4. NAČRTI IN t-NAČRTI

Primer. Proizvajalec je razvil v inačic izdelka, ki jih želi testirati. Ker je testiranje drago, želi organizirati testiranje tako da:

(1) vsak preizkuševalec testira isto število inačic, recimo k;

(2) vsako inačico testira isto število preizkuševalcev, recimo λ.

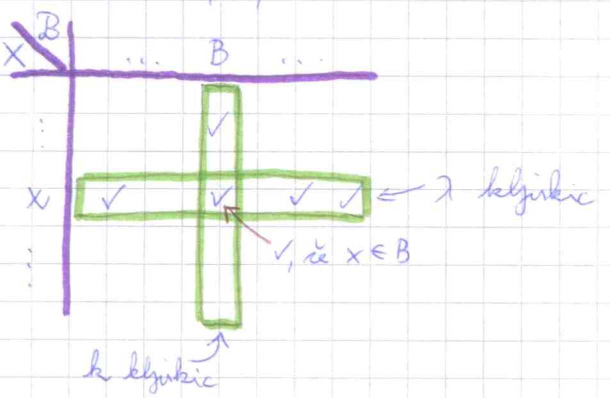
$v=8,\ k=4,\ \lambda=3$:

$\{1234,\ 5678,\ 1357,\ 2468,\ 1247,\ 3568\} = \mathcal{B}$

Def. Načrt s parametri (v,k,λ) tvori v-množica in družina $\mathcal{B}$ k-podmnožic, tako da vsak elt. iz v-množice nastopa v λ množicah iz $\mathcal{B}$.

Elementom družine $\mathcal{B}$ pravimo bloki načrta.

$X, \mathcal{B}$ ... (v,k,λ)-načrt (X ... v-množica)



vseh kljukic:

po vrsticah: $|X| \cdot \lambda = v\lambda$

po stolpcih: $|\mathcal{B}| \cdot k$

$\Rightarrow k|\mathcal{B}| = v\lambda$

$k = \frac{v\lambda}{|\mathcal{B}|}, \quad |\mathcal{B}| = \frac{v\lambda}{k}$

$\Rightarrow \boxed{k \mid v\lambda \qquad (1)}$

Def. $b = |\mathcal{B}| \quad \left(b = \frac{v\lambda}{k}\right)$

$b \le \binom{v}{k} \Rightarrow \boxed{\frac{v\lambda}{k} \le \binom{v}{k} \qquad (2)}$

Izrek. Načrt s parametri (v,k,λ) obstaja natanko tedaj, ko veljata (1) in (2).

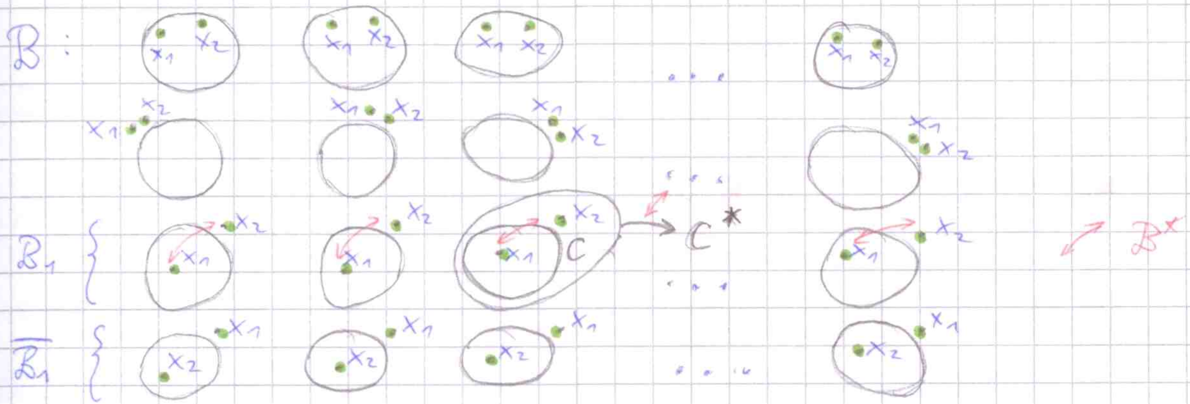
Dokaz. (⇒) ✓

(⇐) Naj veljata (1) in (2). Naj bo X poljubna v-množica.
Naj bo $\mathcal{B}$ poljubna družina $\frac{v\cdot\lambda}{k}$ k-podmnožic množice X.
To število nam omogočata pogoja (1) in (2). Če je $\mathcal{B}$ (v,k,λ)-načrt, ni kaj dokazovati.
V koliko množicah družine $\mathcal{B}$ se v povprečju pojavi elt. iz X?

$$\frac{k\cdot|\mathcal{B}|}{v} = \lambda \quad \leftarrow \text{\# vseh pojavitev vseh elt.}$$

Če $\mathcal{B}$ ni (v,k,λ)-načrt, obstaja $x_1\in X$, ki se pojavi v $>\lambda$ blokih in obstaja $x_2\in X$, ki se pojavi v $<\lambda$ blokih.

