# II. IZBRANA POGLAVJA DISKRETNE MATEMATIKE

- kombinatorika delno urejenih množic (dimenzija, Dilworth, Sperner, ...)
- povezanost v grafih (struktura 2- in 3-povezanih grafov)
- ravninski grafi (izrek Kuratowskega, Schnyderjev izrek)
- nekatere uporabe linearne algebre v diskretni matematiki (načrti, lastne vrednosti, Fischerjeva neenakost)

## 1. DELNO UREJENE MNOŽICE

### 1.1. OSNOVNI POJMI

$R \subseteq A \times A$ je delna urejenost, če je $R$ refleksivna, tranzitivna, antisimetrična ($xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$).

Primeri:
- $X$ ... množica, $\subseteq$ na $\mathcal{P}(X)$.
- deljivost na $\mathbb{N}$ (ne pa na $\mathbb{Z}$; $n \mid (-n)$ in $(-n) \mid n$)

Veriga je podmnožica elt. delne urejenosti, ki so paroma primerljivi. = Je linearno urejena podmnožica.
↳ relacija je sovisna

$P = (A, \leq)$.
Končna veriga: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n$.

Antiveriga je podmnožica delne urejenosti, v kateri so vsi elementi paroma neprimerljivi.

- širina delne urejenosti $\overset{\text{def.}}{=}$ velikost največje antiverige
- višina delne urejenosti $\overset{\text{def.}}{=}$ velikost največje verige

- maksimalni elt. : $x$ je maksimalni elt. (delne) urejenosti $(A, \leq)$, če ne obstaja $y \neq x \ni: xRy$
- minimalni elt. : $x$ je minimalni element za $(A, \leq)$, če ne obstaja $y \neq x \ni: yRx$

Zgled. $(\mathbb{Z}, \leq)$.

$$\ldots \leq -3 \leq -2 \leq -1 \leq 0 \leq 1 \leq 2 \leq 3 \leq \ldots$$

$(\mathbb{Z}, \leq)$ nima niti minimalnega niti maksimalnega elementa.

Trditev Naj bo $P = (A, \leq)$ končna, neprazna delna urejenost. Tedaj $P$ premore vsaj en minimalni in vsaj en maksimalni element.

Dokaz (neklasični; METODA NAJMANJŠEGA PROTIPRIMERA)

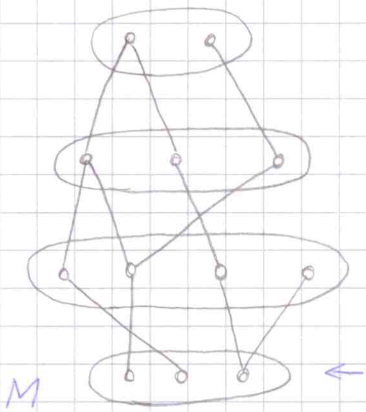
Za $x \in A$ poljuben naj bo $u(x) := |\{y \mid xRy\}|$.
Naj bo $z \in A$ tak elt., da je $u(z)$ minimalen.
Tedaj je $z$ maksimalni element.

Denimo nasprotno: $\exists z' \neq z : zRz'$. Iz antisimetričnosti sledi, da $\neg(z'Rz)$. (Saj $zRz'$ in $z'Rz \Rightarrow z' = z$ $\rightarrow\leftarrow$)

Ker $\forall z'' \in A$, $z'Rz''$ : $zRz' \wedge z'Rz''$, sledi
$\forall z'' \in A : z'Rz'' \Rightarrow zRz''$. Skupaj z $\neg(z'Rz)$ to pomeni, da je $u(z) > u(z')$. $\rightarrow\leftarrow$ ■

## Hassejev diagram delne urejenosti

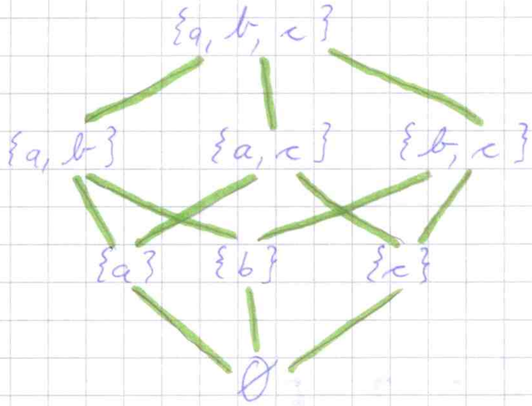
$P = (A, \leq)$.




← min. elementi v zožitvi na $A \setminus M$

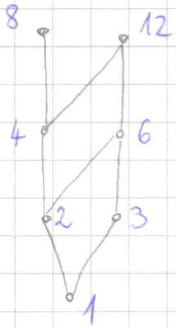
← min. elementi

**Zgled.** $X = \{a, b, c\}$. $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$




**Opomba.** Graf je $Q_3$ (3-kocka).

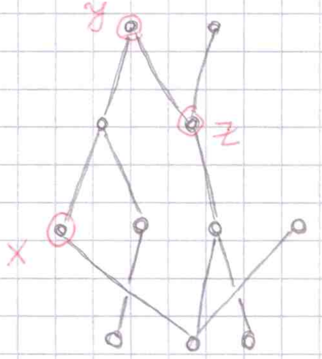
**Zgled.** $X = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. $(X, |)$ ← deljivost



Hassejev diagram:

$x \le y \iff \exists$ pot navzgor od $x$ do $y$

$x \le y$




$x, z$ neprimerljiva

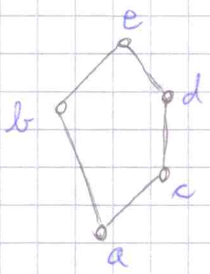
$R = (A, \le)$ in $R' = (A', \le')$ delni urejenosti. Tedaj sta $R$ in $R'$ izomorfni, $\cong$, če obstaja bijekcija $f: A \to A'$, tako da je $x \le y \iff f(x) \le' f(y)$.

