

Newtonova mehanika

1. Določi **ravnino gibanja** točke v polju centralne sile.
Ravnina gibanja gre skozi center sile in ima normalo v smeri vrtilne količine
2. Zapiši **periodo gibanja premočrtnega gibanja** pod vplivom potenciala $U(x)$.
$$T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$$
, a in b točki, v katerih je potencial enak energiji.
3. Kaj je **vektor kotne hitrosti**?
Tenzor $Q^T \dot{Q}$ je antisimetričen, zato obstaja osni vektor $\vec{\omega}$, da je $Q^T \dot{Q} \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega}' = Q \vec{\omega}$.
4. Zapiši **Eulerjeve dinamične enačbe** za prosto osnosimetrično vrtavko.
$$0 = J\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(J - J_3)$$
$$0 = J\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(J_3 - J)$$
$$0 = J_3\dot{\omega}_3$$
$$J := J_1 = J_2$$
5. Naštej tri netrivialne primere **redukcije gibanja na premočrtno gibanje**.
Kaj so **integrali gibanja** v vsakem primeru posebej?
Gibanje po krivulji (glede na ločno dolžino), gibanje v polju centralne sile (glede na radij), gibanje osnosimetrične vrtavke (glede na kot nutacije).
Integrali gibanja: energija (vsi trije primeri), vrtilna količina (druga dva primera).
6. Kdaj natanko **dve rotaciji komutirata**?
Natanko tedaj, ko sta rotaciji okoli iste osi.
7. Opiši **gibanje proste osnosimetrične vrtavke**.
Težišče se giblje premočrtno, osni vektor rotacije $\vec{\omega}$ pa enakomerno precesira okrog osi $\vec{k}$.
8. Koliko parametrov ima **grupa Galilejevih transformacij**?
10.
9. Zapiši **energijsko enačbo gibanja materialne točke** v polju konzervativne sile.
$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E_0, E_0 = \text{konst.}$$
10. Zapiši **enačbe gibanja togega telesa** okrog stalne točke.
Newtonov zakon: $m \ddot{\vec{P}}_* = \vec{F}'$, **Eulerjeva dinamična enačba**:
$$\vec{\omega} \times J \vec{\omega} + J \dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$$
11. Zapiši **Galilejevo transformacijo** med dvema naravnima Galilejevima strukturama na $R \times E$
Transformacija mora biti **afina**, veljati mora:
$$t' = t + t_0'$$
$$P' = \vec{c}t + c' + Q(P - P_0)$$
12. Kdaj pravimo, da je premočrtno gibanje **izokronično**?
Premočrtno gibanje je izokronično, če je perioda gibanja neodvisna od energije.
13. Kako zapišemo rotacijo s **kvaternionom**?

$$R(\vec{e}, \varphi) \vec{r} = q \vec{r} q^*, \vec{r} = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{e} \sin \frac{\varphi}{2}, |\vec{e}| = 1$$

14. Zapiši splošno obliko **funkcije interakcije** med dvema materialnima točkama

Splošna oblika funkcije interakcije med materialnima točkama P1 in P2 je:

$$\vec{f}(P_1 - P_2, \frac{dP_1}{dt} - \frac{dP_2}{dt}), \text{ kjer je } f \text{ izotropična vektorska funkcija.}$$

15. Koliko **prostorskih stopenj** ima togo telo, ki se kotali po ploskvi?

Konfiguracijski prostor za kotaljenje telesa po ploskvi je 5-dimenzijski, 2 koordinati za dotikališče ter 3 za orientacijo. Obstajata 2 neholonomni vezi, ki poskrbita, da se telo kotali. Torej je število prostostnih stopenj $5 - 2 = 3$.

