

Izpit iz mehanike - teorija

18. maj 2007

• Newtonova mehanika

1. Določi ravnino gibanja točke v polju centralne sile. [1,2]
Ravnina gibanja gre skozi center sile in ima normalo v smeri vrtilne količine.
2. Zapiši periodo gibanja premočrtnega gibanja pod vplivom potenciala $U(x)$. [1,2,3]
 $T = \sqrt{2m} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E_0 - U(x)}}$, a in b točki, v katerih je potencial enak energiji.
3. Kaj je vektor kotne hitrosti? [1]
Tenzor $Q^T \dot{Q}$ je antisimetričen, zato obstaja osni vektor $\vec{\omega}$, da je $Q^T \dot{Q} \vec{a} = \vec{\omega} \times \vec{a}$. Vektor kotne hitrosti je $\vec{\omega}' = Q \vec{\omega}$.
4. Zapiši Eulerjeve dinamične enačbe za prosto osnosimetrično vrtavko. [1]
 $0 = J\dot{\omega}_1 - \omega_2\omega_3(J - J_3)$
 $0 = J\dot{\omega}_2 - \omega_3\omega_1(J_3 - J)$
 $0 = J_3\dot{\omega}_3$
 $J := J_1 = J_2$
5. Naštej tri netrivialne primere redukcije gibanja na premočrtno gibanje. Kaj so integrali gibanja v vsakem primeru posebej? [1,2,3]
Gibanje po krivulji (glede na ločno dolžino), gibanje v polju centralne sile (glede na radij), gibanje osnosimetrične vrtavke (glede na kot nutacije). Integrali gibanja: energija (vsi trije primeri), vrtilna količina (druga dva primera).
6. Kdaj natanko dve rotaciji komutirata? [2]
Natanko tedaj, ko sta rotaciji okoli iste osi.
7. Opiši gibanje proste osnosimetrične vrtavke. [2]
Masno središče miruje, osni vektor rotacije $\vec{\omega}$ pa enakomerno precesira okrog osi $\vec{k}$.
8. Koliko parametrov ima grupa Galilejevih transformacij? [3]
 10
9. Zapiši energijsko enačbo gibanja materialne točke v polju konzervativne sile. [3]
 $\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + U(x) = E_0$, $E_0 = \text{konst.}$
10. Zapiši enačbe gibanja togega telesa okrog stalne točke [3]
Newtonov zakon: $m\ddot{\vec{P}}_ = \vec{F}'$, Eulerjeva dinamična enačba: $\vec{\omega} \times \underline{J}\vec{\omega} + \underline{J}\dot{\vec{\omega}} = \vec{N}$.*

• Lagrangeeva mehanika

1. Ali je vez premočrtnega kotaljenja holonomna ali neholonomna vez? [1,2]
Vez je holonomna.
2. Kaj je konstanta gibanja avtonomnega sistema? [1,2,3]
Konstanta gibanja avtonomnega sistema je Eulerjeva energijska funkcija $\mathcal{E}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t) = \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$.
3. Kako dobiš frekvence majhnega nihanja okrog ravnovesne lege. [1]
Lagrangeovo funkcijo zapišemo kot $L = \frac{1}{2}\underline{\dot{q}} \cdot T(\underline{q}_0)\underline{\dot{q}} - \frac{1}{2}(\underline{q} - \underline{q}_0) \cdot V(\underline{q} - \underline{q}_0)$ in rešujemo posplošeni sistem lastnih vrednosti tako, da iščemo tak ω , da je $\det(V - \omega^2 T) = 0$.
4. Naj bo sistem materialnih točk invarianten za rotacije okrog dane osi. Kaj je pripadajoča konstanta gibanja? [1]
Konstanta gibanja je $\vec{e} \cdot \vec{L}(P_0)$, kjer je $\vec{e}$ os rotacije in P_0 točka, ki leži na osi.
5. Zapiši Hamiltonov variacijski princip. [1,3]
Stacionarna točka akcijskega funkcionala nad afinim prostorom trajektorij s predpisanimi vrednostmi na krajiščih je natanko rešitev Lagrangeevih enačb s predpisanimi vrednostmi na krajiščih.

6. Kdaj je Eulerjeva energijska funkcija enaka vsoti kinetične in potencialne energije? [2]
Kadar je sistem skleronomen, t.j. ko vezi niso odvisne od časa.
7. Naj bo sistem invarianten za translacije v smeri danega vektorja. Kaj je pripadajoča konstanta gibanja? [2]
Konstanta gibanja je $\underline{a} \cdot \underline{p}$, kjer je $\underline{a}$ dani vektor in $\underline{p}$ generaliziran moment.
8. Kaj je posplošeni potencial in kje nastopa? [2,3]
To je potencial, odvisen tudi od hitrosti ($V = V(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$). Primer posplošenega potenciala je potencial Lorentzove sile ali gibanja v relativnem koordinatnem sistemu.
9. Zapiši primer vezi, pri kateri možni in virtualni pomiki sovpadajo. [3]
Možni in virtualni pomiki sovpadajo v primeru, ko so vse vezi holonomne in skleronomne.

