3. RAVNINSKI GRAFI

G je *ravninski*, če ga lahko narišemo v ravnini tako, da se nobeni povezavi ne sekata. (planar)

Graf vložen v ravnino $\equiv$ ravninski graf skupaj z risbo v ravnini. (plane)

Jordanov izrek: Naj bo $g: S^1 \to \mathbb{R}^2$ poljubna vložitev. Tedaj ima $\mathbb{R}^2 - g(S^1)$ natanko dve komponenti za povezanost, eno omejeno in eno neomejeno. (Krivuljo $g(S^1)$ imenujemo enostavna sklenjena krivulja. $g(S^1) \cong S^1$.)

3.1. IZREK KURATOWSKEGA

Lema: Naj bo G 2-povezan ravninski graf vložen v ravnino. Tedaj ima

$$|E(G)| - |V(G)| + 2$$

Eulerjeva karakteristika (velja za vse ravninske grafe)

lic in vsako lice je omejeno s ciklom.

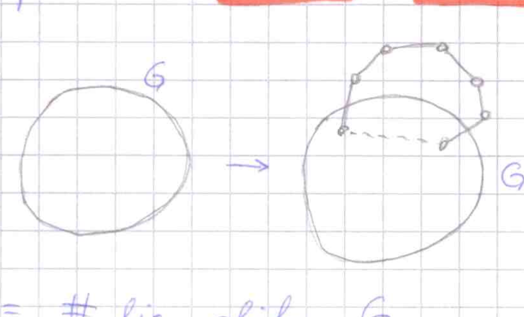
Dokaz (indukcija po številu ciklov G).

baza: G ima en cikel $\Rightarrow$ $G = C_n$

$f = \#\text{lic} = 2 \qquad |E(C_n)| - |V(C_n)| + 2 = n - n + 2 = 2$ ✓

indukcijski korak: uporabimo ušesno dekompozicijo:

$G \to G'$:



G: $|E(G)| - |V(G)| + 2 = \#$ lic slike G

G': smo lice več

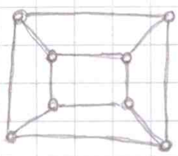
če dodamo k vozlišč, smo dodali $k+1$ povezav

$$\# \text{lic v } G' = (|E(G)|-|V(G)|+2)+1 =$$
$$= (|E(G)|+k+1)-(|V(G)|+k)+2 = |E(G')|-|V(G')|+2. \blacksquare$$

Def. Ravninski graf vložen v ravnino je **triangulacija**, če je vsako lice omejeno s trikotnikom grafa.

triangulacija $\equiv$ maksimalen ravninski graf (pri danem številu vozlišč)

Podobno je def. **kvadriangulacija**, če je vsako lice omejeno s 4-ciklom grafa.

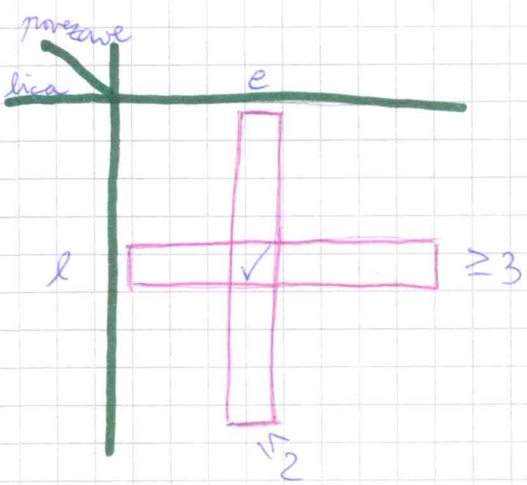


Lema. Naj bo G ravninski graf vložen v ravnino z n vozlišči in m povezavami. Tedaj je $m \leq 3n-6$

$[n \geq 3]$ in enakost velja natanko tedaj, ko je G triangulacija. $(m = O(n))$

$[n>3]$ Če je G brez trikotnikov, tedaj je $m \leq 2n-4$ in enakost velja natanko tedaj, ko je G kvadriangulacija.

Dokaz.



✓: povezava e je na robu lica l

$3f \leq \#✓ \leq 2m \Rightarrow$

$\boxed{3f \leq 2m}$ in enakost velja $\Leftrightarrow G$ triangulacija

$$f = m - n + 2 \le \frac{2}{3} m \quad / \cdot 3$$
$$m - 3n + 6 \le 0 \ \checkmark$$

Naj bo G brez Δ: analogno dobimo:
$$4f \le 2m$$
in enakost velja $\Leftrightarrow$ G je kvadrangulacija.
Zato:
$$m - n + 2 \le \frac{m}{2} \quad / \cdot 2$$
$$m - 2n + 4 \le 0 \ \checkmark$$

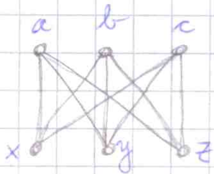
$\square$

Posledica. K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska grafa.

K_5: $n = 5$, $m = 10$

$3n - 6 = 9$. Če bi bil ravninski, bi dobili
$$m \le 3n - 6$$
$$10 \le 9 \quad \rightarrow\leftarrow$$
Ni ravninski!

$K_{3,3}$:

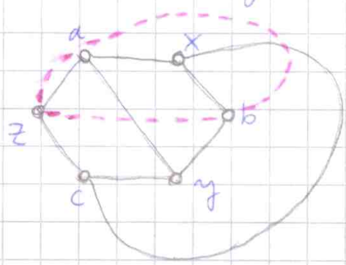


$n = 6$
$m = 9$

dvodelni $\Rightarrow$ brez 

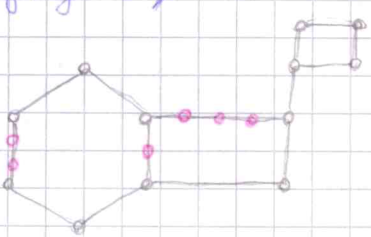
Če bi bil ravninski, bi veljalo: $9 = m \le 2n - 4 = 8 \quad \rightarrow\leftarrow$

Ni ravninski!



