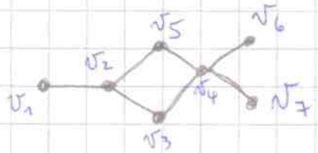
Zgled.

G:



i	$e(v_i)$
1	$4+1$
2	$3+1$
3	$2+1$
4	$3+1$
5	$2+1$
6	$4+1$
~~7~~	~~$4+1$~~

ne rabimo

$$\beta: G \longrightarrow P_5 \boxtimes P_4 \boxtimes P_3 \boxtimes P_4 \boxtimes P_3 \boxtimes P_5 =: H$$

$\beta(v_1) = (0,1,2,3,2,4)$

$\beta(v_2) = (1,0,1,2,1,3)$

$\beta(v_3) = (2,1,0,1,2,2)$

$\beta(v_4) = (3,2,1,0,1,1)$

$\beta(v_5) = (2,1,2,1,0,2)$

$\beta(v_6) = (4,3,2,1,2,0)$

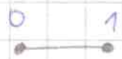
$\beta(v_7) = (4,3,2,1,2,2)$

$d_H(\beta(v_2), \beta(v_4)) =$
$= \max\{|1-3|, |0-2|, |1-1|, |2-0|, |1-1|, |3-1|\} = 2$

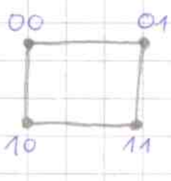
3. METRIČNO DEFINIRANI RAZREDI GRAFOV

Def. n-kocka, Q_n, $(n \geq 1)$, je graf z vozlišči $V(Q_n) = \{0,1\}^n$, v katerem sta vozlišči sosedni, če se razlikujeta v natanko eni koordinati.

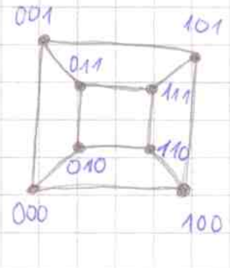
Q_1:



Q_2:



Q_3:



Trditev. Q_d je d-regularen graf na 2^d vozliščih in $d \cdot 2^{d-1}$ povezavah.

Dokaz.

$b_1 b_2 \ldots b_d$

sosedje: $\underbrace{\bar{b}_1 b_2 \ldots b_d \quad b_1 \bar{b}_2 b_3 \ldots b_d \quad \ldots \quad b_1 b_2 \ldots \bar{b}_d}_{\# = d}$

$|V(Q_d)| = |\{0,1\}^d| = 2^d$.

Osnovna lema teorije grafov: $\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2 \cdot |E(G)|$.

$\overset{\Longrightarrow}{d\text{-reg.}} \quad 2^d \cdot d = 2 \cdot |E(G)|$

$\Rightarrow |E(G)| = 2^{d-1} \cdot d$

Alternativne predstavitve Q_d:

- $Q_d = \underbrace{K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2}_{d} = \mathop{\square}^{d} K_2$

$V(K_2) = \{0, 1\}$ $\qquad V(K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2) = (b_1, b_2, \dots, b_d)$

$b_i \in \{0, 1\}$

$\mathop{\square}_{i=1}^{m} G_i : (u_1, \dots, u_m) \sim (v_1, \dots, v_m) \iff \exists i : u_i \sim v_i$ v G_i

$\forall j \neq i : u_j = v_j$

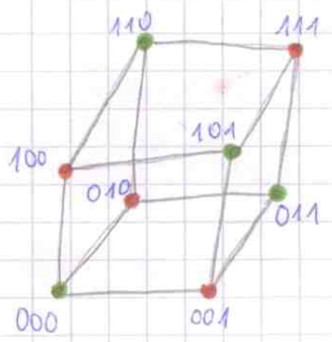
- A d-množica (množica z d elementi)
  - vozlišča: vse podmnožice v $\mathcal{A} = \mathcal{P}(A)$
  - povezave: $X, Y \in \mathcal{A}$: $X \sim Y \iff |(X \cup Y) \setminus (X \cap Y)| = 1$.

