

KROŽNICA – rešitve

1. naloga

(a)

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 18 = 0$$

$$(x-3)^2 - 9 + (y-4)^2 - 16 + 18 = 0$$

$$\underline{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 7 \rightarrow S(3,4), r = \sqrt{7}}$$

(b)

$$A(3, -1)$$

$$9 + 1 - 18 + 8 + 18 = 18 > 0$$

$\Rightarrow$ točka leži zunaj kroga, ki ga omejuje dana krožnica

2. naloga

Koncentrični krožnici imata isto središče:

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 6 = 0$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = 14 \rightarrow \underline{S(2, -2)}$$

Torej, iskana krožnica ima središče v $S(2, -2)$ in poteka skozi koordinatno izhodišče $A(0,0)$:

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 = r^2 \quad (\text{vstavimo koordinate točke } A)$$

$$4 + 4 = r^2 \Rightarrow r^2 = 8 \quad (r = 2\sqrt{2})$$

$$\underline{(x-2)^2 + (y+2)^2 = 8}$$

3. naloga

$$d(A, B) = |AB| = 2r$$

$$|AB| = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \Rightarrow \underline{r = \sqrt{13}}$$

$$\underline{S(2, 0)} \quad (\text{razpolovišče daljice } AB)$$

$$\underline{(x-2)^2 + y^2 = 13}$$

4. naloga

Uporabimo enačbo $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$

$$A(-3, -1) \rightarrow -3a - b + c = -10$$

$$B(-4, 4) \rightarrow -4a + 4b + c = -32$$

$$\underline{A(1, 5) \rightarrow a + 5b + c = -26}$$

Sistem ima rešitev: $a = 2, b = -4, c = -8$

Enačba krožnice je $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 8 = 0$ ali

$$\underline{(x+1)^2 + (y-2)^2 = 13}$$

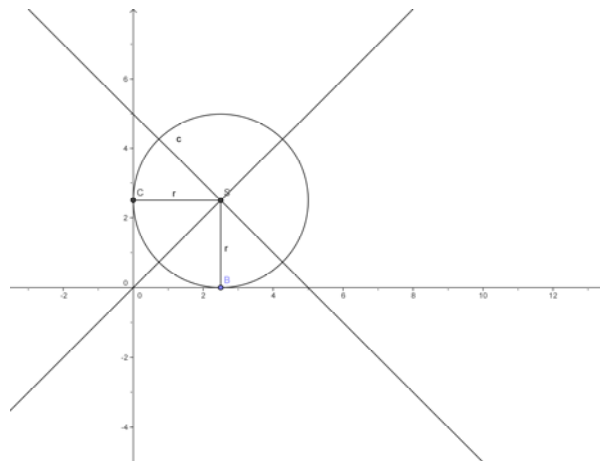
5. naloga

$S(r, r)$ (glej sliko)

$$x + y - 5 = 0$$

$$r + r - 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

$$\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$



6. naloga

1. način (analitičen):

Središče iskane krožnice $S(p, q)$ leži na premici $x - y - 2 = 0 \rightarrow$ koordinate S morajo zadoščati enačbi premice: $p - q - 2 = 0 \Rightarrow q = p - 2$

Uporabimo enačbo $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ in upoštevamo še, da točki A in B ležita na krožnici:

$$(0 - p)^2 + (3 - q)^2 = r^2$$

$$(2 - p)^2 + (-1 - q)^2 = r^2$$

$$q = p - 2$$

Rešitev sistema: $p = 5, q = 3, r^2 = 25$

Enačba krožnice: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

2. način (geometrijski):

Daljšica AB je tetiva dane krožnice. Simetrala tetive poteka skozi središče krožnice ... določimo enačbo simetrale $\rightarrow$ presečišče simetrale in premice na kateri leži središče, je središče iskane krožnice ;)

$$k_{tetive} = -2 \Rightarrow k_{simetrale} = \frac{1}{2} \left(k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \text{ za pravokotni premici velja: } k_1 = -\frac{1}{k_2} \right)$$

$$\text{razpolovišče tetive: } R(1, 1) \left(R\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) \right)$$

$$\text{enačba tetive: } y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} \quad (y - y_1 = k(x - x_1))$$

presečišče premic je središče iskane krožnice: $S(5, 3)$

polmer krožnice: $r = d(S, A) = 5$

Enačba krožnice: $(x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 25$

7. naloga

$$2x - y - 1 = 0 \Rightarrow \underline{y = 2x - 1}$$

$$(x-1)^2 + (2x-1+1)^2 = 4$$

$$5x^2 - 2x - 3 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 8}{10} = \frac{1 \pm 4}{5} \quad (\text{premica je očitno sekanta})$$

$$\underline{\underline{P_1(1, 1), \quad P_2\left(-\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right)}}$$