Lagrangeva mehanika

1. Ali je **vez premočrtnega kotaljenja** holonomna ali neholonomna vez?
Vez je **holonomna**.
2. Kaj je **konstanta gibanja avtonomnega sistema**?
Konstanta gibanja avtonomnega sistema je **Jacobijeva energijska funkcija** $\varepsilon(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \underline{p}\underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$.
3. Kako dobiš **frekvence majhnega nihanja** okrog ravnovesne lege?
Lagrangevo funkcijo zapišemo kot $L = \frac{1}{2} \underline{\dot{q}} \cdot T(\underline{q}_0) \underline{\dot{q}} - \frac{1}{2} (\underline{q} - \underline{q}_0) \cdot V(\underline{q} - \underline{q}_0)$ in **rešujemo posplošeni sistem lastnih** vrednosti tako, da iščemo tak omega, da je $\det(V - \omega^2 T) = 0$.
4. Naj bo **sistem materialnih točk invarianten za rotacije** okrog dane osi. Kaj je pripadajoča **konstanta gibanja**?
Konstanta gibanja je $\vec{e} \cdot \vec{L}(P_0)$, kjer je e os rotacije in P_0 točka, ki leži na osi.
5. Zapiši **Hamiltonov variacijski princip**.
Stacionarna točka akcijskega funkcionala nad afinim prostorom trajektorij s predpisanimi vrednostmi na krajiščih je natanko rešitev Lagrangevih enačb s predpisanimi vrednostmi na krajiščih.
6. Kdaj je **Eulerjeva energijska funkcija** enaka vsoti kinetične in potencialne energije?
Kadar je sistem **skleronomen**, t.j. ko vezi niso odvisne od časa.
7. Naj bo **sistem invarianten za translacije** v smeri danega vektorja. Kaj je pripadajoča **konstanta gibanja**?
Konstanta gibanja je projekcija gibalne količine na dani vektor.
8. Kaj je **posplošeni potencial** in kje nastopa?
To je potencial, **odvisen tudi od hitrosti** ($V = V(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$). Primer posplošenega potenciala je potencial Lorentzove sile ali gibanja v relativnem koordinatnem sistemu.
9. Zapiši primer vezi, pri kateri **možni in virtualni pomiki** sovpadajo.
Možni in virtualni pomiki sovpadajo v primeru, ko je vez **geometrično skleronomna**.
10. Kdaj **možni in virtualni pomiki** sovpadajo?
Če so geometrične vezi skleronomne (npr. $\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt} = 0$) ali če je sistem katastatičen.
11. Zapiši **osnovno obliko Lagrangevih enačb**.
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$
12. Kako pri **teoriji majhnih nihanj** v okolici ravnovesne lege pridemo do **osnovnih frekvenc**?
Tako, da rešimo posplošen problem lastnih vrednosti – rešujemo $\det(V - \omega T) = 0$
13. Kako **razširimo Lagrangevo mehaniko** na primere, ko je potencial odvisen od generaliziranih hitrosti?
S posplošenim potencialom, t.j. $V = V(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$

14. Kakšne oblike more biti **generalizirana sila**, da jo lahko zapišemo s posplošenim potencialom?

Naj bo Q generalizirana sila. S posplošenim potencialom $V = V(q, \dot{q}, t)$ jo

lahko zapišemo, če je oblike: $Q = -V_q + \frac{d}{dt}(V_{\dot{q}})$.

15. V katerem primeru **Lagrangeva funkcija majhnega nihanja** okoli ravnovesne lege sovpada s prvotno Lagrangevo funkcijo?

V primeru, da je metrični tenzor kinetične energije konstanten (to npr. velja v kartezičnih koordinatah) in je potencial kvadratna funkcija koordinat.

16. Naj bo **Lagrangeva funkcija invariantna za translacije** v smeri danega vektorja. Kaj je pripadajoča konstanta gibanja?

Pripadajoča konstanta gibanja je projekcija gibalne količine na dani vektor.

17. Kako dani Lagrangevi funkciji **priredimo ekvivalentno Lagrangevo funkcijo**?

Naj bo $L(x, \dot{x}, t)$ Lagrangeva funkcija. Naj bo $f(x, t)$ poljubna funkcija. Če L

dodamo totalni odvod funkcije f po času, bo dobljena nova $L' = L + \frac{df}{dt}$ Lagrangeva funkcija ekvivalentna prvotni.

18. Naj bo sistem **invarianten za translacije v smeri danega vektorja**. Kaj je pripadajoča konstanta gibanja?

Če je sistem invarianten za translacije v smeri vektorja a , je pripadajoča

konstanta gibanja $a \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = a \cdot p$. V posebnem, če je sistem invarianten za translacije v smeri q_i (q_i je ciklična spremenljivka), je p_i konstanta gibanja.