Potem je dobljeni graf izomorfen Q_d.

$A = \{x_1, x_2, \dots, x_d\}$

$X \subseteq A \longmapsto (b_1, b_2, \dots, b_d)$: $b_i = \begin{cases} 1; & x_i \in A \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$

Trditev: Q_d je dvodelen graf.



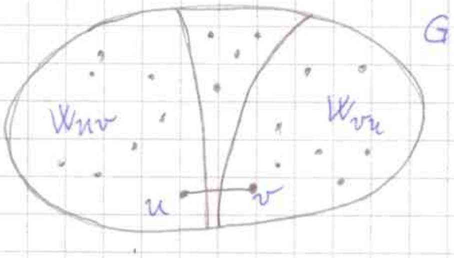
$V_1 = \{$vozlišča s sodim št. $1\}$

$V_2 = \{$vozlišča z lihim št. $1\}$

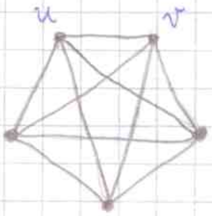
Če sta u in v sosednji vozlišči v Q_d, se razlikujeta v natanko eni koordinati.

Algoritem za prepoznavanje kock

G graf, $uv \in E(G)$. Naj bo $W_{uv} = \{ w \mid d(w,u) < d(w,v) \}$.
W_{vu} definiran analogno: $W_{vu} = \{ w \mid d(w,v) < d(w,u) \}$.



Zgled: K_5:



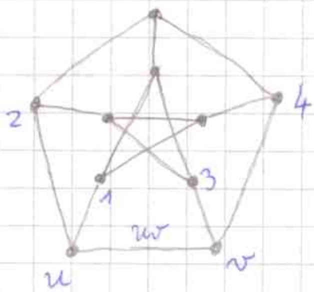
$W_{uv} = \{u\}$,

$W_{vu} = \{v\}$

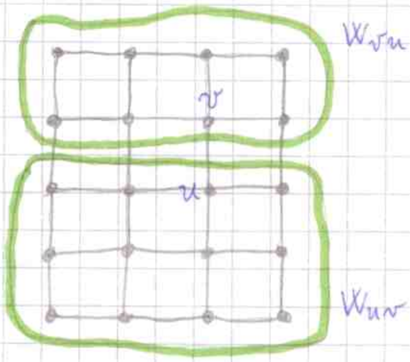
Petersenov graf:

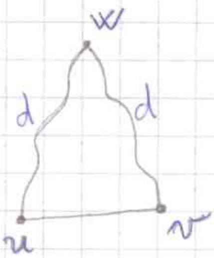
$W_{uv} = \{u, 1, 2\}$

$W_{vu} = \{u, 3, 4\}$



$P_4 \square P_5$:





sprehod dolžine $2d+1$

Kdaj je $V(G) \setminus (W_{uv} \cup W_{vu}) = \emptyset$?

Opomba. W_{uv} in W_{vu} tvorita particijo $V(G)$ ($\forall uv \in E(G)$) natanko tedaj, ko je G dvodelen graf.

Vemo, da je Q_d dvodelni graf. Naj bo $uv \in E(Q_d)$.
BŠS: $u = 1\_\_\_\_\_$, $v = 0\_\_\_\_\_$

$W_{uv} = \{ 1b_2 \dots b_d \ ; \ b_i \in \{0,1\} \}$

$W_{vu} = \{ 0b_2 \dots b_d \ ; \ b_i \in \{0,1\} \}$

Velja, ker imamo:

Trditev. $d_{Q_d}(u,v)$ je število koordinat, v katerih se u in v razlikujeta.

