6. DINAMIČNI LOKACIJSKI PROBLEM

- Imamo sistem, ki ga modeliramo z grafom. Vsi grafi bodo povezani.
- V sistemu imamo "napravo", ki jo lahko premikamo po sistemu. Če se ta vir nahaja v vozlišču u, pravimo, da je **stanje sistema** u.
- Stanje sistema lahko spremenimo, recimo iz u v w. **Cena** za to je $d_G(u,w)$.
- V sistem prihaja zaporedje **zahtev**: $z_1, z_2, \dots$
  Če smo v stanju s_i, tedaj je cena za izvedbo zahteve z_i $d(s_i, z_i)$.
- Na začetku je sistem v stanju $s_0 = z_0$.

Lokacijski problem: Za dano zaporedje zahtev $z_1, z_2, \dots, z_k$ določi zaporedje stanj $s_1, s_2, \dots, s_k$ tako da je

$$\sum_{i=1}^{k} \left(d(s_{i-1}, s_i) + d(s_i, z_i) \right) \quad \text{minimalna.}$$

- Preden izvedemo zahtevo z_i, lahko prestavimo vir iz s_{i-1} v s_i.

Dinamični lokacijski problem: to je lokacijski problem, v katerem ne poznamo celotnega zaporedja zahtev (ki prihajajo v sistem on-line).

Def. Algoritem za DLP deluje **znotraj k-okna**, če stanje s_i določi na osnovi zahtev $z_i, z_{i+1}, \dots, z_{i+k-1}$.

$WX(G) = k$, če obstaja optimalen algoritem za DLP, ki deluje znotraj k-okna in je k najmanjši tak. Če tak k ne obstaja, tedaj postavimo $WX(G) = \infty$.

WX ... **w**indow inde**x**

Zgled.

1. $G = K_2$:

$s_0 = z_0 = u$

$z_1 = v$ | $s_1 = v$, $s_2 = u$ } cena = 2 $s_1 = u$, $s_2 = u$ } cena = 1
$z_2 = u$

$z_1 = v$ | $s_1 = u$, $s_2 = u$ } cena = 2 $s_1 = v$, $s_2 = v$ } cena = 1
$z_2 = v$

$\Rightarrow WX(G) \neq 1$

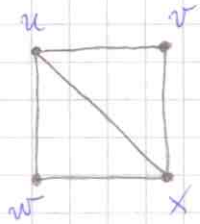
$z_1 = v, \quad z_2 = u \Rightarrow s_1 = u$

$z_1 = v, \quad z_2 = v \Rightarrow s_1 = v$

Pravilo: Imamo s_{i-1} in zahtev z_i, z_{i+1}.
Potem je s_i **večina** od $\{s_{i-1}, z_i, z_{i+1}\}$

$WX(K_2) = 2$.

2. $K_4 - e$:



$s_0 = z_0 = u$

$z_1 = x$
$z_2 = v$
$z_3 = w$
$z_4 = x$

$s_i = u$ za $i \geq 1$
$\Rightarrow$ cena = 4

$s_i = x$ za $i \geq 1$
$\Rightarrow$ cena = 3

zahteve: $x, \underbrace{v, w, v, w, v, w, \ldots, v, w}_{k\text{-krat } v, w}$

$u \to$ $s_1 = u \Rightarrow$ cena $= 2k+1$
$s_1 = x \Rightarrow$ cena $= 2k+2$

$x \to$ $s_1 = u \Rightarrow$ cena $= 2k+2$
$s_1 = x \Rightarrow$ cena $= 2k+1$

$WX(K_4 - e) = \infty$

Trditev. Za vsak graf G z vsaj eno povezavo velja:
$$WX(G) \geq 2.$$

Dokaz. V G izberi poljubno povezavo uv in nato uporabi argument iz primera K_2. ∎

Trditev. Za vsak $n \geq 2$ velja: $WX(K_n) = n$.

Dokaz. $V(K_n) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $s_0 = x_1$

zahteve: $x_2, x_3, \ldots, x_n \,|$

(1) če je naslednja zahteva $x_1 \Rightarrow s_1 = x_1$

(2) če je naslednja zahteva $x_2 \Rightarrow s_1 = x_2$

$\Rightarrow WX(K_n) \geq n$.

