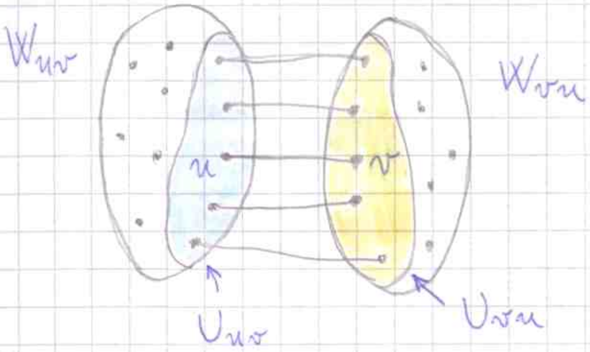
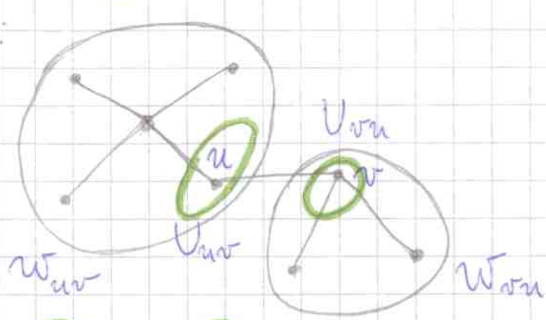
5. PREPOZNAVANJE MEDIANSKIH GRAFOV IN GRAFI BREZ TRIKOTNIKOV

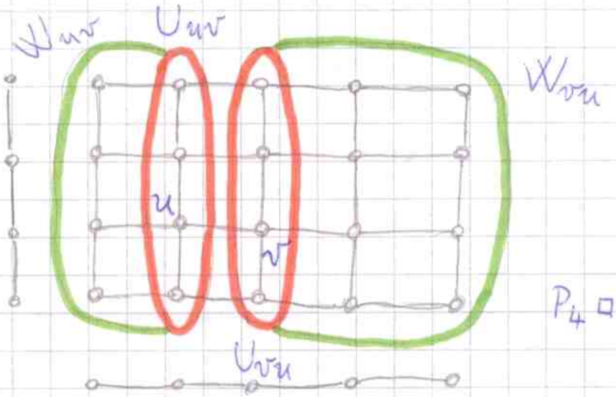
Medianski graf: $\forall u, v, w: \; |I(u,w) \cap I(v,w) \cap I(u,v)| = 1$.

Def. G povezan graf, $uv \in E(G)$. Tedaj je $U_{uv} = \{ w \mid w \in W_{uv},\ w \text{ ima soseda v } W_{vu} \}$.

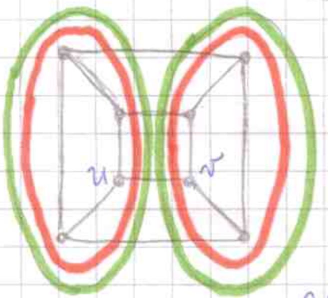


Zgledi:



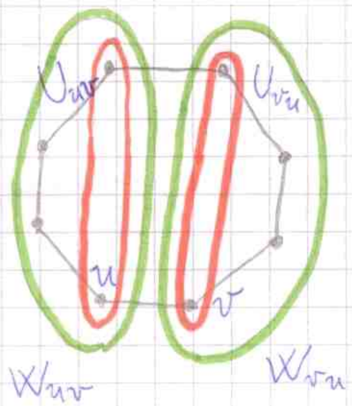


$P_4 \square P_5$



Q_3

$W_{uv} = U_{uv}$ $\quad$ $W_{vu} = U_{vu}$

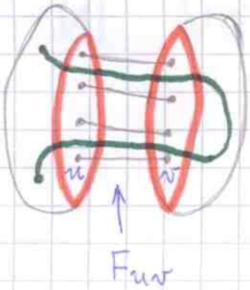


C_8

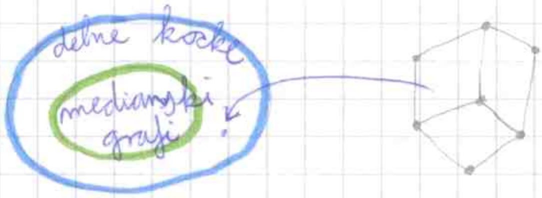
Izrek. Povezan dvodelen graf G je medianski $\iff$ za vsako povezavo $uv \in E(G)$ sta množici U_{uv} in U_{vu} konveksni. $\square$

Posledica. Vsak medianski graf je delna kocka.

Dokaz. G medianski, dvodelen.

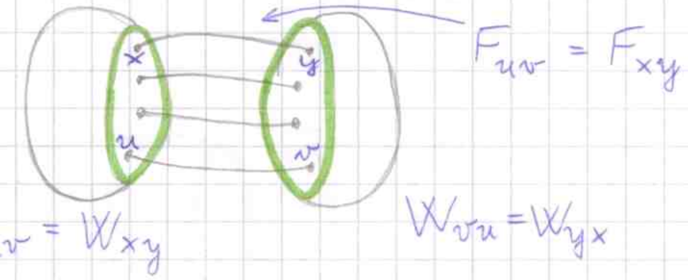


U_{uv} je konveksen $\Rightarrow$ W_{uv} je konveksen.



Lema. Naj bo G delna kocka in $uv \, \Theta \, xy$. Tedaj je $U_{uv} = U_{xy}$.

