8. FAKTORIZACIJA GRAFOV NA PRAGRAFE
(glede na kartezični produkt)

Def. Graf G je pragraf (glede na kartezično množenje grafov), če iz $G = G_1 \square G_2$ sledi $G_1 = K_1$ ali $G_2 = K_1$.
(Torej G je pragraf, če ga ne moremo zapisati kot produkt dveh netrivialnih grafov.)

faktorizacija ≡ faktorji netrivialni

Izrek: Vsak graf G premore faktorizacijo na produkt pragrafov. Pri tem je število faktorjev v faktorizaciji kvečjemu $\log_2 |V(G)|$.

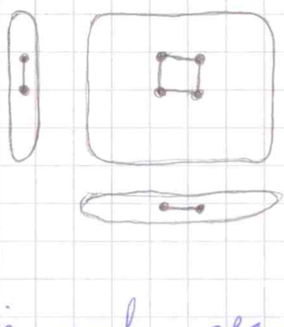
Dokaz. Če G pragraf ✓ $G = G$.
Sicer $G = G_1 \square G_2$, kjer je $|V(G_1)| \geq 2$ in $|V(G_2)| \geq 2$. Postopek ponavljamo, dokler ne dobimo faktorizacije $G = H_1 \square H_2 \square \ldots \square H_k$, kjer so H_i pragrafi in $|V(H_i)| \geq 2$ $(1 \leq i \leq k)$.

$$|V(G)| = |V(H_1)| \cdot |V(H_2)| \cdot \ldots \cdot |V(H_k)| \geq 2^k$$

$$\Rightarrow k \leq \log_2 |V(G)|. \qquad \square$$

Zgled. $C_4 = K_2 \square K_2$ ni pragraf

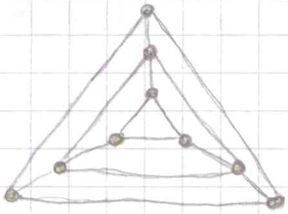
C_3 je pragraf  (argument: če ima graf praštevilsko št. točk je pragraf)



V grafih, ki so produkti povezanih netrivialnih grafov, obstajajo 4-cikli.

Če je graf povezan, so njegovi faktorji tudi povezani.
Če bi C_n $(n \neq 4)$ imel faktorizacijo, bi moral vsebovati 4-cikel.
$\Rightarrow$ C_n so pragrafi za $n \neq 4$

Zgled.



$P_3 \square P_3$ ← brez △ ✗

$K_3 \square P_3$ ✓

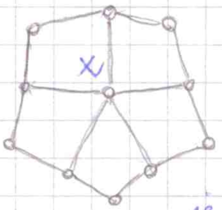
$K_3 \square K_3$ ✗

Če ima graf faktorizacijo, imata faktorja moč 3. ($|V(G)| = 9$)

Opomba. Stopnje točk v produktu so vsote stopenj v posameznih faktorjih.

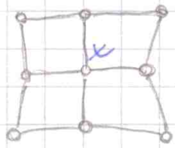
Zgled. Dvodelna kolesa, BW_n.

$n = 5$:



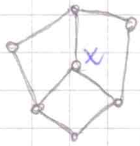
je pragraf ✓ ($|V(G)| \in \mathbb{P}$)

$n = 4$:



$BW_4 = P_3 \square P_3$

$n = 3$:



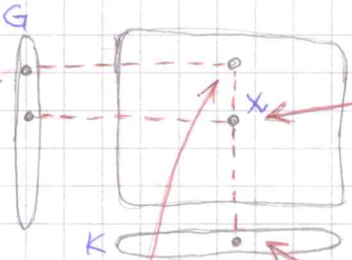
je pragraf ✓ ($|V(G)| \in \mathbb{P}$)

Vsa vozlišča v BW_n, razen "sredinskega" imajo stopnjo 2 ali 3.