Obratno: pogledamo zaporedje

$$\underbrace{s_{i-1}, \underbrace{z_i, z_{i+1}, \ldots, z_{i+n-1}}_{n}}_{n+1} \qquad (*)$$

Naj bo x prvo vozlišče v $(*)$, ki se pojavi drugič (po Dirichletovem načelu to res obstaja). Tedaj postavimo $s_i = x$. ∎

Trditev. Za poljubna grafa G in H je $WX(G \square H) = \max\{WX(G), WX(H)\}$.

Dokaz. $s_0 = z_0 = (g_0, h_0)$

zahteve: $(g_1, h_1), (g_2, h_2), \ldots, (g_k, h_k)$

stanja: $(g_1', h_1'), (g_2', h_2'), \ldots, (g_k', h_k')$ $\qquad d = d_{G \square H}$

$$(*) \quad \sum_{i=1}^{k} \left[d((g_{i-1}', h_{i-1}'), (g_i', h_i')) + d((g_i', h_i'), (g_i, h_i)) \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \left[d_G(g_{i-1}', g_i') + d_G(g_i', g_i) \right] + \sum_{i=1}^{k} \left[d_H(h_{i-1}', h_i') + d_H(h_i', h_i) \right]$$

$(**)$

(*) optimalna (minimalna) $\Leftrightarrow$ (**) optimalni (minimalna) $\Leftrightarrow$ $\{g_i'\}$ optimalno zaporedje stanj v G in $\{h_i'\}$ optimalno zaporedje stanj v H ■

GRAFI S KONČNO ŠIRINO OKNA

- polni grafi
- njihovi kartezični produkti

$\Big\}$ $K_{n_1} \square K_{n_2} \square \ldots \square K_{n_r}$ ... **Hammingovi grafi**

$$WX(G_1 \square G_2 \square \ldots \square G_n) = \max\{WX(G_1), WX(G_2), \ldots, WX(G_n)\}$$

- ti grafi niso zaprti za podgrafe

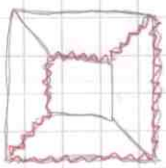
  H podgraf v G, $WX(G) < \infty \not\Rightarrow WX(H) < \infty$

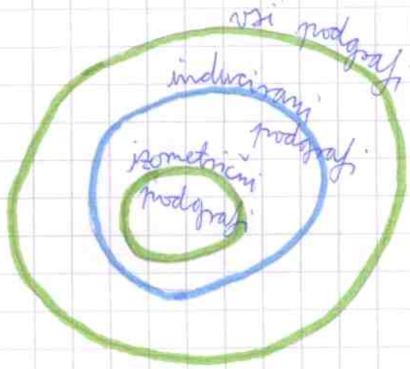
  $K_4 - e$ podgraf v K_n, $n \geq 4$

- ti grafi niso zaprti niti za izometrične podgrafe

velja: $WX(Q_3) = 2$

$WX(C_6) = \infty$





6'. RETRAKTI

__Def.__ Preslikava $f: G \to H$ je __homomorfizem__, če ohranja povezave: $uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H)$.

$f: G \to H$ je __šibki homomorfizem__, če

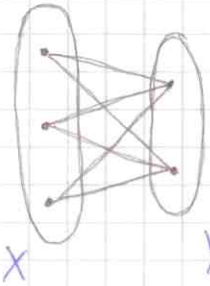
$$uv \in E(G) \Rightarrow \begin{cases} f(u)f(v) \in E(H) \\ f(u) = f(v) \end{cases}$$

f homomorfizem $\Rightarrow$ f šibki homomorfizem

Zgled. Naj bo G poljuben dvodelni graf. Dokaži, da obstaja homomorfizem $f: G \to K_2$.

$V(K_2) = \{x, y\}$ $\quad$ $V(G) = X \cup Y$

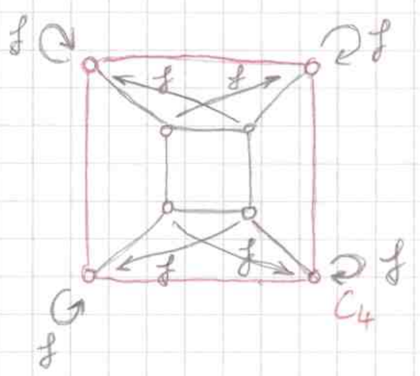
$$f: u \longmapsto \begin{cases} x, & \text{če } u \in X \\ y, & \text{če } u \in Y \end{cases}$$