Def. Grafa K_5 in $K_{3,3}$ imenujemo grafa Kuratowskega.

Def. Graf H je subdivizija grafa G, če je $H = G$, ali če H dobimo iz G tako, da na njegove povezave dodamo nekaj vozlišč stopnje 2. Grafa G in H sta homeomorfna, če obstaja graf X, tako da sta G in H subdiviziji od X.



Očitno je G ravninski natanko tedaj, ko je ravninska vsaka njegova subdivizija.

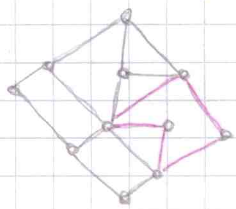
Izrek (Kuratowski, 1930). Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje podgrafa homeomorfnega K_5 ali $K_{3,3}$.

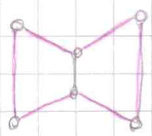
($\Rightarrow$): očitno ✓

($\Leftarrow$): v nadaljevanju

Vložitev z ravnimi črtami: ravninski graf vložen v ravnino, tako da je vsaka povezava realizirana z daljico.

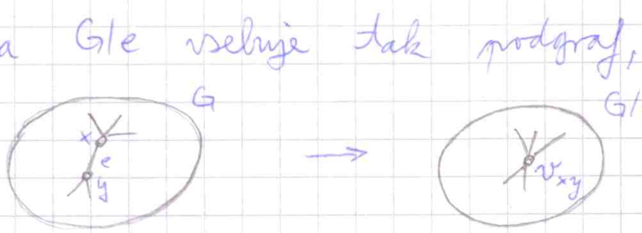
Vložitev je konveksna, če je vložitev z ravnimi črtami in je vsako notranje lice omejeno s konveksnim poligonom ter je tudi notranjost zunanjega cikla konveksna množica.





Lema. Naj bo G graf in $e \in E(G)$. Če je G brez podgrafov, ki so subdivizije grafov Kuratowskega, tedaj je tak tudi G/e.

Dokaz. Recimo, da G/e vsebuje tak podgraf, naj bo to H.

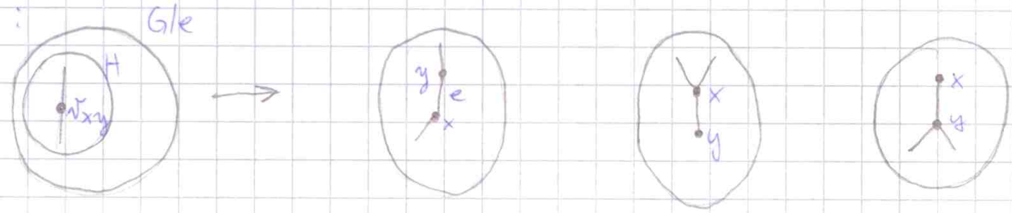


v G/e:

Ločimo več primerov:

1. $v_{xy} \notin H$: Tedaj imamo H tudi v G, $\rightarrow\leftarrow$.
2. v_{xy} je stopnje 2 v H.
   Če v_{xy} "razpihnemo" nazaj v e, imamo naslednje

možnosti:



Če nadomestimo v_{xy} bodisi z e bodisi z x bodisi z y, dobimo prepovedano subdivizijo v G.

3. v_{xy} je stopnje >2 in da kvečjemu ena od njegovih incidenčnih povezav ustreza x (ali kvečjemu ena ustreza y).

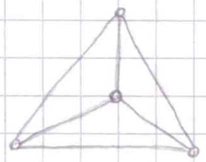
Subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$ v G →←

4. v_{xy} je stopnje 4 in dve povezavi ustrezata x in dve y. V tem primeru je H subdivizija od K_5.

Subdivizija od $K_{3,3}$ v G →← ∎

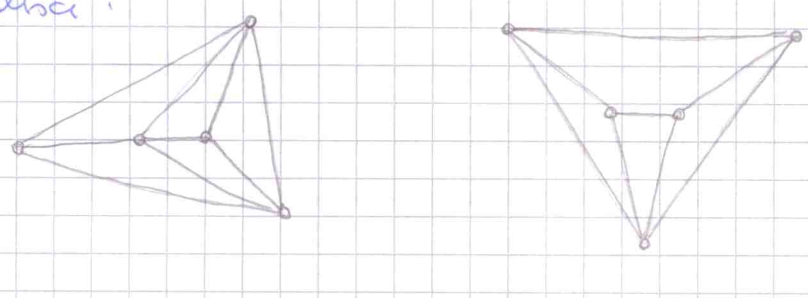
Zgled. Za vse 3-povezane grafe na kvečjemu 5 vozliščih (različne od K_5) poišči konveksno vložitev v ravnino.

K_4:

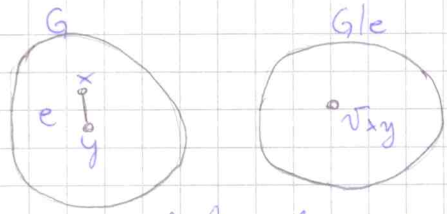


(K_4 je edini 3-povezan graf s štirimi vozlišči.)

S 5 vozlišči:



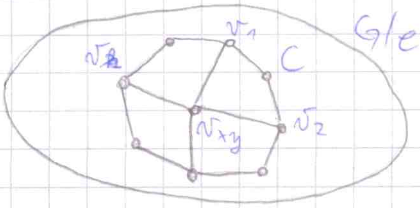
Trditev. Naj bo G 3-povezan graf, ki ne vsebuje subdivizij grafov Kuratowskega. Tedaj G premore konveksno vložitev v ravnino.



Dokaz. (Indukcija po $|V(G)|$.)