Dokaz.

$$\begin{array}{rl} u = & \_ \ 1 \ \_ \ \_ \ 0 \ \_ \\ v = & \_ \ 0 \ \_ \ \_ \ 1 \ \_ \end{array}$$

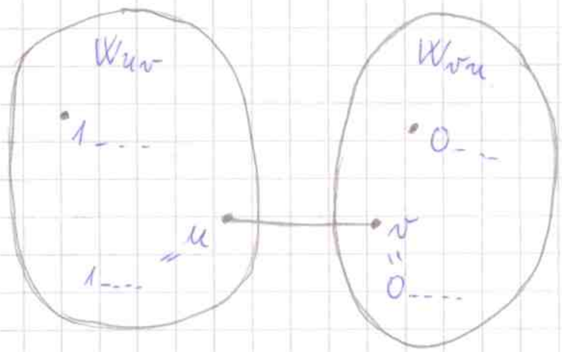
razdalja $\geq$ # različnih bitov

Eksplicitno lahko skonstruiramo tako pot, kjer bo dosežena enakost.

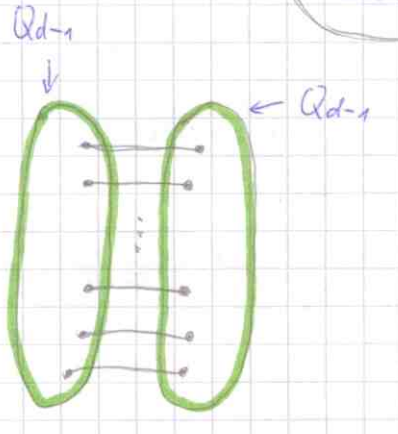
Zgled: $u = 1101110$, $v = 1011001$.

$1101110 \to 1001110 \to 1011110 \to 1011010 \to$
$\to 1011000 \to 1011001$

Q_d dvodelni graf $\to$ W_{uv}, W_{vu} particija $V(Q_d)$.



Vsako vozlišče iz W_{uv} ima natanko enega soseda v W_{vu}.



$$Q_d = K_2 \square (K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2) = K_2 \square Q_{d-1}$$

n ... # vozlišč

m ... # povezav

Vemo: $n = 2^d$, $m = d \cdot 2^{d-1}$

$G = Q_d$ $d = \log_2 n$, $m = \log_2 n \cdot \frac{1}{2} n$

Algoritem kocka.

Vhod: Graf G z n vozlišči in m povezavami.

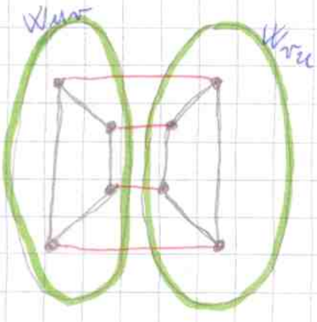
Izhod: TRUE, če je G kocka (ustrezne dimenzije)

FALSE, sicer

1. Če G ni dvodelen ali če je $m \neq \frac{1}{2} n \log_2 n$, FALSE, stop.
2. Izberi poljubno povezavo uv in izračunaj W_{uv} in W_{vu}.
3. Če povezave med W_{uv} in W_{vu} ne definirajo prirejanja, ki določa izomorfizem med W_{uv} in W_{vu}, FALSE, stop.
4. Če je $W_{uv} = K_2$ tedaj TRUE, sicer se vrnemo v korak 2, kjer je vhodni podatek W_{uv}.

Izrek Algoritem kocka prepozna d-kocke in ga lahko implementiramo v času $O(m)$.

Dokaz. Dokaz pravilnosti smo že naredili med samo izpeljavo algoritma.



Časovna zahtevnost:

Korak 1: dvodelnost $O(m)$

to je standardni algoritem

Korak 2,3,4: W_{uv}, W_{vu}

Vse razdalje od u do vseh vozlišč dobimo z BFS v času $O(m)$. Isto ponovimo za v. To nam takoj vrne množici W_{uv} in W_{vu}.

Z nekaj truda tudi korak 3 izvedemo v času $O(m)$.

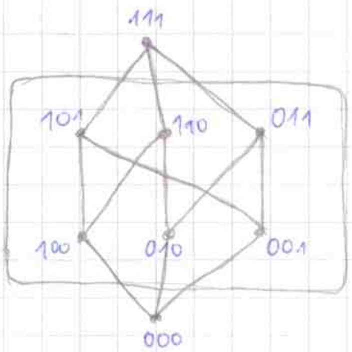
Ena zanka 2-4 nas stane: $c \cdot m$.

