$$\chi(G) = k = \chi(H) \overset{(*)}{\leq} \delta(H)+1 \underset{\uparrow \atop \text{lema 3}}{\leq} \lambda_{max}(H)+1 \underset{\uparrow \atop \text{lema 2}}{\leq} \lambda_{max}(G)+1.$$

$$\underset{\text{prejšnja ocena}}{\chi(G) \leq \Delta(G)+1} \quad \xrightarrow[\text{izboljšali}]{\text{smo jo}} \quad \chi(G) \leq \lambda_{max}(G)+1$$

Ali morda (v duhu leme 3) velja tudi:

$$\chi(G) \leq \frac{2m}{n}+1 \text{ ?}$$

Ne! Naj bo G_t disjunktna unija K_t in K_1, $t \geq 2$.

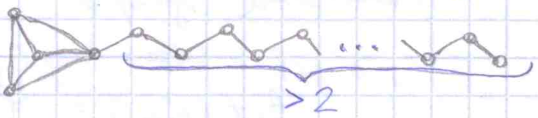
G_t :

$\chi(G_t) = t$. $\quad \frac{2m}{n}+1 = \frac{2\cdot\binom{t}{2}}{t+1}+1 = \frac{t(t-1)}{t+1}+1$

$$\frac{t(t-1)}{t+1}+1 < t \iff t(t-1)+t+1 < t(t+1) \iff$$
$$t^2+1 < t^2+t \iff 1<t \; ✓$$

Če vzamemo netrivialni primer.

Naloga. Poišči povezan graf, za katerega $\chi(G) \leq \frac{2m}{n}+1$ ne velja.



6. SIMETRIJE GRAFOV

6.1. AUTOMORFIZMI

Def. Avtomorfizem grafa G je izomorfizem $G \to G$.

Tako kot izomorfizmi seveda tudi avtomorfizmi ohranjajo:

- stopnje vozlišč,
- razdalje, ...

$\mathrm{Aut}(G) = \{\varphi : G \to G \mid \varphi \text{ avtomorfizem}\}$

- $id \in \mathrm{Aut}(G)$
- $\varphi, \psi \in \mathrm{Aut}(G) \Rightarrow \varphi\psi \in \mathrm{Aut}(G)$

- $\varphi \in Aut(G) \Rightarrow \varphi^{-1} \in Aut(G)$

Trditev. $Aut(G)$ tvori grupo.

$Aut(G)$ ... grupa avtomorfizmov grafa G

Zgledi: 1. P_n

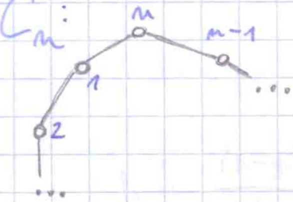
$Aut(P_n) = \mathbb{Z}_2$

a) $id = (1)(2) \dots (n)$

b) $(1\ n)(2\ n-1) \dots$ $\left(\frac{n}{2}\ \frac{n}{2}+1\right)$ za sode n

$\left(\frac{n+1}{2}\right)$ za lihe n

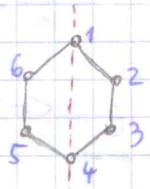
2. C_n:



$id = \pi^n$

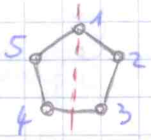
$\pi = (1\ 2\ \dots\ n),\ \pi^2,\ \pi^3,\ \dots,\ \pi^{n-1}$

To še ni vse: • sod cikel:



še n zrcaljenj

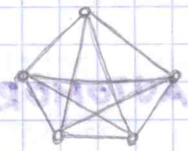
• lih cikel:



še n simetrij (zrcaljenj)

$Aut(C_n) = D_n$ ... diedrska grupa (2 generatorja)

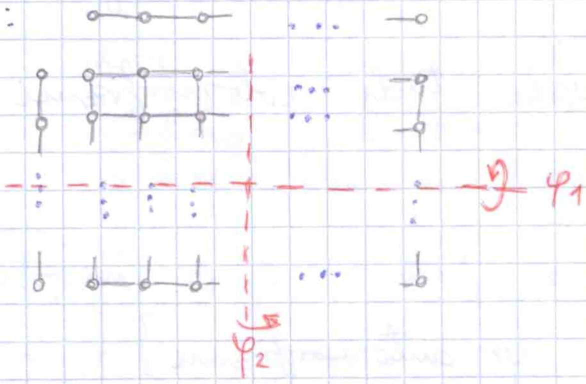
3. K_n



$Aut(K_n) = Sym(n)$ ... grupa vseh permutacij n elementov

$n!$ simetrij

4. $P_n \square P_m$:



$n \neq m$: $id, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_1 \circ \varphi_2$

