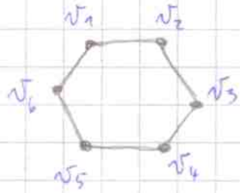
10. ŠE NEKAJ OSNOVNIH IZREKOV METRIČNE TEORIJE GRAFOV

10.1. POTENCE MATRIKE SOSEDNOSTI

G povezan graf; matrika sosednosti $A(G)$: $v_1, \dots, v_n$ vozlišča G:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1; & v_iv_j \in E(G) \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

Primer: C_6:

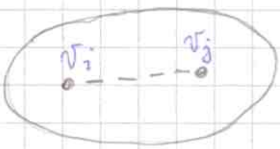


$$A(G) = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&1 \\ 1&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&1&0&0 \\ 0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&1&0&1 \\ 1&0&0&0&1&0 \end{bmatrix}$$

Izrek. Naj bo G povezan graf in $k \geq 0$. Tedaj je $(A(G))^k_{ij}$ število različnih sprehodov v G dolžine k med i-tim in j-tim vozliščem.

Dokaz. (indukcija po k)

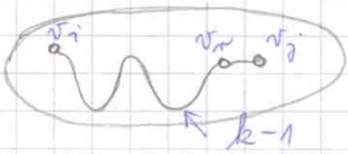
$k = 1$:



Če je $v_iv_j \in E(G) \Rightarrow$ med v_i in v_j obstaja en sprehod dolžine 1, sicer (če $v_iv_j \notin E(G)$) takega sprehoda ni.

To pa je natanko definicija $(A(G))^1$. (v drugem delu ne zahtevamo $i \neq j$)

$k-1 \longrightarrow k$:



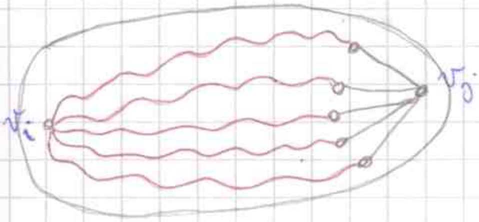
Vsak sprehod iz v_i do v_j dolžine k je sestavljen iz sprehoda od v_i do nekega soseda, recimo v_r, vozlišča v_j dolžine $k-1$ in povezave v_rv_j.

$$(A(G)^k)_{ij} = \sum_{r=1}^{n} (A(G)^{k-1})_{ir} \, (A(G))_{rj}$$

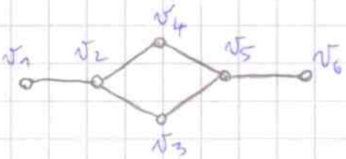
je 1, če je v_r sosed z v_j in 0 sicer

po ind. predp. je to # sprehodov dolžine $k-1$ med v_i in v_r

$$A(G)^k = A(G)^{k-1} \cdot A(G)$$



Zgled:



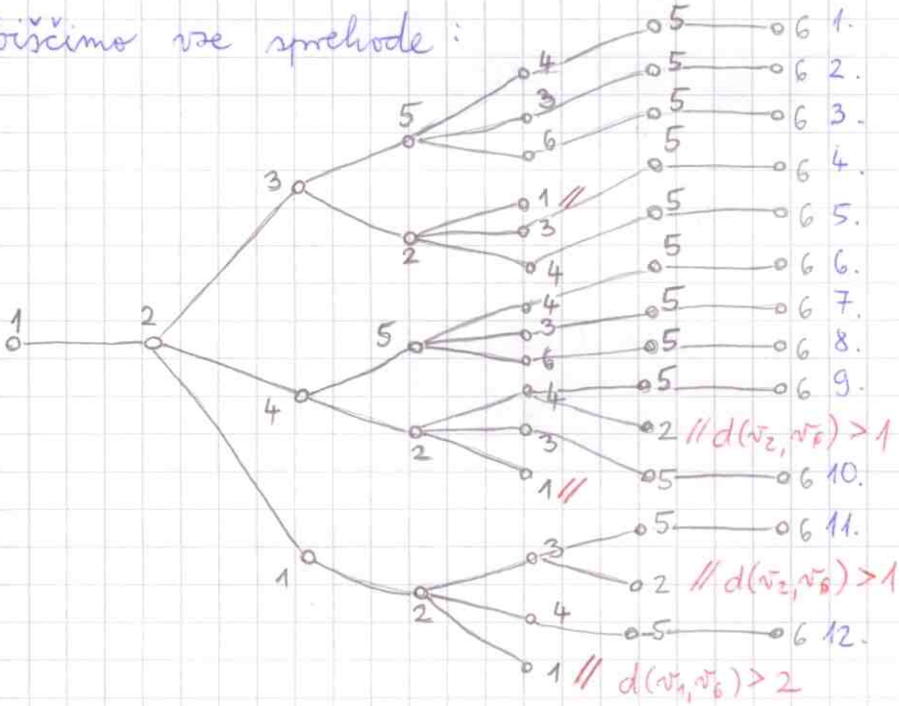
Koliko je sprehodov dolžine 6 med v_1 in v_6?