• Hamiltonova mehanika

1. Kako dobimo Hamiltonovo funkcijo iz dane Lagrangeeve funkcije? [1,2]
Hamiltonova funkcija je Legendreova transformiranka Lagrangeeve funkcije.
Pišemo jo $H = \underline{p} \cdot \underline{\dot{q}} - L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$, kjer je $\underline{p} = \frac{\partial L}{\partial \underline{\dot{q}}}$ in $\underline{\dot{q}}$ izrazimo s $\underline{p}$ in $\underline{q}$.
2. Zapiši kanonski sistem s pomočjo simplektične matrike. [1]
 $\underline{\dot{x}} = J \cdot \frac{\partial H}{\partial \underline{x}}$
3. Zapiši definicijo časovno neodvisne kanonske transformacije. [1]
To je taka kanonska transformacija, kjer nove spremenljivke niso odvisne od časa, t.j. transformacija $(P, Q) = f(p, q)$, ki ohranja kanonski sistem, Poissonov oklepaj in zadošča simplektičnemu pogoju.
4. Kako se glasi kanonski sistem gibanja v polju centralne sile? [1]
 $\dot{r} = \frac{1}{m} p_r$
 $\dot{\vartheta} = \frac{1}{mr^2} p_{\vartheta}$
 $\dot{p}_r = \frac{p_{\vartheta}^2}{mr^3} - \frac{dV}{dr}$
 $\dot{p}_{\vartheta} = 0$
5. Zapiši Hamilton-Jacobijevo enačbo za harmonični oscilator. [1,2]
 $\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left(\left(\frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + (m \omega q)^2 \right) = 0$
6. Določi nekonstantni funkciji f in g tako, da bo njun Poissonov oklepaj enak nič. [2]
Če je $f = g = f(p, q)$ nekonstantna, je $[f, g] = 0$. Poleg tega je $[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0$ in $[q_i, p_j] = \delta_{ij}$
7. Kdaj natanko je transformacija faznega prostora, ki pripada gibanju z eno prostorsko stopnjo, kanonska? [2]
Natanko tedaj, kadar ohranja volumen faznega prostora, kar je za eno prostorsko stopnjo natanko tedaj, kadar je $\det\left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right) = 1$, pri čemer so ξ transformirane koordinate.
8. Kako se glasi kanonski sistem enačb majhnega gibanja okoli ravnovesne lege? [2]
Hamiltonova funkcija je za majhna gibanja okoli ravnovesne lege enaka $H = \frac{1}{2} \underline{p} \cdot T^{-1} \underline{p} + \frac{1}{2} (\underline{q} - \underline{q}_0) \cdot V(\underline{q} - \underline{q}_0)$, zato je kanonski sistem $\underline{\dot{q}} = T^{-1} \underline{p}$, $\dot{\underline{p}} = -V(\underline{q} - \underline{q}_0)$.
9. Čemu je enaka Legendreova transformacija Hamiltonove funkcije? [3]
Legendreova transformacija Hamiltonove funkcije je enaka Lagrangeevi funkciji, saj je Legendreova transformacija involutivna.
10. Zapiši kanonski sistem za harmonični oscilator. [3]
Za harmonični oscilator je $L = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 - \frac{1}{2} k q^2$ in $H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} k q^2$, zato je kanonski sistem $\dot{q} = \frac{1}{m} p$, $\dot{p} = -kq$.
11. Zapiši odvod funkcije $f = f(p, q, t)$ vzdolž rešitve kanonskega sistema. [3]
 $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [f, H]$
12. Naštej osnovne lastnosti Poissonovega oklepaja. [3]
 $[f, g] = -[g, f]$
 $[f_1 + f_2, g] = [f_1, g] + [f_2, g]$
 $[\lambda f, g] = \lambda [f, g]$
 $\frac{\partial [f, g]}{\partial t} = \left[\frac{\partial f}{\partial t}, g \right] + \left[f, \frac{\partial g}{\partial t} \right]$
 $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$
13. Priredi dani Hamiltonovi funkciji Hamilton-Jacobijevo enačbo. [3]
 $\frac{\partial S}{\partial t} + H(t, \underline{q}, \left(\frac{\partial S}{\partial \underline{q}}\right)^T) = 0$

