Izrek. Relacija $(\Theta \cup \tau)^*$ je produktna relacija. Natančneje, vsak ekvivalenčni razred določa graf, sestavljen iz izomorfnih grafov, ki določajo en faktor faktorizacije na pragrafe.

$$(\Theta^* \cup \tau^*)^* = (\Theta \cup \tau)^*$$

Posledica. Faktorizacijo povezanega podgrafa na prafaktorje lahko določimo v času $O(mn)$.

Dokaz. Izračunamo $(\Theta \cup \tau)^*$. τ ✓ $(\ldots)^*$ ✓

Θ ? Nas stane $O(m^2)$.

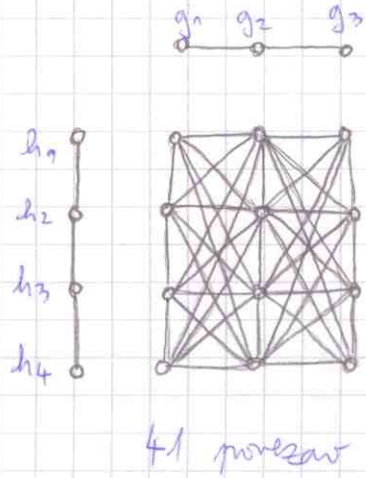
Def. $e \,\Theta_1\, f$, če je $e \,\Theta\, f$ in je $e \in T$ (T je vnaprej izbrano fiksno vpeto drevo v G) ter $f \in G$. $\Theta_1 \ldots O(mn)$.

Lema. $\Theta_1^* = \Theta^* \Rightarrow (\Theta \cup \tau)^* = (\Theta_1 \cup \tau)^*$.

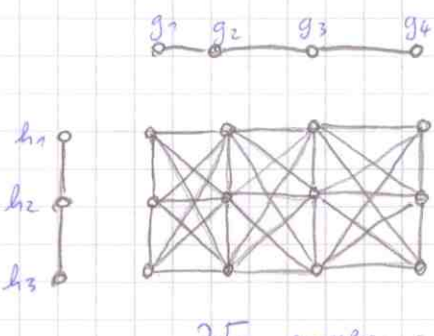
9. LEKSIKOGRAFSKI PRODUKT GRAFOV IN PROBLEM IZOMORFIZMA

Def. Naj bosta G, H poljubna grafa. Tedaj je njun leksikografski produkt, $G \circ H$, graf z $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ in $(g,h)(g',h') \in E(G \circ H)$ če je bodisi $g = g'$ in $hh' \in E(H)$, bodisi je $gg' \in E(G)$.

Zgled. $P_3 \circ P_4$ $P_4 \circ P_3$

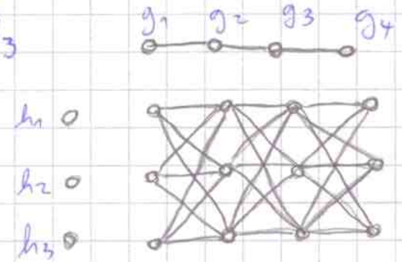


41 povezav



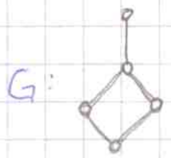
35 povezav

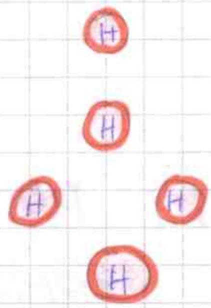
$P_4 \circ D_3$



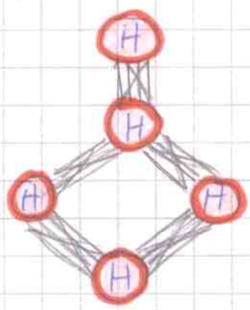
$P_4 \circ D_3$ je povezan graf, čeprav D_3 ni povezan.

