

1. Zapiši splošno obliko funkcije interakcije med dvema materialnima točkama.

Naj bosta P_1 in P_2 trajektoriji teh dveh materialnih točk. Po principu determiniranosti obstaja funkcija interakcije f , tako da velja

$$\ddot{P}_1 = f_1(P_1 - P_2, \dot{P}_1 - \dot{P}_2),$$

$$\ddot{P}_2 = f_2(P_2 - P_1, \dot{P}_2 - \dot{P}_1)$$

in je $f = (f_1, f_2)$. Vse količine je treba razumeti vektorsko.

2. Zapiši izrek o vrtilni količini in pripadajočo vektorsko obliko.

Naj bodo notranje sile centralne in naj bo pol O stalna točka. Potem je odvod vrtilne količine enak navoru zunanjih sil

$$\frac{d\vec{L}(O)}{dt} = \vec{N}(O).$$

3. Koliko prostostnih stopenj ima togo telo, ki se kotali po ploskvi?

Kotaljenje togega telesa po ploskvi ima pet prostostnih stopenj. Dve povesta, kje na ploskvi je dotikališče telesa in ploskve. Nadaljnji dve povesta, v kateri točki telesa se telo dotika. Zadnja pa pove, kako je telo zavrnjeno okrog osi, ki je pravokotna na ploskev v dotikališču.

4. Okrog katere osi se lahko enakomerno vrtili prosta vrtavka?

Prosta vrtavka se lahko enakomerno vrtili okrog lastnih osi vztrajnostnega tenzorja (smeri lastnih vektorjev).

5. Kdaj je premočrtno gibanje integrabilno?

Premočrtno gibanje pod vplivom konzervativne sile je integrabilno.

6. Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe za togo telo.

V telesnem koordinatnem sistemu velja

$$\vec{\omega} \times J_0 \cdot \vec{\omega} + J_0 \cdot \dot{\vec{\omega}} = \vec{N}_0,$$

kjer je pol P_0 stalna točka.

7. Kako razširimo Lagrangeovo mehaniko na primere, ko je potencial odvisen od generaliziranih hitrosti?

Če je potencial odvisen tudi od generaliziranih hitrosti, lahko opisujemo tudi sile oblike

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}}.$$

Lagrangeove enačbe, ki jih dobimo, so iste oblike kot v običajnih primerih. Takšni potenciali se pojavijo pri opisu gibanja nabitih delcev v elektromagnetnem polju ali pa pri gibanju v relativnih koordinatnih sistemih.

8. Naštej osnovne predpostavke za uporabo teorije majhnih nihanj v okolici ravnovesne lege in zapiši pripadajoči posplošeni problem lastnih vrednosti.

Osnovne predpostavke so, da je sistem avtonomen, torej neodvisen od časa

$$L = L(q, \dot{q})$$

in da je kinetična energija kvadratna funkcija posplošenih hitrosti

$$T = \frac{1}{2} T_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j.$$

Posplošeni problem lastnih vrednosti potem išče rešitve enačbe

$$(\mathbb{V} - \lambda \mathbb{T})\mathbf{v} = 0,$$

kjer je $\mathbb{V}$ Hessejeva matrika potenciala V in $\mathbb{T}$ masna matrika, ki jo dobimo iz kinetične energije.

9. V katerem primeru Lagrangeeva funkcija majhnega nihanja v okolici ravnovesne lege sovpada s prvotno Lagrangeevo funkcijo?

To se zgodi, če je potencial kvadratna funkcija koordinat in so koeficienti matrike $\mathbb{T}$ konstante (neodvisne od koordinat). Primer takšnega sistema je npr. vzmetno nihalo.

10. Kako dani Lagrangeevi funkciji priredimo ekvivalentno Lagrangeevo funkcijo?

Če Lagrangeevi funkciji L prištejemo totalni odvod po času neke funkcije $F = F(q, t)$, dobimo ekvivalentno Lagrangeevo funkcijo. Funkciji

$$L' = L + \frac{dF}{dt}$$

in L sta torej ekvivalentni.