8. naloga

$$\mathcal{K}_1 : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

$$\underline{(x-1)^2 + (y+1)^2 = 4, \quad S_1(1, -1), \quad r_1 = 2}$$

$$\mathcal{K}_2 : x^2 + 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$$

$$\underline{(x+3)^2 + (y+4)^2 = 9, \quad S_2(-3, -4), \quad r_2 = 3}$$

$$\mathcal{K}_2 - \mathcal{K}_1 : 8x + 6y + 18 = 0 \quad / : 2$$

$$4x + 3y + 9 = 0 \quad (\text{presečišče krožnic mora zadoščati tej enačbi premice})$$

$$y = -\frac{4}{3}x - 3$$

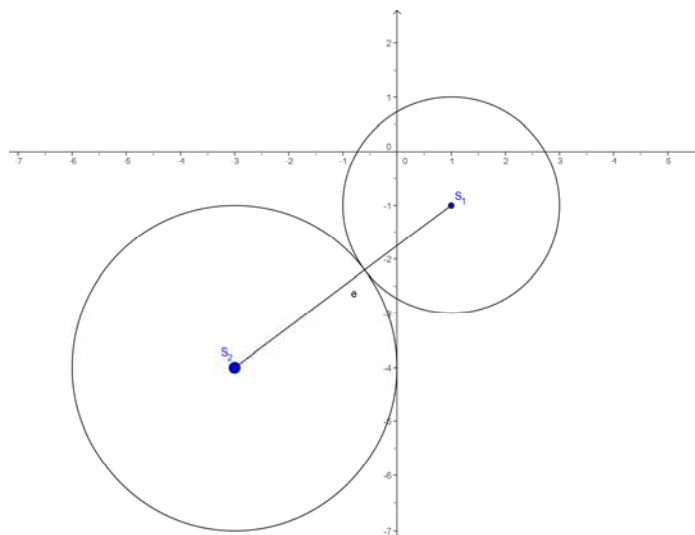
Torej, problem smo prevedli na presek ene od krožnic in dobljene premice:

$$\mathcal{K}_1 : x^2 + \left(-\frac{4}{3}x - 3\right)^2 - 2x + 2\left(-\frac{4}{3}x - 3\right) - 2 = 0$$

$$25x^2 + 30x + 9 = 0$$

$$x = -\frac{3}{5} \Rightarrow y = -\frac{11}{5} \rightarrow \underline{\underline{P\left(-\frac{3}{5}, -\frac{11}{5}\right)}}$$

Krožnici se dotikata od zunaj: $|S_1S_2| = r_1 + r_2 = 5$



9. naloga

$$K_1: (x-4)^2 + (y-2)^2 - 36 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 8x - 4y = 16$$

$$K_2: (x+2)^2 + (y+4)^2 = 24$$

$$x^2 + y^2 + 4x + 8y = 4$$

(a)

$$K_2 - K_1: 12x + 12y + 12 = 0$$

$$x + y + 1 = 0 \text{ (enačba iskane premice, implicitna oblika)}$$

$$\underline{\underline{y = -x - 1}}, \quad k_1 = -1$$

(b)

$$S_1(4, 2)$$

$$S_2(-2, -4)$$

$$\underline{\underline{y = x - 2}}, \quad k_2 = 1$$

(c)

Premici se sekata pod pravim kotom $\left(k_1 = -\frac{1}{k_2}\right)$.

10. naloga

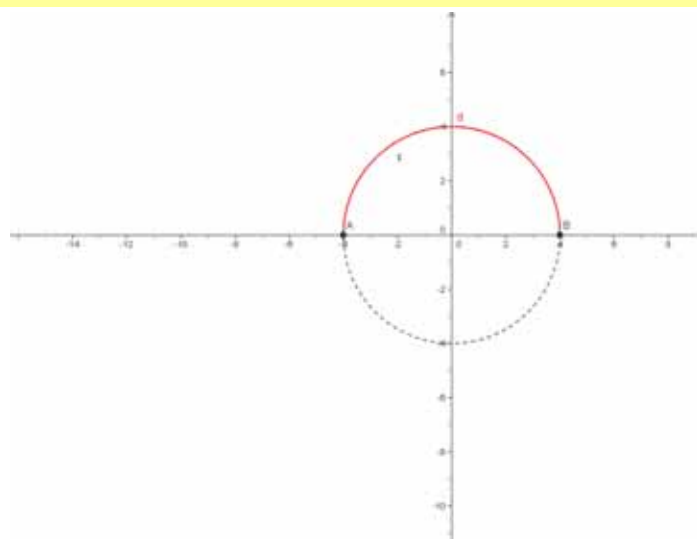
(a)

$$D_f: 16 - x^2 \geq 0$$

$$-4 \leq x \leq 4 \text{ ali } D_f = [-4, 4]$$

$$Z_f: 0 \leq y \leq 4$$

$$y = +\sqrt{16 - x^2} \rightarrow x^2 + y^2 = 16$$



(b)

$$D_g: 1 - (x+2)^2 \geq 0$$

$$-3 \leq x \leq -1$$

$$Z_g: 0 \leq y \leq 1$$

$$g(x) = +\sqrt{1 - (x+2)^2} \rightarrow (x+2)^2 + y^2 = 1$$

