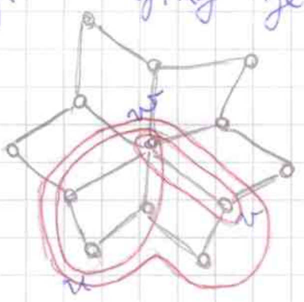
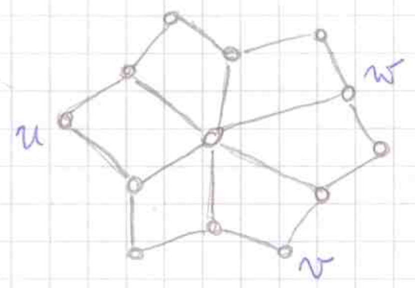
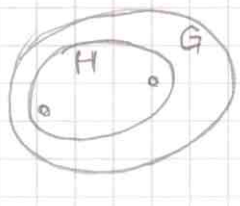
Naslednji graf je medianski:





4. PREPOZNAVANJE DELNIH KOCK

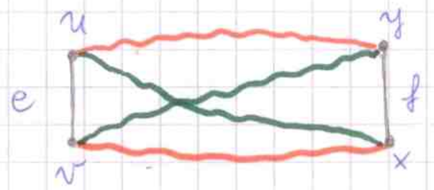
- $W_{uv} = \{ w \mid d(u,w) < d(v,w) \}$
- konveksnost



$\forall u,v \in V(H)$: vsaka najkrajša u,v-pot (iz G) leži v celoti v H

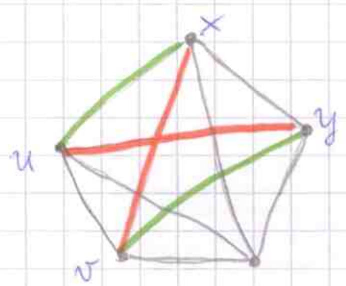
<u>Def.</u> Naj bo G povezan graf in $e = uv$, $f = xy \in E(G)$. Tedaj je <u>$e \Theta f$</u>, če velja:

$$d(u,x) + d(v,y) \neq d(u,y) + d(v,x).$$

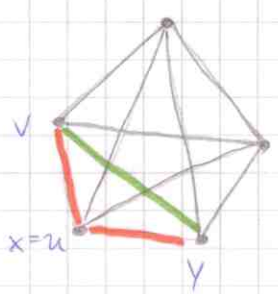


<u>Zgled</u>:

K_5:



K_5:

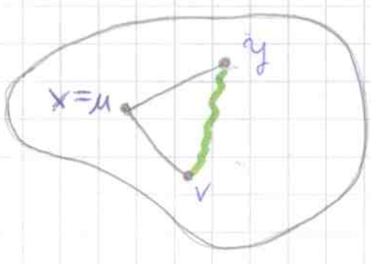


$d(u,x) = 0$

$d(v,y) = 1$

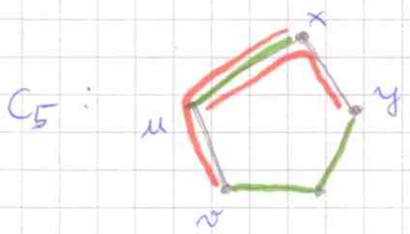
$d(u,y) = 1$

$d(v,x) = 1$

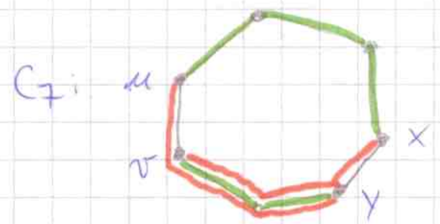


1. $d(v,y) = 1 \Rightarrow uv \,\Theta\, xy$
2. $d(u,y) = 2 \Rightarrow \neg(uv \,\Theta\, xy)$

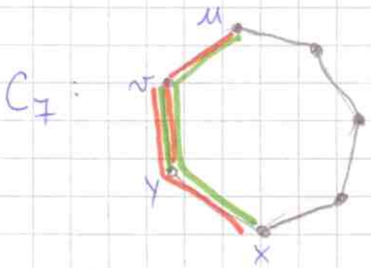
Incidenčni povezavi (povezavi s skupnim krajiščem) sta v relaciji Θ $\Leftrightarrow$ ležita v skupnem trikotniku.