$$A = \begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0\\ 1&0&1&1&0&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&1&0&0&1&0\\ 0&0&1&1&0&1\\ 0&0&0&0&1&0 \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1&0&1&1&0&0\\ 0&3&0&0&2&0\\ 1&0&2&2&0&1\\ 1&0&2&2&0&1\\ 0&2&0&0&3&0\\ 0&0&1&1&0&1 \end{bmatrix} \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0&3&0&0&2&0\\ 3&0&5&5&0&2\\ 0&5&0&0&5&0\\ 0&5&0&0&5&0\\ 2&0&5&5&0&3\\ 0&2&0&0&3&0 \end{bmatrix}$$

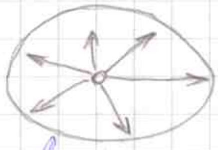
$$A^4 = \begin{bmatrix} 3&0&5&5&0&2\\ 0&13&0&0&12&0\\ 5&0&10&10&0&5\\ 5&0&10&10&0&5\\ 0&12&0&0&13&0\\ 2&0&5&5&0&3 \end{bmatrix} \quad A^5 = \begin{bmatrix} 0&13&0&0&12&0\\ 13&0&25&25&0&12\\ 0&25&0&0&25&0\\ 0&25&0&0&25&0\\ 12&0&25&25&0&13\\ 0&12&0&0&13&0 \end{bmatrix} \quad A^6 = \begin{bmatrix} 13&0&25&25&0&12\\ 0&63&0&0&62&0\\ 25&0&50&50&0&25\\ 25&0&50&50&0&25\\ 0&62&0&0&63&0\\ 12&0&25&25&0&13 \end{bmatrix}$$

$$A^6 = A^4 A^2 = (A^2)^2 A^2, \quad (A^6)_{1,6} = 12$$

Poiščimo vse sprehode:



Polmer grafa G: $\mathrm{rad}(G) = \min\limits_{u \in V(G)} \max\limits_{v \in V(G)} d(u,v)$.



Center grafa je množica vozlišč, ki realizirajo polmer.

Premer grafa G: $\mathrm{diam}(G) = \max\limits_{u,v \in V(G)} d(u,v)$

Def. Naj bo G povezan graf in $k \geq 1$. Tedaj je
$$S_k(G) = I + A(G) + A(G)^2 + \ldots + A(G)^k.$$

Trditev. Naj bo G povezan graf.

(i) Če je r najmanjše število, tako da ima vsaj ena vrstica v $S_r(G)$ vse elemente neničelne, tedaj je $\mathrm{rad}(G) = r$.

(ii) Če je s najmanjše število, za katerega ima matrika $S_s(G)$ vse elemente neničelne, tedaj je $\mathrm{diam}(G) = s$.

Dokaz. Iz prejšnjega izreka preberemo:
$$d_G(v_i, v_j) = k \iff (A(G)^r)_{i,j} \; \begin{matrix} = 0 & \text{za } r = 1, 2, \ldots, k-1, \\ > 0 & \text{za } r = k. \end{matrix} \qquad (*)$$

(i) Naj bo $\mathrm{rad}(G) = r$ in v_i vozlišče iz centra. To pomeni, da je $d(v_i, v_j) \leq r$ za $\forall\, j \neq i$. Če je npr. $d(v_i, v_j) = s$ $(\leq r)$ $\overset{(*)}{\Rightarrow}$ $(A(G)^s)_{i,j} \neq 0 \Rightarrow (S_r(G))_{i,j} \neq 0 \;\; \forall j \Rightarrow$ i-ta vrstica matrike $S_r(G)$ ima vse elemente $\neq 0$.

