2. POVEZANOST V GRAFIH

G graf. $u, v \in V(G)$:

$u \sim v$, če $\exists\, u,v$-sprehod v G

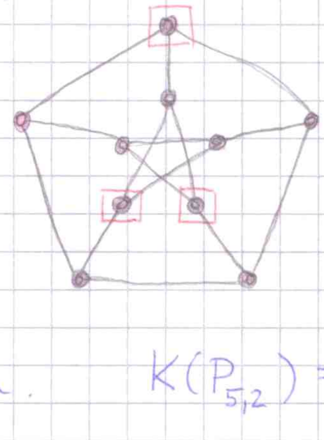
$\sim$ je ekvivalenčna relacija in njene ekvivalenčne razrede imenujemo (povezane) komponente grafa

Graf je povezan, če ima eno samo povezano komponento.

Def. $G = (V(G), E(G))$ graf, $S \subseteq V(G)$ je prerezna množica, če ima $G \setminus S$ več kot eno komponento. Povezanost grafa, $K(G)$, je moč najmanjše množice S, tako da je $G \setminus S$ nepovezan ali pa je $G \setminus S$ eno samo vozlišče. Pravimo, da je G k-povezan, če je $k \leq K(G)$.

Opombe:
- G nepovezan $\Rightarrow$ $K(G) = 0$.
- $K(K_n) = n-1$. V posebnem, $K(K_1) = 0$, čeprav je K_1 povezan graf.
- $K(G) = 3$, pravimo, da je G 1-povezan, 2-povezan, 3-povezan.
- Če G ni poln graf, potem je $K(G) \leq |V(G)| - 2$.

Zgled. Petersenov graf.



Graf je 3-povezan. $K(P_{5,2}) = 3$.

Zgled. $K_{n,m}$: Graf je $\min\{n, m\}$-povezan.

$$K(K_{n,m}) = \min\{n, m\}$$

Zgled. Q_n. $\kappa(Q_n) = n$.

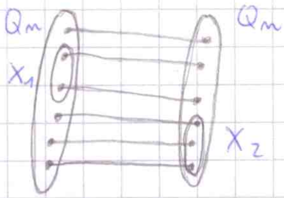
$\kappa(Q_n) \le n$, saj je Q_n n-regularen graf.

$\kappa(Q_n) \ge n$: z indukcijo

$n = 1$: Q_1 je očitno 1-povezan ✓

„$n \to n+1$":

$Q_{n+1} = Q_n \square K_2$.



$|X| = n$ $\quad X = X_1 \cup X_2$.

Gledamo $Q_{n+1} \setminus X$. Če $|X_1| \ge 1$ in $|X_2| \ge 1$, sta Q_n sloja brez X_1 oz. X_2 (po indukciji) povezana. Med slojema je 2^n povezav, zato sta tudi oba sloja med seboj povezana.

Če $|X_1| = 0$: Q_n sloj brez X_1 je povezan. Vsaka točka iz $Q_n \setminus X_2$ je povezana z neko točko iz $Q_n \setminus X_1 \cong Q_n$, torej je $Q_{n+1} \setminus X$ povezan. ∎

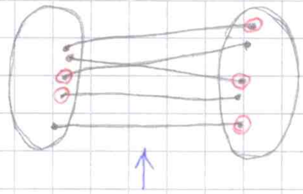
Def. $S \subseteq E(G)$ je *presečna množica povezav*, če ima $G \setminus S$ več kot eno komponento. G je *k-povezan po povezavah*, če ostane povezan z odstranitvijo poljubne množice manj kot k povezav. *Povezanost grafa po povezavah*, $\kappa'(G)$, je največji k, za katerega je G k-povezan po povezavah.

Trditev. Za vsak graf G velja:

$$\kappa(G) \le \kappa'(G) \le \delta(G).$$

Dokaz. $\kappa'(G) \le \delta(G)$: če je v vozlišče stopnje $\delta(G)$, tedaj je množica povezav incidenčnih z v presečna množica povezav.

$K(G) \leq K'(G)$: Naj bo F poljubna presečna množica povezav.