Vse zanke: $cm + c\frac{m}{2} + c\frac{m}{4} + \ldots < 2cm = O(m)$.

$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 2$.

Odprt problem. The middle level problem.

Q_3:



Q_5: 11000, ..., 01110, ...

Q_{2d+1}

Vzemi točke, ki imajo skoraj enako enic kot ničel.
Dokaži, da ima ta podgraf Hamiltonov cikel.

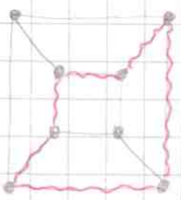
Def. Hammingovi grafi so kartezični produkti polnih grafov. $G = \square_{i=1}^{d} K_{n_i}$. $(n_i = 2\ \forall i \Rightarrow G = Q_d)$

Zgled. Preštejmo število povezav v $K_r \square K_s \square K_t$.

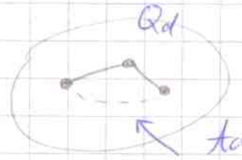
$$|E(K_r \square K_s \square K_t)| = |E(K_r \square (K_s \square K_t))| =$$
$$= |V(K_r)| \cdot |E(K_s \square K_t)| + |E(K_r)| \cdot |V(K_s \square K_t)|$$
$$= r \cdot \left(s\binom{t}{2} + t\binom{s}{2}\right) + \binom{r}{2} \cdot s t$$
$$= rs\binom{t}{2} + rt\binom{s}{2} + st\binom{r}{2}$$
$$= \frac{rst}{2}(r+s+t-3)$$

Def. **Delne kocke** so izometrični podgrafi d-kock.
Delni Hammingovi grafi so izometrični podgrafi Hammingovih grafov.

Primeri. Q_d so delne kocke.



Dovolj je preveriti razdalje, ki so večje od 2.



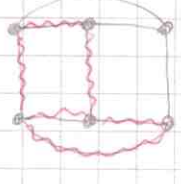
taka pov. ne obstaja (dvodelnost)

6-cikel je delna kocka.

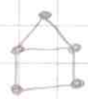
P_6 je izometrični podgraf v Q_5.

00000, 00001, 00011, 00111, 01111, 11111

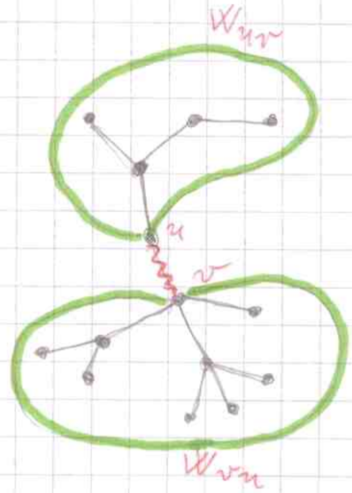
$K_3 \square K_2$ (najmanjši Hammingov graf, ki ni kocka):



"hišica" je delni Hammingov graf



Trditev. Drevesa so delne kocke.



Dokaz. T drevo, $E(T) = \{e_1, \ldots, e_m\}$.

$e_i = u_i v_i$, $1 \le i \le m$.

Naj bo $\alpha : T \longrightarrow Q_m$ takole:

$\alpha(x) = (\alpha_1(x), \alpha_2(x), \ldots, \alpha_m(x))$,

kjer je $$\alpha_i(x) = \begin{cases} 1; & x \in W_{u_i v_i} \\ 0; & x \in W_{v_i u_i} \end{cases}$$

Trdimo, da je α izometrija.

Ena od karakterizacij dreves:

Graf, ki je povezan, je drevo $\Longleftrightarrow$ vsaka povezava je most.

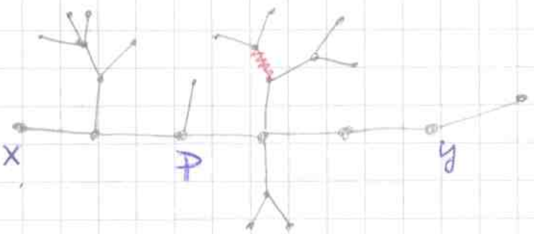
$x, y \in V(T)$. Naj bo $d_T(x,y) = r$ in naj bo P x,y-pot v T.