Recimo, da je $s < r$. Tedaj $\exists\, j : d(v_i, v_j) = r > s$. Tedaj pa je $(A(G)^t)_{i,j} = 0$ za vse $t = 1, 2, \ldots, s$. $\Rightarrow$ i-ta vrstica v $S_s(G)$ ima ničelni element.

Zgled. (nadaljevanje prejšnjega zgleda)

$$S_2(G) = I + A(G) + A(G)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A(G)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & 5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 5 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \mathrm{rad}(G) = 2$, center $= \{v_3, v_4\}$

$$S_3(G) = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 4 & 6 & 6 & 2 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 2 & 7 & 1 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 6 & 1 \\ 2 & 2 & 7 & 6 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$S_4(G)$ ima vse elemente $\neq 0 \Rightarrow \mathrm{diam}(G) = 4$

diametralni vozlišči: v_1, v_6

10.2. REALIZACIJE KONČNIH METRIČNIH PROSTOROV

Utežen graf ali omrežje $G = (V(G), E(G), w)$, kjer je
$$w : E(G) \longrightarrow \mathbb{R}^+.$$

P pot v G: $v_1, v_2, \dots, v_k$

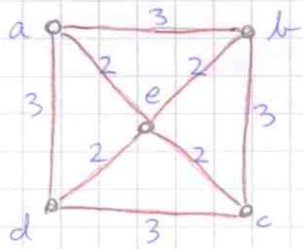
dolžina poti P: $\sum_{i=1}^{k-1} w(v_i v_{i+1})$

Razdalja med u in v je dolžina najkrajše u,v-poti.
($w = 1$, gre za običajno razdaljo)

Def. Uteženi graf G realizira metrični prostor (M,d), če je $M \subseteq V(G)$ in je $d(a,b) = d_G(a,b)$ $\forall a,b \in M$.

Opomba. Za nas bodo vsi metrični prostori končni.

Primer:
$$\left.\begin{aligned} &M = \{a,b,c,d,e\} \\ &d(a,b) = d(b,c) = d(c,d) = d(a,d) = 3 \\ &d(a,c) = d(b,d) = 4 \\ &d(a,e) = d(b,e) = d(c,e) = d(d,e) = 2 \end{aligned}\right\}$$
Dan je tak metrični prostor M. Poišči graf, ki ga realizira.



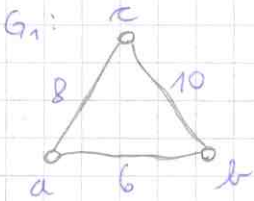
Trditev. Vsak (končni) metrični prostor (M,d) lahko realiziramo z nekim grafom.

Dokaz. Za graf, ki realizira (M,d), kjer je $|M| = n$, izberemo K_n in postavimo:
$$w(a,b) = d_M(a,b).$$

Primer. $M = \{a, b, c\}$

$d(a,b) = 6, \quad d(a,c) = 8, \quad d(b,c) = 10$

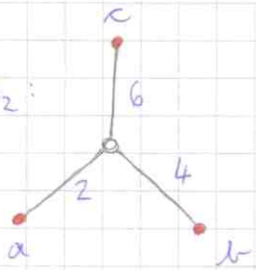
G_1:



$w(G_1) = 24$

Toda:

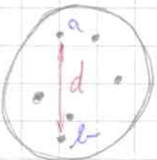
G_2:

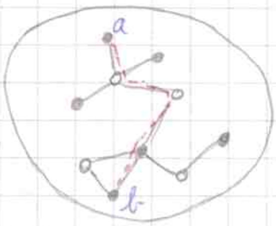


$w(G_2) = 12$

$$w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$$

$$(M,d) \longleftrightarrow G = (V(G), E(G), w)$$





$d(a,b) = d_G(a,b)$

Def. Realizacija metričnega prostora (M,d) z grafom G je **optimalna**, če je $w(G)$ minimalen med vsemi realizacijami prostora (M,d). (Pri tem je $w(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e)$.)

Def. Vozlišča realizacije G iz $V(G) \setminus M$ imenujemo **pomožna vozlišča realizacije** prostora (M,d).