Za vsako povezavo iz F izberemo eno krajišče. Z odstranitvijo teh vozlišč smo med drugim odstranili vse povezave iz F. Torej $G \setminus \{\text{teh vozlišč}\}$ ni povezan. Če za F izberemo najmanjšo presečno množico:

$$|F| = K'(G) \geq K(G).$$

Naloga. Poišči tak graf G, da bo $K(G) < K'(G) < \delta(G)$.

2.1. 2-POVEZANI GRAFI

Def. Presečno vozlišče grafa je vozlišče, ki, če ga odstranimo, poveča število povezanih komponent.

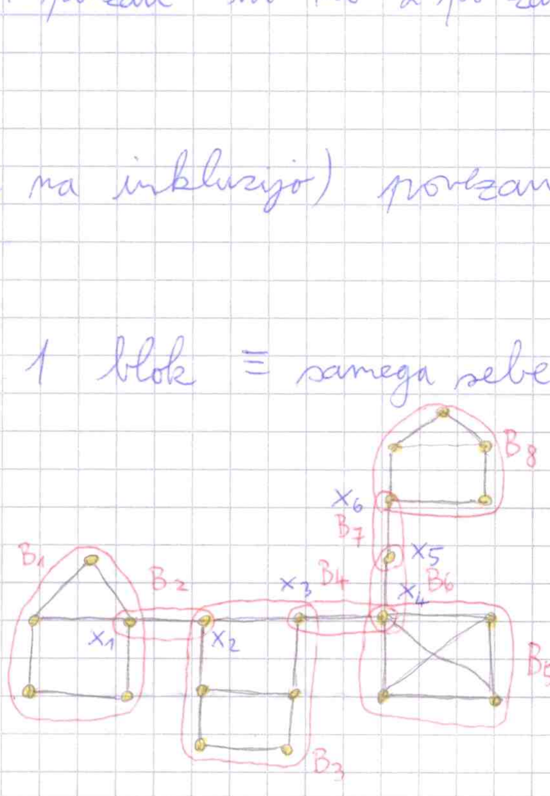
Če je graf na vsaj 3 vozliščih 1-povezan in ni 2-povezan, premore presečno vozlišče.

Def. Blok grafa je maksimalen (glede na inkluzijo) povezan podgraf brez presečnih vozlišč.

Če je graf 2-povezan, ima samo 1 blok = samega sebe

Bloki grafa so:
- maksimalni 2-povezani podgrafi
- mostovi

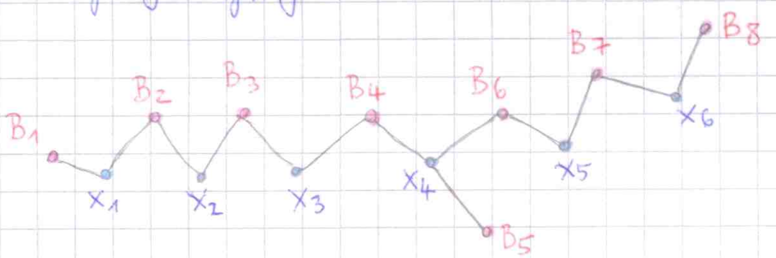
(- izolirana vozlišča)



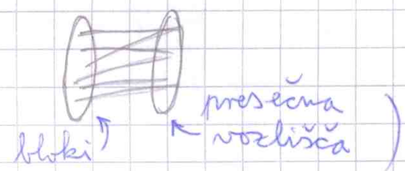
Dejstvo: dva bloka se sekata kvečjemu v enem presečnem vozlišču.

Def. G graf, $\mathcal{B}$ množica njegovih blokov, $\mathcal{C}$ množica njegovih presečnih vozlišč. Tedaj ima **blok-graf** grafa G množico vozlišč $\mathcal{B} \cup \mathcal{C}$, pri čemer je $B \in \mathcal{B}$ soseden z $x \in \mathcal{C}$, če je $x \in B$.

Blok-graf grafa G:



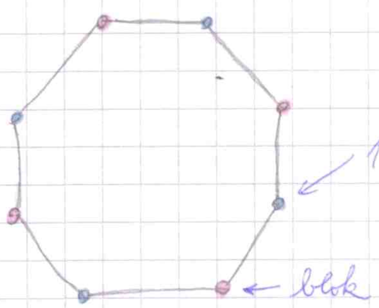
(Blok-grafi so dvodelni:



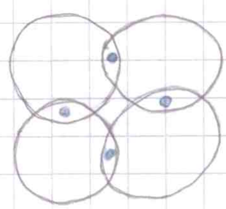
)

Trditev. Naj bo G povezan graf. Tedaj je njegov blok-graf drevo.