P: $x \xrightarrow{e_{i_1}} z_1 \xrightarrow{e_{i_2}} z_2 \longrightarrow \cdot \longrightarrow \dots \xrightarrow{e_{i_j}} \dots \longrightarrow z_{r-1} \xrightarrow{e_{i_r}} y$

$$\alpha_{e_{i_j}}(x) \longleftrightarrow \alpha_{e_{i_j}}(y) \qquad 1 \le j \le r.$$

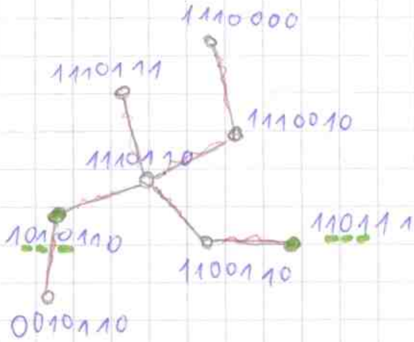
$$\alpha_{e_{i_j}}(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha_{e_{i_j}}(y) = 1. \checkmark$$

Torej se $\alpha(x)$ in $\alpha(y)$ razlikujeta v vsaj r koordinatah. Toda v vseh ostalih koordinatah se ujemata:



Za vsako povezavo e_i, ki ni na poti P, sta namreč x in y v isti povezani komponenti grafa $G - e_i$. Torej je zato $\alpha_i(x) = \alpha_i(y)$ $\forall$ tako povezavo e_i.

Zgled:

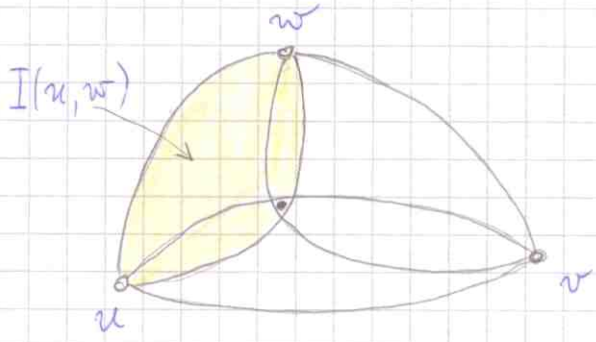


$\longrightarrow Q_7$

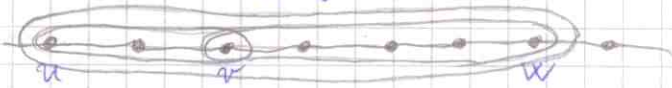
Opomba. Tudi v delnih kockah je razdalja enaka številu koordinat, v katerih se razlikujeta vozlišči (pri čemer je delna kocka vložena v ustrezno kocko). Isto velja tudi za delne Hammingove grafe.

Def. Povezan graf G je medianski, če za vsako trojico vozlišč u, v, w velja:

$$|I(u,v) \cap I(u,w) \cap I(v,w)| = 1.$$



Poti so medianski grafi.



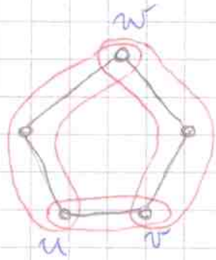
v je **mediana**

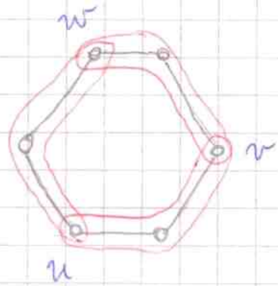
Če je $u=v$: $I(u,v)=\{u\}$, $I(u,w)=I(v,w)\supseteq\{u\}$

$\rightarrow$ pogoj je trivialno izpolnjen.

Def. Vozlišče iz $I(u,v)\cap I(u,w)\cap I(v,w)$ je **mediana** trojice u, v, w.