Lema. Naj bo G realizacija metričnega prostora (M,d), kjer je $|M| = n$. Če je $|V(G)| > 2^{\binom{n}{2}+1} + n$, tedaj obstaja podgraf grafa G s kvečjemu $2^{\binom{n}{2}+1} + n$ vozlišči, ki tudi realizira (M,d).

Dokaz. Za vsak par $x, y \in M$ izberemo poljubno fiksno najkrajšo x,y-pot v G: P_{xy}.

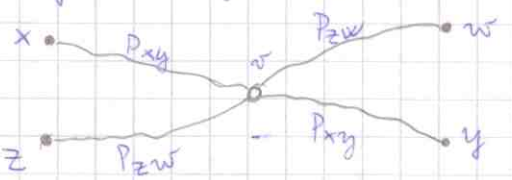
$$G = \bigcup_{\{x,y\}} P_{xy}$$

$\mathcal{P} = \{P_{xy} \mid \{x,y\} \subseteq M\}$.

BŠS: vsa pomožna vozlišča v G so stopnje > 2.

Če je v pomožno vozlišče, naj bo

$$\mathcal{P}_v = \{P_{xy} \mid P_{xy} \in \mathcal{P},\ v \in P_{xy}\} \subseteq \mathcal{P}$$



odštejemo tista, ki so $\in M$

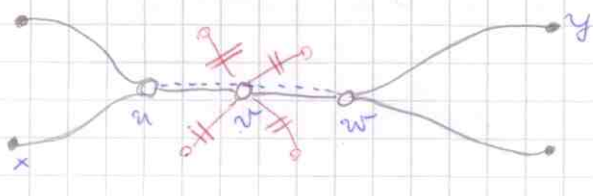
$|\mathcal{P}| = \binom{m}{2}$. # pomožnih vozlišč: $> \overbrace{\left(2^{\binom{m}{2}+1} + m\right)}^{\text{predpostavka leme}} - m = 2^{\binom{m}{2}+1}$

$2^{\binom{m}{2}}$ = # različnih podmnožic $\mathcal{P}$

Ker je # pomožnih vozlišč $> 2 \cdot 2^{\binom{m}{2}} \Rightarrow \exists$ pomožna vozlišča $u, v, w \ni$: $\mathcal{P}_u = \mathcal{P}_v = \mathcal{P}_w$, torej vse poti iz $\mathcal{P}_u$ (ki gredo skozi u) gredo tudi skozi v in skozi w (in obratno).

$P_{xy} \in \mathcal{P}_u$:

BŠS: $d(u,w) = d(u,v) + d(v,w)$.



stopnja$(v) > 2$.

Sedaj zbrišemo vse povezave iz v, ki niso na P_{xy}. S tem ostane metrika med vozlišči, ki ustrezajo točkam iz M, nespremenjena. Tako dobimo manjši graf, ki tudi realizira (M, d). Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo grafa s kvečjemu $2^{\binom{m}{2}+1} + m$ vozlišči. $\blacksquare$

Izrek. Za vsak končen metrični prostor (M,d) obstaja optimalna realizacija.

Dokaz. Naj bo

$$a = \inf \{ w(G) \mid G \text{ je realizacija za } (M,d) \}.$$

Naj bo $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedje realizacij, tako da je $a = \lim_{i\to\infty} w(G_i)$.

Zaradi leme lahko predpostavim, da za $\forall i : |V(G_i)| \leq 2^{\binom{n}{2}+1} + n$.

Toda, # neuteženih grafov na $\leq 2^{\binom{n}{2}+1} + n$ vozliščih je $< \infty$.

Zato obstaja neskončno podzaporedje $\{G_i'\}_{i=1}^{\infty}$ zaporedja $\{G_i\}_{i=1}^{\infty}$, tako da imajo vsi grafi G_i' ista vozlišča in povezave. $G_i' = (V, E, w_i')$ $\quad \lim_{i\to\infty} w_i'(G_i') = a$.

$$0 \leq w_i'(G_i') \leq |E| \cdot \operatorname{diam}(M).$$

$w_i' \in [0, |E| \cdot \operatorname{diam}(M)]$. w_i' je zvezna funkcija na kompaktni množici: ta doseže minimum, torej $\exists$ tak indeks i, da je $w_i'(G_i') = a$.

Slaba novica: Iskanje optimalne realizacije je NP-težek problem. Problem je težek tudi za celoštevilske metrike.