• Kinematika mehanike kontinuuma

1. Kdaj natanko je tenzor deformacije trivialen? [1,2]
Natanko tedaj, ko je deformacija toga.
2. Zapiši zvezo pri deformaciji med dp in dP . [1]
 $dp = \underline{F} dP$
3. Zapiši materialni odvod hitrostnega polja. Kaj predstavlja? [1,2]
 $\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad}(\vec{v})\vec{v}$. Predstavlja prostorsko polje pospeškov.
4. Izračunaj odvod prostorskega volumenskega elementa po času. [1]
 $\frac{D}{Dt} dv = \text{div}(\vec{v}) dv$
5. Kaj je osni vektor poševno simetričnega dela prostorskega gradienta hitrostnega polja? [1]
 $\frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$
6. Kakšna je zveza med prostorskim in referenčnim volumenskim elementom? [2]
 $dv = \det(\underline{F}) dV$
7. Kaj je sled tenzorja deformacijskih hitrosti? [2]
 $sl(\underline{d}) = sl(\frac{1}{2}(\text{grad}(\vec{v}) + (\text{grad}(\vec{v}))^T) = sl(\text{grad}(\vec{v})) = \text{div}(\vec{v})$
8. Ali lahko pri ravninskem hitrostnem polju tokovnice in vrtinčnice sovpadajo? [2]
Ne, tokovnice tečejo vzdolž polja $\vec{v}$, vrtinčnice vzdolž polja $\text{rot}(\vec{v})$, ti dve polji pa sta pravokotni ($\text{rot}(\vec{v}) = \nabla \times \vec{v}$).
9. Zapiši tenzor deformacije in njen geometrijski pomen. [3]
 $\underline{E} = \frac{1}{2}(\underline{F}^T \underline{F} - I)$. Pri majhnih deformacijah diagonalni elementi povejo relativno spremembo dolžin v smeri koordinatnih osi, izvendiagonalni elementi pa polovico kota deformacije.
10. Kakšna je zveza med prostorskim in referenčnim ločnim elementom? [3]
 $ds^2 = (\vec{A} \cdot 2\underline{E}\vec{A} + 1)dS^2$, kjer je $\vec{A} = \frac{dP}{|dP|}$.
11. Čemu je enak osni vektor poševno simetričnega dela tenzorja deformacijskih hitrosti? [3]
 $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{v})$
12. Kaj so tokovnice in kaj so tirnice? [3]
Naj bo $\mathcal{F}(p_0, t_0; t) = p(t)$ rešitev diferencialne enačbe $\frac{dp}{dt} = \vec{v}(p, t)$, $p(t_0) = p_0$. Tokovnica v času t_0 je krivulja, ki se dotika hitrostnega polja $\vec{v}(p, t_0)$. Tirnica, ki gre skozi p_0 v času t_0 je krivulja $p(t) = \mathcal{F}(p_0, t_0, t)$

• Fizikalni principi mehanike kontinuuma

1. Zapiši zakon o ohranitvi mase v integralski obliki. [1]
 $\frac{D}{Dt} \int_{b(t)} \rho dV = 0$
2. Kako je definiran tenzor napetosti? [1,2]
Po Cauchyjevi hipotezi je gostota površinske sile funkcija $\vec{t}(p, t, \vec{n})$. Če za vektor, ki ni enotski, definiramo $\vec{t}(p, t, \vec{a}) = |\vec{a}| \vec{t}(p, t, \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|})$, je ta funkcija v zadnjem argumentu linearna, zato lahko definiramo napetostni tenzor $\underline{t}$ s predpisom $\vec{t}(p, t, \vec{n}) = \underline{t}(p, t) \cdot \vec{n}$
3. Zapiši Cauchyjevo momentno enačbo. [1,2,3]
 $\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} + \text{div}(\underline{t})$
4. Koliko enačb nam dajo principi o ohranitvi mase, o gibalni in vrtilni količini in koliko neznank nastopa v teh enačbah? [1,2,3]
Enačb je 7: 1 o ohranitvi mase, 3 o gibalni in 3 o vrtilni količini. Neznanke so $\rho, p, \vec{v}, \underline{t}$, torej za nopolarna sredstva 13 neznank (takrat je napetostni tenzor simetričen), sicer 16.
5. V kateri smeri je normalna napetost maksimalna? [1]
Normalna napetost je maksimalna v smeri lastnega vektorja $\underline{t}$, ki pripada največji lastni vrednosti.
6. Zapiši zakon o ohranitvi mase v lokalni obliki. [2]
 $\frac{D\rho}{Dt} + \rho \text{div}(\vec{v}) = 0$
7. Kje leži smer maksimalne strižne napetosti? [2]
Smer maksimalne strižne napetosti leži v smeri vsote lastnih vektorjev $\underline{t}$, ki pripadata največji in najmanjši lastni vrednosti.