Zgledi:





Trditev. (i) Drevesa so medianski grafi.

(ii) d-kocke so medianski grafi.

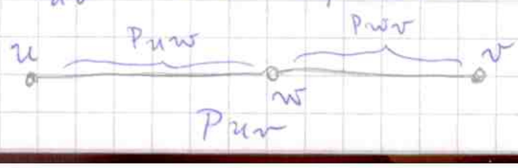
(iii) Če sta G in H medianska, je medianski tudi $G \square H$.

Opomba. $Q_d \square Q_{d'} = Q_{d+d'}$.

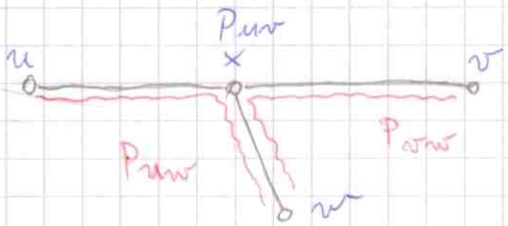
Dokaz: (i) T naj bo drevo, $u, v, w \in V(T)$.

Naj bodo P_{uv}, P_{uw}, P_{vw} (enolične) poti med ustreznimi vozlišči.

Če je $w \in P_{uv}$ smo opravili:



Torej predpostavimo, da $w \notin P_{uv}$. Naj bo x prvo vozlišče iz P_{wu}, ki je tudi na P_{uv}. (x zagotovo obstaja, v skrajnem primeru je $x = u$.)



Trdimo, da je x enolična mediana.

(ii) $\left.\begin{aligned} u &= u_1 u_2 \dots u_d \\ v &= v_1 v_2 \dots v_d \\ w &= w_1 w_2 \dots w_d \end{aligned}\right\} \in Q_d$

$d(0011010, 1010011) = 3$

$0011010 \to 1011010 \to 1010010 \to 1010011$

V i-ti koordinati sta vsaj dve izmed vrednosti u_i, v_i, w_i enaki, BŠS $u_i = v_i$. Tedaj za $\forall$ vozlišče $x \in I(u,v)$ velja: $x_i = u_i \; (= v_i)$.

$\Rightarrow$ Torej, če mediana (od u, v, w) obstaja, je enolično določena: njena i-ta koordinata je določena kot večina od u_i, v_i, w_i.

Primer:

$$\begin{aligned} u &= 0011010 \\ v &= 1010011 \\ w &= 0111001 \\ \hline x &= \boxed{0011011} \end{aligned}$$

Naj bo x določen s tem večinskim pravilom.

x je mediana od u, v, w

Zadošča pokazati: $x \in I(u,v)$

$$
\begin{array}{lcccc}
u = & \ldots & \boxed{0} & \ldots & \boxed{0} \\
v = & \ldots & \boxed{0} & \ldots & \boxed{1} \\
\hline
x = & \ldots & \boxed{0} & \ldots & \boxed{0}
\end{array}
$$

(a) $u_i = v_i \Rightarrow x_i = u_i$ ✓

(b) $u_i \neq v_i \Rightarrow x_i = \begin{cases} u_i \\ v_i \end{cases}$

tudi v tem primeru $x \in I(u,v)$

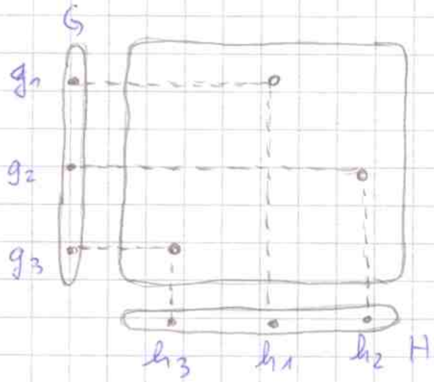
Primer: $u = 0011010$

$v = 1010011$

$u \to x \to v$

$$
\begin{array}{l|c|c|c|c|c|c|c}
u = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
x = & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
v = & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
 & & ✓ & ✓ & & ✓ & ✓ &
\end{array}
$$