Dokaz. Blok-graf je seveda povezan. (Po definiciji je tudi dvodelen.) Recimo, da bi vseboval cikel:



V G:



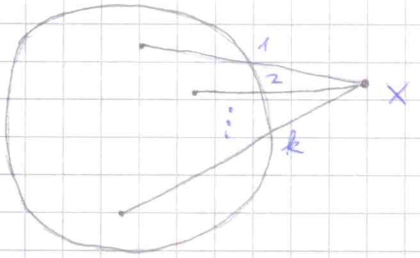
To pa je 2-povezan podgraf.

$\rightarrow\leftarrow$ Protislovje! ■

Skratka, v večini primerov lahko obravnavo grafovske lastnosti zožimo na 2-povezane grafe. (Zgled: iskanje najkrajših poti.)

Zgled. G naj bo k-povezan graf.

G':



$V(G') = V(G) \cup \{x\}$

x povežemo s poljubnimi k točkami grafa G.

Pokažimo, da je G' tudi k-povezan.

Naj bo S presečna množica za G'. $|S| \geq k$

a) $x \in S$

$S \setminus \{x\}$ je presečna množica za G

$\Rightarrow |S \setminus \{x\}| \geq k$

$\Rightarrow |S| \geq k+1$ ✓

b) $x \notin S$

b.1) $N(x) \not\subseteq S \Rightarrow$

S presečna za $G \Rightarrow$

$|S| \geq k$ ✓

b.2) $N(x) \subseteq S \Rightarrow |S| \geq k$ ✓

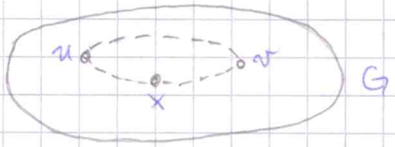
(saj $|N(x)| = k$) $\square$

Izrek (Whitney, 1932).

Graf G je 2-povezan $\Leftrightarrow$ za vsak par vozlišč u in v obstajata notranje disjunktni u,v-poti.

Dokaz. ($\Leftarrow$): Naj obstajata taki poti za vsak par vozlišč.

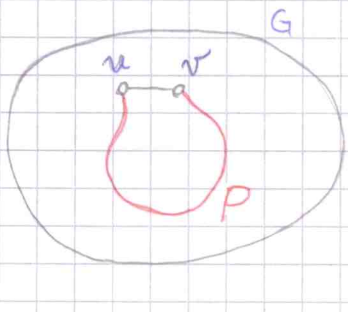
$x \in V(G)$.



Tedaj za vsak par vozlišč u in v obstaja u,v-pot v $G - \{x\}$. Torej je G 2-povezan.

($\Rightarrow$): Naj bo graf 2-povezan, $u, v \in V(G)$. Indukcija po $d(u,v)$.

$d(u,v) = 1$:



$2 \leq \kappa(G) \leq \kappa'(G)$

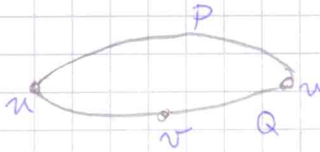
$G - uv$ je povezan. Zato v $G - uv$ $\exists$ u,v-pot P.

Zanimivost: Znano je, da se dve najdaljši poti sekata v skupni točki. Ali se 3 najdaljše poti tudi sekajo v skupni točki? To je še odprt problem.

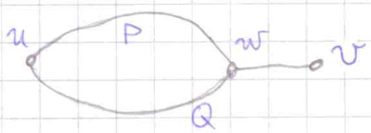
$d(u,v) \geq 2$: P najkrajša u,v-pot.

w naj bo sosed od v na P. $d(u,w) < d(u,v) \overset{\text{ind.}}{\underset{\text{predp.}}{\Longrightarrow}}$
$\exists$ notranje disjunktni u,w-poti P, Q.