$\mathcal{B}_1 = \{B\in\mathcal{B} \mid x_1\in B,\ x_2\notin B\}$, $\overline{\mathcal{B}}_1 = \{B\in\mathcal{B} \mid x_1\notin B,\ x_2\in B\}$



Ker se x_1 pojavi v več blokih kot x_2, je $|\mathcal{B}_1|>|\overline{\mathcal{B}}_1|$.

$\mathcal{B}^* = \{(B\cup\{x_2\})\setminus\{x_1\} \mid B\in\mathcal{B}_1\}$

Ker je $|\mathcal{B}_1|>|\overline{\mathcal{B}}_1|$, $\exists C^*\in\mathcal{B}^* \ni: C^*\notin\mathcal{B}$.
naj bo dobljen iz $C\in\mathcal{B}$

Sedaj postavimo: $\mathcal{C} = (\mathcal{B}\cup C^*)\setminus C$.
V $\mathcal{C}$ se x_1 pojavi 1× manj kot v $\mathcal{B}$.
x_2 pojavi 1× več kot v $\mathcal{B}$.
ostali elt. pojavijo enakokrat kot v $\mathcal{B}$.

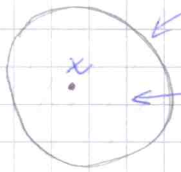
Če je $\mathcal{C}$ (v,k,λ)-načrt, smo končali, sicer pa postopek ponavljamo, dokler obstaja elt., ki se pojavi več kot

λ-krat. Na koncu se bo vsak elt. pojavil natanko λ-krat.

$$(2) \Rightarrow \lambda \leq \frac{k}{v}\binom{v}{k} = \frac{k}{v} \frac{v!}{k!(v-k)!} = \frac{(v-1)!}{(k-1)!(v-k)!} = \binom{v-1}{k-1}$$

$$\boxed{\lambda \leq \binom{v-1}{k-1}} \qquad (2')$$

X v-množica, $x \in X$



$\leftarrow$ k-množica, oz. blok, ki vsebuje x

$\leftarrow$ $k-1$ poljubnih elt. izbiramo med $v-1$ elt.

$$\Rightarrow \lambda \leq \binom{v-1}{k-1}$$

Zgled. $(7,3,3)$-načrt

$3 \mid 7 \cdot 3$ ✓

$3 \leq \binom{7-1}{3-1} = \binom{6}{2} = 15$ ✓

$\mathcal{B} = \{123, 124, 125, 345, 456, 567, 246\}$

2 se pojavi 4x, 3 se pojavi 2x

134 135 346 izberemo npr. tega

$\mathcal{B} = \{123, 124, 125, 345, 456, 567, 346\}$

4 se pojavi 4x, 7 se pojavi 1x

izb. npr. tega 127 357 567 367

$\mathcal{B} = \{123, 127, 125, 345, 456, 567, 346\}$

5 se pojavi 4x, 7 se pojavi 2x

127 347 467 izberemo npr. tega

$\mathcal{B} = \{123, 127, 125, 345, 467, 567, 346\}$ ✓

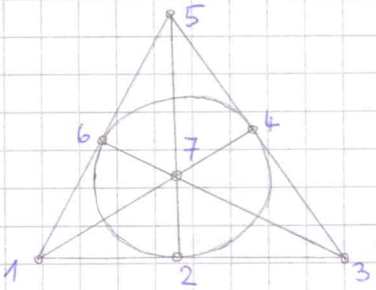
4.2. t-NAČRTI

Def. Družina množic $\mathcal{B}$ je t-načrt s parametri (v, k, λ_t), če so v $\mathcal{B}$ k-podmnožice neke v-množice in vsaka t-podmnožica v-množice nastopa v natanko λ_t blokih.