Hamiltonova mehanika

1. Kako dobimo Hamiltonovo funkcijo iz dane Lagrangeve funkcije?
Hamiltonova funkcija je **Legendrova transformiranka** Lagrangeve funkcije. Pišemo jo $H = \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$, kjer je $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}}$ in $\underline{\dot{q}}$ izrazimo z $\underline{p}$ in $\underline{q}$.
2. Zapiši **kanonski sistem** s pomočjo **simplektične matrike**.
$$\underline{\dot{x}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$$
3. Zapiši definicijo **časovno neodvisne kanonske transformacije**.
To je taka kanonska transformacija, kjer nove spremenljivke niso odvisne od časa, t.j. transformacija $(P, Q) = f(p, q)$, ki **ohranja kanonski sistem, Poissonov oklepaj in zadošča simplektičnemu pogoju**.
4. Kako se glasi **kanonski sistem gibanja v polju centralne sile**?
$$\dot{r} = \frac{1}{m} p_r$$
$$\dot{\vartheta} = \frac{1}{mr^2} p_{\vartheta}$$
$$\dot{p}_r = \frac{p_{\vartheta}^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$$
$$\dot{p}_{\vartheta} = 0$$
5. Zapiši **Hamilton-Jacobijevo enačbo za harmonični oscillator**.
$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + (mwq)^2 \right) = 0$$
6. Določi nekonstanti funkciji f in g tako, da bo njun **Poissonov oklepaj** enak nič.
Če je $f=g=f(p, q)$ nekonstantna, je $[f, g]=0$. Poleg tega je $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$ in $[q_i, p_j] = \delta_{i,j}$.
7. Kdaj natanko je **transformacija faznega prostora**, ki pripada gibanju z eno prostorsko stopnjo, **kanonska**?
Natanko tedaj, kadar ohranja volumen faznega prostora, kar je za eno prostorsko stopnjo natanko tedaj, kadar je $\det\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 1$, pri čemer so ξ transformirane koordinate.
8. Kako se glasi **kanonski sistem enačb majhnega gibanja okoli ravnovesne lege**?
Hamiltonova funkcija je za majhna gibanja okoli ravnovesne lege enaka
$$H = \frac{1}{2} \underline{p} \cdot T^{-1} \underline{p} + \frac{1}{2} (\underline{q} - \underline{q}_0) \cdot V(\underline{q} - \underline{q}_0)$$
, zato je kanonski sistem
$$\underline{\dot{q}} = T^{-1} \underline{p}, \underline{\dot{p}} = -V(\underline{q} - \underline{q}_0).$$
9. Čemu je enaka **Legendrova transformacija Hamiltonove funkcije**?
Legendrova transformacija Hamiltonove funkcije je enaka Lagrangevi funkciji, saj je Legendrova transformacija **involutivna**.
10. Zapiši **kanonski sistem za harmonični oscilator**.

Za harmonični oscilator je $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$ in $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$, zato je kanonski sistem $\dot{q} = \frac{1}{m} p, \dot{p} = -kq$

11. Zapiši odvod funkcije $f=f(p,q,t)$ vzdolž rešitve kanonskega sistema

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$$

12. Naštej osnovne lastnosti Poissonovega oklepaja

$$[f, g] = -[g, f]$$

$$[f+g, h] = [f, h] + [g, h]$$

$$[af, g] = a[f, g]$$

$$\frac{\partial [f, g]}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]$$

$$[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$$

13. Priredi dani Hamiltonovi funkciji **Hamilton-Jacobijevo enačbo**

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, \underline{q}, \left(\frac{\partial S}{\partial \underline{q}}\right)^T\right) = 0$$

14. Kaj povezuje Lagrangevo in Hamiltonovo mehaniko?

Legendrova transformacija (glej 1. Točko)

$$\frac{1}{2} \dot{q} \cdot \Pi \dot{q} - V(q)$$

15. Priredi Lagrangevi funkciji **Hamiltonovo funkcijo**.

$$L = \frac{1}{2} \dot{q} \cdot \Pi \dot{q} - V(q)$$

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \Pi \dot{q} \Rightarrow \dot{q} = \Pi^{-1} p$$

$$H = \Pi^{-1} p \cdot p - \frac{1}{2} \Pi^{-1} p \Pi \Pi^{-1} p + V(q) = \frac{1}{2} \Pi^{-1} p \cdot p + V(q)$$