$Aut(P_n \square P_m) = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

$\varphi \in Aut(G)$

$G \square H$: $(\varphi(u), v)$

$G \cong H$: $\alpha(u, v) = (v, u)$

$n = m$: $|Aut(P_n \square P_n)| = 8$

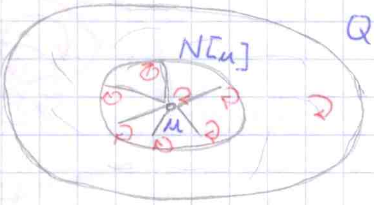
Kaj so avtomorfizmi Q_d?

$$Q_d = K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$$

$N[u] = \{v \mid vu \in E(G)\} \cup \{u\}$

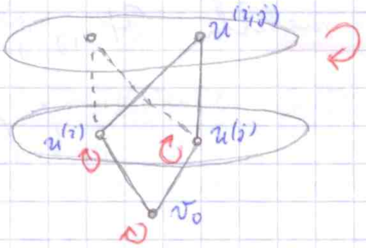
$N(u) = N[u] \setminus \{u\}$

Lema. Naj bo $\varphi \in \mathrm{Aut}(Q_d)$ in recimo, da za neko vozlišče $u \in V(Q_d)$ velja $\varphi|_{N[u]} = id$. Tedaj je $\varphi = id$.



Dokaz. BŠS naj bo $\varphi|_{N[v_0]} = id$, kjer je $v_0 = 00\dots0$. Tedaj φ fiksira tudi vsa vozlišča $0\dots0\underset{\uparrow i}{1}0\dots0 =: u^{(i)}$, $1 \le i \le d$. Poglejmo $u^{(i,j)} = 0..0\underset{\uparrow i}{1}0..0\underset{\uparrow j}{1}0..0$.

To vozlišče je edini skupni sosed (poleg v_0) vozlišč $u^{(i)}$ in $u^{(j)}$.



Zato φ fiksira tudi $u^{(i,j)}$ za $1 \le i,j \le d$.

Indukcija zaključi dokaz ■

- Za $1 \le i,j \le d$ naj bo $\psi_{i,j} : Q_d \longrightarrow Q_d$,
  $\psi_{i,j}(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_d) = (u_1, \dots, u_j, \dots, u_i, \dots, u_d)$.
- Za $1 \le i \le d$ naj bo $\varphi_i : Q_d \longrightarrow Q_d$,
  $\varphi_i(u_1, \dots, u_i, \dots, u_d) = (u_1, \dots, \underset{\uparrow (\mathrm{mod}\ 2)}{u_i + 1}, \dots, u_d)$

Opomba. $\psi_{i,j}$ in $\varphi_i \in \mathrm{Aut}(Q_d)$.

Izrek. $\mathrm{Aut}(Q_d)$ je generiran z avtomorfizmi $\psi_{i,j}$, φ_i.

Dokaz. Naj bo $\varphi \in Aut(Q_d)$. Naj bo $v_0 = 0\ldots0$ in naj bo $\varphi(v_0) = v$. Naj bodo $i_1, i_2, \ldots, i_j$ koordinate, v katerih se razlikujeta v_0 in v. Naj bo

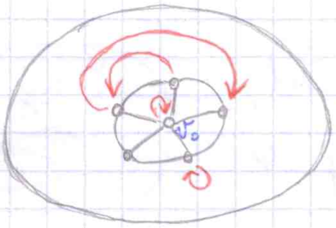
$\alpha = \varphi_{i_1}\varphi_{i_2}\cdots\varphi_{i_j}$.

↳ $v = 00\underset{\uparrow\, i_1}{1}\ldots0\underset{\uparrow\, i_2}{1}\ldots00\underset{\uparrow\, i_j}{1}\ldots0$

Tedaj je $\alpha(v) = v_0$. Zato je

$$(\alpha\varphi)(v_0) = \alpha(\varphi(v_0)) = \alpha(v) = v_0.$$

$\alpha\varphi$:



$\alpha\varphi$ fiksira v_0 in permutira njegove sosede. Naj bo Π permutacija, ki jo določa $\alpha\varphi$ na sosedih od v_0. Tedaj obstaja $\beta : Q_d \to Q_d$,

β = kompozitum nekih $\psi_{i,j}$, tako da je

$$\underset{\in Aut(Q_d)}{\beta^{-1}\alpha\varphi}\Big|_{N[v_0]} = id \qquad (\beta(v_0) = v_0).$$

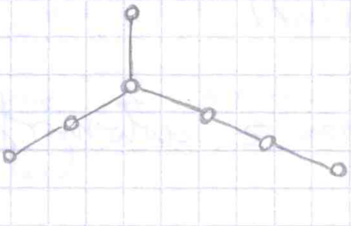
Zato je po lemi $\beta^{-1}\alpha\varphi = id \Rightarrow \varphi = \alpha^{-1}\beta$. ■

Trditev. $Aut(G) = Aut(\overline{G})$.