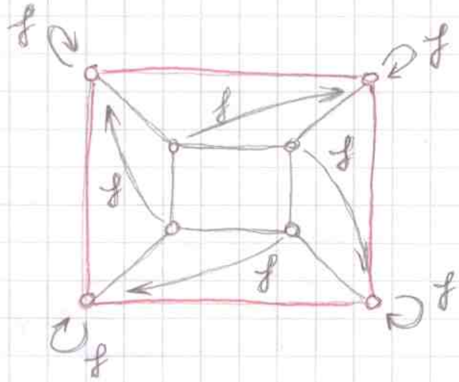


Vzemimo $uv \in E(G)$. BŠS je $u \in X$ in $v \in Y$.

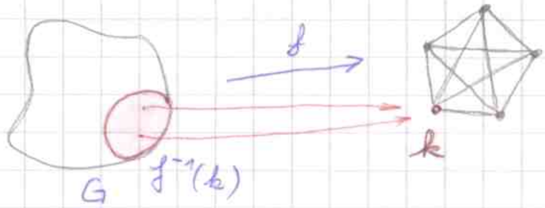
$f(u) = x$ in $f(v) = y$ $\Rightarrow$ $f(u)f(v) \in E(K_2)$.

Zgled. Poišči $f: Q_3 \to C_4$, tako da bo f homomorfizem.





Zgled. $f: G \longrightarrow K_n$ homomorfizem

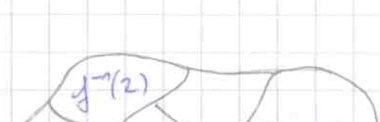


$\forall k \in K_n: f^{-1}(k)$ neodvisna množica

$\Updownarrow$ def.

inducirani podgraf je prazen (popolnoma nepovezan)

G:



Če $\exists f: G \to K_n \Rightarrow \chi(G) \le n$.

$$\chi(G) \overset{\text{def.}}{=} \min\{n \mid \exists f: G \to K_n \text{ homomorfizem}\}$$

$\nwarrow$ kromatično število

Def. Preslikava $f: G \to H$ je **skrčitev**, če $\forall u,v \in V(G)$:
$$d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u,v).$$

Trditev. Preslikava f je skrčitev natanko tedaj, ko je šibki homomorfizem.

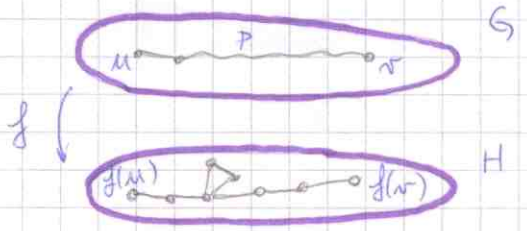
Dokaz. Naj bo f skrčitev. $uv \in E(G)$. Torej je $d_G(u,v) = 1$.
$$\Rightarrow \quad d_H(f(u), f(v)) \leq d_G(u,v) = 1.$$

$\ldots = 0$
$\Rightarrow f(u) = f(v)$

$\ldots = 1$
$\Rightarrow f(u)f(v) \in E(H)$.

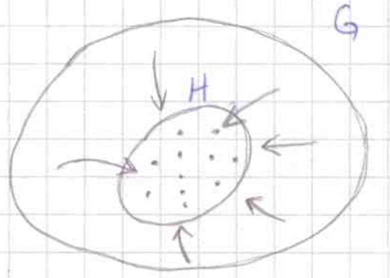
Torej je f šibki homomorfizem.

Obratno: Naj bo f šibki homomorfizem. $u,v \in V(G)$, $d_G(u,v) = k$. Naj bo P najkrajša u,v-pot.



Poglejmo $f(P)$: $f(P)$ je sprehod med $f(u)$ in $f(v)$. Torej imamo pot med $f(u)$ in $f(v)$, ki je dolžine $\leq |P|$.
$$k = d_G(u,v) = |P| \geq d_H(f(u), f(v)).$$
■

Def. Podgraf H grafa G je **retrakt** grafa G, če obstaja homomorfizem $r: G \to H$, tako da je $r|_H = id$. Preslikavi r pravimo **retrakcija**.