16. Določi netrivialni funkciji $f=f(q,p)$ in $g=g(q,p)$ tako, da bo njun **Poissonov oklepaj** enak 1.

$$[x, p_x] = 1$$

17. Kdaj je **transformacija faznega prostora kanonska**?

Ko zadošča simplektičnemu pogoju:

$$\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^T = J = \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^T J \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \xi(x) - \text{transformacija}$$

Kinematika mehanike kontinuuma

1. *Kdaj natanko je **tenzor deformacije** trivialen?*
Natanko tedaj, ko je deformacija toga.
2. *Zapiši zvezo pri deformaciji med $\underline{dp}$ in $\underline{dP}$.*
 $\underline{dp} = \underline{F} \underline{dP}$
3. *Zapiši **materialni odvod hitrostnega polja**. Kaj predstavlja?*
 $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}(\vec{v})\vec{v}$. Predstavlja prostorsko polje pospeškov.
4. *Izračunaj **odvod prostorskega volumenskega elementa** po času.*
 $\frac{D}{Dt} dv = \text{div}(\vec{v}) dv$
5. *Kaj je **osni vektor** poševno simetričnega dela prostorskega gradienta hitrostnega polja?*
 $\frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$
6. *Kakšna je zveza med prostorskim in referenčnim **volumenskim elementom**?*
 $dv = \det(\underline{F}) dV$
7. *Kaj je sled **tenzorja deformacijskih hitrosti**?*
 $sl(\underline{d}) = sl\left(\frac{1}{2}(\text{grad}(\vec{v}) + (\text{grad}(\vec{v}))^T)\right) = sl(\text{grad}(\vec{v})) = \text{div}(\vec{v})$
8. *Ali lahko pri ravninskem hitrostnem polju **tokovnice** in **vrtničnice** sovpadajo?*
Ne, tokovnice tečejo vzdolž polja $\vec{v}$, vrtničnice pa vzdolž polja $\text{rot}(\vec{v})$, ti dve polji pa sta pravokotni ($\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$)
9. *Zapiši **tenzor deformacije** in njen geometrijski pomen.*
 $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - \underline{I})$. Pri majhnih deformacijah diagonalni elementi povejo relativno spremembo dolžin v smeri koordinatnih osi, izvendiagonalni elementi pa polovico kota deformacije.
10. *Kakšna je zveza med prostorskim in referenčnim **ločnim elementom**?*
 $ds^2 = (\vec{A} \cdot 2\underline{E}\vec{A} + 1)dS^2$, kjer je $\vec{A} = \frac{dP}{|dP|}$.
11. *Čemu je enak **osni vektor poševno simetričnega dela tenzorja deformacijskih hitrosti**?*
 $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$
12. *Kaj so **tokovnice** in kaj so **tirnice**?*
Naj bo $F(p_0, t_0, t) = p(t)$ rešitev diferencialne enačbe $\frac{dp}{dt} = \vec{v}(p, t)$, $p(t_0) = p_0$.
Tokovnica v času t_0 je krivulja, ki se dotika hitrostnega polja $\vec{v}(p, t_0)$.
Tirnica, ki gre skozi točko p_0 v času t_0 je krivulja $F(p_0, t_0, t) = p(t)$
13. *Za katera **vektorska polja pomikov** je **infinitesimalen deformacijski tenzor** trivialen?*
Če je $\underline{U}$ polje infinitesimalnih togih premikov, to je natanko tedaj, ko je $\text{grad}(\underline{U})$ poševno simetričen tenzor.
14. *Kaj so **tirnice**?*

Tirnica, ki gre v času t_0 skozi točko p_0 je rešitev diferencialne enačbe

$$\frac{dp}{dt} = v(p, t)$$

15. Zapiši **transportni izrek** za volumenski integral.

$$\frac{D}{Dt} \int_{b(t)} \tilde{f} dv = \int_{b(t)} \left(\frac{D\tilde{f}}{Dt} + \tilde{f} \operatorname{div}(\vec{v}) \right) dv$$

16. Napiši primer nestacionarnega hitrostnega polja, pri katerem tokovnice in tirnice sovpadajo.

$$V(x, y, z, t) = (1 + t^2) * (x, 0, 0)$$

Takšen primer je npr. polje:

17. Zapiši pogoj, da **tokovnice in vrtinčnice sovpadajo**.

Pogoj je, da obstaja gladka funkcija $f=f(x, y, z)$, za katero velja $V=f*\operatorname{rot}(V)$, oziroma – polji sta vzporedni.