Dokaz. očitno. ■

Def. Graf G je *asimetričen*, če je $Aut(G) = \{id\}$.

Zgled. Poišči najmanjše asimetrično drevo.



a_n = # asimetričnih grafov na n vozliščih

g_n = # grafov na n vozliščih

Izrek. $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{g_n} = 1$.

Torej, skoraj vsi grafi so asimetrični.

6.2. KONČNE GRUPE IN GRAFI

G graf $\longmapsto$ $\mathrm{Aut}(G)$ .. grupa

A grupa $\xmapsto{?}$ graf G, tako da $\mathrm{Aut}(G) = A$

Vprašanje 1: Kateri so grafi, za katere velja $\mathrm{Aut}(G) =$
$= \mathrm{Sym}(V(G))$?

Def. Naj bo A permutacijska grupa, ki deluje na množici X. Tedaj je A *dvojno tranzitivna*, če za vsaka para različnih elt. u, v in x, y $\exists \alpha \in A \ni: \alpha(u) = x$ in $\alpha(v) = y$.

Trditev. Naj bo G graf z vsaj eno povezavo in naj $\mathrm{Aut}(G)$ vsebuje dvojno tranzitivno podgrupo. Tedaj je G polni graf.

Dokaz. Naj bo $uv \in E(G)$. Naj bosta x, y dve različni vozlišči. Tedaj $\exists \varphi \in \mathrm{Aut}(G) \ni: \varphi(u) = x$ in $\varphi(v) = y$. Ker je $\varphi \in \mathrm{Aut}(G)$, je $xy \in E(G)$. Ker sta x, y poljubni, je G polni graf. ■

Posledica. $\mathrm{Aut}(G) = \mathrm{Sym}(V(G))$ natanko tedaj, ko je G bodisi polni bodisi prazni graf.

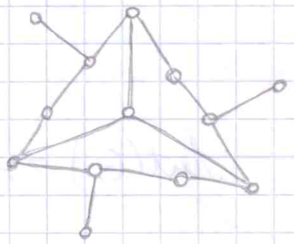
Dokaz. (⇐) ✓

(⇒): $\mathrm{Sym}(V(G))$ vsebuje dvojno tranzitivno podgrupo – samega sebe. ■

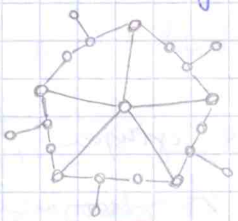
Vprašanje 2: Za katere končne grupe A obstaja graf G, tako da je $A = \mathrm{Aut}(G)$?

Zgled. $A = \mathbb{Z}_3$. Poišči $G \ni: A = \mathrm{Aut}(G)$.

G:



Kako pa bi konstruiral graf za $A = \mathbb{Z}_n$?



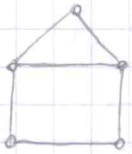
Izrek. (**Frucht**). Za vsako grupo A obstaja graf G, tako da je $A = \mathrm{Aut}(G)$. ■

Izrek. Za vsako grupo A obstaja delna kocka G, tako da je $A = \mathrm{Aut}(G)$.

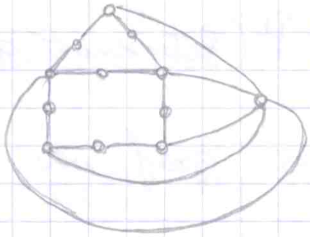
(Delne kocke so izometrični podgrafi hiperkock.)

Dokaz. A končna grupa. Naj bo G graf, ki ga zagotavlja Fruchtov izrek. $\mathrm{Aut}(G) = A$. Naj bo G^Δ graf, ki ga dobimo iz G tako, da subdividiramo vsako njegovo povezavo ter dodamo novo vozlišče, ki ga povežemo z vsemi originalnimi vozlišči (vozlišča grafa G).

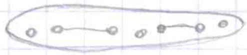
G:



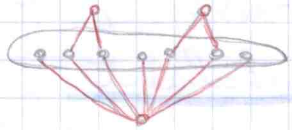
G^Δ:



G:

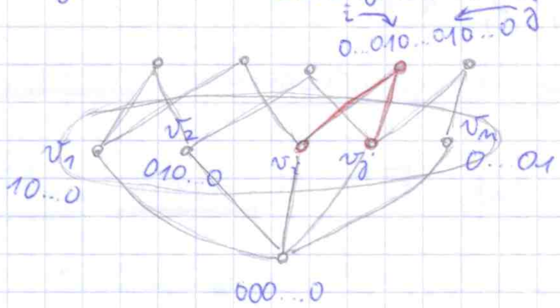


G^Δ:



Velja: 1. G^Δ je delna kocka $|V(G)| = n$.