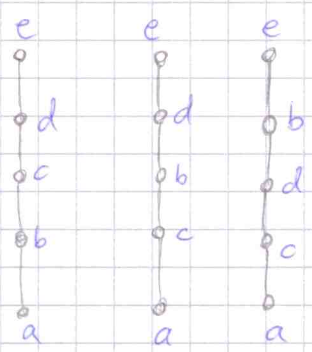
Izrek. Naj bo $L = (A, \le')$ končna linearna urejenost. Tedaj je $(A, \le') \cong (\mathbb{N}_n, \le)$, kjer je $n = |A|$. $\square$

## 1.2. LINEARNE RAZŠIRITVE

Def. Naj bo $R = (A, \le)$ delna urejenost. Tedaj je linearna urejenost $L = (A, \le')$ linearna razširitev urejenosti $R$, če velja: $x \le y \Rightarrow x \le' y$.

Zgled.



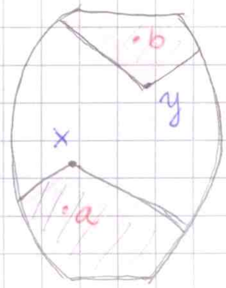

Zgled. $R = (\mathbb{N}_n, \emptyset)$ + refl.


Imamo $n!$ razširitev.

**Izrek.** Naj bo $R = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj $R$ premore linearno razširitev. Celo več, če sta $x$ in $y$ poljubna neprimerljiva elt. v $R$, tedaj $\exists$ taka linearna razširitev $L = (A, \leq')$, da velja $x \leq' y$.

**Dokaz.** Definirajmo $\leq'$ takole: $a \leq' b$, če velja eden izmed pogojev:

1. $a \leq b$
2. $a \leq x$ in $y \leq b$



$a \leq' b$

$\leq'$ je prava razširitev $\leq$

Res, saj je $x \leq' y$ : $\underline{x} \leq x$ in $y \leq \underline{y}$.

Če dokažemo, da je $(A, \leq')$ delna urejenost, bo izrek dokazan, saj z istim postopkom v končnem številu korakov pridemo do linearne razširitve.

$(A, \leq')$, refleksivnost: ✓ $\forall a: a \leq a \Rightarrow a \leq' a$

antisimetričnost: naj bo $a \leq' b$ in $b \leq' a \Rightarrow a = b$.

Imamo 4 možnosti:

- $a \leq b$ in $b \leq a$; $\Rightarrow a = b$, ker je $\leq$ antisimetrična
- $a \leq b$ in $(b \leq x$ in $y \leq a)$; $\Rightarrow$

  $y \leq a \wedge a \leq b \wedge b \leq x \Rightarrow y \leq b \wedge b \leq x \Rightarrow$

  $y \leq x$ $\rightarrow\leftarrow$
- $(a \leq x$ in $y \leq b)$ in $b \leq a$

  $y \leq b \wedge b \leq a \wedge a \leq x \Rightarrow y \leq x$ $\rightarrow\leftarrow$
- $(a \leq x$ in $y \leq b)$ in $(b \leq x$ in $y \leq a)$

  $\Rightarrow y \leq x$ $\rightarrow\leftarrow$

tranzitivnost: $a \le' b$ in $b \le' c$

Imamo 4 možnosti:

- $a \le b$ in $b \le c \overset{\le \text{ tranz.}}{\Longrightarrow} a \le c \Rightarrow a \le' c$
- $\underbrace{a \le b \text{ in } (b \le x}$ in $y \le c)$:

  $a \le x$ in $y \le c \overset{2.}{\Longrightarrow} a \le' c$
- $(a \le x$ in $\underbrace{y \le b) \text{ in } b \le c}$:

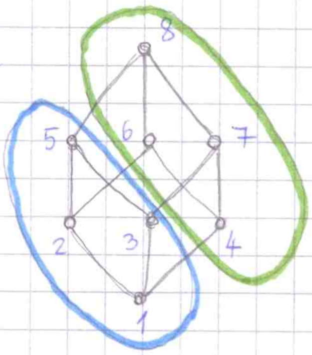
  $a \le x$ in $y \le c \overset{2.}{\Longrightarrow} a \le' c$
- $(a \le x$ in $\underbrace{y \le b) \text{ in } (b \le x}$ in $y \le c)$:

  $y \le x \rightarrow\leftarrow$

$\square$

Opomba. Izrek za neskončen primer lahko dokažemo z aksiomom izbire.

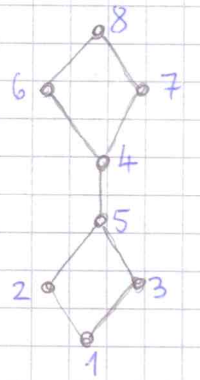
Zgled




$x = 5, y = 4$

Novi pari: $2 \le' 4$, $2 \le' 7$,
$3 \le' 4$, $3 \le' 6$,
$5 \le' 4$, $5 \le' 6$, $5 \le' 7$

$\Rightarrow$




$3 \le'' 2$

$6 \le''' 7$

$\Rightarrow$


# 1.3. DIMENZIJA DELNE UREJENOSTI

Posledica. Naj bo $R = (A, \le)$ končna delna urejenost. Tedaj je $x \le y$ natanko tedaj, ko je $x \le' y$ za vsako linearno razširitev $L = (A, \le')$.