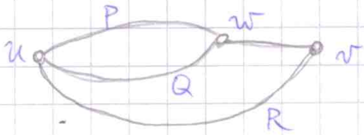
(i) $v \in P \cup Q$:



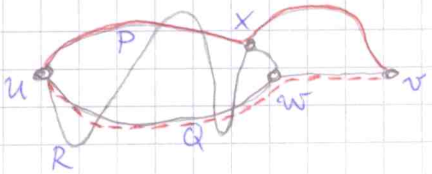
(ii) $v \notin P \cup Q$:



$G-w$ je povezan. Zato v $G-w$ $\exists$ u,v-pot R. Če je R disjunktna z $(P \cup Q) - u$:



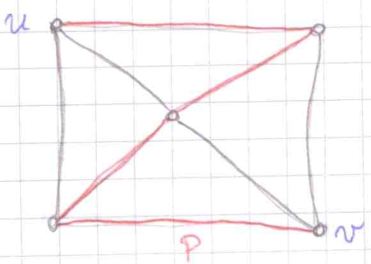
Sicer naj bo x zadnje vozlišče na R, ki je tudi na $P \cup Q$. BŠS: $x \in P$ $(w \neq x)$



$\blacksquare$

Zgled. Naj bo G 2-povezan graf in naj bo P u,v-pot v G. Tedaj $\exists$ notranje disjunktna pot Q med u in v.

Protiprimer:



Trditev ne drži! Vsak graf, ki ima Hamiltonovo pot med dvema nesosednjima ogliščema je protiprimer.

Izrek. Za graf G z vsaj tremi vozlišči so ekvivalentne naslednje trditve:

(i) G je 2-povezan.

(ii) Za vsak par vozlišč obstajata notranje disjunktni poti med njima.

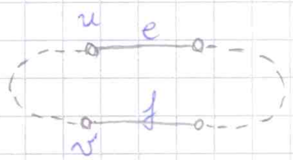
(iii) Vsak par vozlišč leži na skupnem ciklu.

(iv) Vsak par povezav leži na skupnem ciklu in $\delta(G) \geq 1$.

Dokaz: (i) $\Leftrightarrow$ (ii): Whitney ✓

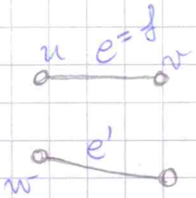
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): očitno

(iv) $\Rightarrow$ (iii): $u, v \in V(G)$.



e, f sta na skupnem ciklu, zato sta na istem ciklu tudi u in v.

To velja za $e \neq f$. Sicer:

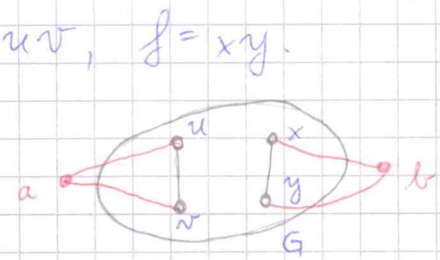


Tedaj $\exists\, w \neq u, v$ in povezava iz w. Tedaj sta e in e' na skupnem ciklu, zato sta tudi u in v na skupnem (= istem) ciklu.

(i), (iii) $\Rightarrow$ (iv): Ker je G povezan, je $\delta(G) \geq 1$.

Naj bo $e = uv$, $f = xy$.

G'



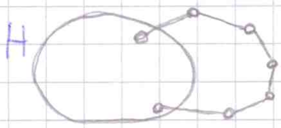
G': $V(G') = V(G) \cup \{a, b\}$

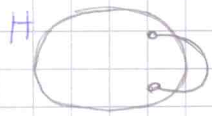
$E(G') = E(G) \cup \{au, av, bx, by\}$

Po zgledu s prejšnje strani je G' tudi 2-povezan.

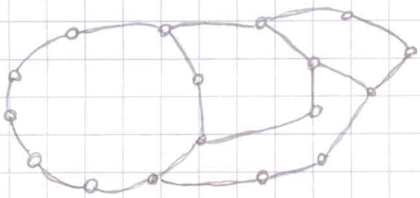
Zaradi (iii) a in b ležita na skupnem ciklu. Na tem ciklu pot u-a-v nadomestimo z u-v in pot y-b-x nadomestimo z y-x. Tako dobimo cikel v G, ki vsebuje e in f. ■

Naj bo H graf. Če mu dodamo pot, ki ima s H skupno natanko krajišči poti, pravimo, da smo dodali **H-uho**. (Poseben primer: pot dolžine 1.)