Dokaz. Ker je G delna kocka, je $W_{uv} = W_{xy}$. Nadalje je $F_{uv} = F_{xy}$. Potem je pa tudi $U_{uv} = U_{xy}$.



Algoritem: Medianski graf.

Vhod: povezan graf G (z m povezavami)

Izhod: TRUE, če je G medianski; FALSE sicer.

1. Če G ni delna kocka, vrni FALSE, stop.
2. Za vsak Θ^*-ekvivalenčni razred in njegovega predstavnika uv naredi:
   - 2.1. Izračunaj U_{uv} in U_{vu}.
   - 2.2. Za vsako povezavo xy iz roba U_{uv} oz. roba U_{vu} preveri, ali je v relaciji Θ s povezavo ab iz U_{uv} oz. iz U_{vu}. Če je, vrni FALSE, stop.
3. Vrni TRUE.

Izrek. Algoritem Medianski graf pravilno prepozna medianske grafe in ga lahko implementiramo v času $O(m^2)$.

Dokaz. Pravilnost: izrek + lema + D.N.*

Časovna zahtevnost: $\sum_{uv \in \{\text{predstavniki}\}} |U_{uv}| \leq \ldots O(m^2)$.

U_{uv}: 

Θ^*-razredi ... □

Ali lahko medianske grafe prepoznamo bistveno hitreje, tj. (skoraj) linearno?

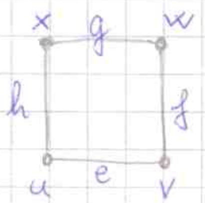
Grafi brez trikotnikov = grafi brez podgrafa K_3.

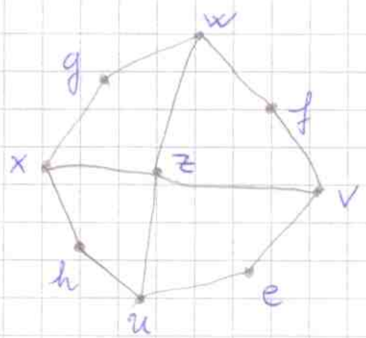
G graf, $G \longmapsto G^\Delta$:

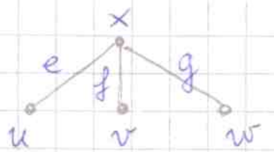
$V(G^\Delta) = V(G) \cup E(G) \cup \{z\}$

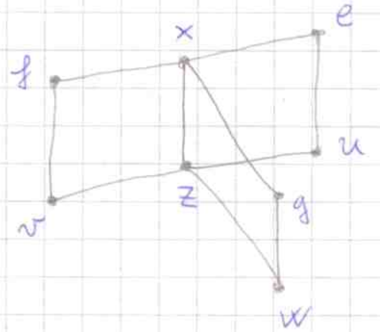
$E(G^\Delta) = \{zu \mid u \in V(G)\} \cup \{ue \mid u \in V(G)$, u incidenčna s povezavo $e\}$

Zgledi.

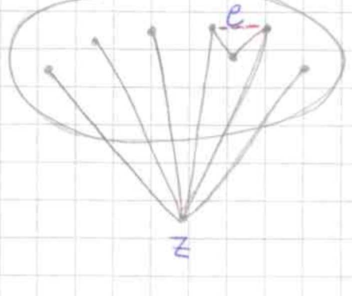


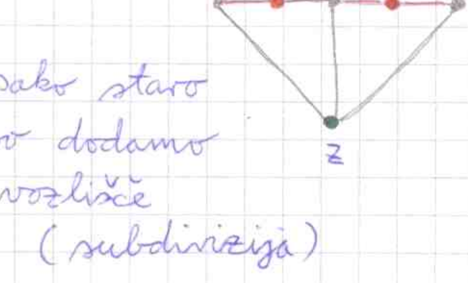






... graf knjiga

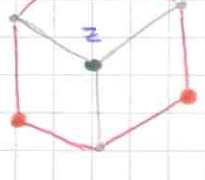




≅

Na vsako staro povezavo dodamo novo vozlišče (subdivizija)

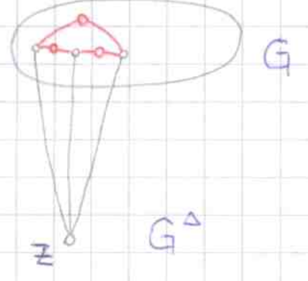
ni medianski



Izrek. Naj bo G poljuben graf. Tedaj je $G^\triangle$ medianski graf natanko tedaj, ko je graf G brez trikotnikov.

Skica dokaza.

($\Rightarrow$): Recimo, da G vsebuje trikotnik.



u, v, w nima mediane

$$d(u,v) = d(u,w) = d(v,w) = 2$$

Mediana bi bila možna le v primeru:

($\Leftarrow$): Naj bo G brez trikotnikov. Tedaj preverimo, da so v $G^\triangle$ vse množice U_{uv} konveksne. $\square$

Posledica. Naj bo $M(m,n)$ zahtevnost prepoznavanja, ali je dani graf z n vozlišči in m povezavami medianski. Tedaj je zahtevnost prepoznavanja, ali dani graf vsebuje trikotnik kvečjemu $O(M(m,m))$.

Če bi bilo $M(m,n) = O(m) \Rightarrow O(M(m,m)) = O(O(m)) = O(m)$.