**Dokaz.** (⇒): po def. linearne razširitve

(⇐): če pa $x$ in $y$ nista primerljiva, tedaj po izreku obstaja razširitev, tako da je $y \le' x$. □

Torej, če poznamo vse linearne razširitve delne urejenosti, imamo vso informacijo o njej. opomba + refl.

**Primer.** $(A, \le)$, $|A| = n$, $\le = \emptyset \Rightarrow$ imamo $n!$ linearnih razširitev. Toda: $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$.

$\le'$ : $a_1 \le' a_2 \le' a_3 \le' \dots \le' a_n$ $\qquad (A, \le')$

$\le''$ : $a_n \le'' a_{n-1} \le'' a_{n-2} \le'' \dots \le'' a_1$ $\qquad (A, \le'')$

Naj bo $i \neq j$: BŠS $i < j \Rightarrow \left.\begin{matrix} a_i \le' a_j \\ a_j \le'' a_i \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_i$ in $a_j$ nista primerljiva

**Def.** Naj bo $R = (A, \le)$ končna delna urejenost. Tedaj je $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ realizator za $R$, če so $L_i = (A, \le_{L_i})$ linearne razširitve za $R$ in je:

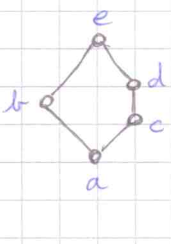
$$x \le y \iff x \le_{L_i} y \quad \text{za } i = 1, 2, \dots, k.$$

Z drugimi besedami: $R = \bigcap_{i=1}^{n} L_i$.

**Izrek.** $\mathcal{R} = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$ je realizator za $R = (A, \le)$ natanko tedaj, ko za vsak par neprimerljivih elt. $x, y$ obstajata $i, j$, $i \neq j$, tako da je

$$x \le_{L_i} y \quad \text{in} \quad y \le_{L_j} x.$$

**Zgled.**

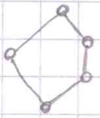



a, b, c, d, e

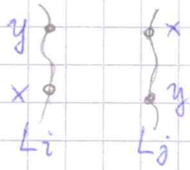
~~a, c, b, d, e~~

a, c, d, b, e

**Def.** Naj bo $R = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj je **dimenzija** od $R$ moč najmanjšega realizatorja za $R$.

-  $\dim = 2$

**Opomba.** $x, y$ neprimerljiva

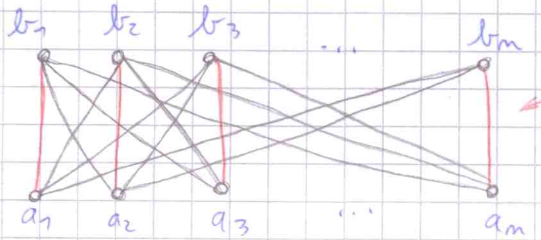



- $\dim = 1 \iff R$ linearna urejenost
- dim. delne urejenosti, v kateri ni noben par elt. primerljiv, je tudi 2 (primer na prejšnji strani)

**Zgled** (Standardni primer.)

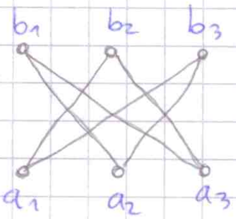
$A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n\}$

$R_n = (A_n, \leq_n) \qquad \leq_n : \; a_i \leq_n b_j$ za vse $i \neq j$.

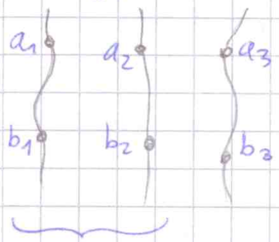



neprimerljiva elementa

Trdimo: $\dim(R_n) = n$.

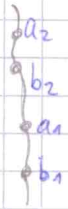
$n = 3$: 


$\Rightarrow$ nekje so:




Ne moremo jih "preplesti".

edina možnost, saj je $a_1 \leq b_2$:




$(a_2 \leq b_1)$

$\Rightarrow \dim \geq 3$

**Izrek.** $\dim R_n = n$.

**Dokaz.** $\dim R_n \leq n \qquad L_i = (A, \leq_i)$

Naj bo $R = \{L_1, L_2, \dots, L_n\}$, kjer je

$L_i$ : "vsi ostali a-ji" $\leq_i b_i \leq_i a_i \leq_i$ "vsi ostali b-ji"

Trdim, da je $R$ realizator za $R_n$.

- $a_j, a_k, \ j \neq k$ : $L_j$ : $a_k \leq_j a_j$
  $L_k$ : $a_j \leq_k a_k$ ✓
- $b_j, b_k, \ j \neq k$ : $L_j$ : $b_j \leq_j b_k$
  $L_k$ : $b_k \leq_k b_j$ ✓
- $a_j, b_j$ : $L_j$ : $b_j \leq_j a_j$
  $k \neq j$ : $a_j \leq_k b_j$ ✓
- $a_j, b_k, \ j \neq k$ : $L_i$ : $a_j \leq_i b_i \leq_i a_i \leq_i b_k$
  $(i \neq j, k)$
  $L_j$ : $a_j \leq_j b_k$ Primerljiva
  $L_k$ : $a_j \leq_k b_k$ sta v vseh razširitvah.