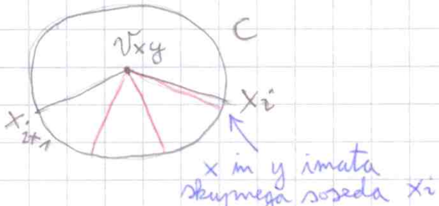
Baza indukcije: prejšnji zgled.
(Thomassen)

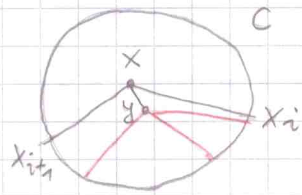
Indukcijski korak: Po lemi obstaja povezava e, tako da je G/e 3-povezan. Po zadnji lemi je G/e tudi brez subdivizij grafov Kuratowskega. Zato G/e po indukcijski predpostavki premore konveksno vložitev v ravnino. Vložimo torej G/e konveksno v ravnino. $G/e - v_{xy}$ je 2-povezan, zato rob vsakega lica tvori cikel.



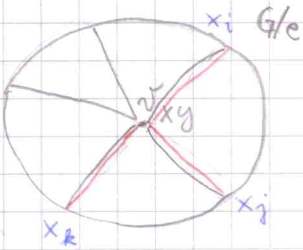
$v_1, v_2, \dots, v_k$ sosedi od v_{xy} vzdolž cikla C, ki pridejo od vozlišča x. Tudi sosedi od y so na C.

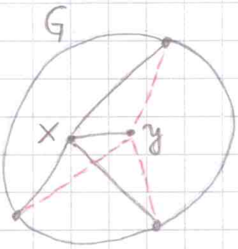
1. Vsi sosedi od y so na nekem segmentu cikla od x_i do x_{i+1}:





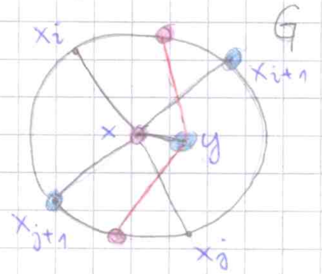
2. Sosedi, ki pridejo od y so vsaj trije: x_i, x_j, x_k.





Najdemo subdivizijo od K_5 v G.

3. Imamo dva soseda od y, ki padeta v različna segmenta x_i, x_{i+1} in x_j, x_{j+1}.

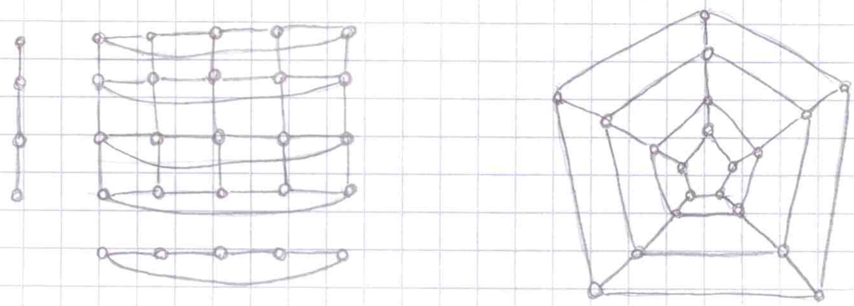


Sedaj najdemo subdivizijo od $K_{3,3}$ v G.

Posledica. 3-povezani ravninski grafi premorejo konveksno vložitev v ravnino.

Dokaz. Ravninski grafi so brez subdividiranih K_5 in $K_{3,3}$. $\square$

Zgled. Poišči konveksno vložitev v ravnino grafa $P_n \square C_m$.



Dokaz izreka Kuratowskega.

G ravninski $\Rightarrow$ brez subdivizij K_5 ali $K_{3,3}$

($\Rightarrow$) ✓ posledica Eulerjeve formule

($\Leftarrow$):

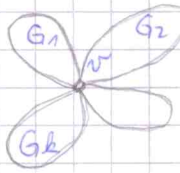
G ni ravninski $\Rightarrow$ ima K_5 ali $K_{3,3}$

Recimo, da to ne velja: potem obstaja tak neravninski graf G, ki je brez K_5 in brez $K_{3,3}$. Izmed vseh protiprimerov izberemo G tako, da ima najmanjše število povezav.

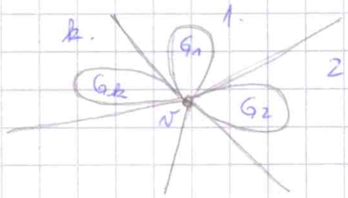
Za vsako povezavo e je $G-e$ ravninski: če odstranimo e iz grafa G, $G-e$ zagotovo nima subdivizije K_5 ali $K_{3,3}$. Zato mora biti ravninski, saj bi sicer bil to najmanjši protiprimer.

G je povezan: res, v nasprotnem primeru bi bila ena od njegovih komponent neravninski graf in torej manjši protiprimer.

G je brez presečnih vozlišč:

recimo: 

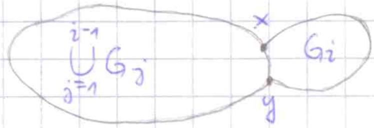
v presečno vozlišče

Vsi grafi G_i so ravninski, sicer bi tvorili manjše protiprimere. Tedaj lahko vsak G_i narišemo v ravnini tako, da leži v na zunanjem licu: 

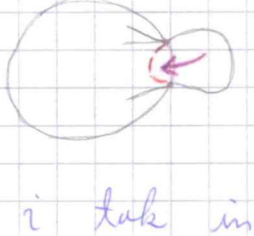
Toda to je ravninska vložitev za G. $\to\leftarrow$

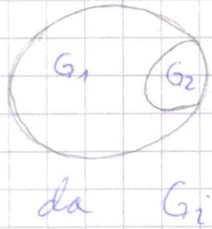
Recimo, da G premore presečno množico moči 2: $\{x, y\}$. $G - \{x, y\}$ razpade na nekaj komponent. Naj bodo $G_1, \dots, G_k$ te komponente skupaj z $\{x, y\}$ in povezavo xy. Tedaj vsaj en G_i ne more biti ravninski. V nasprotnem bi bil tudi G ravninski, takole:

G_1 vložimo v ravnino, tako da je xy na zunanjem licu. Recimo, da že imamo ravninsko vložitev $\bigcup_{j=1}^{i-1} G_j$:

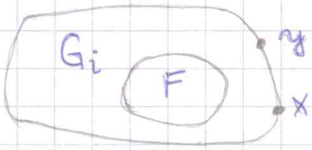


Spet lahko privzamemo, da je xy na robu zunanjega lica.