Opombe:
- Leksikografski produkt v splošnem ni komutativen.
- Leksikografski produkt je asociativen (do izomorfizma).
  Zakaj pišemo: $G \circ H \circ K$, G^n (glede na $\circ$) } je dobro definiran graf
- $G \circ K_1 \cong G \cong K_1 \circ G$
- $G \circ H$ si lahko predstavljamo takole:
  Vzamemo G: in vsako vozlišče razpihnemo v kopijo H:





Nato za vsako povezavo v G povežemo vsa vozlišča iz ustreznih kopij H:



$|V(G)| \geq 2$

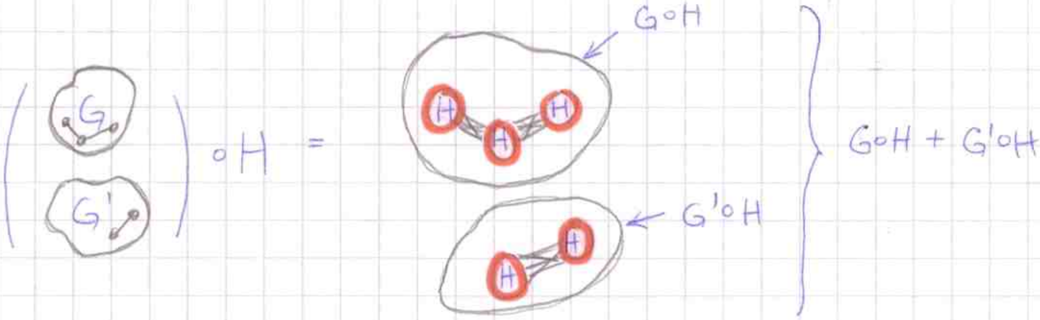
- $G \circ K_m \cong G \boxtimes K_m$
- $G \circ H$ je povezan $\Leftrightarrow$ G povezan.
  Natančneje: število povezanih komponent grafa $G \circ H$ je enako številu povezanih komponent grafa G. Kaj pa, če ima G izolirane točke? In H ni povezan.

Trditev.

(i) $(G+G')\circ H = G\circ H + G'\circ H$

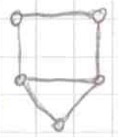
(ii) $\overline{G\circ H} = \overline{G}\circ\overline{H}$

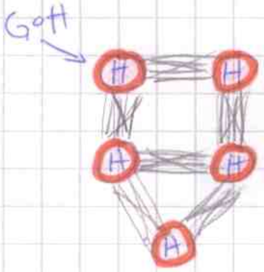
Dokaz. (i)

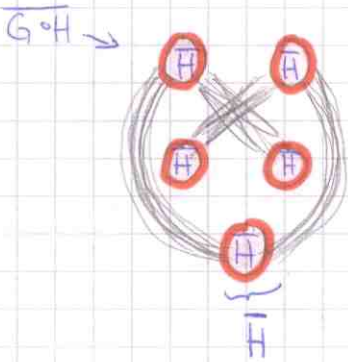


(ii) $\overline{G\circ H} = \overline{G}\circ\overline{H}$

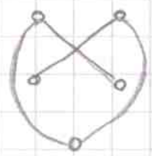
$G\circ H$:







$\overline{G}\circ\overline{H}$:



$\overline{G}\circ\overline{H}$ =

Zgled. $G\circ H$, G povezan

$$d_{G\circ H}((g,h),(g',h')) = \begin{cases} 1, & \text{če } g=g' \text{ in } hh'\in E(H) \\ 2, & \text{če } g=g' \text{ in } hh'\notin E(H) \\ d_G(g,g'), & \text{če } g\neq g' \end{cases}$$

9'. PROBLEM IZOMORFIZMA

G, H grafa, tedaj je $f: V(G)\to V(H)$ **izomorfizem**, če je f bijekcija, tako da velja:

$$uv\in E(G) \iff f(u)f(v)\in E(H).$$

G, H **izomorfna**, če obstaja izomorfizem med njima.

Problem izomorfizma: konstruiraj učinkovit algoritem, ki preveri, ali sta dana grafa izomorfna.