V zgledu $(n=3)$ to pomeni:

$\leq_1$ : $b_3$, $b_2$, $a_1$, $b_1$, $a_2$, $a_3$

$\leq_2$ : $b_1$, $b_3$, $a_2$, $b_2$, $a_3$, $a_1$

$\leq_3$ : $b_1$, $b_2$, $a_3$, $b_3$, $a_1$, $a_2$

dim $R_n \geq n$

Pa denimo, da obstaja realizator $R = \{L_1, L_2, \ldots, L_{n-1}\}$.

Za vsak par elementov $a_i, b_i \ \exists \ L_j : b_i \leq_j a_i$. $\quad L_i = (A_i, \leq_i)$

Ker je $|R| = n-1$, (po Dirichletu) $\exists$ indeksa $j, k$ in $L \in R \ni$:

$b_j \leq_L a_j$ in $b_k \leq_L a_k$ $\quad (j \neq k)$

Ker je $a_j \leq b_k \Rightarrow a_j \leq_L b_k$.

Ker je $a_k \leq b_j \Rightarrow a_k \leq_L b_j$

$\Rightarrow a_k \leq_L b_j \leq_L a_j \leq_L b_k \leq_L a_k$. $\rightarrow\leftarrow$ (saj je $\leq_L$ linearna urejenost; ni neprimerljivih elementov)

Še en pogled na delno urejenost:

$\mathbb{R}^n$ .. evklidski prostor

$x, y \in \mathbb{R}^n$ : $\quad x \leq y \overset{def.}{\iff} x_i \leq y_i \quad i = 1, 2, \ldots, n$

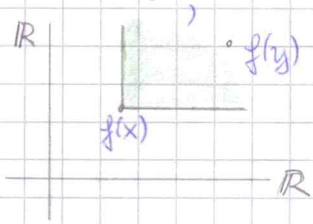
$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$

$(R \overset{f}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^n)$

Def. $R = (A, \leq)$ delna urejenost. Tedaj je vložitev $R$ v $\mathbb{R}^n$ injektivna preslikava $f: A \to \mathbb{R}^n$, tako da je

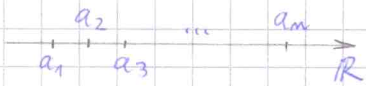
$\underset{(v\ A)}{x \leq y} \iff \underset{(v\ \mathbb{R}^n)}{f(x) \leq f(y)}$.



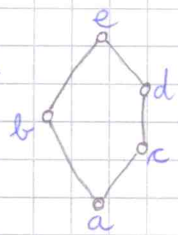

Zgledi: 1. $L = (A, \leq)$ .. linearna urejenost

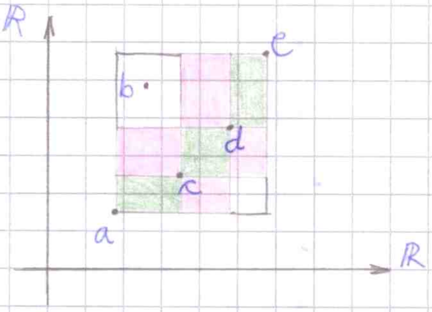
$\exists f: A \to \mathbb{R}$ $\quad A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$

$f(a_i) = i$ $\quad a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$



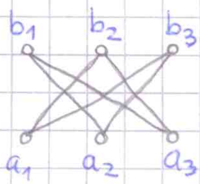

2.

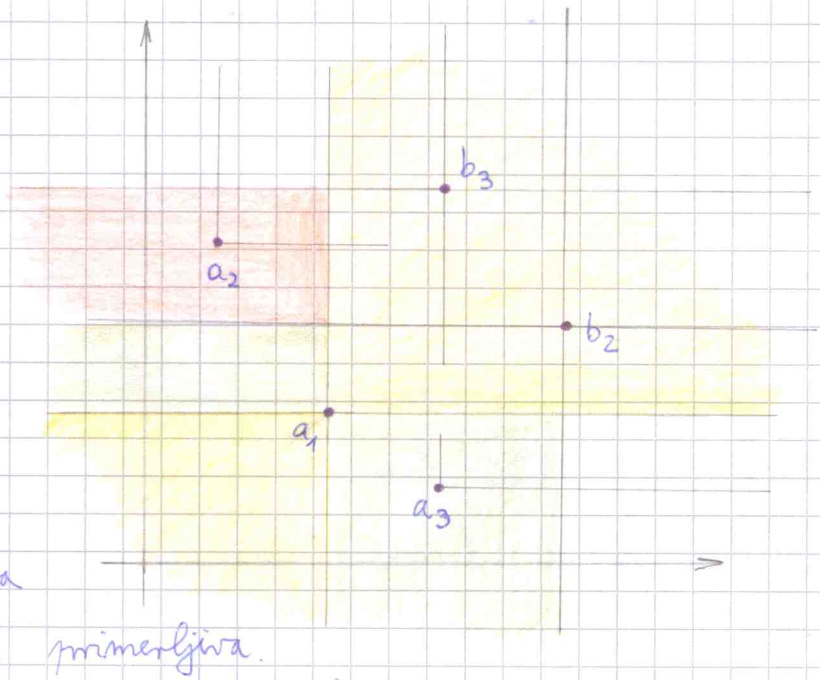



$a \leq b \leq e$, ampak $b$ ni v relaciji niti s $c$, niti z $d$

3.