11. Kakšne oblike mora biti generalizirana sila, da jo lahko zapišemo s posplošenim potencialom?

Posplošen potencial je v splošnem oblike $V = V(q, \dot{q}, t)$. Generalizirane sile, ki jih lahko opisujemo s takšnimi potenciali so oblike

$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial q} + \frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \dot{q}}$$

12. Naj bo Lagrangeeva funkcija invariantna za rotacije okoli osi e . Kaj je pripadajoča konstanta gibanja?

Pripadajoča konstanta gibanja je komponenta vrtilne količine sistema v smeri osi e , t.j. projekcija vrtilne količine na os e .

13. Na katerem prostoru so Euler-Lagrangeeve enačbe Lagrangeeve enačbe akcijskega funkcionala?

Euler-Lagrangeeve enačbe akcijskega funkcionala nad afinim prostorom trajektorij s predpisanimi vrednostima v krajiščih so ravno Lagrangeeve enačbe.

14. Priredi gibanju v polju centralnih sil Hamiltonovo funkcijo.

Hamiltonova funkcija za gibanje v polju centralnih sil je

$$H(r, \phi, p_r, p_\phi) = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r),$$

kjer je $V = V(r)$ potencial centralne sile.

15. Zapiši Poissonov oklepaj s pomočjo simplektične matrike.

Naj bosta f in g poljubni funkciji na $\mathbb{R}^{2n}$. Potem velja

$$[f, g] = \langle \nabla f, J \cdot \nabla g \rangle,$$

kjer je J simplektična matrika in izraz na desni običajni skalarni produkt.

16. Kaj vse ohranja kanonska transformacija?

Kanonska transformacija ohranja strukturo kanonskih enačb in volumen faznega prostora (pa še kaj, česar verjetno niste omenili).

17. Kateri del kanonskega sistema je v bistvu definicija Legendrove transformacije?

Legendrova transformacija podaja zvezo med Hamiltonovo in Lagrangeovo funkcijo

$$H = \sum p_i \dot{q}^i - L.$$

Če to enačbo posredno odvajš po p_i in upoštevaš zvezo $p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^j}$ dobiš enačbo

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}^i.$$

Te enačbe tvorijo polovico kanonskega sistema.

18. Pri katerem gibanju je pogoj, da transformacija ohranja volumen faznega prostora zadostni pogoj, da je transformacija kanonska?

To se zgodi, če ima sistem eno samo prostostno stopnjo, torej $n = 1$.

19. Zapiši pogoj, da tokovnice in vrtinčnice sovpadajo.

Tokovnice in vrtinčnice sovpadajo, če velja $\vec{v} \times \text{rot} \vec{v} = 0$.

20. Zapiši geometrijski pomen diagonalnega elementa tenzorja deformacije.

Diagonalni element tenzorja deformacije pove, kakšen je relativni raztezek snovi v dani točki v ustrezni smeri.

21. Kdaj natanko je infinitezimalni deformacijski tenzor trivialen?

Infinitezimalni deformacijski tenzor je trivialen natanko tedaj, ko dano polje pomikov predstavlja infinitezimalno togo deformacijo (t.j. polje infinitezimalnih togih pomikov).

22. Zapiši mero deformacije.

V kartezičnih koordinatah v smeri osi e_i je mera deformacije enaka

$$\epsilon_i = \sqrt{1 + 2E_{ii}} - 1,$$

kjer je E_{ii} diagonalen člen tenzorja deformacije.

23. Napiši primer nestacionarnega hitrostnega polja pri katerem se tokovnice in tirnice sovpadajo.

Poglej primer z vaj

$$v_x = \frac{x}{1+t}, v_y = \frac{2y}{1+t}, v_z = \frac{3z}{1+t}.$$

24. Zapiši pogoj na gradient deformacije, ki ohranja volumen.

Deformacija ohranja volumen, če je determinanta gradienta deformacije enaka ena.

25. Kaj je osnovna odvisna spremenljivka Eulerjevega opisa gibanja?

Osnovne spremenljivke v Eulerjevem opisu gibanja so prostorske koordinate in čas.

26. Zapiši prvi zakon termodinamike.

Prvi zakon termodinamike pravi

$$\frac{D}{Dt}(\mathcal{T} + \mathcal{U}) = \mathcal{W} + \mathcal{Q}.$$

Torej, sprememba kinetične in notranje energije je enaka moči volumskih in površinskih sil ter dovedeni toploti.

27. Ali je lahko maksimalna strižna napetost večja od maksimalne normalne napetosti? Če da, potem kdaj?

Ne. Maksimalna strižna napetost je enaka polovici razlike med maksimalnima normalnima napetostima.