G graf, $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

$A(G)$ ... **matrika sosednosti**:

$$(A(G))_{ij} = \begin{cases} 1 ; & v_i v_j \in E(G) \\ 0 ; & \text{sicer} \end{cases}$$

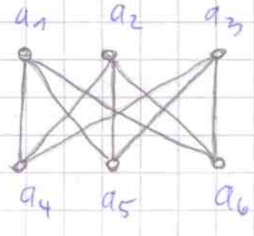
$n \times n$ matrika, simetrična.

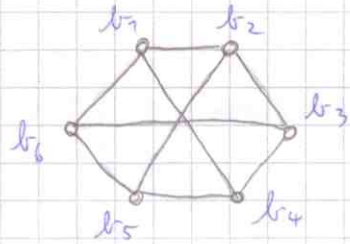
Trditev. Grafa na n vozliščih G in H sta izomorfna natanko tedaj, ko obstaja taka permutacijska matrika P, da velja: $A(G) = P \cdot A(H) \cdot P^{-1}$.

Dokaz. $P \cdot A(H)$ pomeni, da se vrstice v $A(H)$ permutirajo, kot pravi P. Analogno, množenje poljubne matrike na desni s permutacijsko matriko predstavlja permutacijo stolpcev matrike, kot pravi perm. matrika.

P permutacijska $\Rightarrow$ $P^{-1} = P^T$. $\quad A(G) = P \cdot A(H) \cdot P^T$.

Zgled.





$$\begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 0&0&0&1&1&1 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0 \end{bmatrix}$$

$f(a_1) = b_1 \quad f(a_2) = b_3 \quad f(a_3) = b_5 \quad f(a_4) = b_2$

$f(a_5) = b_4 \quad f(a_6) = b_6$

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow P = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}.$$

Problem izomorfizma je rešljiv v polinomskem času za:
- drevesa
- ravninske grafe
- grafe intervalov

...

V splošnem pa takega algoritma ne poznamo. Celo več, zaenkrat ni znano, ali je problem izomorfizma polinomski ali pa je NP-težak. Če je $P \neq NP$, tedaj je problem izomorfizma naraven kandidat za problem z zahtevnostjo strogo med P in NP.

Def. Π_1, Π_2 odločitvena problema. Tedaj je polinomska prevedba Π_1 na Π_2 tak algoritem, ki v polinomskem času za vsak primer I_1 problema Π_1 konstruira primer I_2 problema Π_2, tako da je odgovor na I_1 "DA" natanko tedaj, ko je odgovor na I_2 "DA".

Def. Problem Π je izomorfizem-poln, če je polinomsko ekvivalenten problemu izomorfizma. Natančneje, če lahko Π polinomsko prevedemo na problem izomorfizma in obratno, če lahko problem izomorfizma polinomsko prevedemo na problem Π.

Izomorfizem-polna problema sta:
- problem izomorfizma za dvodelne grafe
- problem izomorfizma za regularne grafe

Automorfizem je izomorfizem grafa nase.
Aut(G) ... množica vseh automorfizmov
Aut(G) tvori grupo za komponiranje:
grupa avtomorfizmov grafa G

$Aut(K_n) \cong Sym(n) = S_n$

$Aut(C_n) \cong D_{2n}$

Izomorfizem-poln problem je tudi: določitev generatorjev za $Aut(G)$.

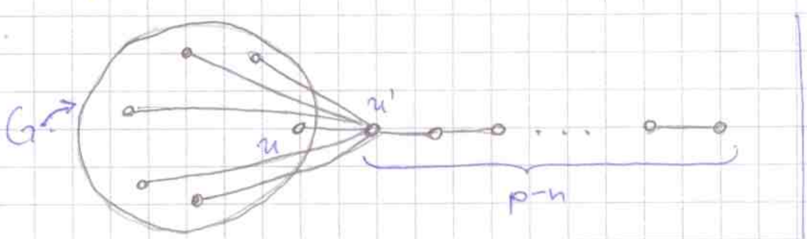
Lema. Za vsak $x > 1$ obstaja praštevilo na intervalu $(x, 2x)$.