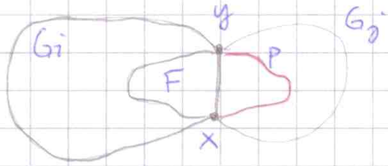


Naj bo torej i tak indeks, da G_i ni ravninski. Ker je G_i manjši kot G, ne more biti protiprimer. Zato G_i vsebuje subdivizijo K_5 ali $K_{3,3}$ (naj bo to F).



Če F ne vsebuje xy, tedaj F leži v G. $\rightarrow\leftarrow$

Zato je $xy \in F$:



G ne vsebuje nujno xy

x, y sta minimalna presečna množica, zato imata oba soseda tako v G_i kot v G_j. Potem pa nadomestimo povezavo xy v F z x,y-potjo P v G_j, kar pa je subdivizija K_5 ali $K_{3,3}$ v G. $\rightarrow\leftarrow$

Torej: G je 3-povezan!
A ker je G brez $K_5, K_{3,3}$ ima po prejšnji trditvi (konveksno) vložitev v ravnino. $\rightarrow\leftarrow$ $\blacksquare$

Ključni koraki dokaza (netrivialnega dela) izreka Kuratowskega:

- Vsak 3-povezan graf G premore povezavo e, tako da G/e 3-povezan. (Thomassen)
- Če G nima subdivizij grafov Kuratowskega, tedaj tudi G/e nima takih subdivizij.
- G 3-povezan, brez subdivizij grafov Kuratowskega, premore konveksno vložitev v ravnino.
- G minimalen neravninski graf brez subdivizij grafov Kuratowskega, tedaj je G 3-povezan.

Posledica (Fáryjev izrek). Vsak ravninski graf premore vložitev v ravnino s samimi ravnimi črtami.

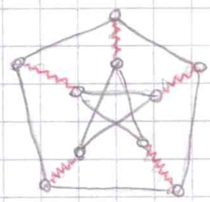
Ideja dokaza. Ravninskemu grafu G dodajamo povezave dokler lahko, tako da pri tem ohranjamo ravninskost.

Dobljeni graf $\hat{G}$ je torej ravninski in izgubi to lastnost, če mu dodamo poljubno manjkajočo povezavo. Velja: $\hat{G}$ je 3-povezan. Nariši $\hat{G}$ konveksno, odstrani odvečne povezave za risbo G.

Def. Graf H je **minor** grafa G, če lahko H dobimo iz nekega podgrafa grafa G, tako da skrčimo nekaj povezav tega podgrafa.

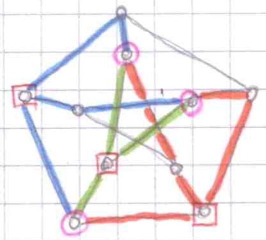
Minor grafa je določen z množico povezav, ki jih zbrišemo iz grafa in z množico povezav, ki jih skrčimo. Pri tem vrstni red odstranjevanja oz. krčenja ni pomemben.

Zgled. Pokaži, da je K_5 minor Petersenovega grafa.



$\longrightarrow K_5$.

Petersenov graf nima subdivizij K_5, ima pa subdivizijo $K_{3,3}$.



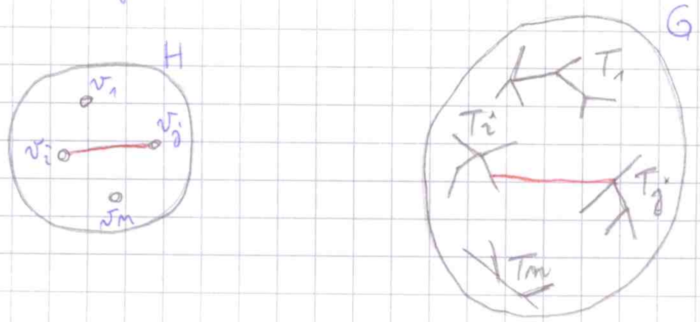
$\longleftarrow$ subdivizija $K_{3,3}$

Izrek (Wagner, 1937). Graf G je ravninski natanko tedaj, ko ne vsebuje minorja K_5 ali $K_{3,3}$.

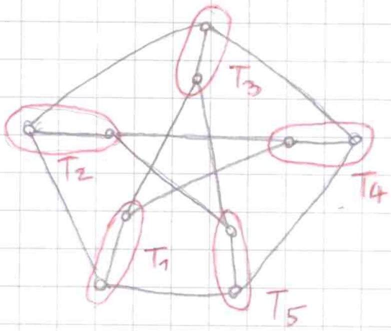
Dokaz. ($\Rightarrow$): velja, ker je minor ravninskega grafa ravninski graf in ker K_5 in $K_{3,3}$ nista ravninska.

($\Leftarrow$): Recimo, da G ni ravninski. Tedaj po izreku Kuratowskega vsebuje subdivizijo od K_5 ali $K_{3,3}$. Tedaj iz tega podgrafa grafa G z ustreznimi skrčitvami dobimo minor K_5 ali minor $K_{3,3}$.