Poseben primer: Kateri metrični prostori (M,d) dopuščajo realizacijo z drevesi?

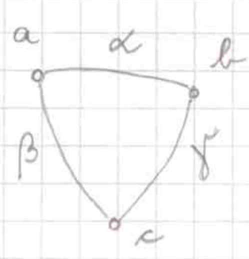
Zgled: Vsak metrični prostor na treh točkah lahko realiziramo z drevesom:

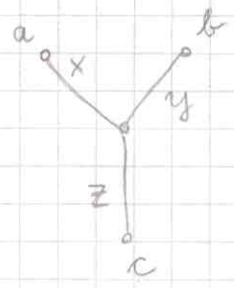
$M = \{a, b, c\}$

$d(a,b) = \alpha$

$d(a,c) = \beta$

$d(b,c) = \gamma$





$x + y = \alpha$

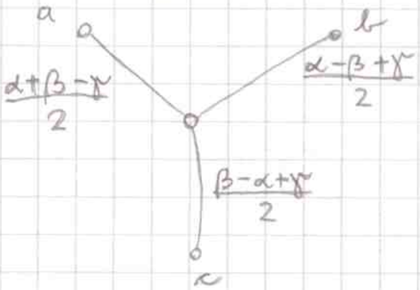
$x + z = \beta$

$z + y = \gamma$

$$y - z = \alpha - \beta$$

$$2y = \alpha - \beta + \gamma, \quad y = \frac{\alpha - \beta + \gamma}{2}, \quad z = \gamma - y = \frac{\beta - \alpha + \gamma}{2},$$

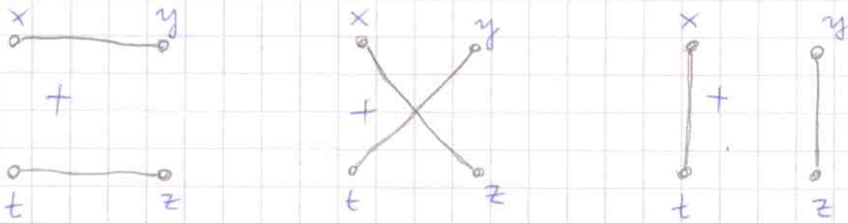
$$x = \alpha - y = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$$



Def. Metrični prostor (M,d) zadošča lastnosti štirih točk, če za vsako četverico točk x, y, z, t velja:

$$d(x,y) + d(z,t) \leq \max\{d(x,z) + d(y,t),\ d(x,t) + d(y,z)\}.$$

Opombe:



$s_1 = d(x,y) + d(t,z) \qquad s_1 \leq \max\{s_2, s_3\}$

$s_2 = d(x,z) + d(t,y) \qquad s_2 \leq \max\{s_1, s_3\}$

$s_3 = d(x,t) + d(y,z) \qquad s_3 \leq \max\{s_1, s_2\}$

Če je $s_j, s_k < s_i \Rightarrow s_i \nleq \max\{s_j, s_k\}$

$\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Če hočemo, da bo pogoj izpolnjen: $\exists\, i,j : s_k \leq s_i = s_j$.

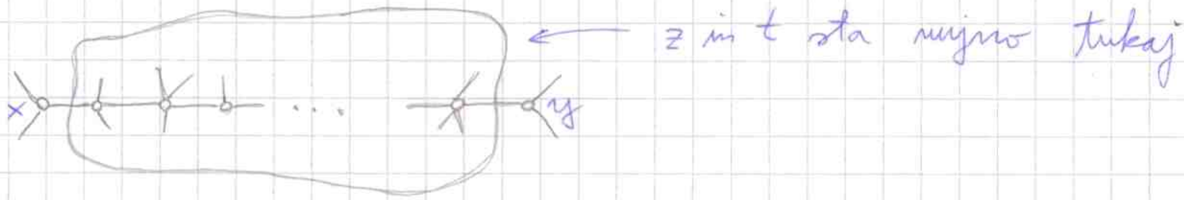
Torej: pogoj je ekvivalenten temu, da sta največji izmed vrednosti s_i, s_j, s_k med seboj enaki.