Lema. Problem, ali sta dva povezana grafa na p vozliščih izomorfna, kjer je $p > 2$ praštevilo in so vozlišča stopnje $< \frac{p}{2}$ je izomorfizem-poln problem.

Dokaz. Če znamo rešiti splošni problem izomorfizma, seveda znamo rešiti tudi navedenega.

Obratno, recimo, da znamo rešiti problem za grafe s p vozlišči in stopnjami $< \frac{p}{2}$. Naj bosta G, H poljubna grafa na n vozliščih. $G \mapsto G'$, $H \mapsto H'$:

Naj bo u poljubno vozlišče v G. Tedaj dodajmo G-ju pot dolžine $n-p$, ki se začne v u, in soseda od u na tej poti povežemo s povezavami z vsemi vozlišči iz G.



$= G'$

Pri tem je p praštevilo iz intervala $(2n+2, 2n+4)$. (recimo najmanjše izmed takih praštevil).

Analogna konstrukcija je za H'.

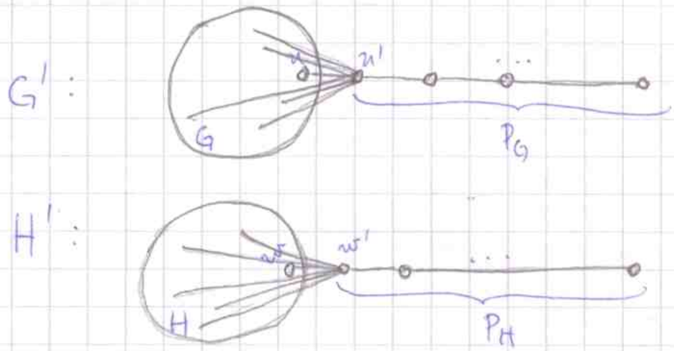
Trdimo: $G \cong H \iff G' \cong H'$.

G', H': grafa s p vozlišči stopnje $< \frac{p}{2}$: največja stopnja je $n+1 < \frac{p}{2} \iff p > 2n+2$.

Seveda prevedba je (očitno) polinomska.

Če je $G \cong H \overset{\text{očitno}}{\Rightarrow} G' \cong H'$.

Naj bo $G' \cong H'$.



u' in w' sta edini vozlišči v G' in H' stopnje $n+1$.
(res, stopnje v G, H so $\leq n$)

Naj bo $f: G' \longrightarrow H'$ izomorfizem. Tedaj je $f(u') = w'$.
Trdimo, da je $P_G (P_H)$ edina pot iz $u'(w')$ dolžine $p-n-1$ v $G'(H')$. Druge poti iz u' so oblike
$\underbrace{u' \to \overset{\in G}{x} \to \ldots}_{\text{znotraj } G}$ Taka pot je dolžine $\leq n$.
$|P_G| = p-n-1 > 2n+2-n-1 = n+1$.
$\Rightarrow$ f preslika P_G na P_H. $\Rightarrow f|_G : G \longrightarrow H \Rightarrow G \cong H$.
zožitev izomorfizma je izomorfizem ■

Konec g'.

Def. Graf G je praggraf glede na leksikografski produkt, če iz $G = G_1 \circ G_2$ sledi $G_1 = K_1$ ali $G_2 = K_1$.
$(G_1 \circ K_1 = G_1 = G \quad ; \quad K_1 \circ G_2 = G_2 = G)$

Trditev. Vsak graf premore faktorizacijo na pragrafe glede na leksikografski produkt.

Dokaz: isti kot za kartezični produkt. ■

Problem: Ali je G pragraf glede na leksikografski produkt?

Izrek. Problem, ali je dani graf pragraf glede na leksikografski produkt, je izomorfizem-poln problem.

Dokaz. Recimo, da imamo algoritem, ki preveri, ali je dani graf pragraf glede na $\circ$. Želimo preveriti, ali sta poljubna dva grafa izomorfna (s pomočjo zgornjega privzetega algoritma) in to priredbo narediti v polinomskem času.