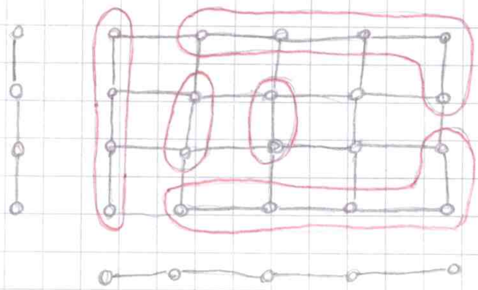
Trditev. Naj bo H graf z vozlišči $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Tedaj je H minor grafa G natanko tedaj, ko G premore paroma disjunktna poddrevesa $T_1, T_2, \ldots, T_n$, tako da velja: če je $v_i v_j \in E(H)$, tedaj obstaja povezava v G med vozliščema iz T_i in iz T_j.



Zgled. Petersenov graf:



$P_4 \square P_5$ ima minor $K_5 - e$:

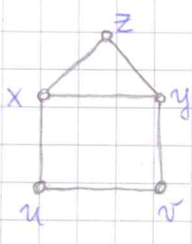


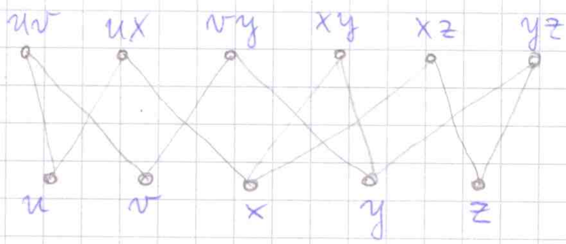
3.2. SCHNYDERJEV IZREK

Dimenzija delne urejenosti je moč najmanjšega realizatorja. (Realizator je množica linearnih razširitev, katerih presek je ta delna urejenost.)

G graf. Na $V(G) \cup E(G)$ vpeljimo delno urejenost $\leq$ takole: če je $e = uv$, postavimo $u \leq e$, $v \leq e$ (+ refleksivnost: $u \leq u$, $e \leq e$).

Primer:



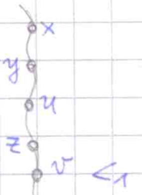


Def. Dimenzija grafa G, $\dim(G)$, je dimenzija prirejene delne urejenosti.

Izrek (Schnyder, 1989). Graf G je ravninski $\Longleftrightarrow \dim(G) \leq 3$.

Dokaz zadostnosti ($\Leftarrow$): Naj bo $\dim(G) \leq 3$. Tedaj obstaja realizator za prirejeno delno urejenost s tremi lin. razširitvami: $<_1, <_2, <_3$.

V teh realizatorjih opazujmo samo vozlišča in naj bo $m_i(u)$ višina vozlišča u v realizatorju $<_i$.



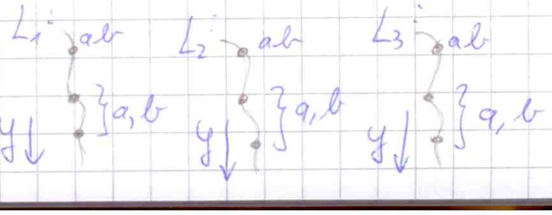
$m_1(v) = 1, \quad m_1(z) = 2, \quad m_1(u) = 3,$
$m_1(y) = 4, \quad m_1(x) = 5.$

Naj bo $u \in V(G)$ in postavimo: $f(u) = (\overbrace{2^{m_1(u)}}^{f_1(u)}, \overbrace{2^{m_2(u)}}^{f_2(u)})$.
Če je $uv \in E(G)$, tedaj med $f(u)$ in $f(v)$ potegnemo daljico. Trdimo, da na ta način dobimo vložitev grafa G v $\mathbb{R}^2$. (Dobimo celo vložitev z ravnimi črtami.)

Očitno je preslikava f injektivna. (Celo f_1 in f_2 sta inj.)

$ab, xy \in E(G)$. Pokazati moramo, da se daljici med $f(a)$ in $f(b)$ ter med $f(x)$ in $f(y)$ ne sekata.

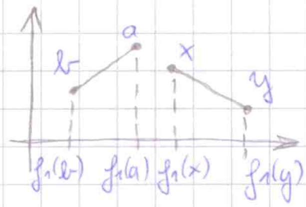
1. ab, xy nimata skupnih krajišč.
BŠS: $a, b, y <_1 x$. (*)
• $\exists i \ni: a, b <_i y$
Recimo nasprotno:



$\Rightarrow y \leq ab$

- $\exists j \ni: x, y <_j a$
- $\exists k \ni: x, y <_k b$
- $i \geq 2$: če je $i=1$: $a, b <_1 y \overset{(*)}{<_1} x \Rightarrow$

$$f_1(a), f_1(b) < f_1(x), f_1(y)$$



✓

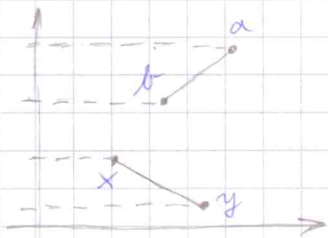
- $j, k \geq 2$: če je $j=1$: $x, y <_1 a$ →← z $(*)$
  (isti argument še za k)

- $j = k$: recimo $j \neq k$, torej je eden 2 in eden 3;
  ker je $i \geq 2$, BŠS: $i = j \Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} a, b <_i y \\ x, y <_i a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a <_i y <_i a \quad \rightarrow\leftarrow$$

- $j = k = 3$: recimo $j = k = 2$:

$$x, y <_2 a$$
$$x, y <_2 b$$



✓

- $i = 2$: recimo $i = 3$:

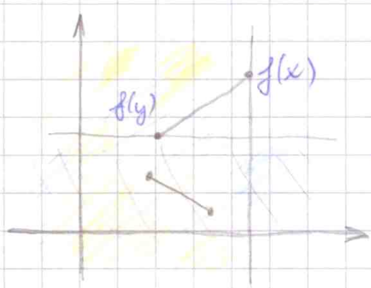
$$\left.\begin{matrix} a, b <_3 y \\ x, y <_3 a \end{matrix}\right\} \Rightarrow a <_3 y <_3 a \quad \rightarrow\leftarrow$$

$(*)$

$$a, b, y <_1 x$$
$$a, b <_2 y$$

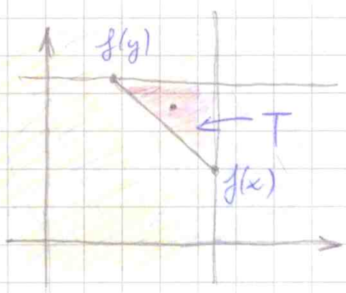
Imamo dve možnosti:

i)

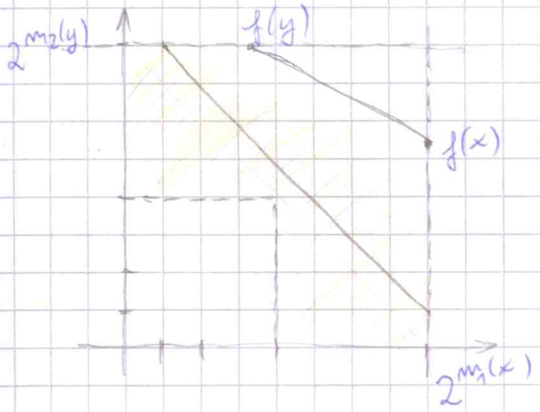


✓

ii)

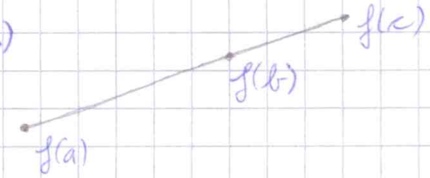


Če se $f(x) — f(y)$ seka z $f(a) —— f(b)$, mora biti vsaj ena od $f(a), f(b)$ v T. Toda, če je $(t_1, t_2) \in T$, tedaj je $t_1 > \frac{2^{m_1(x)}}{2}$ ali $t_2 > \frac{2^{m_2(y)}}{2}$. Toda temu ne zadošča niti $f(a)$, niti $f(b)$.



2) povezani imata skupno krajišče: ab in ac

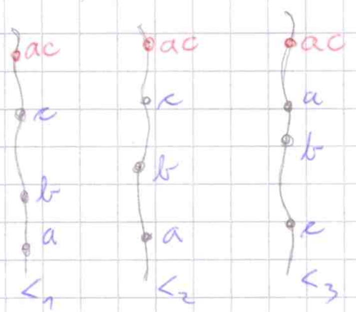
i)



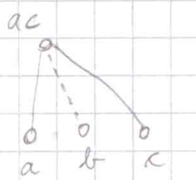
$$\left.\begin{array}{l} a <_1 b <_1 c \\ a <_2 b <_2 c \end{array}\right\} \Rightarrow c <_3 b <_3 a$$

$\Rightarrow b <_3 a$, sicer bi bilo: $a \leq b$

$c <_3 a$, $c <_3 b$



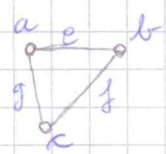
$\Rightarrow b \leq ac$ $\rightarrow\leftarrow$