1-načrt $\equiv$ načrt $\Leftarrow$ $t=1$: vsak el. nastopa v λ blokih

$t=2$: vsi pari elementov so v istem št. (λ_2) blokov

Primer: Fanova ravnina



$\mathcal{B} = \{156, 123, 345, 257, 367, 147, 246\}$

Ali je to $(7,3,3)$-načrt? Da. ✓

Vsaka točka se pojavi na 3 premicah. ($\Rightarrow \lambda = 3$)
Vsaka premica ima isto št. točk. ($\Rightarrow$ Vsak blok bo imel toliko el., kot je točk na premici.)

Ali je to 2-načrt? $(7,3,1)$ 2-načrt? Da, saj je vsak par točk na natanko eni premici.

Primer: $\{1235, 1346, 1457, 1568, 1267, 1378, 1248, 4678, 2578, 2368, 2347, 3458, 2456, 3567\}$ $k=4$, $v=8$

Kakšen načrt je to? #8: 7 $\Rightarrow$ $(8,4,7)$ 1-načrt? Da, saj se vsaka številka pojavi natanko 7-krat. ✓

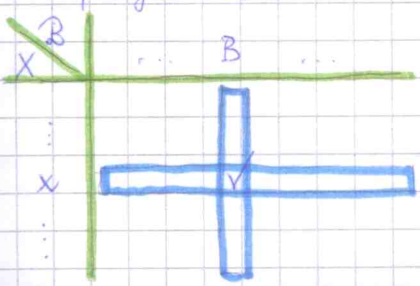
Ali je 2-načrt? #12: 3 $\Rightarrow$ $(8,4,3)$ 2-načrt? #47: 3 ✓ #18: 3 ✓ ...

Ali je 3-načrt? #478: 1 $\Rightarrow$ $(8,4,1)$ 3-načrt?

Def. 2-načrt s parametri $(v,3,1)$ se imenuje *Steinerjev trojček* (Steinerjev sistem trojk).

Izrek. Naj bo $\mathcal{B}$ t-načrt. Tedaj je $\mathcal{B}$ tudi s-načrt za vse $1 \leq s \leq t-1$.

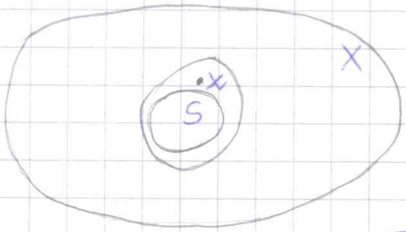
Dokaz. Zadošča, da izrek dokažemo za $s = t-1$. Naj bo S poljubna $(t-1)$-podmnožica v-množice X.



✓ postavimo, če velja:

1. $x \notin S$
2. $S \cup \{x\} \subseteq B$

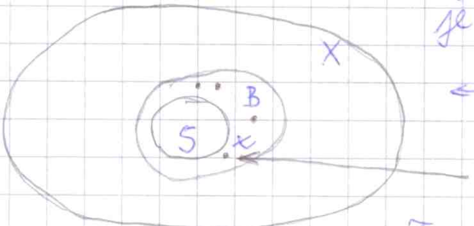
#✓ po vrsticah: ✓ so samo v vrsticah, ki ustrezajo $x \notin S$. Takih vrstic je $v-(t-1) =$
$= v-t+1$



$$|S \cup \{x\}| = t \xrightarrow{B \text{ t-načrt}} \#✓ = \lambda_t$$

$\Rightarrow$ #✓ po vrsticah je $(v-t+1)\lambda_t$.

#✓ po stolpcih: naj bo λ_S število blokov, v katerih je S.



$\leftarrow$ To situacijo najdemo λ_S-krat.

$\# x: \ k-(t-1) = k-t+1$

Torej, za vsak blok B iz zg. situacije naredimo $k-t+1$ kljukic, zato je

#vseh ✓ : $\lambda_S(k-t+1)$.

$$\Rightarrow \lambda_S(k-t+1) = \lambda_t(v-t+1)$$

$$\Rightarrow \lambda_S = \lambda_t \frac{v-t+1}{k-t+1} \leftarrow \text{neodvisno od izbire } S! \qquad (*)$$

Torej je vsaka $(t-1)$-podmnožica vsebovana v istem številu blokov, tj. v $\lambda_t \cdot \frac{v-t+1}{k-t+1}$ blokih. □

Posledica. Naj bo $\mathcal{B}$ t-načrt s parametri (v, k, λ_t).