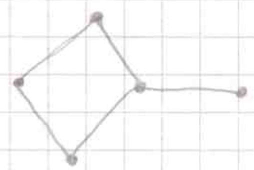
Zaradi leme lahko predpostavimo, da je

$$|V(G)| = |V(H)| = p, \quad p \text{ praštevilo}$$

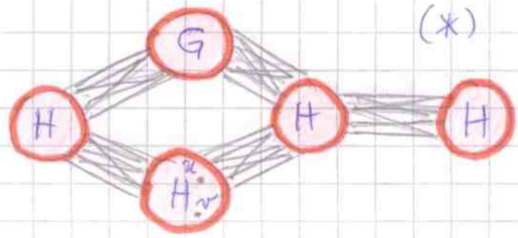
in je maksimalna stopnja v obeh grafih $< \frac{p}{2}$.

Naj bo X graf konstruiran takole: v G izberemo poljubno fiksno vozlišče in ga razpihnemo v G, ostala vozlišča iz G razpihnemo v disjunktne kopije grafa H. Nato razpihnjene kopije povežemo s povezavami v smislu leksikografskega produkta.

G :



X :

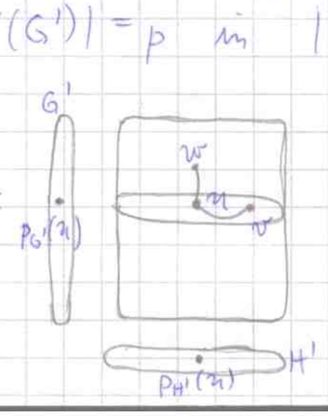


Trdimo: X ni pragraf $\iff G \cong H$.

($\Leftarrow$): trivialno: če je $G \cong H$, tedaj je očitno $X = G \circ H$.

($\Rightarrow$): Recimo, da X ni pragraf. Tedaj je $X = G' \circ H'$, $|V(G')| \geq 2$ in $|V(H')| \geq 2$. Vemo še več: $|V(X)| = p^2$ po konstrukciji. Ker je $|V(X)| = |V(G')| \cdot |V(H')| \Rightarrow$ $|V(G')| = p$ in $|V(H')| = p$.

X :



$u \in V(X)$. Naj bo stopnja $p_{G'}(u) = d_1$ in stopnja $p_{H'}(u) = d_2$.

$\Rightarrow$ stopnja u v grafu X je $d_2 + d_1 \cdot p$.

$d_1 \cdot p + d_2$ ta zapis je enoličen! $d_1, d_2 < \frac{p}{2}$

(i) Naj bo v sosed od u, ki je v istem H'-sloju: 

$$|N(u) \cap N(v)| \geq d_1 p.$$

(ii) Naj bo w sosed od u, ki ni v istem H'-sloju: 

$$|N(u) \cap N(w)| \leq (d_1 - 1) \cdot p + \frac{p}{2} + \frac{p}{2} = d_1 \cdot p$$

Torej, za poljubno vozlišče u, zaradi (i) in (ii) lahko v polinomskem času najdemo vsa vozlišča, ki so v istem H'-sloju kot u. Če je **skupnih** sosedov vsaj $d_1 p$, sta v istem sloju, sicer pa nista. S tem postopkom (v polinomskem času) poiščemo vse H'-sloje.
Toda, ta postopek dejansko poteka na grafu X (slika $*$).
Zato tako dejansko najdemo $p-1$ slojev, ki so izomorfni H in en sloj, ki je izomorfen G.
Z drugimi besedami, postopek pokaže, da velja:

$$G \cong G' \qquad \qquad G' \cong H' \text{ ter } G \cong H.$$
$$H \cong H' \quad \text{in}$$

To je dokaz v eno smer. Drugi del dokaza poteka v istem smislu: predpostavimo, da imamo algoritem za testiranje izomorfnosti grafov. Nato pokažemo, da lahko testiramo, ali je dani graf pragraf glede na $\circ$, s polinomskim številom klicev algoritma za izomorfizme.