V pogoju štirih točk naj bo $z = t$:

$$d(x,y) + d(z,z) \leq \max\{d(x,z) + d(y,z),\ d(x,z) + d(y,z)\}$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \ldots \text{ trikotniška neenakost}$$

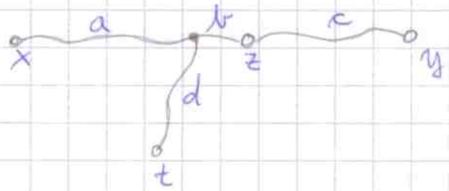
Zgled. T poljubno drevo, (T,d) metrični prostor.
Pokažimo, da zadošča pogoju štirih točk.
Izberem 4. poljubne točke iz T: $\{x, y, z, t\}$.
BŠS: $d(x,y) = \max\limits_{i,j} d(i,j)$



1. možnost:

$z, t \in P_{xy}$

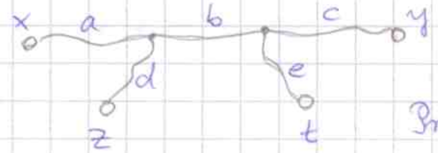
2. možnost:



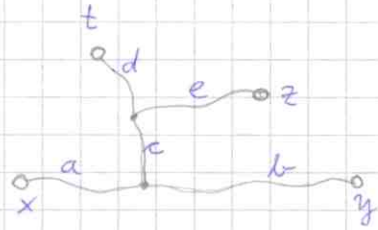
$z \in P_{xy}$, $t \notin P_{xy}$

3. možnost: $z, t \notin P_{xy}$

3.a)



3.b)



Preveri lastnost 4-ih točk na vsaki od teh možnosti...

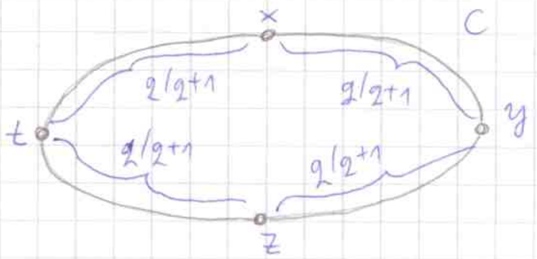
Izrek. Graf G je drevo natanko tedaj, ko je povezan, brez trikotnikov in njegova razdalja zadošča pogoju štirih točk.

Dokaz. $(\Rightarrow)$ ✓ (iz zadnjega primera)
$(\Leftarrow)$ Naj bo G povezan, brez Δ in naj zadošča pogoju 4 točk. Recimo, da G vsebuje cikle. Naj bo C najkrajši cikel v G. Tedaj je $|C| \geq 4$.

$$|C| = 4q + r, \quad 0 \leq r \leq 3$$

Cikel C je izometričen po rezultatu iz 1. poglavja.
Naj bodo x, y, z, t vozlišča na C, tako da je

$q \le d(x,y),\ d(y,z),\ d(z,t),\ d(t,x) \le q+1$.



$s_1 = d(x,y) + d(z,t) \qquad 2q \le s_1 \le 2q+2$

$s_2 = d(x,z) + d(y,t) \qquad 4q \le s_2 \le 4q+2$

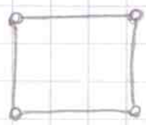
$s_3 = d(x,t) + d(y,z) \qquad 2q \le s_3 \le 2q+2$

$q \ge 2$ očitno x, y, z, t ne zadoščajo pogoju štirih točk.

$q = 1$: ravno tako direktno preverimo, da pogoj ni izpolnjen:

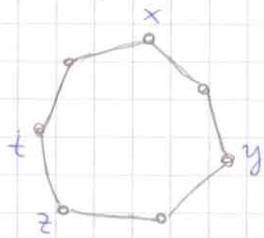
C_4, C_5, C_6, C_7

C_4:



$1+1,\ 2+2,\ 1+1$

C_7:



$s_1 = 2+1$

$s_2 = 2+3$ ⨳

$s_3 = 2+2$

Izrek. Naj bo (M,d) končni metrični prostor. Tedaj lahko (M,d) realiziramo z drevesom natanko tedaj, ko d zadošča pogoju štirih točk. Nadalje, če (M,d) lahko realiziramo z drevesom, tedaj je realizacija enolična in jo lahko najdemo v polinomskem času.

Ideja dokaza:
- izrek najprej preverimo za vse M, $|M| = 4$
- indukcija