28. Zapiši Cauchyjevo momentno enačbo za ravnovesni položaj brez upoštevanja volumskih sil.

Ravnovesna enačba

$$\operatorname{div} \mathbf{t} = 0,$$

divergenca napetostnega tenzorja je enaka nič. V splošnem pride na levi še gostota volumskih sil.

29. Zapiši princip o gibalni količini.

Princip o gibalni količini

$$\frac{D}{Dt} \int_{b(t)} \rho \vec{v} dV = \int_{b(t)} \rho \vec{f} dV + \int_{\partial b(t)} \vec{t} dS.$$

30. Kaj pravi Cauchyjeva hipoteza?

Cauchyjeva hipoteza pravi, da lahko vpliv okolice na dano točko v kontinuumu opišemo s porazdelitvijo ploskovne sile $\vec{t} = \vec{t}(p, t, \vec{n})$, ki je odvisna od položaja, časa in smeri.

31. Kako pravimo sredstvu za katerega je tenzor napetosti nesimetričen?

Polarno sredstvo.

32. Zapiši splošno obliko izotropične tenzorske funkcije definirane na prostoru simetričnih tenzorjev.

Funkcija $f : \operatorname{Sym}_2 \rightarrow \operatorname{Sym}_2$ je izotropična tenzorska funkcija, če je oblike

$$f(A) = \tau_0(A)I + \tau_1(A)A + \tau_2(A)A^2,$$

kjer so τ_0 , τ_1 in τ_2 izotropične skalarne funkcije.

33. Zapiši Navier-Stokesovo enačbo za nestisljivi fluid in obkroži njen nelinearen del.

Navier-Stokesova enačba za nestisljivi fluid

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = \rho \vec{f}_V - \nabla p + \mu \Delta \vec{v}.$$

Nelinearen del se skriva v materialnem odvodu

$$\vec{a} = \frac{D}{Dt} \vec{v} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + v_i \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_i}$$

in sicer v konvektivnem (drugem) členu. Treba je sešteti po vseh treh indeksih.

34. Kaj je to d'Alembertov paradoks?

Z Eulerjevim modelom obtekanja valja z idealnim fluidom pride po izračunu sila upora enaka nič, kar je v nasprotju z intuicijo. Izkaže se, da je potrebno upoštevati viskoznost za modeliranje upora.

35. Naštej tri primere laminarnega toka.

Tok med vzporednima ploščama, tok po cevi, tok med dvema koncentričnima valjema.

36. Napiši konstitutivno zvezo med napetostjo in tenzorjem deformacijskih hitrosti.

Fluid je Stokesov fluid, če velja

$$t = f(d),$$

kjer je f zvezna izotropična tenzorska funkcija tenzorja deformacijskih hitrosti d in velja $f(0) = -pI$.

37. Skiciraj hitrostno polje toka viskoznega fluida med dvema paralelnima ploščama, ki ga poganja padec tlaka.

Poglej zapiske s predavanj ali z vaj.

38. Kaj je entalpija in kako nastopa v Eulerjevi enačbi?

Entalpija je termodinamična količina

$$w = u + \frac{p}{\rho},$$

kjer je u gostota notranje energije, p tlak in ρ gostota fluida. Za izentropičen fluid lahko Eulerjevo enačbo zapišemo v obliki

$$\frac{D}{Dt} \vec{v} = -\nabla(w + V),$$

kjer je w entalpija in V potencial volumnskih sil. Od tod potem sledijo razne variante Bernoullijeve enačbe.

39. Skiciraj tokovnice pri Taylor-Couettovem toku med dvema valjema.

Poglej zapiske s predavanj, v kakšno knjigo ali pa na internetu pobrsčaj pod geslom 'Taylor-Couette flow'.

40. Zapiši Eulerjevo enačbo. Ali je nelinearna? Če je, obkroži njen nelinearni del.

Eulerjeva enačba

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{v} = \rho \vec{f}_V - \nabla p.$$

Enačba je nelinearna, razlog je isti člen kot pri Navier-Stokesovi enačbi, glej vprašanje 33.

41. Zapiši splošno konstitutivno enačbo za fluid.

Glej vprašanje 36.

42. Ali se v toku idealnega izentropičnega fluida vrtničnost ohranja?

Da. Kelvinov izrek o cirkulaciji.