(i) $\mathcal{B}$ je s-načrt, $1 \leq s \leq t-1$, kjer je

$$\lambda_s = \lambda_t \cdot \frac{(v-s)(v-s-1)\dots(v-t+1)}{(k-s)(k-s-1)\dots(k-t+1)}.$$

(ii) Za vse $s = 0, 1, \dots, t-1$:

$$(k-s)(k-s-1)\dots(k-t+1) \mid \lambda_t (v-s)(v-s-1)\dots(v-t+1)$$

Dokaz. $\lambda_{t-1} = \lambda_t \frac{v-t+1}{k-t+1}$

(i)
$$\lambda_{t-2} = \lambda_{t-1} \frac{v-(t-1)+1}{k-(t-1)+1} = \lambda_{t-1} \frac{v-t+2}{k-t+2}$$
$$= \lambda_t \frac{(v-t+2)(v-t+1)}{(k-t+2)(k-t+1)}$$

(ii) Za $s \geq 1$ to očitno velja zaradi (i).
$s=0$: to velja, ker argument iz dokaza izreka lahko razširimo tudi na ta primer:
$s=0 \Rightarrow |S|=0 \Rightarrow S=\emptyset$
$\Rightarrow \lambda_s = |\mathcal{B}| \overset{(*)}{=} \lambda_1 \frac{v-1+1}{k-1+1}$, $b = \lambda \frac{v}{k}$, $bk = v\lambda$ ✓

Zgled. 2-načrt $(56, 11, 1)$ ne obstaja.
$s=1$: $(k-1) \mid \lambda_2 (v-1)$ po točki (ii) posledice
$10 \mid 1 \cdot 55$ //

$s=0$: $k(k-1) \mid \lambda_2 v(v-1)$
$11 \cdot 10 \mid 1 \cdot 56 \cdot 55$ ✓

4.3. CIKLIČNE KONSTRUKCIJE NAČRTOV

$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ kolobar $ab = ac,\ a \neq 0 \not\Rightarrow b = c$
$a \in \mathbb{Z}_m$ je obrnljiv $\Leftrightarrow D(a,m)=1$.
$A \subseteq \mathbb{Z}_m$ $A+i = \{a+i \mid a \in A\}$ ... odseki

$m \in \mathbb{P}$
$\Downarrow$
$(\mathbb{Z}_m, +, \cdot)$ je obseg

Zgled. $m=12$, $A = \{1,3,5,7\}$

$A+0 = \{1,3,5,7\}$ $A+6 = \{1,7,9,11\}$
$A+1 = \{2,4,6,8\}$ $A+7 = \{0,2,8,10\}$
$A+2 = \{3,5,7,9\}$ $A+8 = \{1,3,9,11\}$
$A+3 = \{4,6,8,10\}$ $A+9 = \{0,2,4,10\}$
$A+4 = \{5,7,9,11\}$ $A+10 = \{1,3,5,11\}$
$A+5 = \{0,6,8,10\}$ $A+11 = \{0,2,4,6\}$

To je $(12,4,4)$ načrt, ki ni 2-načrt

$A = \{0,3,6,9\}$
$A+0 = A+3 = A+6 = A+9 = \{0,3,6,9\}$
$A+1 = A+4 = A+7 = A+10 = \{1,4,7,10\}$
$A+2 = A+5 = A+8 = A+11 = \{2,5,8,11\}$

To ni načrt, saj se bloki ponavljajo. (Če pa bi vsakega šteli samo po enkrat, bi bil to $(12,4,1)$ 1-načrt.

1. Kdaj je $\{A+i \mid i \in \mathbb{Z}_n\}$ načrt?
2. Kdaj je to tudi 2-načrt?

Trditev. Naj bodo odseki $S+i$ paroma različni in naj bo $|S|=k$. Tedaj je $\{S+i \mid i \in \mathbb{Z}_m\}$ (m,k,k)-načrt.

(saj $|S+i|=k$)

Dokaz. $a \in \mathbb{Z}_m$. Dokazati moramo, da se a pojavi v natanko k blokih.

$$a \in S+i \iff \exists x \in S: a = x+i \iff \exists x \in S: 0 = x+(i-a)$$
$$\iff 0 \in S+(i-a)$$

Naj bo $a \in S+i_1, S+i_2, \dots, S+i_r$. Tedaj je $0 \in S+(i_1-a), S+(i_2-a), \dots, S+(i_r-a)$.
Zato je a v istem številu odsekov kot je 0.