$b_1$ ne moremo narisati, saj:

$a_2 \leq b_1$ in

$a_3 \leq b_1$, toda

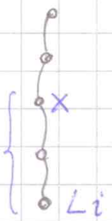
$a_1$ in $b_1$ nista primerljiva.

Te delne urejenosti ne moremo vložiti v $\mathbb{R}^2$.

**Izrek.** Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj je $\dim P$ enaka najmanjšemu $n$, tako da lahko $P$ vložimo v $\mathbb{R}^n$.

**Dokaz.** Naj bo $\dim P = n$. Naj bo $\{L_1, \dots, L_n\}$ poljuben realizator za $P$. $L_i = (A, \leq_i)$.

$h_i(x) = 3$




$h_i(x)$ je višina elementa $x$ v $L_i$. $(1 \leq i \leq n)$

Naj bo $f(x) = (h_1(x), h_2(x), \dots, h_n(x))$ $(x \in A)$.

$f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. $f$ je injektivna. Očitno: Injektivna je celo po koordinatah.

$x \leq y \iff f(x) \leq f(y)$

$x \leq y$: tedaj je (po def.) $x \leq_i y$ $\forall i$. Zato je $h_i(x) \leq h_i(y)$ $\forall i$. $\Rightarrow$ $f(x) \leq f(y)$

Obratno: naj bo $f(x) \leq f(y)$. Tedaj je (po def.) $h_i(x) \leq h_i(y)$ $\forall i$. Zato je $x \leq_i y$ $\forall i$ $\Rightarrow$ $x \leq y$.

Naj bo $f$ vložitev $P$ v $\mathbb{R}^n$. Želimo poiskati realizator za $P$ moči $n$.

$$f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)) \qquad (x \in A)$$

Glede na $f_i$ določimo $L_i = (A_i, \leq_i)$ takole:

1. če je $f_i(x) < f_i(y)$, tedaj postavimo $x \leq_i y$.
2. če je $f_i(x) = f_i(y)$: ker je $f$ injektivna, $\exists$ koordinata, v kateri se razlikujeta $f(x)$ in $f(y)$. Naj bo $j$ najmanjši tak indeks, da je $f_j(x) \neq f_j(y)$. Če je $f_j(x) < f_j(y)$, postavimo $x \leq_i y$, sicer $y \leq_i x$.

$L_i$ je linearna razširitev $(A, \leq)$

Naj bo $x \le y$. Tedaj je $f(x) \le f(y)$. Če je $f_i(x) < f_i(y)$, tedaj je $x \le_i y$. Sicer, (če je $f_i(x) = f_i(y)$) pa $\exists$ prvi indeks $j \ni: f_j(x) \neq f_j(y)$. In ker je $f(x) \le f(y)$, je $f_j(x) < f_j(y)$. Zato je po točki 2. konstrukcije $x \le_i y$.

$\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ je realizator za $P$.

Preveriti moramo samo še to, da če sta $x$ in $y$ neprimerljiva v $P$, potem $\exists\, i, j,\ i \neq j \ni: x \le_i y$ in $y \le_j x$.

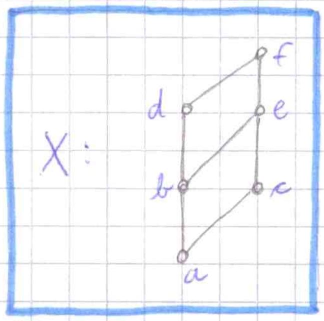
$(x \le y \Leftrightarrow f(x) \le f(y))$ Ker sta neprimerljiva, ni $f(x) \le f(y)$ in ni $f(y) \le f(x)$. Torej $\exists$ koordinati $i, j \ni$:

$$f_i(x) < f_i(y) \Rightarrow x \le_i y,$$
$$f_j(y) < f_j(x) \Rightarrow y \le_i x.$$

■

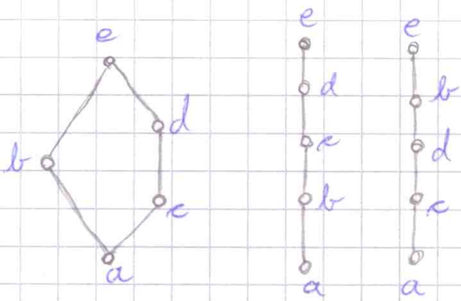
**Zgled.** $P$ linearna urejenost

$$f : P \to \mathbb{R}, \quad f(x) = h(x)$$



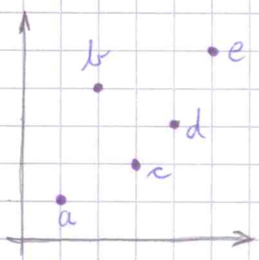

(Domača naloga)