$1+2 \neq 2+2 \quad uv\,\Theta\,xy$



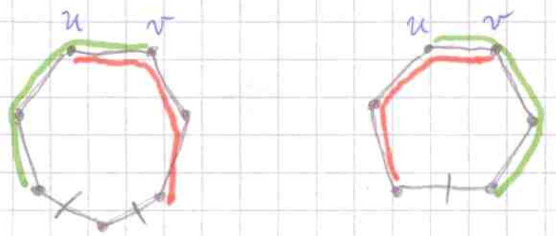
$3+2 \neq 3+3 \quad uv\,\Theta\,xy$



$3+1 = 2+2 \quad \neg(uv\,\Theta\,xy)$

V ciklu je povezava v relaciji Θ s svojimi nasprotnimi povezavami.

Lema 1. Naj bo G povezan graf in P najkrajša pot v G. Tedaj nobeni različni povezavi na P nista v relaciji Θ.



Dokaz. $P = u_0 u_1 \ldots u_k$; $k \geq 2$

$e = u_i u_{i+1}$, $\quad f = u_j u_{j+1}$, $\quad i \neq j$ (BŠS: $i<j$)

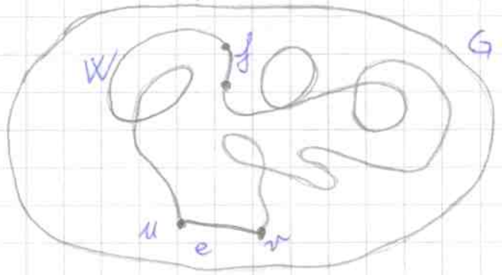
$$d(u_i, u_j) = d(u_{i+1}, u_{j+1})$$
$$d(u_i, u_{j+1}) = d(u_{i+1}, u_j) + 2$$

$$d(u_i, u_j) = d(u_i, u_{j+1}) - 1$$
$$d(u_{i+1}, u_{j+1}) = d(u_{i+1}, u_j) + 1$$

$$d(u_i, u_j) + d(u_{i+1}, u_{j+1}) = d(u_i, u_{j+1}) + d(u_{i+1}, u_j)$$

■

Lema 2. Naj bo G povezan graf in $e = uv$ njegova povezava. Naj bo W sprehod med u in v, ki ne vsebuje povezave e. Tedaj W vsebuje povezavo f, tako da je $e \,\Theta\, f$.



Dokaz. $W: u = w_0, w_1, w_2, \ldots, w_k = v$

$$\lambda = \sum_{i=1}^{k} \left(d(u, w_{i-1}) + d(v, w_i) - d(u, w_i) - d(v, w_{i-1}) \right)$$

$$= d(u, w_0) + \cancel{d(v, w_1)} - \cancel{d(u, w_1)} - d(v, w_0)$$
$$+ \cancel{d(u, w_1)} + \cancel{d(v, w_2)} - \cancel{d(u, w_2)} - \cancel{d(v, w_1)}$$
$$\vdots$$
$$+ \cancel{d(u, w_{k-1})} + d(v, w_k) - d(u, w_k) - \cancel{d(v, w_{k-1})}$$

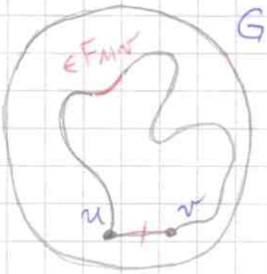
$$= \underbrace{d(u, w_0)}_{0} - \underbrace{d(v, w_0)}_{1} + \underbrace{d(v, w_k)}_{0} - \underbrace{d(u, w_k)}_{1} = -2$$

$$\Rightarrow \exists i \ni: d(u, w_{i-1}) + d(v, w_i) - d(u, w_i) - d(v, w_{i-1}) \neq 0$$
$$\Rightarrow uv \,\Theta\, w_{i-1} w_i \quad \blacksquare$$

Opomba. V drevesu nobeni dve različni povezavi nista v relaciji Θ.

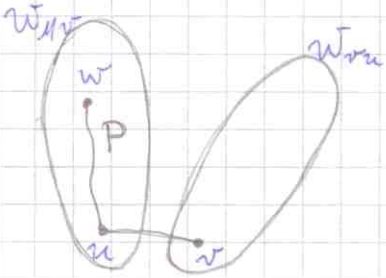
Lema 3. Naj bo G povezan dvodelni graf in $e = uv \in E(G)$.
Naj bo $F_{uv} = \{ f \mid e \,\Theta\, f \}$
Tedaj ima graf $G \setminus F_{uv}$ dve povezani komponenti.
Natančneje, ti povezani komponenti sta W_{uv} in W_{vu}.