(1 na i-tem in j-tem mestu)



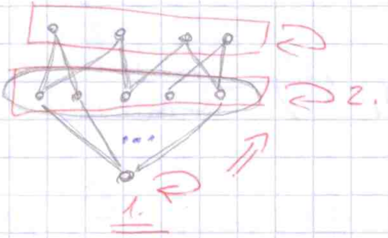
$$G^\Delta \xleftrightarrow{\text{izom.}} Q_n$$

2. možnost: $\Theta = \Theta^*$

2. $\mathrm{Aut}(G^\Delta) = \mathrm{Aut}(G)$

Ideja:

G^Δ:



6.3. TRANZITIVNI GRAFI

Q_d ; $\varphi_i : (\ldots, b_i, \ldots) \longmapsto (\ldots, \overline{b_i}, \ldots)$

$u, v \in V(Q_d)$ naj se razlikujeta v koordinatah $i_1, i_2, \ldots$ $\ldots, i_j$. $\varphi = \varphi_{i_1} \varphi_{i_2} \cdots \varphi_{i_j} \in \mathrm{Aut}(Q_d)$

$\varphi(u) = v$

Def. Graf G je (vozliščno-) tranzitiven, če za vsak par vozlišč $u, v \in V(G)$ obstaja $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$, tako da je $\alpha(u) = v$.

A grupa, ki deluje na X

orbita elementa x

$x \in X$: $A_x = \{y \mid \exists \alpha \in A : \alpha(y) = x\}$

Primer: Q_d, C_n, K_n, P (Petersenov graf).

Dokaži, da je Petersenov graf ves tranzitiven.

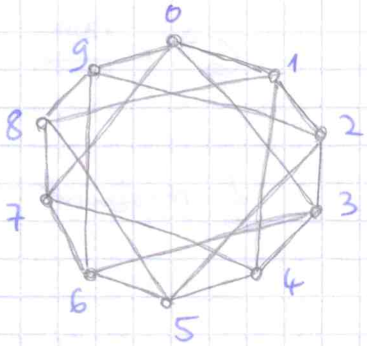
Cirkulanti: $C \subset \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$, $C = -C$

$G(\mathbb{Z}_n, C)$ ... **cirkulant**:

$V(G(\mathbb{Z}_n, C)) = \mathbb{Z}_n$, $i \sim j \overset{def.}{\equiv} i-j \in C$

Primer: $\mathbb{Z}_{10}$, $C = \{1,3,7,9\} = \{1,3,-3,-1\}$

$G(\mathbb{Z}_{10}, C)$:



$G(\mathbb{Z}_n, \{1,-1\}) = C_n$ $\qquad$ $G(\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}_n \setminus \{0\}) = K_n$

A končna grupa; C podmnožica v A brez enote, zaprta za inverze: $C = C^{-1}$

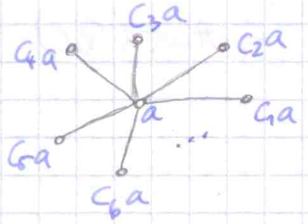
Tedaj je **Cayleyev graf** $G(A,C)$ definiran takole:

$V(G(A,C)) = A$

$ab \in E(G(A,C)) \overset{def.}{\equiv} ba^{-1} \in C$

$ba^{-1} = c \in C$

$b = ca$



$c_i \in C$

$N(a) = \{ca \mid c \in C\}$

Q_d: $A = \mathbb{Z}_2^d$, $C = \{(1,0,\dots,0), (0,1,\dots,0), \dots, (0,0,\dots,1)\}$

Izrek. $G(A,C)$ je tranzitiven graf.

Dokaz. $a \in A \longmapsto \varphi_a$: $\varphi_a(x) = xa$

$\varphi_a : G(A,C) \longrightarrow G(A,C)$

Trdimo, da je φ_a izomorfizem ($\varphi_a \in \mathrm{Aut}(G(A,C))$)

- φ_a je bijekcija
- $x \sim y \iff yx^{-1} \in C \iff y(aa^{-1})x^{-1} \in C \iff (ya)(xa)^{-1} \in C$
  $\iff \varphi_a(y)\varphi_a(x)^{-1} \in C \iff \varphi_a(y) \sim \varphi_a(x)$ ■

Ali velja tudi obratno: ali je vsak tranzitiven graf Cayleyev graf? Ne!

Trditev: Petersenov graf je tranzitiven, toda ni Cayleyev.

Skica dokaza: ∃ dve grupi na 10 elt.: ciklična in diedrska: $\mathbb{Z}_{10}$, D_{10} (D_{25}; D_5).
Tedaj preverimo vse očitne možnosti: $|C|=3$ in v nobenem primeru ne dobimo grafa izomorfnega P. ■