**Zgled.**

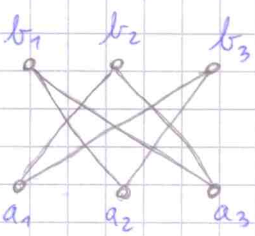


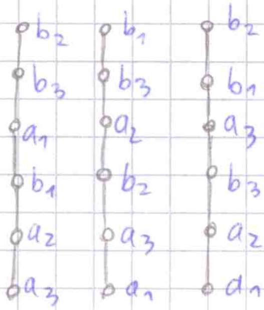

$f(a) = (1,1)$ $\quad f(b) = (2,4)$ $\quad f(c) = (3,2)$

$f(d) = (4,3)$ $\quad f(e) = (5,5)$




**Zgled.**




$f(a_1) = (4,1,1)$

$f(a_2) = (2,4,2)$

$f(a_3) = (1,2,4)$

$f(b_1) = (3,6,5)$

$f(b_2) = (6,3,6) \quad f(b_3) = (5,5,3)$

# 1.4. DILWORTHOV IN SPERNERJEV IZREK

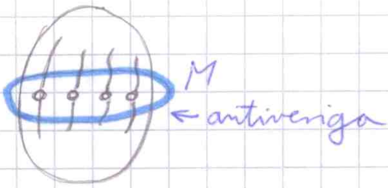
- veriga: linearno urejena podmnožica (delne urejenosti)
- antiveriga: množica paroma neprimerljivih elementov

Izrek. (Dilworth, 1950) Naj bo $P = (A, \leq)$ končna delna urejenost. Tedaj je minimalno število disjunkt. verig, ki vsebujejo vse elemente iz $A$ enako moči največje antiverige v $P$.

Dokaz. $m$ ... najmanjše # verig

$M$ ... moč največje antiverige (širina)

Očitno je $m \geq M$, saj nobena veriga ne more vsebovati dveh elt. antiverige.




$m \leq M$: indukcija po $|A|$.

$|A| = 1$ ✓ $(M = m = 1)$

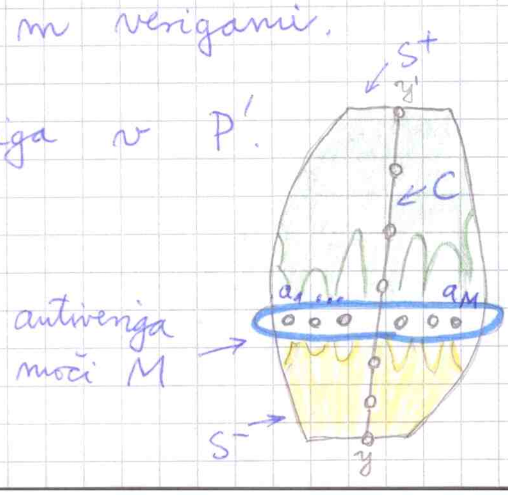
$|A| \geq 2$: Naj bo $C$ poljubna maksimalna veriga v $P$.
(je ne moremo podaljšati)

$P' = (A \setminus C, \leq)$ je delna urejenost. Če je velikost največje antiveriga v $P'$ $M-1$, jo po indukciji pokrijemo z $m-1$ verigami, zato lahko $P$ pokrijemo z $m$ verigami.

Naj bo sedaj $a_1, a_2, \dots, a_M$ antiveriga v $P'$.

$S^- = \{x \in A \mid \exists i : x \leq a_i\}$

$S^+ = \{x \in A \mid \exists i : a_i \leq x\}$



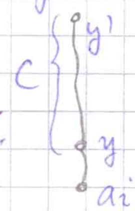

Lastnosti $S^-$ in $S^+$:

(i) $a_i \in S^-$ $(\forall i)$ : $a_i \le a_i$

$a_i \in S^+$ $(\forall i)$ : –||–

(ii) Naj bo $y$ najmanjši in $y'$ največji element verige $C$:

$y \notin S^+$ : recimo nasprotno : $\exists i$ : $a_i \le y$. $\rightarrow\leftarrow$, razen če je $a_i = y$, toda $a_i \notin C$ $\rightarrow\leftarrow$.




$y' \notin S^-$ : analogno

(iii) $x \neq a_i$ $(\forall i)$, tedaj je $x$ bodisi v $S^-$ bodisi v $S^+$

---

recimo nasprotno: • $x \in S^-$ : $x \le a_i$ ; $x \in S^+$ : $x \ge a_j$ $\Big\} \Rightarrow a_j \le a_i$ $\rightarrow\leftarrow$,

razen če je $i = j$. Toda tedaj je $x = a_i$ $(a_i \le x \le a_i)$.

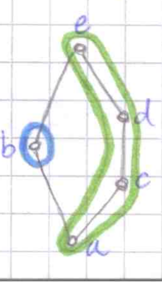
$x$ je kvečjemu v eni od $S^-, S^+$.

• Recimo, da $x \notin S^-$ in $x \notin S^+$. Toda v tem primeru je $x$ neprimerljiv z vsemi $a_1, \dots, a_M$, zato je $a_1, \dots, a_M, x$ tudi antiveriga $\rightarrow\leftarrow$.

$(S^-, \le)$ je delna urejenost, $|S^-| < |A|$. Zato jo po ind. predpostavki lahko pokrijemo z $M$ verigami. Vsaka od teh verig vsebuje natanko enega izmed $a_i$. Celo več, vsak $a_i$ je največji element svoje verige, saj bi sicer elt. nad njim bili v $S^+$, kar ni možno zaradi (iii). Analogen sklep naredimo za $(S^+, \le)$, le da so sedaj $a_i$ minimalni elementi v svojih verigah, ki pokrijejo (disjunktno) $S^+$.