Dokaz. u in v sta v različnih komponentah grafa $G \setminus F_{uv}$



$e \in F_{uv}$

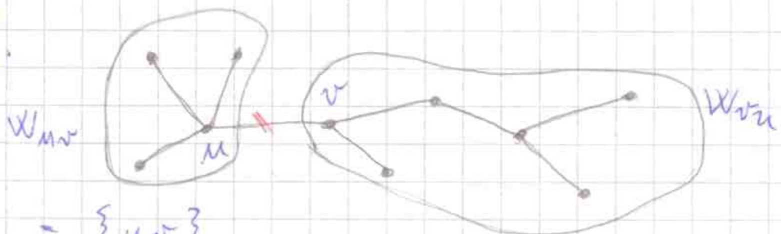
Po lemi 2 uničimo vse poti, ki potekajo med u in v: natančneje, v grafu $G \setminus F_{uv}$ ni več nobene poti med u in v. Zato sta u in v v različnih komponentah tega grafa.



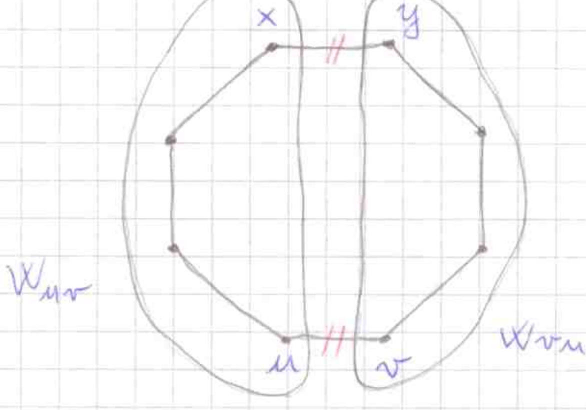
$w \in W_{uv}$. Najkrajša pot P med u in w leži v W_{uv}. Potem pa je tudi $v \to P$ najkrajša pot. Po lemi 1 nobena povezava na P ni v relaciji Θ z uv. Z drugimi besedami, nobena povezava na P ni v F_{uv}.

Zato sta u in w v isti komponenti grafa $G \setminus F_{uv}$. ■

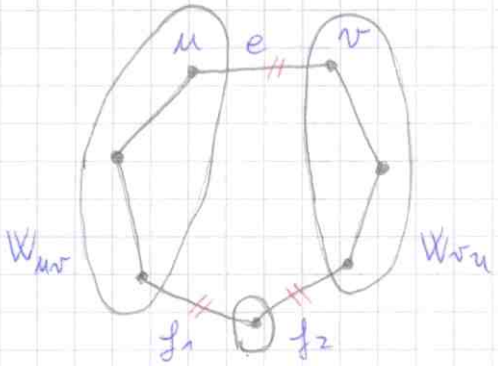
Zgled.



$F_{uv} = \{uv\}$

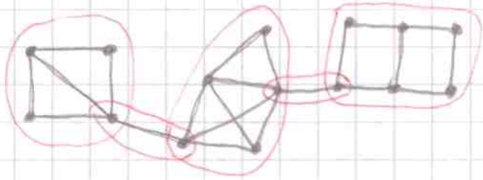


$F_{uv} = \{uv, xy\}$



$F_{uv} = \{e, f_1, f_2\}$

Kaj so bloki?



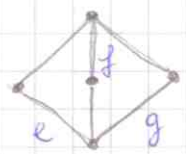
Maksimalni 2-povezani podgrafi ali K_2.

Bloki tvorijo drevesno strukturo

Relacija Θ $(\Theta \subseteq E(G) \times E(G))$ je
- refleksivna
- simetrična $(e \Theta f \Rightarrow f \Theta e)$

in (v splošnem) ni tranzitivna.

Primer.



$K_{2,3}$

$e \Theta f$, $f \Theta g$, toda, $\neg e \Theta g$.