Ker je bil a poljubno izbran element iz $\mathbb{Z}_m$, to da je vsak element v istem številu odsekov, kot je element 0. Zato so vsi elementi v istem številu odsekov ($=$ blokov), zato $\{S+i\}$ tvori načrt. Ker imamo načrt, velja $b \cdot k = v \cdot \lambda$.

$b = m$ $\quad$ $v = m$

$$\Rightarrow m \cdot k = m \cdot \lambda \Rightarrow \lambda = k \qquad \blacksquare$$

Def. $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ je *množica razlik*, če se vsak neničelni element iz $\mathbb{Z}_m$ pojavi enakokrat kot razlika dveh elementov iz S.

$\{a-b \mid a,b \in S, a \neq b\}$ ← multimnožica (štejemo, kolikokrat se nek element pojavi)

Zgled. $S = \{0,2,3,4,8\} \subseteq \mathbb{Z}_{11}$

$b \backslash a$	0	2	3	4	8
0	0	2	3	4	8
2	9	0	1	2	6
3	8	10	0	1	5
4	7	9	10	0	4
8	3	5	6	7	0

$\# 1 : 2$
$\# 2 : 2$
$\# 3 : 2$
$\# 4 : 2$
$\vdots$
$\# 10 : 2$

$S = \{0,2,3,4,8\}$
$S+1 = \{1,3,4,5,9\}$
$S+2 = \{2,4,5,6,10\}$
$S+3 = \{3,5,6,7,0\}$
$S+4 = \{4,6,7,8,1\}$
$S+5 = \{5,7,8,9,2\}$
$S+6 = \{6,8,9,10,3\}$
$S+7 = \{7,9,10,0,4\}$
$S+8 = \{8,10,0,1,5\}$
$S+9 = \{9,0,1,2,6\}$
$S+10 = \{10,1,2,3,7\}$

To je $(11,5,5)$ 1-načrt in $(11,5,2)$ 2-načrt.

Izrek. Naj bo $S \subseteq \mathbb{Z}_m$ množica razlik in $|S| = k$. Tedaj odseki množice S tvorijo 2-načrt s parametri $\left(m, k, \frac{k(k-1)}{m-1}\right)$.

Dokaz. Dokazati moramo, da se vsak par elementov $a, b \in \mathbb{Z}_m$ pojavi v natanko $\frac{k(k-1)}{m-1}$ blokih.

Vseh neničelnih razlik $x-y$; $x, y \in S$ je $k(k-1)$.
"šteto z večkratnostmi"

Vseh neničelnih elementov v $\mathbb{Z}_m$ je $m-1$.

Ker je S množica razlik, ima torej enačba

$$\mathbb{Z}_m \ni \underbrace{a-b}_{\neq 0} = x-y \qquad (*)$$

natanko $\frac{k(k-1)}{m-1}$ rešitev.

(Vsak neničelni element iz $\mathbb{Z}_m$ se pojavi $\frac{k(k-1)}{m-1}$-krat kot razlika dveh elementov.)

Z drugimi besedami, obstaja natanko $\frac{k(k-1)}{m-1}$ parov (x,y), ki rešijo to enačbo. $(x, y \in S)$

$$(x,y) \longmapsto i = a - x \qquad (**)$$

$a = x + i \qquad b = a - x + y = x + i - x + y = y + i$

$a = x + i, \quad x \in S \qquad b = y + i, \quad y \in S$

$\Rightarrow \quad a, b \in S + i$

Če (x,y) in (x',y') rešita $(*)$, je $x \neq x'$.

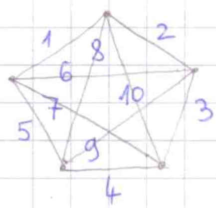
$(x,y) \neq (x',y')$

(Če $x = x' \Rightarrow x - y = x' - y' = x - y' \Rightarrow y = y'$ →←)

Zato je prireditev $(**)$ injektivna: $x \neq x' \Rightarrow a - x \neq a - x'$

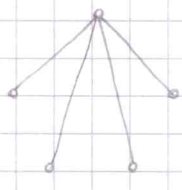
Torej je indeksov i toliko, kot je parov (x,y), ki rešijo $(*)$. Zato je par (a,b) v natanko toliko blokih, kot je rešitev za $(*)$, tj. $\frac{k(k-1)}{m-1}$. $\square$

Zgled. K_5, $V = E(K_5)$



$k = 4$

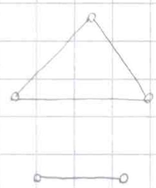
Tip 1:



1, 2, 10, 2

\# blokov $= 5$

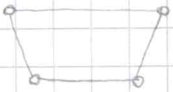
Tip 2:



1, 2, 8, 4

\# blokov $= \# \Delta = \binom{5}{3} = 10$

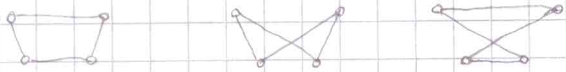
Tip 3:



3,4,5,6

\# blokov $= \binom{5}{4} \cdot 3 = 15$

$\uparrow$ vsaka četverica točk določa natanko 3 "kvadrate":



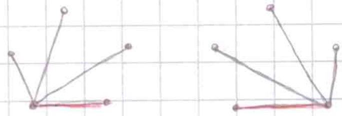
Skupaj imamo 30 blokov $(b = 30)$.

Če je to načrt, potem velja $\lambda = \frac{bk}{v} = \frac{30 \cdot 4}{10} = 12$.

$(10, 4, 12)$ – načrt ?

Izberimo poljubno povezavo, npr. 1, in preštejmo, v koliko takih blokih je vsebovana. Vsaka povezava je v:

- 2 blokih tipa 1



- $1 + 3 = 4$ blokih tipa 2

-  ← Imamo $\binom{3}{2}$ možnosti za izbiro preostalih dveh vozlišč.

Za vsak tak izbrani par in dano povezavo imamo potem 2 možnosti za kvadrat:

$\Rightarrow \binom{3}{2} \cdot 2 = 6$ blokov tipa 3

Vsaka povezava je v $\Sigma = 12$ blokih. Torej imamo $(10, 4, 12)$ – načrt.

$$\lambda_{t-1} = \lambda_t \frac{v - t + 1}{k - t + 1}$$

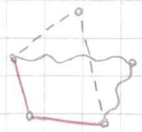
$\lambda_1 = \lambda$ poznamo , $\lambda_2 = ?$

$\lambda = \lambda_2 \cdot \frac{10-2+1}{4-2+1}$, $\quad 12 = \lambda_2 \cdot \frac{9}{3}$, $\quad \lambda_2 = 4$

Če je to 2-načrt, je vsak par porezav v 4 blokih.

Npr. par (1,2) incidenčni porezavi:

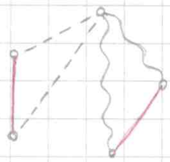
- v 1 bloku tipa 1
- v 1 bloku tipa 2
- v 2 blokih tipa 3:



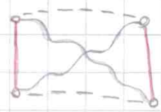
Incidenčni porezavi sta res v 4 blokih.

Npr. par (1,3) neincidenčni porezavi:

- v 0 blokih tipa 1
- v 2 blokih tipa 2:



- v 2 blokih tipa 3:

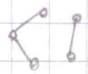


Neincidenčni porezavi sta res v 4 blokih. Imamo 2-načrt s parametri (10, 4, 4).

Ali je to tudi 3-načrt? $\lambda_2 = \lambda_3 \cdot \frac{v-3+1}{k-3+1}$,

$4 = \lambda_3 \cdot \frac{10-3+1}{4-3+1}$, $\quad 4 = \lambda_3 \cdot \frac{8}{2}$, $\quad \lambda_3 = 1$

Vsaka trojica porezav je v kvečjemu enem bloku.

1. Porezave tvorijo  : 1 blok tipa 2
2.  : 1 blok tipa 1
3.  : 1 blok tipa 3
4.  : 1 blok tipa 2

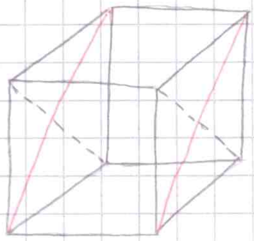
Koliko trojic premorejo naši bloki? $30 \cdot \binom{4}{3} = 120$

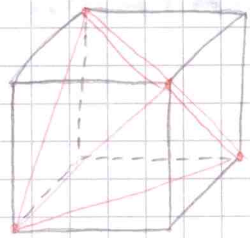
Vseh trojic je $\binom{10}{3} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$.

$\Rightarrow$ Vsaka trojica mora biti v natanko 1 bloku.

Imamo 3-načrt s parametri (10, 4, 1).

Naloga.





$v = 8$, bloki: lica, nasprotne diagonale, včrtana tetraedra