Fizikalni princip mehanike kontinuuma

1. Zapiši **zakon o ohranitvi mase** v integralni obliki.

$$\frac{D}{Dt} \int_{b(t)} \rho dV = 0$$

, za vsaki telo V pod telesom B

2. Kako je definiran **tenzor napetosti**?

Po Cauchyjevi hipotezi je gostota površinske sile funkcija $\vec{t}(p, t, \vec{n})$. Če za

vektor, ki ni enotski, definiramo $\vec{t}(p, t, \vec{a}) = |\vec{a}| \vec{t}(p, t, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|})$, je ta funkcija v

zadnjem argumentu linearna, zato lahko definiramo napetostni tenzor $\underline{t}$ s predpisom $\vec{t}(p, t, \vec{n}) = \underline{t}(p, t) \cdot \vec{n}$

3. Zapiši **Cauchyjevo momentno enačbo**.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div}(\underline{t})$$

4. Koliko enačb nam dajo **principi o ohranitvi mase, o gibalni in vrtilni količini** in koliko neznank nastopa v teh enačbah?

Enačb je 7: 1 o ohranitvi mase, 3 o gibalni in 3 o vrtilni količini. Neznanke so $\rho, p, \vec{v}, \underline{t}$, torej za nepolarna sredstva 13 neznank (takrat je napetostni tenzor simetričen), sicer 16. (Alternativa: 10 neznank – preveri!)

5. V kateri smeri je **normalna napetost maksimalna**?

Normalna napetost je maksimalna v smeri lastnega vektorja matrike $\underline{t}$, ki pripada največji lastni vrednosti.

6. Zapiši **zakon o ohranitvi mase** v lokalni obliki.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

7. Kje leži smer **maksimalne strižne napetosti**?

Smer maksimalne strižne napetosti leži v smeri vsote lastnih vektorjev matrike $\underline{t}$, ki pripadata največji in najmanjši lastni vrednosti.

8. Zapiši **kontinuitetno enačbo**.

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$$

9. Kaj je **normalna napetost** in kaj je **strižna napetost**?

Normalna napetost: $t_n = (\underline{t} \vec{n}) \cdot \vec{n}$.

Strižna napetost: $t_s = \sqrt{|\underline{t}|^2 - t_n^2}$

10. Kdaj je **tenzor napetosti simetričen** in zakaj?

Če je sredstvo nepolarno, je tenzor napetosti simetričen. V tem primeru namreč iz principa o vrtilni količini za vsako helikoidalno polje $\vec{\omega}$ sledi

$$\frac{D}{Dt} \int_b \vec{v} \cdot \vec{\omega} dm + \int_{\partial b} \vec{t} \cdot \vec{\omega} da, \text{ od koder iz Gaussovega izreka in Cauchyjeve}$$

momentne enačbe sledi $\underline{t} : \underline{W} = 0$ za vsak poševno simetrični tenzor $\underline{W}$.

11. Kakša je zveza med **vektorjem napetosti** in **tenzorjem napetosti**?

$$\vec{t} = \underline{t} \vec{n}$$

12. Kdaj natanko je **tenzor napetosti simetričen**?

Tenzor napetosti je simetričen če je sredstvo **nepolarno**.

13. Ali je lahko **maksimalna strižna napetost** večja od **maksimalne normalne napetosti**? Če da, kdaj?

Velja, da je maksimalna strižna vrednost enaka polovici razlike med maksimalno in minimalno normalno napetostjo. Zato je po absolutni vrednosti manjša od maksimalne normalne napetosti, vendar pa je lahko večja če so vse normalne napetosti manjše od nič, maksimalna strižna pa večja od nič.

14. Na katerem principu in predpostavki temelji **simetričnost tenzorja napetosti**?

Simetričnost napetostnega tenzorja temelji na principih o gibalni in vrtilni količini ter na predpostavki nepolarnega kontinuuma.

15. Zapiši **Cauchyjevo momentno enačbo** za ravnovesni položaj brez upoštevanja volumenskih sil.

$\text{div}(\underline{t}) = 0$, $\underline{t}$ napetostni tenzor.

16. Napiši primer **napetostnega tenzorja**, ki ima ničelno normalno napetost v smeri koordinatne osi in neničelno strižno napetost.