Izrek. Za povezan graf G so ekvivalentne naslednje trditve:

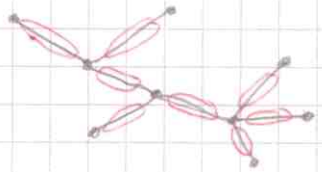
(i) G je delna kocka

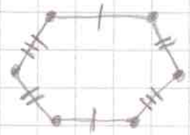
(ii) G je dvodelen in za vsako povezavo uv sta W_{uv} in W_{vu} konveksna

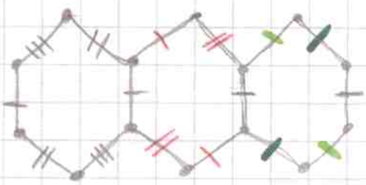
(iii) G je dvodelen in Θ je ekvivalenčna relacija

Θ-razred ... ekvivalenčni razred relacije Θ (kadar je tranzitivna)

Zgled. T drevo: Θ je trivialna, Θ-razredi so posamične povezave

T: 

C_{2n}: 



Izrek.

5.11.2009

G delna kocka $\Leftrightarrow$ dvodelen + W_{uv} konveksni $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow$ $\Theta = \Theta^*$ + dvodelen.

Θ^* ... tranzitivna ovojnica relacije Θ

Dokaz: (i) $\Rightarrow$ (ii): G delna kocka. Naj bo G izometrična v Q_d. Tedaj je G dvodelni, saj je podgraf dvodelnega grafa.

Naj bo $uv \in E(G)$. Torej se u in v razlikujeta v natanko eni koordinati. BŠS naj bo to 1. koordinata.

$$u = 0\,u_2 \dots u_d$$
$$v = 1\,u_2 \dots u_d$$

$w \in W_{uv} \Leftrightarrow w = 0\,w_2 \dots w_d$

$w, z \in W_{uv}$ $\quad w = 0 \dots$
$\quad z = 0 \dots$

P naj bo poljubna najkrajša w,z-pot; tedaj imajo vsa vozlišča na P prvo koordinato enako 0. $P \subseteq W_{uv}$.
$\Rightarrow$ W_{uv} konveksna.

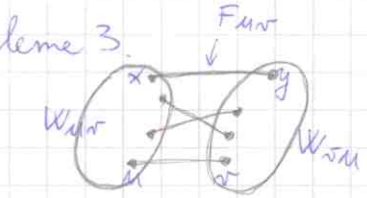
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Naj bodo W_{uv} konveksne množice

Θ je tranzitivna

$uv \in E(G)$

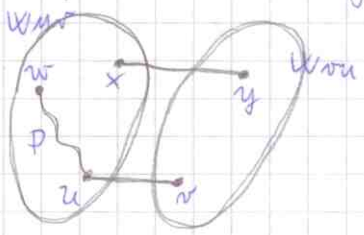
$F_{uv} = \{ f \mid e \Theta f \}$

Spomnimo se leme 3.



$xy \in F_{uv} \Rightarrow W_{xy} = W_{uv}$

Recimo nasprotno: naj bo $w \in W_{uv} \setminus W_{xy}$



$w \notin W_{xy} \Rightarrow \underline{w \in W_{yx}}$

$\underline{v \in W_{yx}}$ (*)

P naj bo najkrajša pot med u in w. Tedaj je $Q: v \to P$ najkrajša pot med $\underline{v \text{ in } w}$. (**)

$(*) + (**) \Rightarrow Q \subseteq W_{yx} \Rightarrow u \in W_{yx}$. $\rightarrow\leftarrow$, saj je v resnici $u \in W_{xy}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): G dvodelen, Θ tranzitivna

Tedaj je Θ ekvivalenčna relacija in razbije $E(G)$ na ekv. razrede $E_1, E_2, \ldots, E_k$. Naj bodo $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ky_k$ predstavniki teh ekvivalenčnih razredov. Definirajmo:

$$\alpha: V(G) \to Q_k$$

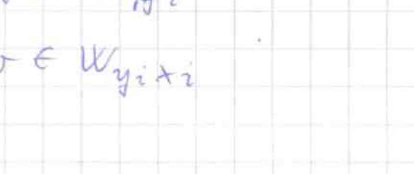
$$\alpha(v) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \ldots, \alpha_k(v))$$

takole:

$$\alpha_i(v) = \begin{cases} 1; & v \in W_{x_iy_i} \\ 0; & v \in W_{y_ix_i} \end{cases}$$

Trdim, da je α izometrija.