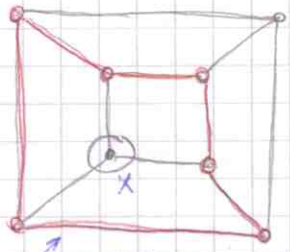
endomorfizem ≡ homomorfizem grafa vase

$f^2 = f$ ... idempotentna

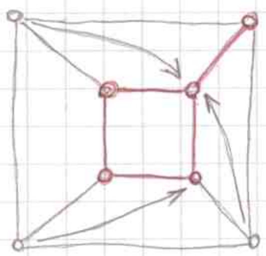
retrakcija = idempotentni endomorfizem

Šibki retrakt, **šibka retrakcija**: analogna definicija, kjer je r šibki homomorfizem.

Zgled.



izometrični podgraf, ki ni retrakt



retrakt

Kam preslikati točko x, da bo preslikava retrakcija? Ne gre!

Zgled. $H \subseteq G$, $r: G \longrightarrow H$ retrakcija.

Naj bo $\chi(H) = n$. $\Rightarrow$ $\exists f: H \longrightarrow K_n$ homomorfizem

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[rr, bend right, "f \circ r"'] & H \arrow[r, "f"] & K_n \end{tikzcd}$$

$\exists f \circ r: G \to K_n$ homomorfizem $\Rightarrow$ $\chi(G) \leq \chi(H) \leq \chi(G)$

$\Rightarrow$ $\chi(G) = \chi(H)$.

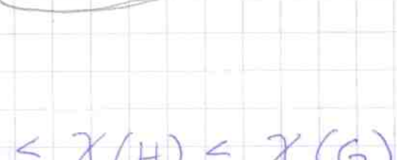
Trditev. (Šibki) retrakti so izometrični podgrafi.

Dokaz. Naj bo H retrakt v G. $r: G \to H$ retrakcija.

$d_H(u,v) = d_G(u,v) \quad \forall u,v \in V(H)$

Ker je H podgraf v G, je $d_G(u,v) \leq d_H(u,v)$.

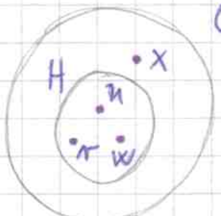
Naj bo P najkrajša u,v-pot v G.



Poglejmo $r(P)$: $r(P)$ je sprehod v H med $r(u) = u$ in $r(v) = v$, ki vsebuje (kvečjemu) enako število povezav (štete z večkratnostjo) kot P. Ta sprehod vsebuje u,v-pot v H, ki je dolžine kvečjemu $|P|$. Torej: $d_H(u,v) \leq d_G(u,v)$. ∎

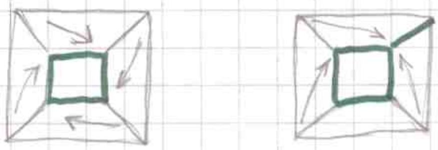
Trditev. (Šibki) retrakt medianskega grafa je medianski graf.

Dokaz. Naj bo H (šibki) retrakt medianskega grafa G in naj bo r ustrezna retrakcija $G \to H$. Naj bodo $u, v, w \in V(H)$. Tedaj imajo ta vozlišča kot vozlišča iz G enolično mediano v G: x.
Poglejmo si $r(x)$. Ker je x na najkrajši poti med u in v, je $r(x)$ na najkrajši poti med $r(u)=u$ in $r(v)=v$ v grafu H. Analogno velja za u,w in v,w.



Torej je $r(x)=x$, saj bi sicer u, w, v imela dve mediani v G. $r: G \to H$, $r(x)=x \Rightarrow x \in V(H)$. Torej je $x = r(x)$ tudi enolična mediana za u, v, w v grafu H. ■

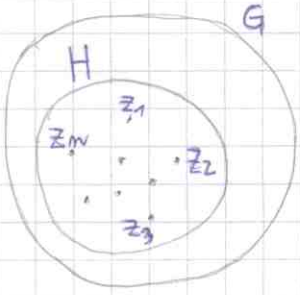
Primera.



Konec 6!

Trditev. Naj bo G graf s končno širino okna in naj bo H njegov šibki retrakt. Tedaj je $WX(H) \leq WX(G)$.

Dokaz. Naj bo $z_1, z_2, \dots, z_n$ zaporedje zahtev grafa H in naj bo $WX(G) = n$. Naj bo $s_1, s_2, \dots, s_n$ optimalna izbira stanj za to zaporedje v grafu G.