Denimo, da

$BW_n = G \square K$

$n \geq 5$



1. stopnja "sredinskega" vozlišča je n, torej je $\deg(x) \geq 5$

G, K povezana $|V(G)| \geq 2$, $|V(K)| \geq 2$

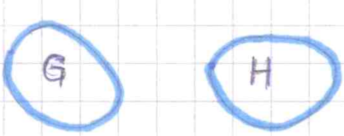
2. BŠS: ta točka je stopnje vsaj 3 (stopnje se seštevajo; BŠS ima točka v tej komponenti večjo stopnjo)

3. graf G je povezan in $|V(G)| \geq 2$, torej $\exists$ še neka točka stopnje vsaj 1

4. ta ima stopnjo vsaj 4

Def. $G + H$, disjunktna unija grafov G in H.

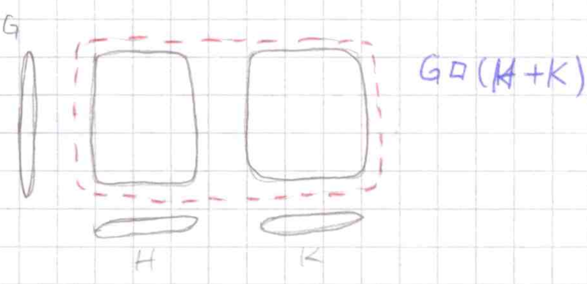
$$V(G+H) = V(G) \,\dot\cup\, V(H)$$
$$E(G+H) = E(G) \,\dot\cup\, E(H)$$

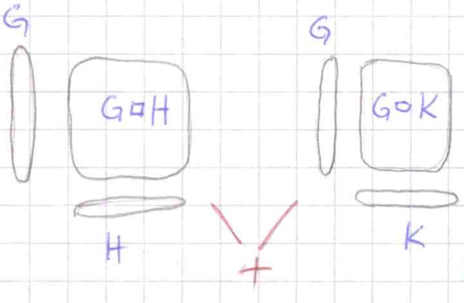


Trditev. $G \square (H + K) = G \square H + G \square K$

$(G + H) \square K = G \square K + H \square K$

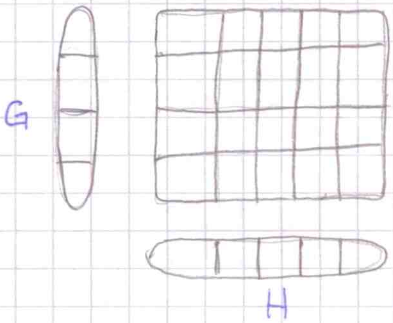
Dokaz.

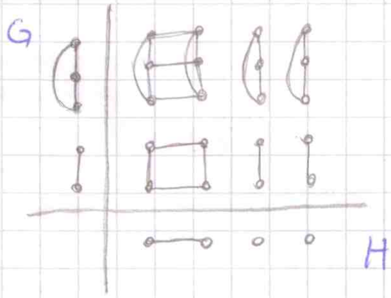




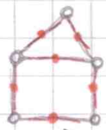
Opomba. Število povezanih komponent grafa $G \square H$ je enako produktu števila pov. komponent v G in števila povezanih komponent v H.

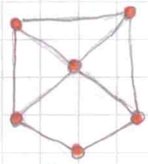
$G \square H$ povezan $\Leftrightarrow$ G, H povezana





Opomba. Graf povezav. Povezave v $G \rightsquigarrow$ točke v $L(G)$

G : 

$L(G)$: 

Če imata povezavi v G skupno vozlišče, sta ustrezni vozlišči v $L(G)$ sosednji.

$L(C_n) = C_n$, $L(K_2 \square K_2) = K_2 \square K_2$

Izrek. Faktorizacija grafov glede na kartezični produkt ni enolična v razredu vseh grafov.