Naj bo $uv \in E(G)$. Tedaj $\exists!\, i \ni: uv \in E_i$. Zato je $\alpha_i(u) \neq \alpha_i(v)$.

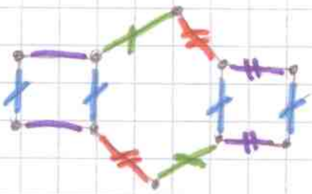


Za $i \neq j$: $\alpha_j(u) = \alpha_j(v)$. Tedaj α slika povezave v povezave. Če je P najkrajša v,u-pot,

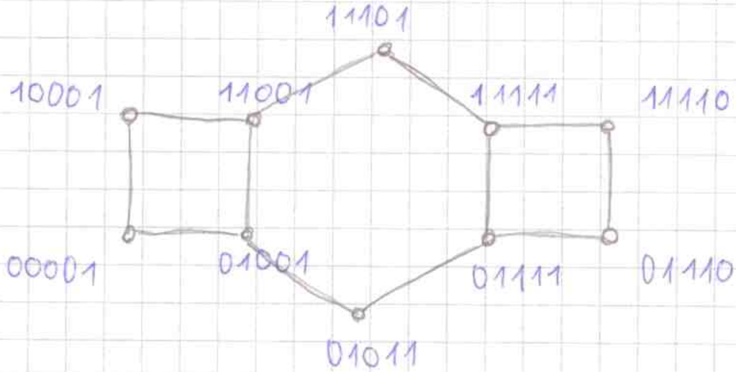
tedaj na vsakem koraku spremenimo po eno koordinato. Celo več, vse te koordinate so med seboj različne, saj povezave na P paroma niso v relaciji Θ in zato pripadajo različnim ekvivalenčnim razredom E_i. Zato je

$$d_{Q_k}(\alpha(u), \alpha(v)) = d_G(u,v).$$

Zgled.



5 ekvivalenčnih razredov: $E_1, \ldots, E_5$



Algoritem Delna kocka

6.11.2009

Vhod: povezan graf G z m povezavami

Izhod: TRUE, če je G delna kocka; FALSE sicer

1. Če graf ni dvodelen, vrni FALSE, stop.
2. Izračunaj Θ in Θ^*.
3. Če je $\Theta \neq \Theta^*$ vrni FALSE, sicer vrni TRUE.

Izrek: Algoritem Delna kocka pravilno prepozna delne kocke in ga lahko implementiramo v času $O(m^2)$.

Dokaz: Pravilnost sledi iz izreka, po točki (iii).

Časovna zahtevnost:

korak 1 ✓ (linearni čas)

korak 2: $\Theta: d(u,x) + d(v,y) \neq d(u,y) + d(v,x)$ $\forall$ par povezav

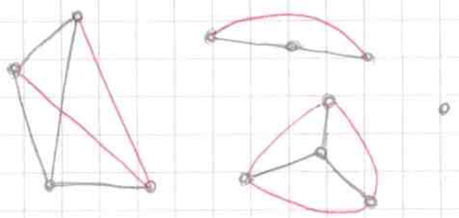
- razdalje: $O(m \cdot n) = O(m^2)$
- Θ: # parov povezav: $\binom{m}{2} = \frac{m(m-1)}{2} = O(m^2)$

  seštevanje in primerjanje: konstantni čas

Θ^*:

Lema. Naj bo R refleksivna in simetrična relacija. Tedaj lahko njeno tranzitivno ovojnico R^* izračunamo v času $O(|R|)$.

Dokaz. Vzemimo graf relacije R: neusmerjen graf.



G(R)

$\binom{4}{2} + \binom{4}{2} + \binom{3}{2}$

Povsod, kjer imamo pot dolžine 2, moramo dodati primerno povezavo. Vse dodajamo znotraj povezanih komponent. Vsako povezano komponento dopolnimo do polnega grafa.

Tedaj so ekvivalenčni razredi relacije R^* natanko povezane komponente grafa G(R). S tem pa je relacija R^* tudi enolično določena. (izračunana) $\square$

Zaradi leme Θ^* določimo tako, da konstruiramo graf $G(\Theta)$ ter določimo njegove povezane komponente.

korak 3: $\Theta \subseteq \Theta^*$

$\Theta \neq \Theta^* \iff |\Theta| < |\Theta^*|$.