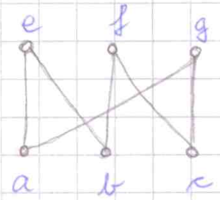


ii) podobno

$\blacksquare$

Zgled. K_3





$\leftarrow$ standardni primer

$c <_1 b <_1 f <_1 a <_1 g <_1 e$

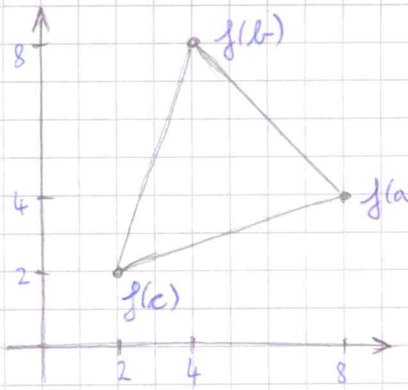
$c <_2 a <_2 g <_2 b <_2 f <_2 e$

$a <_3 b <_3 e <_3 c <_3 g <_3 f$

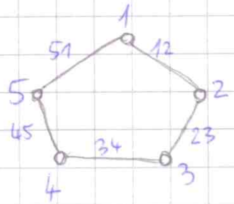
$f(b) = (2^2, 2^3) = (4, 8)$

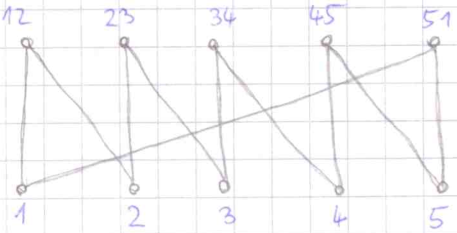
$f(c) = (2^1, 2^1) = (2, 2)$

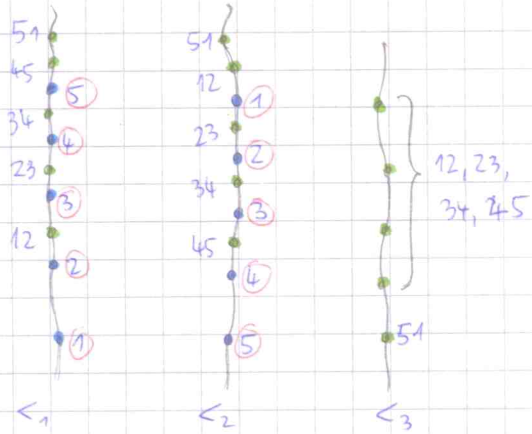
$f(a) = (2^3, 2^2) = (8, 4)$



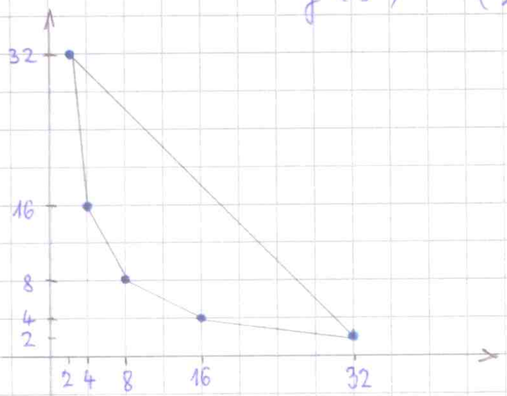
Zgled C_5







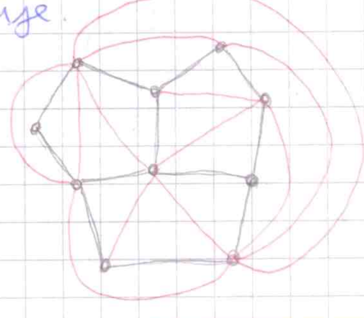
$$f(1) = (2^1, 2^5) = (2, 32)$$
$$f(2) = (2^2, 2^4) = (4, 16)$$
$$f(3) = (2^3, 2^3) = (8, 8)$$
$$f(4) = (2^4, 2^2) = (16, 4)$$
$$f(5) = (2^5, 2^1) = (32, 2)$$



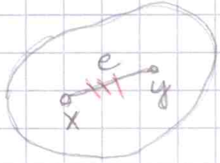
Dokaz potrebnosti ($\Rightarrow$)

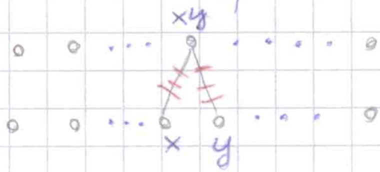
ravninska triangulacija: $m \leq 3n - 6$

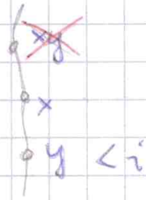
Vsak ravninski graf je vpet podgraf neke ravninske triangulacije.



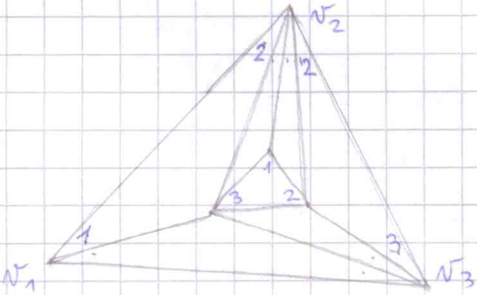
Če iz grafa odstranimo povezavo, se dimenzija ne poveča. Isti realizator (le brez odstranjene povezave) je tudi realizator za graf brez te povezave.







Torej, da dokažemo, da je $\dim(G) \leq 3$ za vsak ravninski graf G, zadošča, da to pokažemo za triangulacije.

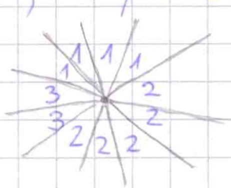


Def. Schnyderjeva označitev triangulacije je prireditev števil 1, 2, 3 notranjim kotom trikotnikov triangulacije tako, da velja:

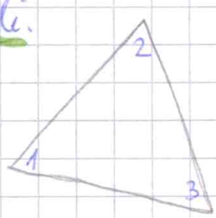
(i) vsi koti pri v_i imajo oznako i

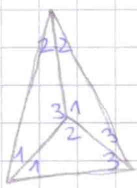
(ii) koti v trikotniku imajo oznake 1, 2, 3 v smeri urinega kazalca (notranjega)

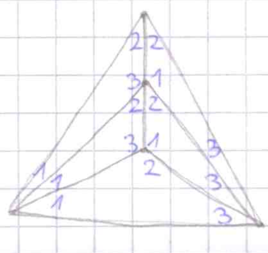
(iii) koti okoli vozlišča imajo oznake, ki so v smeri urinega kazalca: neprazno zaporedje 1, neprazno zaporedje 2, neprazno zaporedje 3

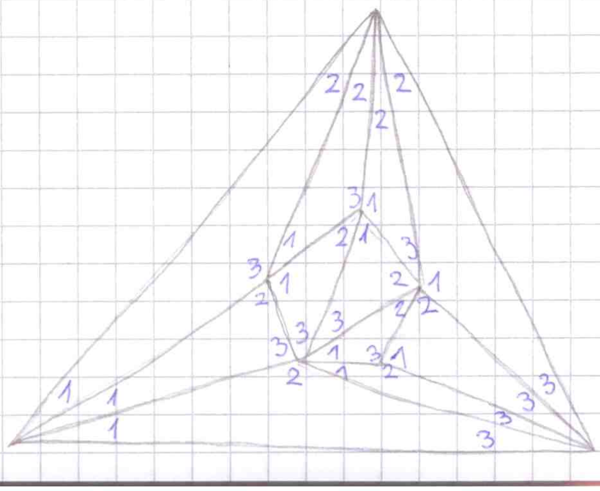


Zgledi:





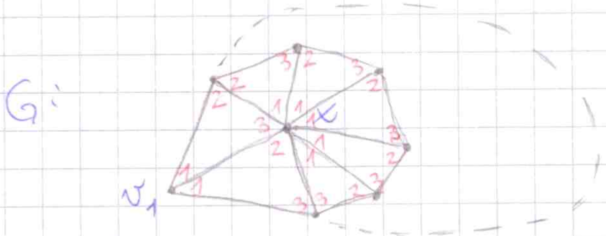


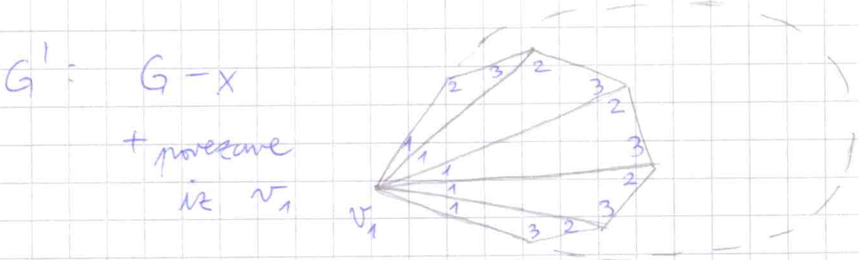


Trditev. Vsaka ravninska triangulacija premore Schnyderjevo označitev.