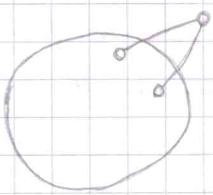


Graf premore **ušesno dekompozicijo**, če ga lahko dobimo iz nekega cikla z dodajanjem ušes.



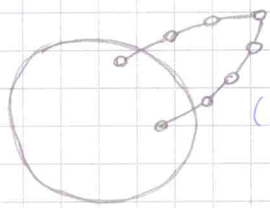
Izrek. Graf G je 2-povezan natanko tedaj, ko premore ušesno dekompozicijo. Celo več, vsak cikel grafa G lahko uporabimo za začetni cikel konstrukcije.

Dokaz. Naj G premore ušesno dekompozicijo.



je 2-povezan (zgled od zadnjič).

$\longrightarrow$

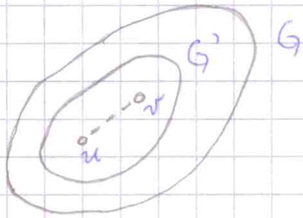


subdivizije (glej D.N.)

$\Rightarrow$ G je 2-povezan.

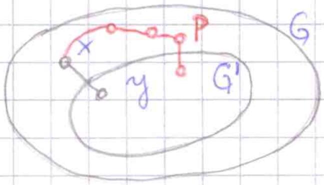
Obratno, naj bo G 2-povezan. Tedaj G premore vsaj en cikel. Naj bo C poljuben cikel grafa G. Sedaj poženemo algoritem: dodajamo ušesa dokler lahko. Na ta način konstruiramo nek graf G'. Trdimo: $G = G'$.

Najprej opazimo, da je G' inducirani podgraf grafa G.
Res, sicer:



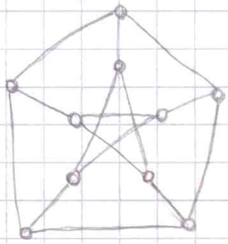
bi imeli vozlišči $u, v \ni$: $uv \in E(G)$, $uv \notin E(G')$. Toda to ni možno zaradi konstrukcije.

Recimo, da $\exists\, x \in V(G) \setminus V(G')$:

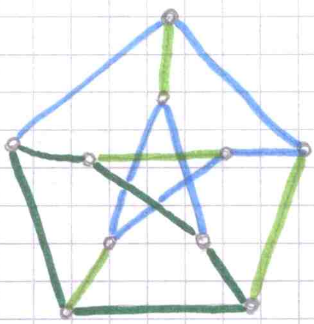


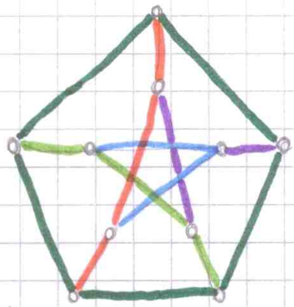
BŠS: x soseden z $y \in G'$.
$G - y$ je povezan graf, zato
$\exists$ poti med x in vsemi vozlišči v $G' - y$. Naj bo P taka pot, da je $|P \cap G'| = 1$. Pot P skupaj z xy tvori uho za G'. $\rightarrow\leftarrow$
Zato je $V(G') = V(G) \Rightarrow G = G'$. ■

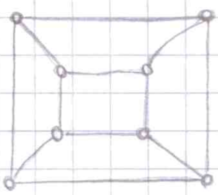
Zgled. Ušesna dekompozicija Petersenovega grafa in Q_3 (Hamiltonov graf).



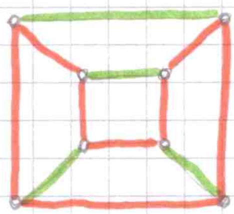
Petersenov graf







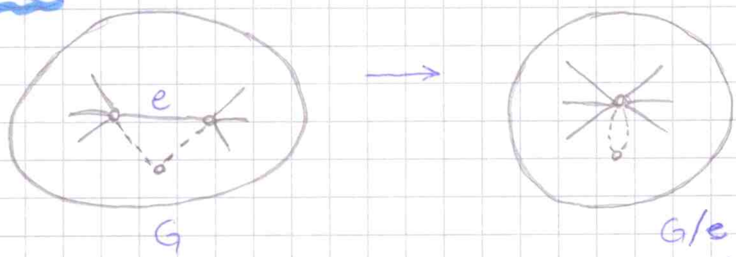
Q_3



Če je graf Hamiltonov, je 2-povezan. Za bazo konstrukcije vzamemo Hamiltonov cikel in potem dodajamo povezave.

