k}} \right) \quad (k \geq 9), \quad S(P^{(8)}) = \frac{\pi^2}{8}$$

Zadnje izraze dobimo z uporabo razvojev

$$\frac{\pi}{4x} \operatorname{th} \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 + x^2}, \quad \frac{\pi}{4x} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2 - x^2}$$

Za $X = P^{(k)}$ dobimo

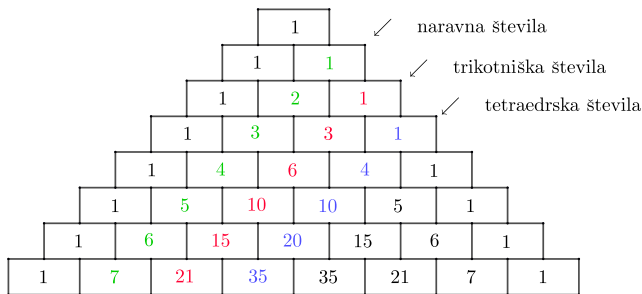
$$S(P^{(k)}) = \frac{2}{4-k} \left(\psi \left(\frac{2}{k-2} \right) + \gamma \right) \quad (k \neq 4)$$

$$S(P^{(4)}) = S(Q) = \frac{\pi^2}{6}$$

γ – Euler–Mascheronijeva konstanta

$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$ – funkcija digama, $\psi(n) = h_{n-1} - \gamma$, h_n — n -ta delna vsota harmonične vrste

Pascalov trikotnik



$$T_n = \binom{n+1}{2}$$

$$\mathcal{T}_n = \binom{n+2}{3}$$

Fibonaccijeva števila in Pascalov trikotnik

1 ←	1								
1 ←	1	1							
2 ←	1	2	1						
3 ←	1	3	3	1					
5 ←	1	4	6	4	1				
8 ←	1	5	10	10	5	1			
13 ←	1	6	15	20	15	6	1		
21 ←	1	7	21	35	35	21	7	1	
34 ←	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Kakšno je število 2020?

$$2020 = T_3 + T_4 + \dots + T_{22}$$

$$2020 = Q_{24} + Q_{38} = Q_{16} + Q_{42}$$

$$2020 = 31+32+\dots+70 = 249+250+\dots+256 = 402+403+\dots+406$$

$$2020 = P_1^{(2020)}$$

$$\left(\frac{10601}{198}\right)^2 + 2020 = \left(\frac{13841}{198}\right)^2, \quad \left(\frac{10601}{198}\right)^2 - 2020 = \left(\frac{5761}{198}\right)^2$$

Število 2020 je kongruentno.

Figurativnih števil s tem še ni konec

- trapezna števila
- prirezana večkotniška števila
- piramidna števila
- kubična števila
- oktaedrska števila
- politopska števila
- ⋮

- [1] E. Deza, M. M. Deza, *Figurate numbers*, World Scientific, New Jersey in drugje 2012.
- [2] L. P. Fibonacci, *The book of squares*, Academic Press, Boston in drugje 1987. Prevod L. E. Sigler.
- [3] J. Grasselli, *Diofantske enačbe*, DMFA, Ljubljana 1984.
- [4] J. Grasselli, *Enciklopedija števil*, DMFA, Ljubljana 2008.
- [5] J. Ziegenbalg, *Figurierte Zahlen*, Springer Spektrum, Wiesbaden 2018.
- [6] K. Conrad, *Pell's equation I, II*,
<https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/> (dosegljivo 20. 11. 2019)

Hvala za vašo pozornost!