8. Zapiši kontinuitetno enačbo. [3]

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{v}) = 0$$
9. Kaj je normalna napetost in kaj je strižna napetost? [3]
Normalna napetost: $t_n = (\underline{t}\vec{n}) \cdot \vec{n}$.
Strižna napetost: $t_s = \sqrt{|\vec{t}|^2 - t_n^2}$.
10. Kdaj je tenzor napetosti simetričen in zakaj? [3]
Če je sredstvo nepolarno, je tenzor napetosti simetričen. V tem primeru namreč iz principa o vrtilni količini za vsako helikoidalno polje $\vec{w}$ sledi $\frac{D}{Dt} \int_b \vec{v} \cdot \vec{w} dm = \int_b \vec{f} \cdot \vec{w} dm + \int_{\partial b} \vec{t} \cdot \vec{w} da$, od koder iz Gaussovega izreka in Cauchyjeve momentne enačbe sledi $\underline{t} : \underline{W} = 0$ za vsak poševno simetrični tenzor $\underline{W}$.

• Mehanika fluidov

1. Zapiši matematično definicijo fluida. [1]
Fluid je kontinuum, v katerem je razlika med napetostjo v dani smeri in hidrostatskim tlakom odvisna le od lokalnega deformacijskega gibanja.
2. Za Newtonov fluid zapiši napetostni tenzor. [1]

$$\underline{t} = (-p + \lambda \operatorname{div} \vec{v})I + 2\mu \underline{d}$$
3. Zakaj je viskoznostni koeficient μ pozitiven? [1,2,3]
Iz 2. zakona termodinamike sledi $\underline{V} : \underline{d} = \lambda (\operatorname{div} \vec{v})^2 + 2\mu \underline{d} : \underline{d} \geq 0$. V bazi, v kateri je $\underline{d}$ diagonalen, to pomeni $\lambda(d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \geq 0$, kar zagotovo velja le, če je $\mu \geq 0$ (in $3\lambda + 2\mu \geq 0$).
4. Kakšen je hitrostni profil pri Poiseuillejevem toku skozi cev s krožnim presekom? [1]

$$v = \frac{A}{4\mu}(R^2 - x^2 - y^2), \text{ hitrost kvadratno pada z oddaljenostjo od središča.}$$
5. Napiši pogoje veljavnosti Bernoullijevega izreka. [1,2,3]
Idealen fluid, izentropičen ali homogen in nestisljiv, potencialna volumenska sila, stacionarno hitrostno polje.
6. Kaj je $\Delta \mathbf{v}$? [2]

$$\Delta \vec{v} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} \vec{v}).$$
7. Kolikšna je cirkulacija izvora okrog krivulje, ki obkroža izvor? [2]

$$\Gamma = \int_c \vec{v} \cdot d\vec{p} = \int_c \frac{Q}{2\pi}(\log r + i\vartheta)dz = Q, \text{ cirkulacija je enaka izvoru.}$$
8. Zapiši kompleksni potencial toka, sestavljenega iz enakomernega toka v smeri osi x , dipola v koordinatnem izhodišču in vrtinca s polom v koordinatnem izhodišču. Kaj predstavlja ta tok? Kolikšna je rezultanta napetosti na obtekaajoče telo. [2]

$$F(z) = z + m\frac{1}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \log z. \text{ Sila na obtekaajoče telo: } \vec{D} = -\frac{i\rho}{2} \overline{\int_c (\frac{dF}{dz})^2 dz} = -\frac{i\rho}{2} \overline{\int_c (1 + \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z} - m\frac{1}{z^2})^2 dz} = -\frac{i\rho}{2} 2\pi i \frac{\Gamma}{\pi i} = -i\Gamma\rho.$$
9. Zapiši enačbo hidrostatike. [3]

$$-\operatorname{grad} p + \rho \vec{f} = 0 \text{ (tako je Kališnik povedal Borisu)}$$
10. Napiši Navier Stokesovo enačbo in obkroži njen nelinearen del. [3]

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \vec{f} - \operatorname{grad} p + (\lambda + \mu) \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{v}) + \mu \Delta \vec{v}. \text{ Nelinearni del je na levi strani.}$$
11. Kakšen je hitrostni profil toka viskoznega fluida med dvema vzporednima stenama, ki ga poganja gibanje ene stene? [3]
Profil toka je linearen: $v = \frac{V}{h}y$.

V oglatih oklepajih je navedeno, na katerih izpitih se je do sedaj pojavilo določeno vprašanje:

1 - 20.9.2004

2 - 7.6.2004

3 - 4.2.2005