Dokaz. Naj bo
$$G = (K_1 + K_2 + K_2^2) \square (K_1 + K_2^3)$$
$$H = (K_1 + K_2^2 + K_2^4) \square (K_1 + K_2)$$

$$G^n \overset{\text{def.}}{=} \underbrace{G \square G \square \ldots \square G}_{n}$$

$$\left.\begin{aligned} G &= K_1 + K_2^3 + K_2 + K_2^4 + K_2^2 + K_2^5 \\ H &= K_1 + K_2 + K_2^2 + K_2^3 + K_2^4 + K_2^5 \end{aligned}\right\} G = H$$

$$Q_d = K_2^d$$

$K_1 + K_2 + K_2^2$ ... 7 vozlišč $\Rightarrow$ pragraf

$K_1 + K_2$ ... 3 vozlišča $\Rightarrow$ pragraf

(21 vozlišč; 3 pov. komp.)

$X = K_1 + K_2^2 + K_2^4$ $\quad X = A \square B$, A in B imata vsaj 2 vozlišči

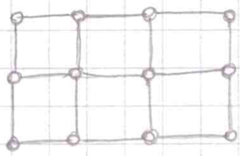
\# povezanih komponent v produktu X = produkt \# pov. komponent v A in v B

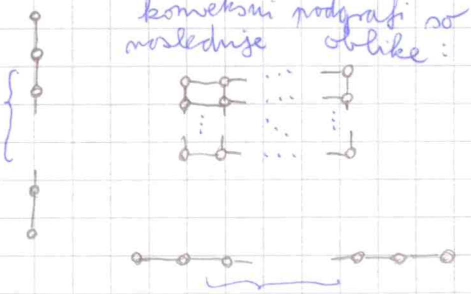
(BŠS)

Ker ima X 3 komponente, ima A 3 pov. komp., B pa eno. Toda, ker ima X vozlišče stopnje 0, je nujno $B = K_1$. Analogen argument velja za $K_1 + K_2^3$.

Zgled. $P_3 \square P_4$. Poišči vse konveksne podgrafe. $K_4 \square K_4$.

$P_3 \square P_4$





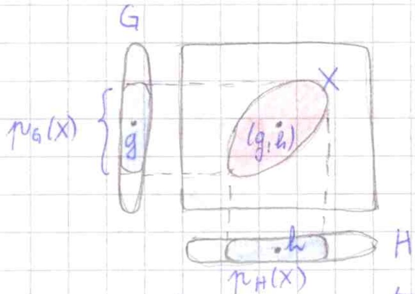
$K_n \square K_m$: konveksni podgrafi so vsi oblike $G \square H$, kjer je G induciran podgraf v K_n, H pa induciran podgraf v K_m

$G \square H$, X podgraf v $G \square H$:

$p_G(X) = \{ g \in V(G) \mid (g,h) \in X \}$

$p_H(X) = \{ h \in V(H) \mid (g,h) \in X \}$

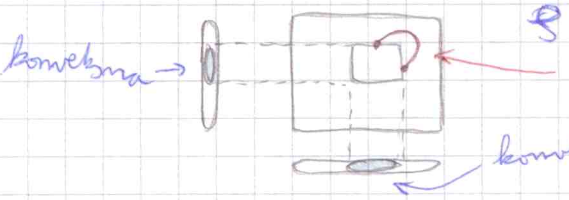
↑ projekcija



p_G in p_H razumemo tudi kot podgrafa porojena s tema množicama vozlišč.

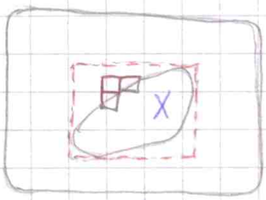
Trditev. Podgraf X produkta $G \square H$ je konveksen natanko tedaj, ko je $X = p_G(X) \square p_H(X)$, kjer sta $p_G(X)$ in $p_H(X)$ konveksna podgrafa v G oz. v H.

Skica dokaza: ($\Leftarrow$): Če je $X = p_G(X) \square p_H(X)$:



S protislovjem. Pa denimo, da ni konveksen. Potem $\exists$ najkrajša pot med dvema točkama, ki ne leži v celoti v X. Projeciramo jo na G in H. Potem hitro vidimo, da mora biti vsaj eden od faktorjev nekonveksen.