2.2. 3-POVEZANI GRAFI

Skrčitev povezave:



G/e, pri čemer odstranimo morebitne večkratne povezave

G graf, $e = uv \in E(G)$

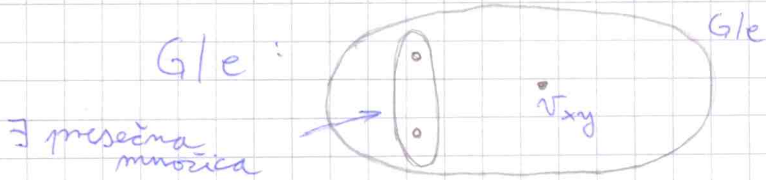
$V(G/e) = (V(G) \setminus \{u, v\}) \cup \{x_e\}$

$E(G/e) = \{u'v' \in E(G) \mid \{u', v'\} \cap \{u, v\} = \emptyset\}$

$\qquad \cup \{x_e u' \mid uu' \in E(G) \text{ ali } vu' \in E(G)\}$.

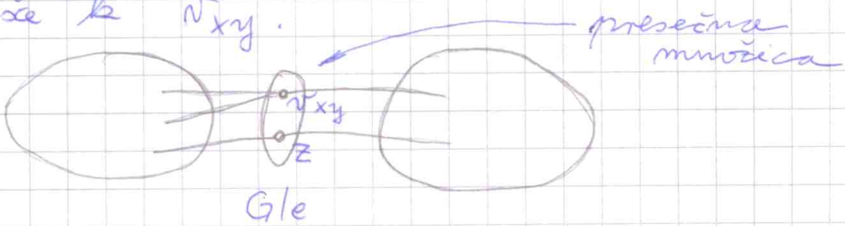
Lema (Thomassen, 1980). Naj bo G 3-povezan graf, $|V(G)| \geq 5$. Tedaj G premore povezavo e, tako da je G/e 3-povezan.

Dokaz. Recimo, da lema ne velja. Torej je za vsako povezavo $e = xy$ graf G/e < 3-povezan.

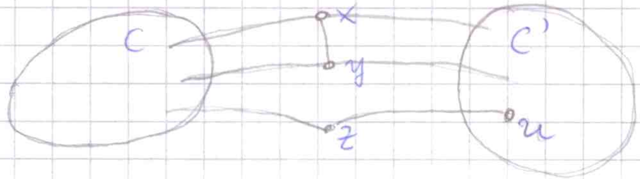


v_{xy} ... vozlišče v G/e dobljeno s skrčitvijo povezave xy

Ker graf G/e ni 3-povezan, premore presečno množico z dvema vozliščema. Eno od teh dveh vozlišč mora biti v_{xy}, sicer bi imeli presečno množico z dvema elt. že v G. Naj bo drugo vozlišče te množice z in ga poimenujmo pridruženo vozlišče k v_{xy}.



$\{x, y, z\}$ je potem presečna množica v G:

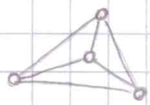


Ker je G 3-povezan, je $\{x, y, z\}$ minimalna presečna množica, zato ima vsako od vozlišč x, y, z vsaj enega soseda v C in v C'.

! Sedaj izberimo povezavo xy, pridruženo vozlišče z in komponento C grafa $G - \{x, y, z\}$ tako, da bo $|C|$ največja možna.

Naj bo u sosed od z v C' in naj bo v pridruženo vozlišče povezavi zu. Tedaj je $G/e_{zu} - \{v_{zu}, v\}$ nepovezan. Če je $v \notin C$, tedaj je $C \cup \{x, y\}$ povezan podgraf v $G - \{z, u, v\}$. Toda tedaj je ta podgraf vsebovan v večji povezani komponenti grafa $G - \{z, u, v\}$ kot je C. To je v protislovju z izbiro C. Zato je nujno $v \in C$. Toda $C - \{v\}$ je tudi povezan podgraf, sicer bi bil graf $G - \{v, z\}$ nepovezan, ker je $G/_{zu} - \{v, v_{zu}\}$ nepovezan. Zopet dobimo protislovje z izbiro C. ■

Zakaj potrebujemo predpostavko $|V(G)| \geq 5$? Edini 3-povezan graf na štirih vozliščih je K_4, za katerega izrek ne velja.