Sedaj zlepimo (v $a_i$) verige iz $S^-$ in $S^+$ in smo pokrili $P$ z $M$ verigami. ∎

Zgled:




$M = 2$

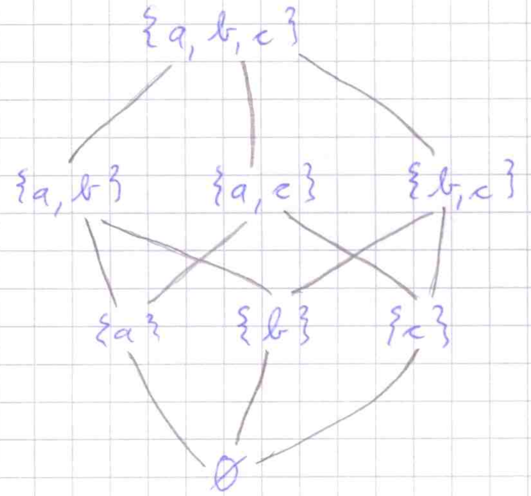
Največja antiveriga: $\{b, c\}$ (ali $\{b, d\}$)

Pokritje z dvema verigama:

a) $a \le c \le d \le e$ ; $b$
b) $a \le b \le e$ ; $c \le d$
c) $a \le c \le d$ ; $b \le e$

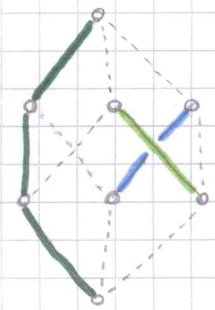
Obstaja več različnih pokritij z dvema verigama.

**Zgled.** $(\mathcal{P}(\{a,b,c\}), \subseteq)$.

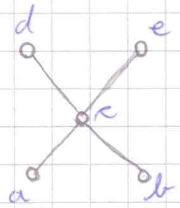



$M = 3$

Pokritje:



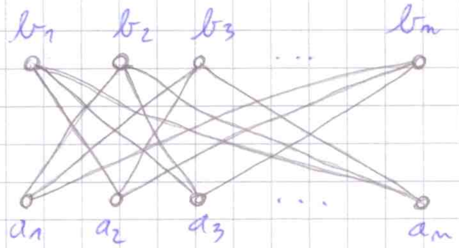
**Zgled.**




$M = 2$

Pokritje: $a \le c \le e$; $b \le d$

**Zgled.**




(standardni primer)

$M = n$

Pokritje: $a_1 \le b_2$; $a_2 \le b_3$; $a_3 \le b_4$; ... ; $a_{n-1} \le b_n$;
$a_n \le b_1$

**Zgled.** $A = \{1, 2, \ldots, n^2+1\}$

$\sigma = a_1 a_2 \ldots a_{n^2+1}$ ... neka permutacija množice $A$
Pokaži, da v tem zaporedju najdemo vsaj eno monotono podzaporedje dolžine $n+1$.

Npr. $A = \{1, 2, \ldots, 10\}$ $(n = 3)$

7, 8, 9, 4, 5, 6, 1, 2, 3, 10

$\underset{\sim}{7}, 4, 1, \underset{\sim}{8}, 5, 2, \underset{\sim}{9}, 6, 3, \underset{\sim}{10}$

$i \sqsubseteq j \overset{def.}{=} i \leq j$ in $a_i \leq a_j$

Preveri, da je $\sqsubseteq$ delna urejenost.

Verige so naraščajoča podzaporedja. Antiverige so padajoča podzaporedja.

Recimo, da je največja antiveriga velikosti $n$. Potem lahko delno urejenost (po Dilworthu) pokrijemo z $n$ disj. verigami. Vsaj ena veriga mora imeti vsaj $n+1$ elementov.

velikost največje antiverige $\longleftrightarrow$ minimalno pokritje z verigami
velikost največje verige $\overset{?}{\longleftrightarrow}$ minimalno pokritje z antiverigami

**Trditev** (Dualni izrek)

Naj bo $P$ končna delna urejenost in naj bo $n$ moč največje verige v $P$. Tedaj lahko $P$ pokrijemo z $n$ disjunktnimi antiverigami.

**Dokaz** (indukcija po $n$ ; $P = (A, \leq)$)

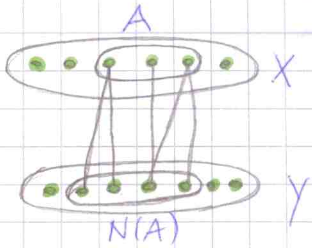
$n = 1$ : $\bullet \bullet \bullet \dots \bullet$ ✓ (očitno)

$n \to n+1$ : V $P$ naj bo $X = \{ x \in A \mid x$ maksimalen elt. $\}$

$X$ je antiveriga ✓

$P \setminus X$ delna urejenost in celo več, vse maksimalne verige v $P \setminus X$ so za 1 krajše od ustreznih verig v $P$. Po ind. predp. lahko $P \setminus X$ pokrijemo z $n$ disjunktnimi antiverigami. Zato lahko z dodatkom antiverige $X$ pokrijemo $P$ z $n+1$ antiverigami. ∎

## Hallov (poročni) izrek.




$G = (X \dot\cup Y, E)$ dvodelni graf.
Tedaj popolno prirejanje iz $X$ v $Y$ obstaja natanko tedaj, ko je $|N(A)| \geq |A|$ za $\forall A \subseteq X$.