($\Rightarrow$):



Izrek (Sabidussi–Vizing, 1959, 1963)
Vsak povezan graf ima enolično faktorizacijo (na

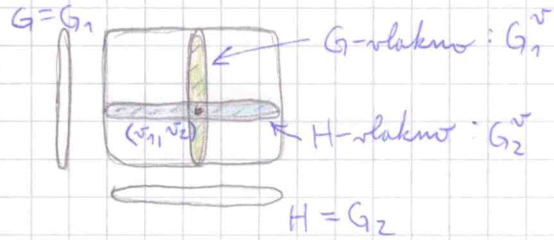
pragrafe) glede na kartezični produkt grafov. (Enolično do vrstnega reda faktorjev.)

Dokaz. Naj bo X povezan graf in naj bosta:

$$G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$$
$$H = H_1 \square H_2 \square \dots \square H_\ell$$

njegovi faktorizaciji na pragrafe.

Vpeljimo oznako:

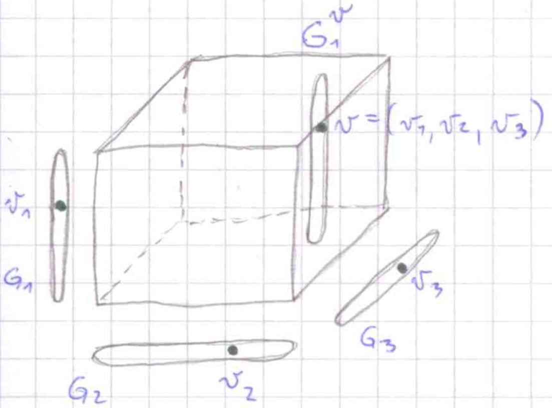


$G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$, $v \in G$:

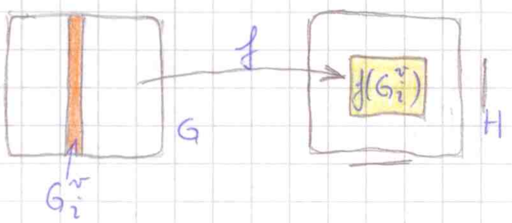
$v = (v_1, v_2, \dots, v_k)$

G_i^v ... graf porojen z vozlišči
$\{(v_1, \dots, v_{i-1}, x, v_{i+1}, \dots, v_k);\ x \in V(G_i)\}$

$G_i^v \cong G_i$



Naj bo $f: G \longrightarrow H$ izomorfizem. Za poljuben G_i^v si poglejmo $f(G_i^v)$.



- G_i^v je konveksen $\Rightarrow$ $f(G_i^v)$ je konveksen $\overset{\text{TRDITEV}}{\Rightarrow}$
  Toda G_i^v je pragraf $\Rightarrow$ $f(G_i^v)$ je pragraf $\Rightarrow$
  $\exists j\ \exists u \in H \ni: f(G_i^v) \subseteq H_j^u$.

- poglejmo $f^{-1}(H_j^u) \supseteq G_i^v$ $\Rightarrow$ $f^{-1}(H_j^u) = G_i^v$ oz.
  izomorfizem   konveksna $f(G_i^v) = H_j^u$

Torej f slika vlakna v vlakna. Če pogledamo vlakna iz u (teh je k), se preslikajo v različna vlakna v H. In obratno za f^{-1}. Torej je $k=l$. Celo več, vsi faktorji so enaki (do permutacije koordinat $1,2,\dots,k$).

Kako pa algoritmično poiščemo to faktorizacijo?

Zgodovina hitrih algoritmov:

1985: $O(n^{4.5})$

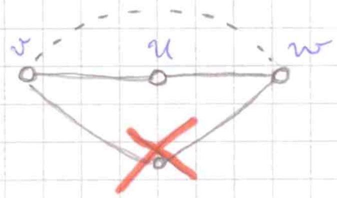
1987: $O(n^4)$

$\boxed{1992: O(mn)}$

1992: $O(m \log n)$

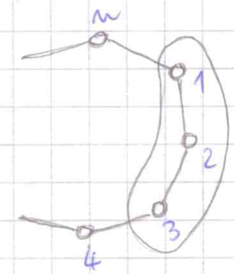
2007: $O(m)$

Def. Naj bosta $uv, uw \in E(G)$, $vw \notin E(G)$. Tedaj sta povezavi uv, uw v relaciji τ, če je u edini skupni sosed od v in w.