Izrek (Tutte, 1961). Graf G je 3-povezan natanko tedaj, ko obstaja zaporedje $G_0 = K_4, G_1, G_2, \ldots, G_k = G$, tako da za vsak i G_{i+1} premore povezavo xy, kjer je $d(x) \geq 3$, $d(y) \geq 3$ $\ni$:

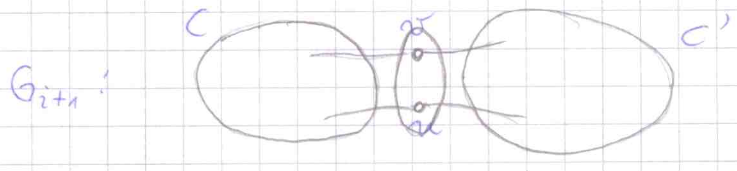
$$G_i = G_{i+1} / xy.$$

Dokaz. ($\Rightarrow$): Thomassenova lema in dejstvo, da ima 3-povezan graf $\delta(G) \geq 3$. Upoštevamo še to, da je K_4 edini 3-povezan graf na štirih vozliščih, zato je G_1/xy nujno K_4.

($\Leftarrow$): Naj obstaja tako zaporedje $G_0, G_1, \dots, G_k$.
$G_k = G$ je 3-povezan

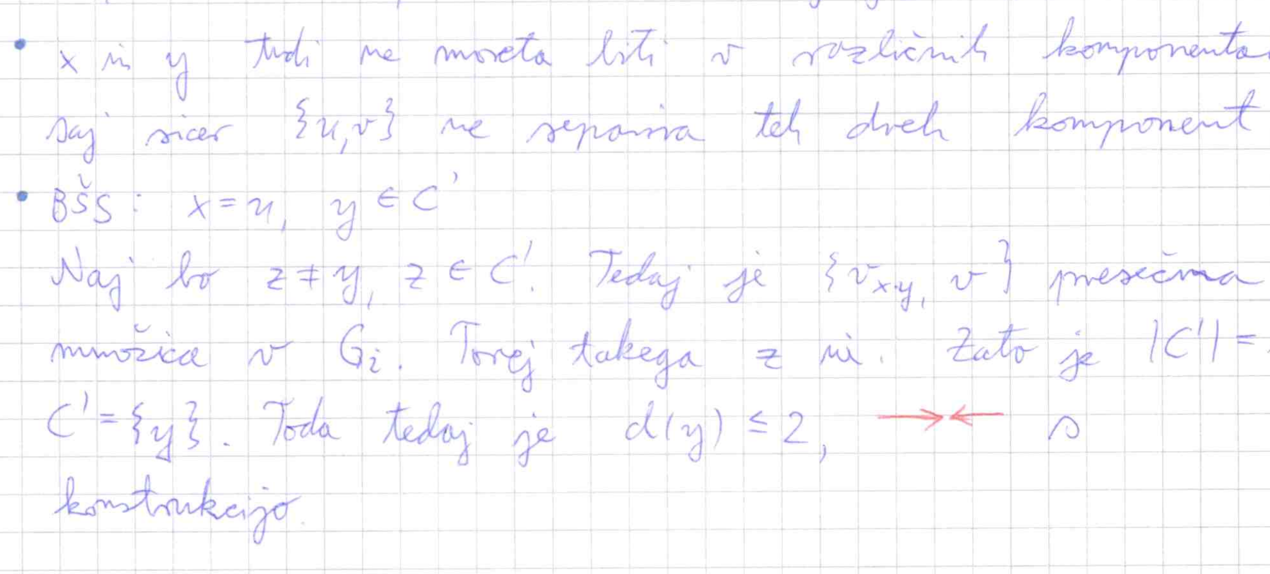
Z indukcijo po i:

- baza: $G_0 = K_4$ je 3-povezan ✓
- Recimo, da obstaja indeks i, tako da je G_i 3-povezan, G_{i+1} pa samo 2-povezan. $G_i = G_{i+1}/xy$. G_{i+1} premore presečno množico z dvema vozliščema:

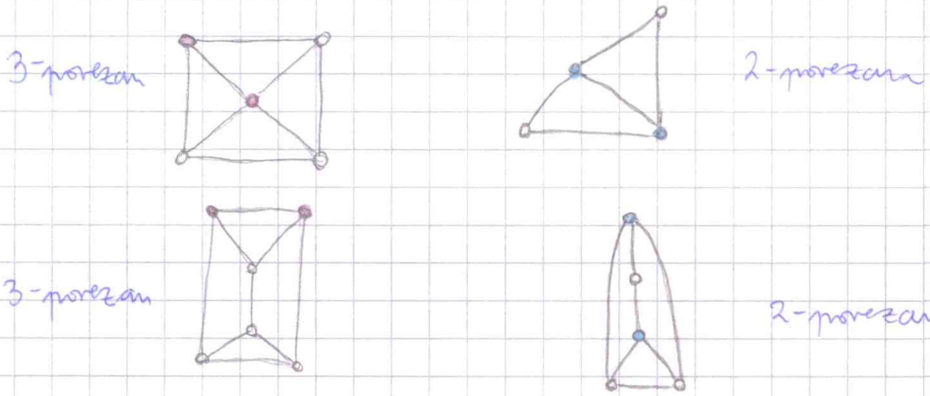


- x in y nista skupaj v isti komponenti, saj bi sicer $\{u, v\}$ tvorila presečno množico grafa G_i.
- x in y tudi ne moreta biti v različnih komponentah, saj sicer $\{u, v\}$ ne separira teh dveh komponent.
- BŠS: $x = u$, $y \in C'$
Naj bo $z \neq y$, $z \in C'$. Tedaj je $\{v_{xy}, v\}$ presečna množica v G_i. Torej takega z ni. Zato je $|C'| = 1$, $C' = \{y\}$. Toda tedaj je $d(y) \leq 2$, $\rightarrow\leftarrow$ s konstrukcijo. ∎

Zgled. $K_4 \rightsquigarrow Q_3$.

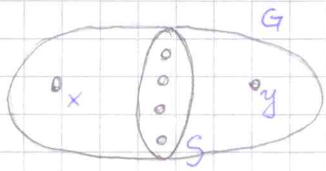


Zgled. Povezave v Thomassenovi lemi ne moremo poljubno izbrati. Primer:



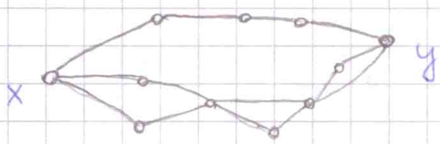
2.3. k-POVEZANI GRAFI

Izrek (Menger, 1927). Naj bosta x in y nesosednji vozlišči grafa G. Tedaj je najmanjše število vozlišč, ki separirajo x in y enako največjemu številu notranje disjunktnih x,y-poti.



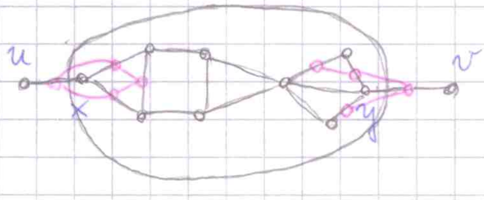
Množica S je separacija x in y, če sta x in y v različnih povezanih komponentah $G-S$.

Izrek. Naj bosta x,y različni vozlišči grafa G. Tedaj je najmanjše število povezav, ki separirajo x in y, enako največjemu številu po povezavah notranje disjunktnih x,y-poti.



Ideja dokaza: $G \mapsto G'$

G':



Sedaj pogledamo $L(G')$: in uporabimo Mengerjev izrek.

Globalna verzija Mengerjevega izreka (Whitney, 1932):

Izrek (i) Graf G je k-povezan natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč x in y obstaja vsaj k notranje disjunktnih x,y-poti.

(ii) Graf G je k-povezan po povezavah natanko tedaj, ko za vsak par vozlišč x in y obstaja vsaj k po povezavah disjunktnih x,y-poti.