$\underline{t} \ni: t_{1,2} = t_{2,1} = 1$, ostalo 0.

Mehanika fluidov

1. Zapiši matematično **definicijo fluida**

Fluid je kontinuum, v katerem je razlika med napetostjo v dani smeri in hidrostatskim tlakom odvisna le od lokalnega deformacijskega gibanja.

Alternativno: Kontinuum je fluid, če je napetostni tenzor izotropična funkcija tenzorja deformacijskih hitrosti ($\underline{t} = f(\underline{d})$). Pri tem mora veljati $f(0) = -pI$.

2. Za **Newtonov fluid** zapiši **napetostni tenzor**.

$\underline{t} = (-p + \lambda \operatorname{div}(\vec{v}))I + 2\mu \underline{d}$, $\underline{d}$ tenzor deformacijske hitrosti.

3. Zapiši **konstituivno zvezo** med napetostjo in tenzorjem deformacijskih hitrosti.

Glej 2.

4. Zakaj je **viskoznoznostni koeficient** μ pozitiven?

Iz 2. zakona termodinamike sledi $\underline{V} : \underline{d} = \lambda (\operatorname{div}(\vec{v}))^2 + 2\mu \underline{d} : \underline{d} \geq 0$. V bazi, v kateri je $\underline{d}$ diagonalen, to pomeni $\lambda(d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \geq 0$, kar je zagotovo le, če je $\mu \geq 0$

5. Kakšen je **hitrostni profil pri Poiseuillejevemu toku** skozi cev s krožnim presekom?

$v = \frac{A}{4\mu}(R^2 - x^2 - y^2)$, hitrost kvadratno pada z oddaljenostjo od središča.

6. Napiši pogoje veljavnosti **Bernoullijevega izreka**

Idealen fluid, izenotropičen ali homogen in nestisljiv, potencialno volumenska sila, stacionarno hitrostno polje.

7. Kaj je Δv ?

$\Delta v = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(\vec{v}))$

8. Kolikšna je **cirkulacija** izvora okrog krivulje, ki obkroža izvor?

$\Gamma = \int_c \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int_c \frac{Q}{2\pi} (\log r + i\vartheta) dz = Q$, cirkulacija je enaka izvoru.

9. Zapiši **kompleksni potencial toka**, sestavljenega iz enakomernega toka v smeri osi x , dipola c koordinatnem izhodišču in vrtinca s polom v koordinatnem izhodišču. Kaj predstavlja ta tok? Kolikšna je rezultanta napetosti na obtekajoče telo?

$F(z) = Uz + UR^2 \frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z$. Predstavlja obtekanje valja s polmerom R .

Sila na obtekajoče telo: $\vec{D} = -\frac{i\rho}{2} \int_c \left(\frac{dF}{dz}\right)^2 dz = -i\Gamma\rho$

10. Zapiši enačbo **hidrostatike**

$-\operatorname{grad}(p) + \rho \vec{f} = 0$

11. Napiši **Navier-Stokesovo enačbo** in obkroži njen nelinearen del.

$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad}(p) + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div}(\vec{v})) + \mu \Delta \vec{v}$.

12. Kakšen je **hitrostni profil** toka viskoznega fluida med dvema vzporednima stenama, ki ga poganja gibanje ene stene?

Profil toka je linearen: $v = \frac{V}{h} y$

13. Zapiši splošno obliko **izotropične tenzorske funkcije** definirane na prostoru simetričnih tenzorjev.

$$\underline{\underline{t}}(\psi) = a_0(\psi) + a_1(\psi) + a_2(\psi) \quad - \text{tu neki manjka!}$$

14. Napiši **Navier-Stokesovo** enačbo za nestisljiv fluid

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\text{grad}(P) + R\vec{F} + \mu \Delta \vec{V}$$

15. Ali je **Eulerjeva enačba nelinearna**? Če je, kaj je njen nelinearni del?

Eulerjeva enačba je nelinearna. Nelinearen člen pride iz materialnega

odvoda $\frac{Dv}{Dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$, $\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v}$ – **konvektiven člen**, ki je nelinearen.

16. Skiciraj tokovnice pri **Taylor-Couettovemu** toku med dvema valjema

Tokovnice so koncentrične krožnice s središči na osi obeh valjev.