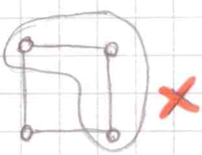


Zgledi:

C_n :

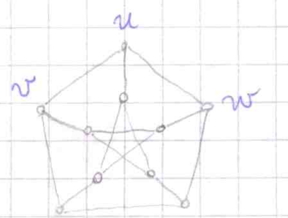


C_4 :



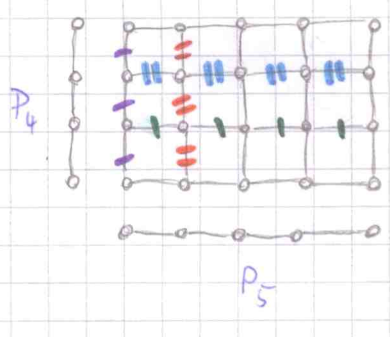
Noben par ni v relaciji τ. (V polnem grafu tudi ne moremo najti takih dveh povezav.)

P :



Nima 4-ciklov. Vsaki dve incidenčni povezavi sta v relaciji τ.

$P_4 \square P_5$:



Izrek. Relacija $(\Theta \cup \tau)^*$ je produktna relacija. Natančneje, vsak ekvivalenčni razred določa graf, sestavljen iz izomorfnih grafov, ki določajo en faktor faktorizacije na pragrafe.

$(\Theta^* \cup \tau^*)^* = (\Theta \cup \tau)^*$

Posledica. Faktorizacijo povezanega podgrafa na prafaktorje lahko določimo v času $O(mn)$.

Dokaz. Izračunamo $(\Theta \cup \tau)^*$. τ ✓ $(\ldots)^*$ ✓

Θ ? Nas stane $O(m^2)$.

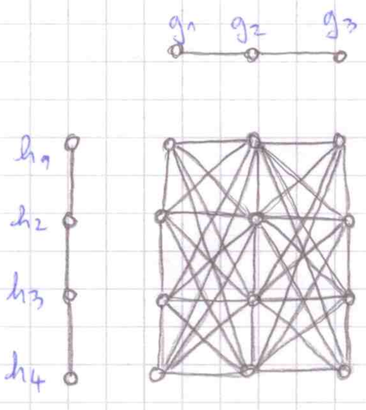
Def. $e \Theta_1 f$, če je $e \Theta f$ in je $e \in T$ (T je vnaprej izbrano fiksno vpeto drevo v G) ter $f \in G$. $\Theta_1 \ldots O(mn)$.

Lema. $\Theta_1^* = \Theta^* \Rightarrow (\Theta \cup \tau)^* = (\Theta_1 \cup \tau)^*$.

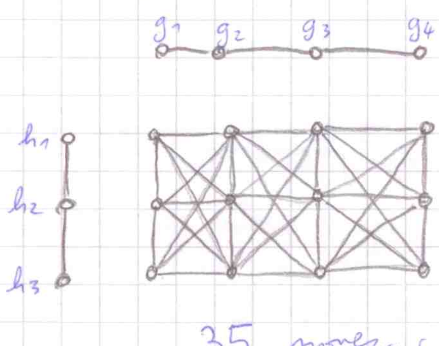
9. LEKSIKOGRAFSKI PRODUKT GRAFOV IN PROBLEM IZOMORFIZMA

Def. Naj bosta G, H poljubna grafa. Tedaj je njun leksikografski produkt, $G \circ H$, graf z $V(G \circ H) = V(G) \times V(H)$ in $(g,h)(g',h') \in E(G \circ H)$ če je bodisi $g = g'$ in $hh' \in E(H)$, bodisi je $gg' \in E(G)$.

Zgled. $P_3 \circ P_4$ $P_4 \circ P_3$



41 povezav



35 povezav