(iii) ideja:



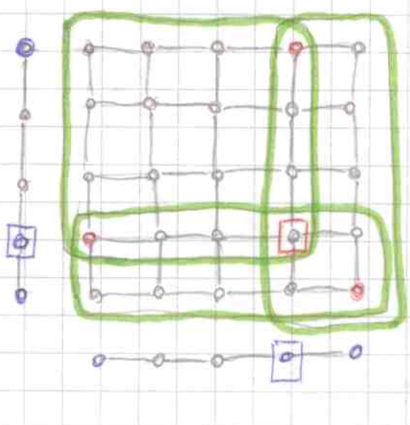
$(g_1, h_1), (g_2, h_2), (g_3, h_3)$

Potem velja, da ima g_1, g_2, g_3 enolično mediano v G: g

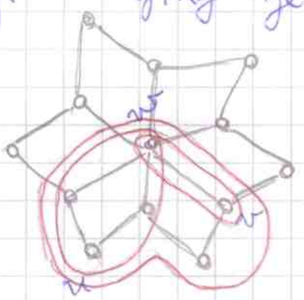
h_1, h_2, h_3 enolično mediano v H: h

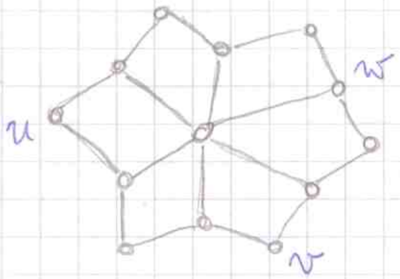
$\Rightarrow$ (g,h) je potem enolična mediana v $G \square H$

Zgled. $P_5 \square P_5$



Naslednji graf je medianski:

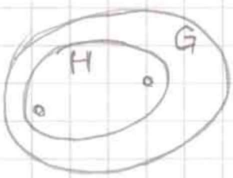




4. PREPOZNAVANJE DELNIH KOCK

- $W_{uv} = \{ w \mid d(u,w) < d(v,w) \}$

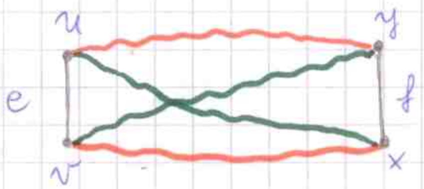
- konveksnost



$\forall u,v \in V(H)$: vsaka najkrajša u,v-pot (iz G) leži v celoti v H

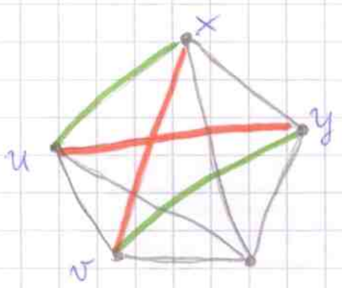
Def. Naj bo G povezan graf in $e = uv$, $f = xy \in E(G)$. Tedaj je $e \Theta f$, če velja:

$$d(u,x) + d(v,y) \neq d(u,y) + d(v,x).$$

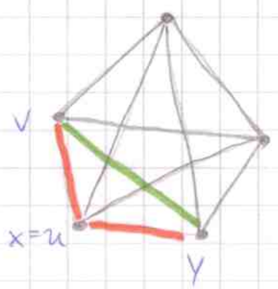


Zgled:

K_5:



K_5:

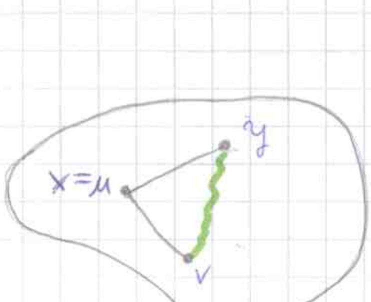


$d(u,x) = 0$

$d(v,y) = 1$

$d(u,y) = 1$

$d(v,x) = 1$



1. $d(v,y) = 1 \Rightarrow uv \,\Theta\, xy$

2. $d(u,y) = 2 \Rightarrow \neg(uv \,\Theta\, xy)$