$N(v)$ ... soseščina točke $v$; $N(A) = \bigcup_{v \in A} N(v)$

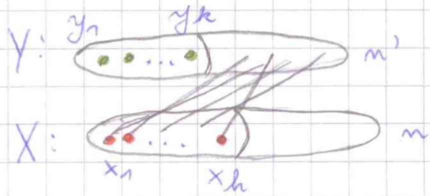
Popolno prirejanje iz $X$ v $Y$ je prirejanje, ki pokrije cel $X$.

**Dokaz.** $(\Rightarrow)$ ✓ očitno

$(\Leftarrow)$: $X = \{x_1, \dots, x_n\}$
$Y = \{y_1, \dots, y_{n'}\}$ $\quad n' \geq n$

$$x_i \leq y_i \overset{def.}{\equiv} x_i y_i \in E + \text{refl.} \ (x_i \leq x_i, \ y_i \leq y_i \ \forall i)$$

Naj bo $\{x_1, \dots, x_h, y_1, \dots, y_k\}$ največja antiveriga. $s = h + k$




Velikost največje antiverige.

$$h \leq |N(\{x_1, \dots, x_h\})| \leq n' - k$$

Hallov pogoj

$\Rightarrow h + k \leq n'$ $\qquad s \leq n'$

Dilworth: lahko pokrijemo z $s$ verigami. Naj to pokritje vsebuje $a$ verig z dvema elt.

$$s = a + \underbrace{(n' - a) + (n - a)}_{\#\text{ verig s po enim elt.}} \leq n'$$

$s \leq n'$

$\Rightarrow \qquad n \leq a$

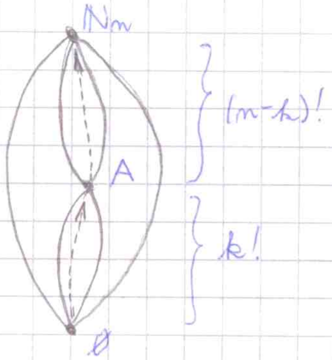
$|X| \leq \#$ verig z dvema elt. v pokritju

Te verige dajo popolno prirejanje.

**Izrek (Sperner).** Naj bo $\mathcal{A}$ antiveriga v $(\mathcal{P}(\mathbb{N}_n), \subseteq)$. Tedaj je $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

**Dokaz:** Maksimalne verige: $\emptyset \subseteq \{i\} \subseteq \{i,j\} \subseteq \ldots \subseteq \mathbb{N}_n$.

\# takih verig je $n!$




$A \subseteq \mathbb{N}_n$, $|A| = k$

\# verig, ki potekajo skozi $A$, je $k!(n-k)!$

Naj bo $a_k$ \# množic iz $\mathcal{A}$ moči $k$. $|\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} a_k$

$A, B \in \mathcal{A}$: nobena veriga ne poteka skozi $A$ in $B$.

Zato velja: $\underbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k k!(n-k)!}_{\text{\# maksimalnih verig skozi vse množice iz } \mathcal{A}} \leq n!$ ← \# vseh maksimalnih verig

$$\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{k!(n-k)!}{n!} \leq 1 \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1$$

$\binom{n}{k} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ $\forall k$ (glej Pascalov trikotnik)

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \leq \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \leq 1.$$

$$\Rightarrow \quad |\mathcal{A}| = \sum_{k=0}^{n} a_k \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.$$

**Zgled**

$n=2$: $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{2}{1} = 2$ $\quad \mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}\}$

$n=3$: $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{3}{1} = 3$ $\quad \mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$

$n=4$: $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} = \binom{4}{2} = 6$ $\quad \mathcal{A} = \{\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}\}$

Antiveriga z $\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ elementi: $\mathcal{A} = \{M \subseteq \mathbb{N}_n \mid |M| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$.

$\boxed{\text{Širina potenčne množice } n\text{-množice je } \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}.}$

**Zgled.** $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$, $a_i \geq 1$. Tedaj obstaja kvečjemu $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$ vsot oblike: $x = \pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_m$, tako da je $|x| < 1$.

$\pm a_1 \pm a_2 \pm \dots \pm a_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad \alpha_i \in \{1, -1\}.$

\# takih vsot je $2^m$

$I_\alpha = \{ i \mid \alpha_i = 1 \} \subseteq \mathbb{N}_m.$

Trdimo: množice $I_\alpha$ tvorijo antiverigo (za tiste $\alpha$, za katere je $|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i| < 1$)

Recimo nasprotno: naj bo $I_\alpha \subseteq I_\beta$ za neka $\alpha, \beta$. $(\alpha \neq \beta)$

$a := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i, \qquad b := \sum_{i=1}^{m} \beta_i a_i$

$|a| < 1, \qquad |b| < 1$

| | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $a$: | $-$ | $-$ | $\boxed{+}$ | $-$ | $-$ | $\boxed{+}$ | $-$ | $-$ | $\boxed{+}$ | $-$ | $-$ |
| $b$: | $-$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $-$ | $-$ | $\boxed{+}$ | $+$ | $+$ | $\boxed{+}$ | $+$ | $-$ |

$b - a = 2 \sum_{i \in \underbrace{I_\beta \setminus I_\alpha}_{\neq \emptyset}} a_i \geq 2$

$\Rightarrow |a| < 1, \; |b| < 1, \; b - a \geq 2 \rightarrow\leftarrow$ Protislovje!

Torej množice $I_\alpha$ tvorijo antiverigo, zato jih je kvečjemu $\binom{m}{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor}$. Teh množic pa je natanko toliko, kot je vsot oblike $|\sum_{i=1}^{m} \alpha_i a_i| < 1$.