To zaporedje lahko izberemo, ker je $WX(G) = n$. Trdimo, da je $r(s_1), r(s_2), \dots, r(s_n)$ optimalna izbira za graf H. Če to dokažemo, je trditev dokazana.
Naj bo $s_1', s_2', s_3', \dots, s_n'$ poljubna (optimalna) izbira stanj v H.

$$\sum_{i=1}^{m} \left(d_H(s_{i-1}', s_i') + d_H(s_i', z_i)\right) \geq \sum_{i=1}^{m} \left(d_G(s_{i-1}, s_i) + d_G(s_i, z_i)\right) \geq$$

Zahteve $z_1, \dots, z_m$ lahko gledam tudi kot zahteve v grafu G. Zaporedje $s_1', \dots, s_m'$ ravno tako lahko gledam kot zaporedje stanj v G. Toda $s_1, \dots, s_m$ je optimalna rešitev v G, zato je $s_1, \dots, s_m$ vsaj tako dobro zaporedje kot je $s_1', \dots, s_m'$. (pri tem $d_H(-,-) = d_G(-,-)$.)

$$\geq \sum_{i=1}^{m} \left(d_H(r(s_{i-1}), r(s_i)) + d_H(r(s_i), r(z_i))\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(d_H(r(s_{i-1}), r(s_i)) + d_H(r(s_i), z_i)\right) \qquad \blacksquare$$

Izrek. Naj bo G povezan graf. Tedaj je $WX(G) < \infty$ natanko tedaj, ko je G šibki retrakt Hammingovega grafa (= kartezični produkt polnih grafov).

Opombe:
- šibki retrakti Hammingovih grafov $\equiv$ kvazimedianski grafi. Tvorijo eno najbolj naravnih nedvodelnih posplošitev medianskih grafov.
- Dvodelni kvazi-medianski grafi $\Leftrightarrow$ medianski grafi.

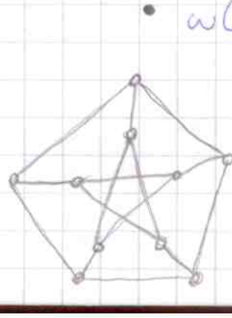
Izrek. $WX(G) = 2$ natanko tedaj, ko je graf medianski.

Kako bi izračunali $WX(G)$, če je $WX(G) < \infty$?

$\omega(G)$ ... velikost največjega polnega podgrafa grafa G

- $\omega(G) = 2$, če je G dvodelni
- $\omega(K_n) = n$
- $\omega(G) = 2 \Leftrightarrow G$ je brez trikotnikov
- Petersenov graf:

GP(5,2):



$\rightarrow$ ni dvodelen

$\rightarrow \omega = 2$

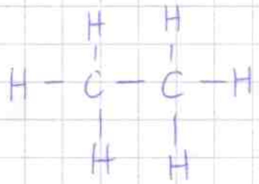
Algoritem za izračun $WX(G)$:

1. Preveri, ali je G kvazi-medianski graf.
2. Velja: če je $WX(G) < \infty$, tedaj je $WX(G) = \omega(G)$.

<u>Izrek</u>. $WX(G)$ lahko izračunamo v času $O(mn)$, kjer je $m = |E(G)|$, $n = |V(G)|$.

7. IZOMETRIJE V KEMIJSKI TEORIJI GRAFOV

molekula $\longmapsto$ graf molekule



$\longmapsto$

alkani — drevesa

C_4H_{10} .. kemiki so ugotovili, da s tem zapisom molekula ni enolično določena

7.1. WIENERJEV INDEKS

Harry Wiener (1947):

G graf, tedaj je <u>Wienerjev indeks</u>:

$$\boxed{W(G) = \frac{1}{2}\sum_{u\in V(G)}\sum_{v\in V(G)} d(u,v)}$$

<u>Zgled</u>. Izračunaj Wienerjev indeks za P_n (pot na n vozliščih).

$$W(P_n) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}(j-i) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=i+1}^{n} j - \sum_{j=i+1}^{n} i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} - i(n-i)\right) =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\left(-\frac{i^2}{2} - \frac{i}{2} - in + i^2\right)}_{\frac{i^2}{2} - \left(n+\frac{1}{2}\right)i} = \frac{n^2(n+1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2 - \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} =$$

$$= \frac{n^2(n+1)}{2} - n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{12}(2n+1)(n+1)n =$$