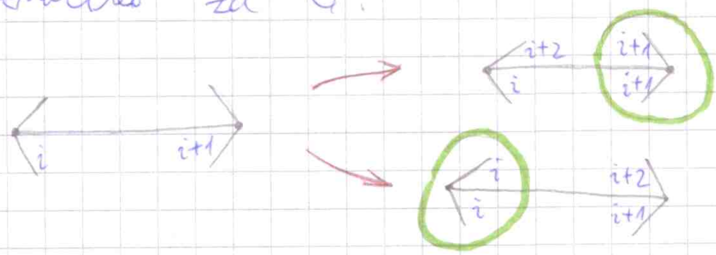
Dokaz. (indukcija po številu vozlišč)

Izberemo notranje vozlišče, ki je sosednje z v_1:



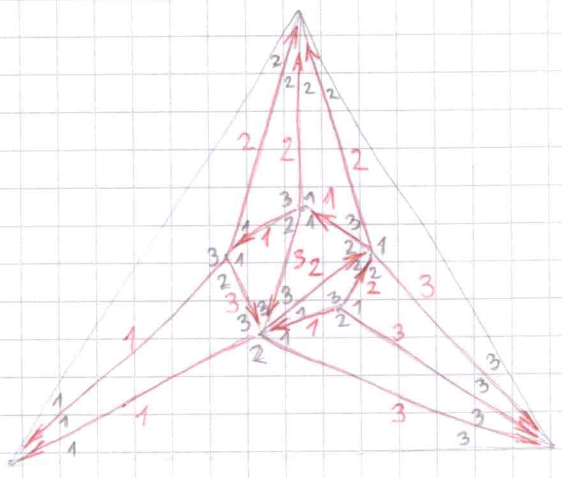


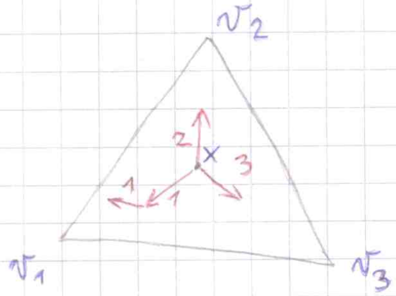
G' po indukcijski predpostavki premore Schnyderjevo označitev. Sedaj to označitev "dvignemo" na označitev v G kot je prikazano na sliki. To pa je Schnyderjeva označitev za G. ∎

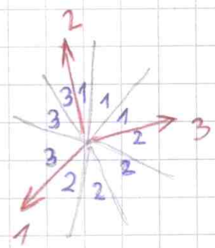


$\Rightarrow$ notranja povezava ima na eni strani isto oznako pri priležnih kotih, na drugi strani pa ostali dve.

Sedaj triangulacijo usmerimo: (in označimo)

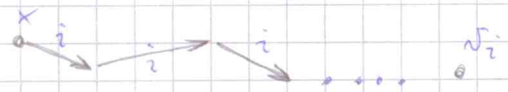






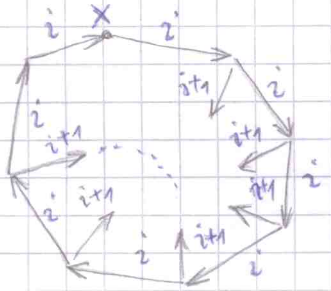
Iz vsakega notranjega vozlišča imamo natanko eno izhodno povezavo oznake i. $1 \leq i \leq 3$.

i-pot iz x: je usmerjena pot, ki se začne v x in sledi povezavam z oznako i.



Trdimo, da i-pot iz x privede v v_i.

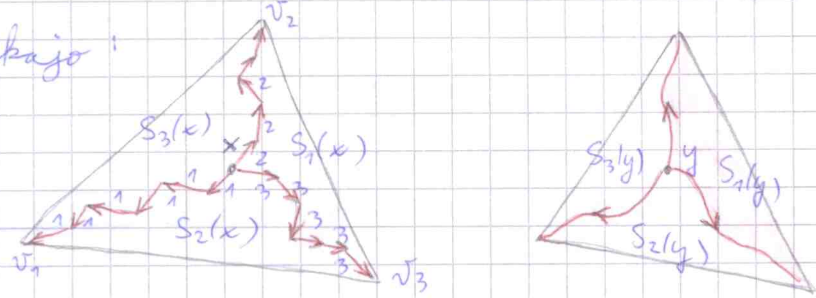
Sicer:



$\Rightarrow$ dobimo krajši cikel $\rightarrow\leftarrow$

Če je to možno, izberimo najkrajši enobarvni cikel.

i-poti iz x se ne sekajo:



Def. Na $V(G)$ definiramo $\leq_i$ takole:

$$x \leq_i y \quad \equiv \quad S_i(x) \subseteq S_i(y).$$

Nato poljubno linearno razširimo $\leq_i$ v relacijo $\leq_i'$.

Nazadnje v $\leq_i'$ vstavimo še povezave triangulacije na naraven način: če je ab povezava, tedaj vstavimo ab takoj nad višjega od a in b:

Tako dobljene relacije tvorijo realizator osnovne delne urejenosti triangulacije. $\square$